ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

ELM 368 SAYISAL İŞARET İŞLEME LABORATUVARI

ÖN HAZIRLIK ÇALIŞMASI

VE

ÖDEV-3

1 AMAÇ

- Ayrık-zamanlı işaretlerin Ayrık-zamanlı Fourier Dönüşü'münün (DTFT) ve Ayrık Fourier Dönüşümü'nün (DFT) hesaplanması, genlik ve faz grafiklerinin çizdirilmesi ve yorumlanması.
- DFT hesaplanırken dikkat edilmesi gerekenlerin öğrenilmesi.
- Periyodik işaretlerin DFT ile sentezi

2 KODLAR

2.1 Ayrık-zamanlı Fourier dönüşümü (DTFT)

Ayrık zamanlı periyodik işaretlerde Fourier serisi analiz ve sentez denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibidir. Burada $\tilde{x}[n]$, periyodu N olan ayrık-zamanlı periyodik işareti temsil etmektedir.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \ (Analiz)$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} \ (Sentez)$$

Eğer işaret periyodik değilse ayrık-zamanlı Fourier serisi (DFS) denklemleri yerine ayrık-zamanlı Fourier dönüşümü (DTFT) denklemleri kullanılır.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \ (Analiz)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega} \ d\omega \ (Sentez)$$

Ayrık zamanlı olan işaretin DTFT'si $X(e^{j\omega})$, kompleks değerli bir fonksiyondur. Bu sebeple, $X(e^{j\omega})$'nın ya genlik-faz grafiklerini ya da gerçek-sanal kısımlarını çizdirmek gerekir. Bu fonksiyonun bağımsız değişkeni ω'dır ve bu değişken ayrık değil, <u>süreklidir</u>. Bu sebeple, $X(e^{j\omega})$'yı bilgisayarda çizebilmek için sürekli değişken olan ω'yı örnekleyerek çizmek gerekir. $X(e^{j\omega})$ periyodiktir ve periyodu $\boldsymbol{2\pi}$'dir. Bu sebeple, $X(e^{j\omega})$'nın grafiği $[\boldsymbol{-\pi}, \boldsymbol{+\pi})$ aralığında veya $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2\pi})$ aralığında çizdirilir. Aşağıda verilen $x[n]$ işaretini düşünün.

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

Bu işaretin DTFT'si:

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta[n] + \delta[n-1]) e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1] e^{-j\omega n} \\
&= 1 + e^{-j\omega} = 2e^{-j\frac{\omega}{2}} \frac{\left(e^{+j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}{2} \\
&= 2e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

Burada, $X(e^{j\omega})$'nın genliği $|X(e^{j\omega})|$ ve fazı $\measuredangle X(e^{j\omega})$ aşağıdaki gibidir;

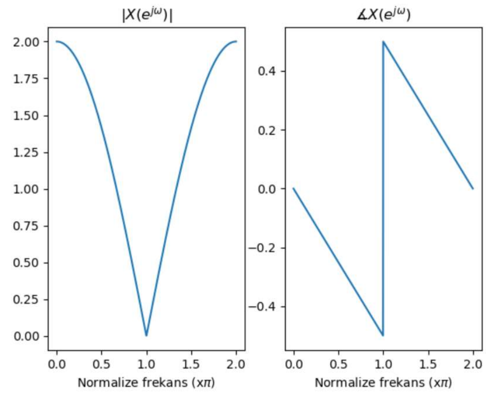
$$|X(e^{j\omega})| = \left|2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|$$

$$\measuredangle X(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\dfrac{\omega}{2}\ eğer\ 0 \leq \omega < \pi \\ -\dfrac{\omega}{2} + \pi\ eğer\ \pi \leq \omega < 2\pi \end{cases}$$

Yukarıda $\measuredangle X(e^{j\omega})$'nın parçalı fonksiyon olmasının sebebi $\pi \leq \omega < 2\pi$ aralığında "$2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$" fonksiyonunun negatif değerler almasıdır. Genlik hesaplarken $\left|2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|$ ile "$2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$" nin mutlak değerini hesapladığımız için daima pozitif sayı elde ederiz. Oysa, $\pi < \omega < 2\pi$ aralığında"$2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$" negatif değer alır. Negatif değer $-1 = e^{j\pi}$ olduğundan, ilgili aralıkta $e^{j\pi}$ ile çarpılması gerekir; diğer ifade ile $\pi < \omega < 2\pi$ aralığında $+\pi$ kadar bir faz ilavesine sebep olur.

