অধ্যায় ১৫

ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

(Area Related Theorems and Constructions)

আমরা জানি সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের আকৃতি বিভিন্ন রকম হতে পারে। সমতলক্ষেত্র যদি চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ হয়, তবে একে আমরা চতুর্ভুজ বলে থাকি। এই চতুর্ভুজের আবার শ্রেণিবিভাগ আছে এবং আকৃতি ও বৈশিষ্ট্যের উপর ভিত্তি করে এদের নামকরণও করা হয়েছে। এই সকল সমতলক্ষেত্রের বাইরে অনেক ক্ষেত্র আছে যাদের বাহু চারের অধিক। আলোচিত এ সকল ক্ষেত্রই বহুভুজক্ষেত্র। প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট পরিমাপ আছে যাকে ক্ষেত্রফল বলে অভিহিত করা হয়। এই সকল ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ব্যবহার করা হয় এবং এদের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে লেখা হয়। যেমন, বাংলাদেশের ক্ষেত্রফল 147 হাজার বর্গ কিলোমিটার (প্রায়)। আমাদের দৈনন্দিন জীবনের প্রয়োজন মেটাতে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল জানতে ও পরিমাপ করতে হয়। তাই এই শ্রেণির শিক্ষার্থীদের বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান প্রদান করা অতীব গুরুত্বপূর্ণ। এখানে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা এবং এতদসংক্রান্ত কতিপয় উপপাদ্য ও সম্পাদ্য বিষয়ক বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়ছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

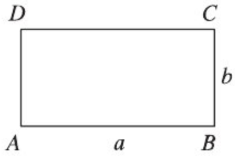
- ▶ বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবে।
- ▶ প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে বহুভুজক্ষেত্র অঙ্কন ও অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।
- ▶ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান চতুর্ভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- ▶ চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ত্রিভুজক্ষেত্র অঙ্কন করতে পারবে।

সমতলক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

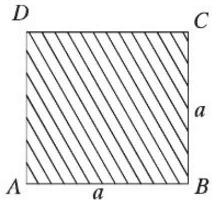
প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে। এই ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। যেমন, যে বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য এক সেন্টিমিটার তার ক্ষেত্রফল হবে এক বর্গসেন্টিমিটার।

আমরা জানি,

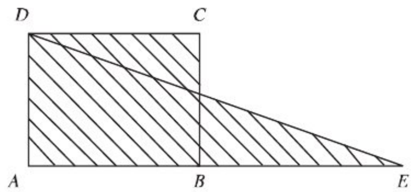
ক) $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $AB = a$ একক (যথা: মিটার), প্রস্থ $BC = b$ একক (যথা: মিটার) হলে, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= ab$ বর্গ একক (যথা: বর্গমিটার)।



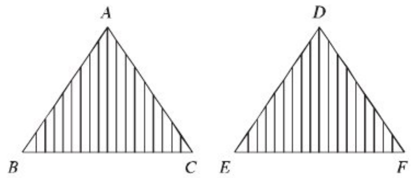
খ) $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ একক (যথা: মিটার) হলে, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ একক (যথা: বর্গমিটার)।



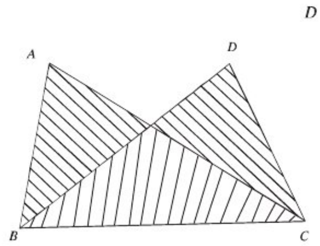
দুইটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে এদের মধ্যে $=$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= AED$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, যেখানে $AB = BE$



উল্লেখ্য যে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম হলে, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ লেখা হয়। এ ক্ষেত্রে অবশ্যই $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle DEF$ এর ক্ষেত্রফল।

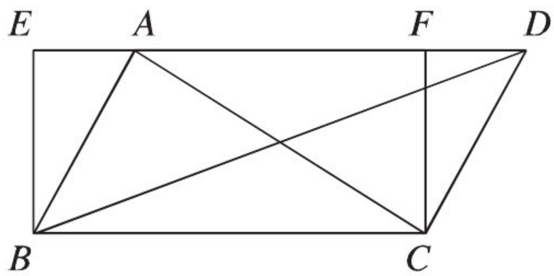


কিন্তু দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয় না। যেমন, চিত্রে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle DBC$ এর ক্ষেত্রফল। কিন্তু $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$ সর্বসম নয়।



