Projet Mathématiques

Etude sur machine de système linéaire avec la factorisation LU par la méthode de Gauss

LIU Lingyu
ZHOU Weihao
ABOUZAID Mehdi
Baudot Victor

INSA de Rouen

6 janvier 2017

Sommaire

Histoire de l'algèbre linéaire

Les mathématiciens célèbres pour leurs travaux en algèbre linéaire

- Al-Khawarizmi, plus de 150 ans avant J.-C.
- René Descartes (1596-1650)
- Colin Maclaurin (1698-1746) et Gabriel Cramer (1704-1752)
- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
- Charles Gustave Jacob Jacobi (1804-1851)
- André-Louis Cholesky (1875-1918)

Retour Sommaire

La naissance de la méthode Gauss-Jordan

Les méthodes permettant de résoudre des systèmes linéaires ont progressivement été mis au point au cours de l'Histoire. Mais ce n'est que très récemment(sur l'échelle de l'Humanité), que la méthode de Gauss utilisant la factorisation LU a vu le jour. La méthode de Gauss vise à triangulariser une matrice en décomposant la matrice sous la forme LU avec L une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une matrice triangulaire supérieure. L'avantage de cette méthode par rapport à celles de ses prédécesseurs est qu'elle permet de réduire drastiquement le nombre d'opérations à réaliser.

Retour Sommaire

Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Résolution

- Expression de la première inconnue x_1 en fonction des autres inconnues
- Substitution dans les autres équations du système grâce à des opérations sur les équations, faisant apparaître ainsi un sous-système dans lequel x_1 n'intervient pas
- Calcul de x_n, puis x_{n-1}, et ainsi de suite jusqu'à x_1

Inverse d'une matrice

L'inverse A^{-1} de la matrice A n'existe que si A est une matrice carrée et si son déterminant est non nul. Chercher l'inverse de la matrice A revient à trouver la matrice X telle que :

$$\mathbf{A\ X = I}$$

Ceci revient donc à résoudre n systèmes de n équations et n inconnues. En effet : $Ax_j = e_j \Leftrightarrow x_j = A^{-1}e_j$ avec e_j, j^{ime} vecteur de base

Retour Sommaire

Factorisation LU

Définition et utilisation

Pour résoudre le système $Ax = b$, on peut aussi utiliser la factorisation LU qui consiste à écrire la matrice carrée A sous la forme $A = LU$ où :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & & \cdots & 1 \end{pmatrix} ; U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ce qui revient ainsi à résoudre le système en deux équations :

$$LUx = \begin{cases} Lz = b \\ Ux = z \end{cases}$$

Applications de la résolution d'un système linéaire1/2

Matrice simple

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; A' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec la méthode d'élimination de gauss :

X1 = 1.000000000000000

X2 = 1.000000000000000

X3 = 1.000000000000000

Retour Sommaire

Applications de la résolution d'un système linéaire2/2

Matrice 8x8

$$D = \begin{pmatrix} 0.5488 & 0.5928 & 0.7151 & 0.8442 & 0.6027 & 0.8579 & 0.5448 & 0.8472 \\ 0.4236 & 0.6235 & 0.6458 & 0.3843 & 0.4375 & 0.2975 & 0.8917 & 0.0567 \\ 0.9636 & 0.2726 & 0.3834 & 0.4776 & 0.7917 & 0.8121 & 0.5288 & 0.4799 \\ 0.5680 & 0.3927 & 0.9255 & 0.8360 & 0.0710 & 0.3373 & 0.0871 & 0.6481 \\ 0.0202 & 0.3682 & 0.8326 & 0.9571 & 0.7781 & 0.1403 & 0.8700 & 0.8700 \\ 0.9786 & 0.4736 & 0.7991 & 0.8009 & 0.4614 & 0.5204 & 0.7805 & 0.6788 \\ 0.1182 & 0.7206 & 0.6399 & 0.5820 & 0.1433 & 0.5373 & 0.9446 & 0.7586 \\ 0.5218 & 0.1059 & 0.4146 & 0.4736 & 0.2645 & 0.1863 & 0.7742 & 0.7369 \end{pmatrix}$$

Application en physique : Circuits éléctriques et équations linéaires

Exemple d'un circuit électrique