Aşağıda verilen kod parçası, yukarıda bulunan genlik $|X(e^{j\omega})|$ ve faz $\measuredangle X(e^{j\omega})$ grafiklerini çizdirir. Bu fonksiyonların bağımsız değişeni ω sürekli olduğu için $[\mathbf{0}, +\mathbf{2\pi})$ aralığında örnekleyerek çizdirilmektedir. ω bu aralıkta $\pi/1000$ gibi yüksek bir örnekleme periyodu ile örneklenip $X(e^{j\omega})$'nın genlik ve fazı plot ile çizdirildiğinde sürekli bir fonksiyon gibi gözükür. Burada "..$+\mathbf{2\pi}$)" ifadesi ile "$\mathbf{2\pi}$"nin dahil olmadığına dikkat ediniz. Bunu sağlamak için kodda *arange()* kullanılmıştır. Grafikleri çizdirirken okuma kolaylığı açısından hem yatay eksen hem de DTFT'nin fazı π sayısına bölünmüştür. Bu nedenle, yatay eksendeki bir değeri okurken o sayıyı π ile çarpmayı unutmayınız; ilgili eksen etiketlerine "$(\times\,\pi)$" ifadesi bu sebeple eklenmektedir.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.signal as sig
%matplotlib notebook
w_cont= np.arange(0, 2*np.pi, np.pi/1000)
X_abs=np.abs(2*np.cos(w_cont/2))
X_phase=np.array([-w/2 if w<np.pi else -w/2+np.pi for w in w_cont])
plt.subplot(121)
plt.plot(w_cont/np.pi,X_abs)
plt.title('$|X(e^{j\omega})|$')
plt.xlabel('Normalize frekans (x$\pi$)')
plt.subplot(122)
plt.plot(w_cont/np.pi,X_phase/np.pi)
plt.title('$ \measuredangle X(e^{j\omega})$')
plt.xlabel('Normalize frekans (x$\pi$)')
```



Yukarıdaki grafiklerde $X(e^{j\omega})$ işaretinin genliğini ve fazını ω'yı ayrık noktalarla hesaplamış olmamıza rağmen *stem()* ile çizdirmedik çünkü $X(e^{j\omega})$ fonksiyonu ω'ya göre sürekli bir fonksiyondur. Ayrık noktalarda hesaplanmış değerlerin sürekli bir fonksiyona ait olmasını sağlamak için öncelikle ω'yı örneklerken çok küçük örnekleme periyodu seçtik. Ardından ise *stem()* yerine *plot()* kullanarak grafiğin sürekli bir fonksiyon olarak görünmesini sağladık. Buradan anlaşılacağı üzere, DTFT'nin dijital ortamda hesaplanması ve işlenmesi DTFT'nin örneklenmesini gerektirmektedir. Bu ise bizi Ayrık Fourier Dönüşümü'ne (DFT) yönlendirmektedir.

2.2 Ayrık Fourier dönüşümü (DFT)

Ayrık Fourier dönüşümünü (DFT), ayrık zamanlı Fourier dönüşümünün örneklenmiş hali olarak düşünebilirsiniz. DTFT formülünde ω'yi $[0,2\pi)$ aralığını N eşit parçaya bölüp $2\pi/N$ aralıklarla örneklediğinizde k indisli örnek, $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ frekans değerine karşı gelecektir. Bu ifadeyi DTFT analiz denkleminde yerine koyup $x[n]$'i $n = 0,1,\dots,N-1$ aralığında sonlu varsaydığınızda DFT'nin analiz denklemi elde edilir. DFT'nin analiz ve sentez denklemleri aşağıda verildiği gibidir.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(\frac{2\pi}{N}k)n}, \ k = 1,2,\dots,N-1 \ \text{(Analiz)}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \ n = 1,2,\dots,N-1 \ \text{(Sentez)}$$

$X(e^{j\omega})$ periyodu 2π olan periyodik bir fonksiyon olduğundan ve ω örneklenirken $[0,2\pi)$ aralığı N eşit parçaya bölündüğünden, $X[k]$ da periyodiktir ve periyodu N'dir.

Bölüm 2.1 'de verilen $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ işaretinin $N = 8$ için DFT'sini hesaplayıp DTFT ile aynı grafik üzerinde çizdirip aralarındaki farkı gözlemleyelim.

Aşağıda $\delta[n]$ fonksiyonu gerçeklenmiştir. Bu fonksiyonu analiz denkleminde, $x[n]$ kısmında, kullanacağız.