উপপাদ্য ৩৬. একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।

মনে করি, ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta DBC$ এর ক্ষেত্রফল।



অঙ্কন: BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে BE ও CF লম্ব আঁকি, যা DA এর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে এবং AD রেখাকে F বিন্দুতে ছেদ করে। ফলে $EBCF$ একটি আয়তক্ষেত্র তৈরি হয়।

প্রমাণ: ΔABC এর ভূমি BC এবং উচ্চতা BE

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times BE \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, ΔDBC এর ভূমি BC এবং উচ্চতা CF

$\therefore$ ΔDBC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times CF = \frac{1}{2} \times BC \times BE \ldots\ldots\ldots (ii)$; [$EBCF$ আয়তক্ষেত্র]

(i) ও (ii) নং তুলনা করে পাই, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=$ ΔDBC এর ক্ষেত্রফল। (প্রমাণিত)

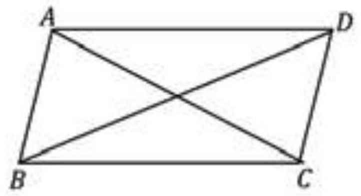
অনুসিদ্ধান্ত ১. একই ভূমির একই পাশে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে, এরা একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২. কোনো ত্রিভুজ ও সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

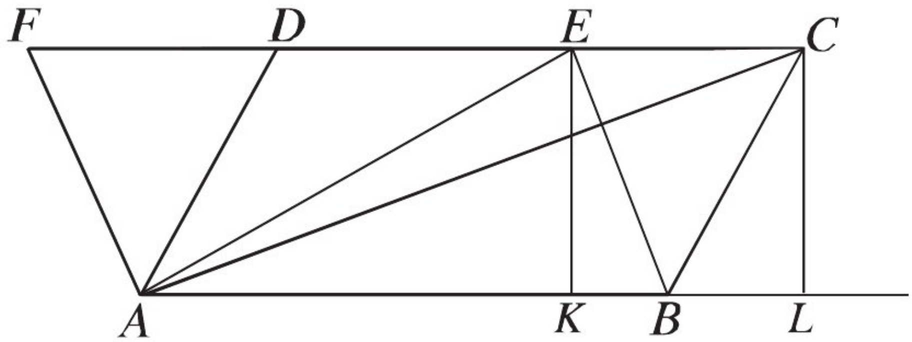
ইঙ্গিত: চিত্রে, $ABCD$ সামান্তরিক। AC কর্ণ।

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $ABCD$



উপপাদ্য ৩৭. একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।



চিত্রে, $ABCD$ ও $ABEF$ সামান্তরিকক্ষেত্র দুইটি একই ভূমি AB এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল AB ও FC এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $=$ $ABEF$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

২০২৫

অঙ্কন: A, C ও A, E যোগ করি। C ও E বিন্দু থেকে ভূমি AB ও এর বর্ধিত রেখাংশের উপর EK ও CL লম্ব টানি।

প্রমাণ: $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times AB \times CL$ এবং

$\triangle ABE$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times AB \times EK$

যেহেতু $CL = EK$, [অঙ্কনানুসারে $AL \parallel FC$]

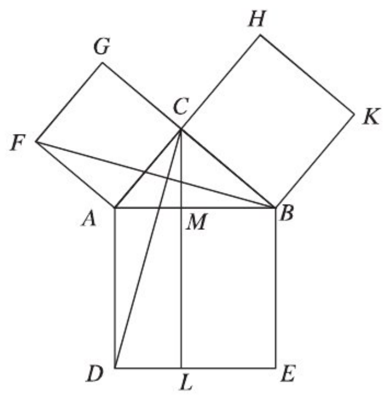
অতএব, $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle ABE$ এর ক্ষেত্রফল

$\implies \dfrac{1}{2}$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABEF$ এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $ABEF$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৩৮. পিথাগোরাসের উপপাদ্য