```
def dirac(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return 0
```

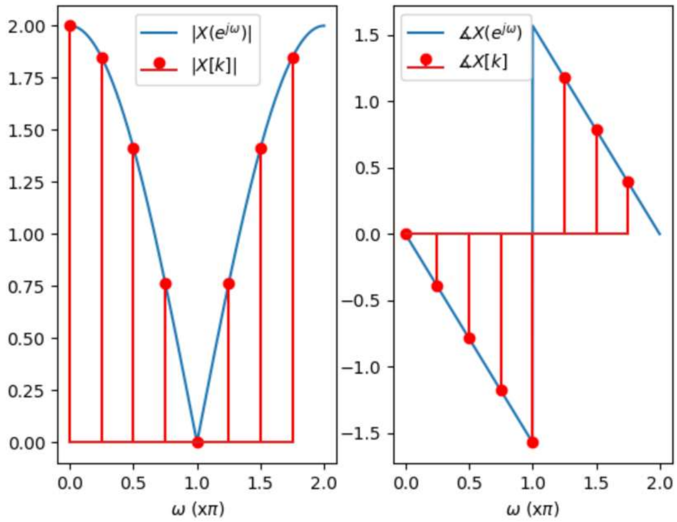
Bir kütüphane kullanmadan DFT analiz denklemini kullanarak $X[k]$ katsayılarını hesaplayan bir kod örneği aşağıda verilmektedir. Herhangi bir k değeri için $n = 0,\dots,N-1$ olmak üzere toplamda N defa $x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ çarpımı yapılıp sonuçların toplanması gerekmektedir. İçteki döngü bu işlemi yapmaktadır. $k = 0,\dots,N-1$ aralığında olduğundan toplamda N tane X$[k]$ hesaplayacağız. Bu sebeple, dışta da k için bir döngü mevcuttur. Buradan N noktalı DFT hesaplamanın $O(N^2)$'lik bir zaman kompleksliği olduğunu görebiliriz.

```
N=8
X_k=np.zeros([N],dtype=complex)
for k in range(N):
    for n in range(N):
        X_k[k]=X_k[k]+(dirac(n)+dirac(n-1))*np.exp(-1j*(2*np.pi/N)*k*n)
```

```
X_k_abs=np.abs(X_k)
X_k_phase=np.angle(X_k)

plt.figure()
plt.subplot(121)
plt.plot(w_cont/np.pi,X_abs,label='$|X(e^{j\omega})|$')
w_discrete=np.arange(0,N)*(2*np.pi/N)
plt.stem(w_discrete/np.pi,X_k_abs,'r-',label='$|X[k]|$',markerfmt='ro')
plt.xlabel('$\omega$ (x$\pi$)')
plt.legend()

plt.subplot(122)
plt.plot(w_cont/np.pi,X_phase,label='$ \measuredangle X(e^{j\omega})$')
plt.stem(w_discrete/np.pi,X_k_phase,'r-',label='$ \measuredangle
X[k]$',markerfmt='ro')
plt.xlabel('$\omega$ (x$\pi$)')
plt.legend()
```



Yukarıdaki figürde solda $x[n]$ işaretinin DTFT'sinin (mavi) ve 8-noktalı DFT'sinin (kırmızı) genlik grafiği, sağda ise $x[n]$ işaretinin DTFT'sinin (mavi) ve 8-noktalı DFT'sinin (kırmızı) faz grafikleri verilmiştir. Açık bir şekilde görülüyor ki N noktalı DFT hesapladığımızda aslında kompleks DTFT işaretini $\frac{2\pi}{N}$ aralıklarla toplamda N noktadan oluşacak şekilde örnekliyoruz. $N = 4$, $N = 16$ ve $N = 32$ için aynı grafikleri tekrar çizdirip DFT ve DTFT arasındaki farkı yorumlayınız. N nokta sayısının artmasının etkilerini gözlemleyiniz. N noktalı DFT hesapladığınızda birinci, ikinci, üçüncü örneklerin, $k = 1,2,3$, hangi frekans değerlerine, ω'ya, karşı geldiğine dikkat ediniz. Bunun için bir formül önerebilir misiniz? Önereceğiniz formül ω ve k arasındaki ilişkiyi vermelidir.

Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT)

Bölüm 2.2'de N noktalı DFT hesaplamak için N iterasyonlu olan iki tane iç içe *for* döngüsü içeren bir algoritma verilmişti. DFT'yi bu şekilde hesaplamanın maliyeti N^2 ile orantılıdır. N büyüdükçe hesaplama süresi hızla artar. DFT'yi hızlı hesaplamak için kullanılan Hızlı Fourier dönüşümü (FFT) algoritması ise N-noktalı DFT'yi, N eğer 2'nin bir kuvveti şeklinde ise, $NlogN$ ile orantılı bir işlem karmaşıklığına sahiptir. Bu sebeple, DFT'yi daha hızlı hesaplamak için genellikle FFT algoritması kullanılır. FFT ile ilgili daha detaylı bilgi almak için ders kitabınızın 8. bölümüne bakınız.

Bu derste DFT hesaplarken hep FFT algoritması kullanılacaktır. Aşağıda scipy kütüphanesinin fft modülündeki *fft()* komutunun nasıl kullanılacağı aşağıdaki kod parçasında gösterilmektedir. DFT'sini hesapladığımız diziyi yine $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ seçelim.

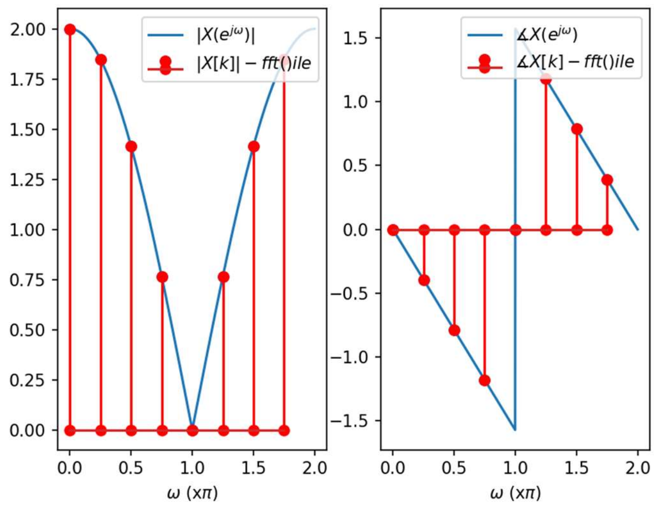
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.fftpack import fft , ifft

x=np.array([1,1])
fft_X=fft(x,8)
abs_fft_X=np.abs(fft_X)
phase_fft_X=np.angle(fft_X)

## Grafik çizimi
plt.figure()
plt.subplot(121)
plt.plot(w_cont/np.pi,X_abs,label='$|X(e^{j\omega})|$')
w_discrete=np.arange(0,N)*(2*np.pi/N)
plt.stem(w_discrete/np.pi,abs_fft_X,'ro-',label='$|X[k]|-fft() ile$')
plt.xlabel('$\omega$ (x$\pi$)')
plt.legend(loc='upper right')

plt.subplot(122)
plt.plot(w_cont/np.pi,X_phase,label='$ \measuredangle X(e^{j\omega})$')
plt.stem(w_discrete/np.pi,phase_fft_X,'ro-',label='$ \measuredangle
X[k]-fft() ile$')
plt.xlabel('$\omega$ (x$\pi$)')
plt.legend(loc='upper right')
```