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = BC^2 + AC^2$।

অঙ্কন: AB, AC এবং BC বাহুর উপর যথাক্রমে $ABED$, $ACGF$ এবং $BCHK$ বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। C বিন্দু দিয়ে AD বা BE রেখার সমান্তরাল CL রেখা আঁকি। মনে করি, তা AB কে M বিন্দুতে এবং DE কে L বিন্দুতে ছেদ করে। C ও D এবং B ও F যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle CAD$ ও $\triangle BAF$ তে $CA = AF$, $AD = AB$ এবং

অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAB + \angle CAF =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BAF$ [$\angle BAD = \angle CAF = 1$ সমকোণ]

অতএব, $\triangle CAD \cong \triangle BAF$

ধাপ ২. $\triangle CAD$ এবং আয়তক্ষেত্র $ADLM$ একই ভূমি AD এর উপর এবং AD ও CL সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং আয়তক্ষেত্র $ADLM = 2 \triangle CAD$ [উপপাদ্য ৩৭]

ধাপ ৩. $\triangle BAF$ এবং বর্গক্ষেত্র $ACGF$ একই ভূমি AF এর উপর এবং AF ও BG সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং বর্গক্ষেত্র $ACGF = 2 \triangle FAB = 2 \triangle CAD$ [উপপাদ্য ৩৭]

২০২৫

ধাপ ৪. আয়তক্ষেত্র $ADLM =$ বর্গক্ষেত্র $ACGF$

ধাপ ৫. অনুরূপভাবে C, E ও A, K যোগ করে প্রমাণ করা যায় যে,

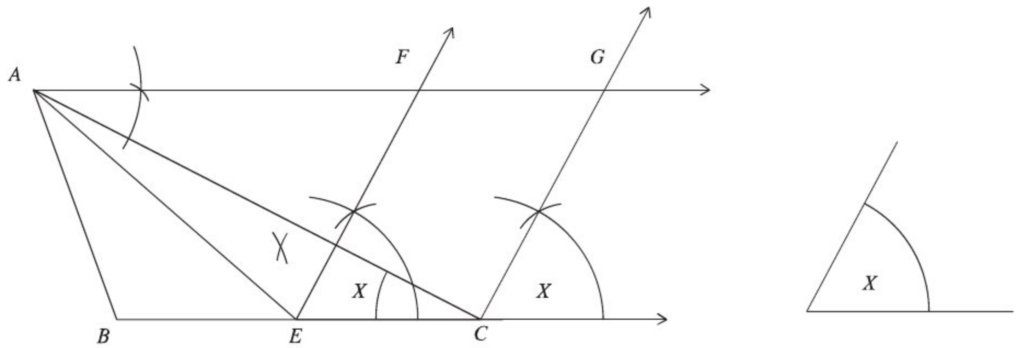
আয়তক্ষেত্র $BELM =$ বর্গক্ষেত্র $BCHK$

ধাপ ৬. আয়তক্ষেত্র $(ADLM + BELM) =$ বর্গক্ষেত্র $ACGF+$ বর্গক্ষেত্র $BCHK$

বা, বর্গক্ষেত্র $ABED =$ বর্গক্ষেত্র $ACGF+$ বর্গক্ষেত্র $BCHK$

অর্থাৎ, $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (প্রমাণিত)

সম্পাদ্য ১৩. এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



মনে করি, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ $\angle x$ এর সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন: BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। EC রেখাংশের E বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CEF$ আঁকি। A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল AG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা EF রশ্মিকে F বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু দিয়ে EF রেখাংশের সমান্তরাল CG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা AG রশ্মিকে G বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $ECGF$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: A, E যোগ করি।

এখন, $\triangle ABE$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle AEC$ এর ক্ষেত্রফল [যেহেতু ভূমি $BE =$ ভূমি EC এবং উভয়ের একই উচ্চতা]

$\therefore \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\ \triangle AEC$ এর ক্ষেত্রফল

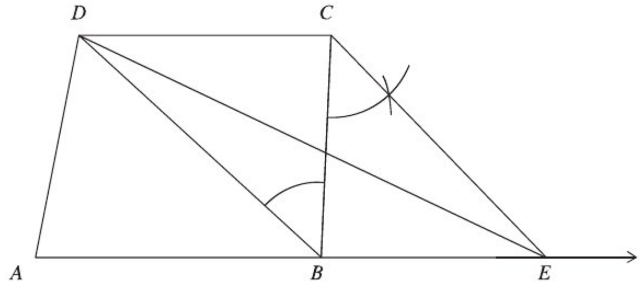
আবার, সামান্তরিক ক্ষেত্র $ECGF$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\ \triangle AEC$ এর ক্ষেত্রফল [যেহেতু, উভয়ে একই ভূমি EC এর উপর অবস্থিত এবং $EC \parallel AG$]