Aşağıdaki grafikten de anlaşılacağı gibi, N noktalı fft hesaplamak DFT analiz denklemini doğrudan kullanarak hesapladığımız noktaların aynısını üretmektedir. $fft(x,N)$ fonksiyonunda ilk parametre işareti, ikinci parametre N ise nokta sayısına karşılık gelmektedir. Burada eğer işaretin boyu N'den küçük ise algoritma işaretinizin boyunu N'e tamamlayacak şekilde sonuna sıfırlar ekler. Eğer tam tersi bir durum var ise yani işaretinizin uzunluğu N'den büyük ise, algoritma işaretinizin ilk N noktasını alacak şekilde işareti kırpar.

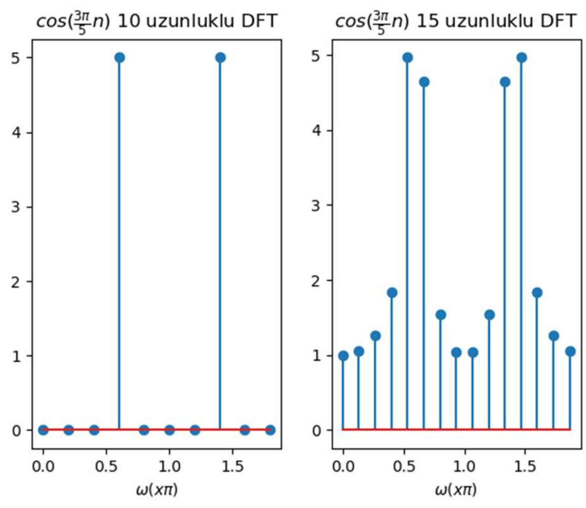


2.2.1 Frekansta örnekleme →Zamanda periyodiklik ilişkisi

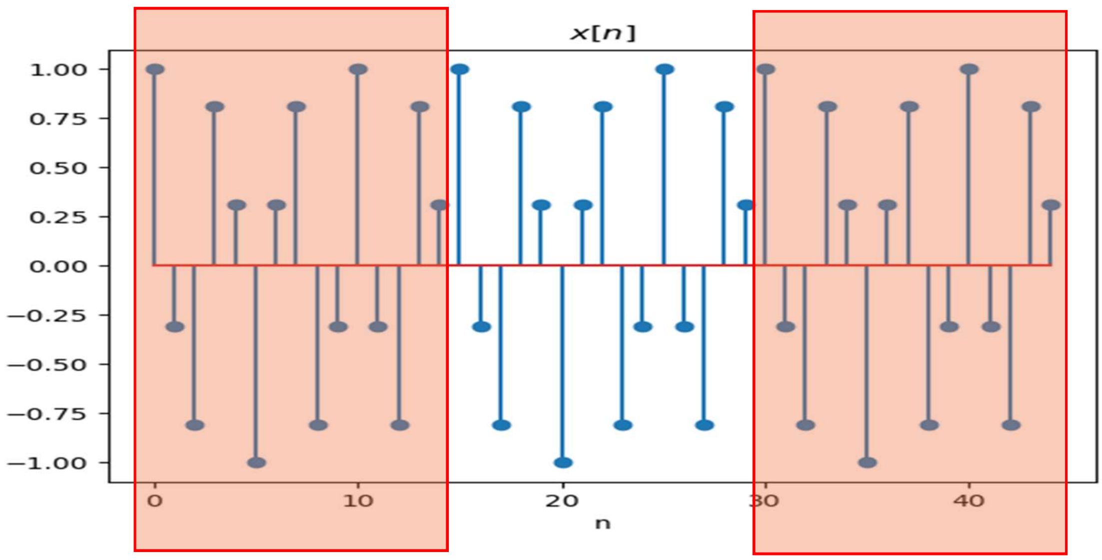
Bir önceki bölümde N noktalı DFT hesaplarken $X[k]$'nın N ile periyodik olduğundan bahsetmiştik. Sentez denklemine dikkat edilecek olursa, $X[k+N]=X[k]$ olduğundan, $x[n+N]$'in de $x[n]$'e eşit olduğu görülecektir. Dolayısıyla, DFT ifadesinde $x[n]$'in $n=0,1,\dots,N-1$ aralığındaki değerlerinin her Nnoktada bir tekrarlandığı varsayımı mevcuttur. Dolayısıyla, N noktalı DFT hesaplarken işaretinizin N ile periyodik olduğunu varsayarak DFT hesaplamanız gerekir. Aşağıda $\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$ işaretini 10 noktalı ve 15 noktalı iki ayrı versiyonunu oluşturup Python'da DFT'lerini fft() ile hesaplayıp sadece genliklerini çizdirelim:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.fftpack import fft , ifft
#10 uzunluklu versiyon
n1=np.arange(0,10)
x1=np.cos(3*np.pi/5*n1)
X1_abs=np.abs(fft(x1))
w_disc_1=n1*2*np.pi/len(n1)   #0-2pi arası 2pi/10 adımlı vektör (2pi
noktası dahil değil)
plt.figure()
plt.subplot(121)
plt.stem(w_disc_1/np.pi,X1_abs)
plt.xlabel('$\omega (x\pi)$')
plt.title('$cos(\\frac{3\\pi}{5}n)$ 10 uzunluklu DFT')