$\therefore$ সামান্তরিক ক্ষেত্র $ECGF$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

আবার, $\angle CEF = \angle x$ [যেহেতু $EF \parallel CG$, অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore$ সামান্তরিক $ECGF$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ১৪. এমন একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



মনে করি, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র। এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $ABCD$ চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কনঃ D, B যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CE \parallel DB$ টানি। মনে করি, তা AB বাহুর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। D, E যোগ করি। তাহলে, $\triangle DAE$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: BD ভূমির উপর $\triangle BDC$ ও $\triangle BDE$ অবস্থিত এবং $DB \parallel CE$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore \triangle BDC$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle BDE$ এর ক্ষেত্রফল

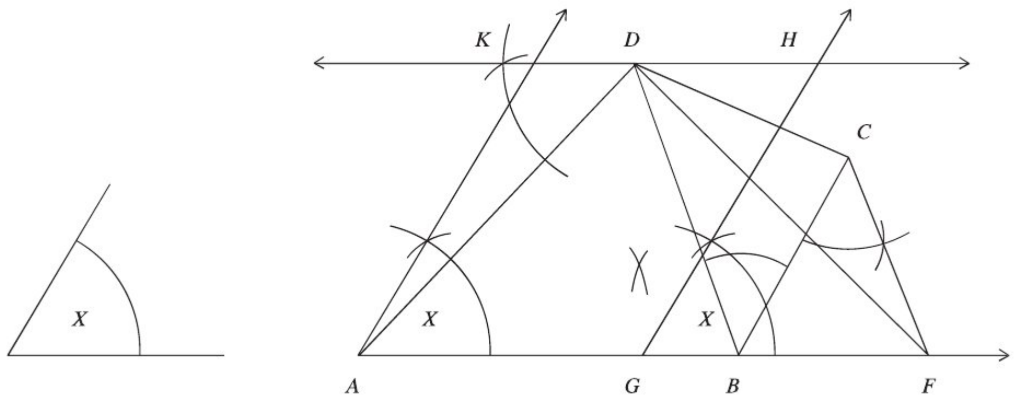
$\therefore \triangle BDC$ এর ক্ষেত্রফল $+ \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle BDE$ এর ক্ষেত্রফল $+ \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল

$\therefore$ চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \triangle ADE$ এর ক্ষেত্রফল

অতএব, $\triangle ADE$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: উপরের পদ্ধতির সাহায্যে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজক্ষেত্র আঁকা যাবে।

সম্পাদ্য ১৫. এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ দেওয়া আছে এবং তা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



মনে করি, $ABCD$ একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ একটি সামান্তরিক

আঁকতে হবে যার একটি কোণ প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান এবং সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $ABCD$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন: B, D যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CF \parallel DB$ টানি এবং মনে করি, CF, AB বাহুর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে। AF রেখাংশের মধ্যবিন্দু G নির্ণয় করি। AG রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle GAK$ আঁকি এবং G বিন্দু দিয়ে $GH \parallel AK$ টানি। D বিন্দু দিয়ে $KDH \parallel AG$ টানি এবং মনে করি, তা AK ও GH কে যথাক্রমে K ও H বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $AGHK$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: D, F যোগ করি। $AGHK$ একটি সামান্তরিক [অঙ্কন অনুসারে]

যেখানে, $\angle GAK = \angle x$। আবার, $\triangle DAF$ এর ক্ষেত্রফল $=$ চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল এবং সামান্তরিক ক্ষেত্র $AGHK$এর ক্ষেত্রফল $= \triangle DAF$ এর ক্ষেত্রফল।

অতএব, $AGHK$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

অনুশীলনী ১৫

১. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; নিচের কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?

ক) 3 সে.মি., 4 সে.মি., 5 সে.মি. খ) 6 সে.মি., 8 সে.মি., 10 সে.মি.
গ) 5 সে.মি., 7 সে.মি., 9 সে.মি. ঘ) 5 সে.মি., 12 সে.মি., 13 সে.মি.

২. সমতলীয় জ্যামিতিতে

(i) প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে

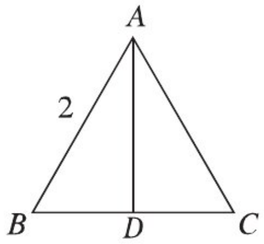
(ii) দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

(iii) দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে এদের ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

পাশের চিত্রে, $\triangle ABC$ সমবাহু, $AD \perp BC$ এবং $AB = 2$



উপর্যুক্ত তথ্যের ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২০২৫

৩. $BD =$ কত?

ক) 1 খ) $\sqrt{2}$ গ) 2 ঘ) 4

৪. ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?

ক) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ খ) $\sqrt{3}$ গ) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ঘ) $2\sqrt{3}$

৫. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

৬. প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

৭. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

৮. একটি সামান্তরিকক্ষেত্র এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

৯. $\triangle ABC$ এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y। প্রমাণ কর যে, $\triangle AXY$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{4}$ $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল।

১০. $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১১. সামান্তরিক $ABCD$ এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\triangle PAB$ এর ক্ষেত্রফল $+$ $\triangle PCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}($ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল$)$।

১২. $\triangle ABC$ এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\triangle DBC = \triangle EBC$ এবং $\triangle DBE = \triangle CDE$।

১৩. ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$।

১৪. ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর উপর যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$।

১৫. $\triangle ABC$ এর $\angle C$ স্থূলকোণ। AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD$।

১৬. $\triangle ABC$ এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$।

১৭. $\triangle PQR$ এ QD একটি মধ্যমা।

ক) উদ্দীপকের আলোকে আনুপাতিক চিত্র আঁক।

খ) প্রমাণ কর, $PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$।

গ) যদি $PQ = QR = PR$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর, $4QD^2 = 3PQ^2$।

১৮. $ABCD$ সামান্তরিকের $AB = 5$ সে.মি., $AD = 4$ সে.মি. এবং $\angle BAD = 75^\circ$। অপর একটি সামান্তরিক $APML$ এর $\angle LAP = 60^\circ$। $\triangle AED$ এর ক্ষেত্রফল ও $APML$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

ক) পেন্সিল, কম্পাস ও স্কেল ব্যবহার করে $\angle BAD$ আঁক।

খ) $\triangle AED$ অঙ্কন কর। [অঙ্কন চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]।

গ) $APML$ সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। [অঙ্কন চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]।

অধ্যায় ১৬

পরিমিতি (Mensuration)

ব্যাবহারিক প্রয়োজনে রেখার দৈর্ঘ্য, তলের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর আয়তন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়। এ রকম যেকোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাপকৃত রাশি এবং এরূপ নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

অর্থাৎ পরিমাপ $= \dfrac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}}$

নির্ধারিত একক সম্পর্কে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে। যেমন, বেঞ্চটি 5 মিটার লম্বা। এখানে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসেবে ধরা হয়েছে এবং যার তুলনায় বেঞ্চটি 5 গুণ লম্বা।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

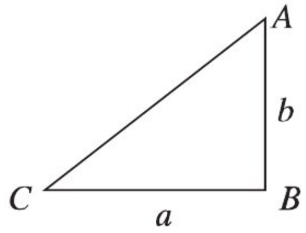
- ত্রিভুজক্ষেত্র ও চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ করে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তক্ষেত্র ও তার অংশবিশেষের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে এতদ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক ও বেলনের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে এবং এ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- সুষম ও যৌগিক ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

পূর্বের শ্রেণিতে আমরা জেনেছি, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

১. **সমকোণী ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে $BC = a$ এবং $AB = b$। BC কে ভূমি এবং AB কে উচ্চতা বিবেচনা করলে,

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \dfrac{1}{2}ab$



২. **ত্রিভুজক্ষেত্রের দুই বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে:** মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয় $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$। A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁকি। ধরি, উচ্চতা $AD = h$।

কোণ C বিবেচনা করলে পাই, $\dfrac{AD}{CA} = \sin C$

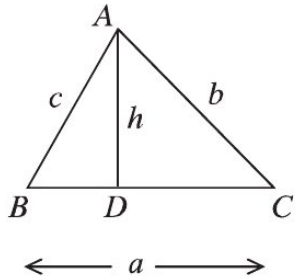
বা, $\dfrac{h}{b} = \sin C$ বা, $h = b\sin C$

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}BC \times AD$

$= \dfrac{1}{2}a \times b\sin C = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

অনুরূপভাবে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B$



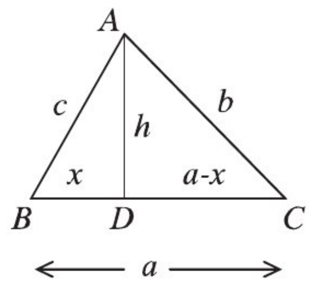
৩. **ত্রিভুজের তিন বাহু দেওয়া আছে:**

মনে করি, $\triangle ABC$ এর $BC = a,\ CA = b$ এবং $AB = c$। এর পরিসীমা $2s = a + b + c$।

$AD \perp BC$ আঁকি।

ধরি, $BD = x$ তাহলে, $CD = a - x$

$\triangle ABD$ এবং $\triangle ACD$ সমকোণী।



$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ এবং $AD^2 = AC^2 - CD^2$

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

বা, $2ax = c^2 + a^2 - b^2$

২০২৫ $\therefore x = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$

আবার,

$$
\begin{aligned}
AD^2 &= c^2 - x^2 \\
&= c^2 - \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2 \\
&= \left(c + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right) \\
&= \frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2a} \cdot \frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2a} \\
&= \frac{\{(c+a)^2-b^2\}\{b^2-(c-a)^2\}}{4a^2} \\
&= \frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)}{4a^2} \\
&= \frac{2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)}{4a^2} \\
&= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}
\end{aligned}
$$

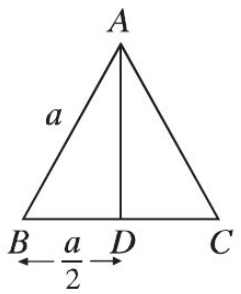
$$\therefore AD = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$\therefore \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

৪. **সমবাহু ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a

$AD \perp BC$ আঁকি। $\therefore BD = CD = \dfrac{a}{2}$



$\triangle ABD$ সমকোণী।

$\therefore BD^2 + AD^2 = AB^2$

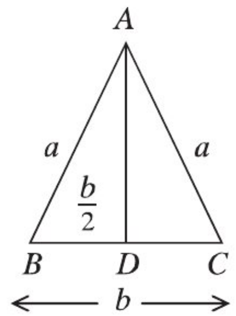
বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$

$\therefore AD = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

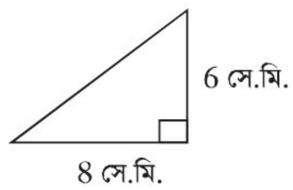
২০২৫

৫. **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের
$AB = AC = a$ এবং $BC = b$
$AD \perp BC$ আঁকি। $\therefore BD = CD = \dfrac{b}{2}$
$\triangle ABD$ সমকোণী।
$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$
$= a^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{4a^2 - b^2}{4}$
$\therefore AD = \dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$
সমদ্বিবাহু $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$
$= \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot \dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$



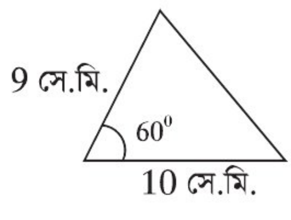
উদাহরণ ১. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 8 সে.মি. হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে $a = 6$ সে.মি. এবং $b = 8$ সে.মি.।
$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 8$ বর্গ সে.মি. $= 24$ বর্গ সে.মি.।



উদাহরণ ২. কোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি. ও 10 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজের বাহুদ্বয় যথাক্রমে $a = 9$ সে.মি. ও $b = 10$ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta = 60°$।
$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}ab\sin 60°$
$= \dfrac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ সে.মি. $= 38.97$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 38.97 বর্গ সে.মি. (প্রায়)



উদাহরণ ৩. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি., 8 সে.মি. ও 9 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a = 7$ সে.মি., $b = 8$ সে.মি. ও $c = 9$ সে.মি.।