#15 uzunluklu versiyon
n2=np.arange(0,15)
x2=np.cos(3*np.pi/5*n2)
X2_abs=np.abs(fft(x2))
w_disc_2=n2*2*np.pi/len(n2)   #0-2pi arası 2pi/15 adımlı vektör (2pi
noktası dahil değil)
plt.subplot(122)
plt.stem(w_disc_2/np.pi,X2_abs)
plt.xlabel('$\omega (x\pi)$')
plt.title('$cos(\\frac{3\\pi}{5}n)$ 15 uzunluklu DFT')
```



$fft(x)$ komutu ikinci bir parametre girilmediğinde DFT hesaplarken nokta sayısını x'in boyuna eşit seçer. Dolayısıyla, $x[n] = \cos(\frac{3\pi}{5}n)$ $n = 0,1, \dots ,9$ şeklinde 10 nokta için hesaplayıp *fft()* fonksiyonuna verdiğimizde x'i 10 noktalı periyodik bir işaret varsayıp 10 noktalı DFT hesaplarken, $n = 0,1, \dots ,14$ şeklinde 15 nokta için hesaplayıp *fft()* fonksiyonuna verdiğimizde x'i 15 noktalı periyodik bir işaret olarak varsayıp 15 noktalı DFT hesaplayacaktır. Yukarıda solda verilen grafik 10 noktalı DFT'yi, sağındaki ise bu işaretin 15 noktalı DFT'y' göstermektedir. $x[n] = \cos(\frac{3\pi}{5}n)$ işaretinin Fourier dönüşümü alındığında solda gösterilen grafikte olduğu gibi $\omega = \frac{3\pi}{5}$ ve $\omega = -\frac{3\pi}{5}$ noktalarında dürtüler görmeyi bekleriz. Dikkat edilirse, $[0 - 2\pi)$ arasını incelediğimiz için $-\frac{3\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi = \frac{7\pi}{5}$ noktasına denk gelir. Yukarıda sağdaki grafikte ise ikiden fazla dürtü elde edilmektedir. Bunun sebebi, sağdaki grafik periyodu 10 olan $\boldsymbol{\cos(\frac{3\pi}{5}n)}$ grafiğinin değil, bir periyodu $x[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right), n = 0,1,2, \dots ,9, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{14}$ olan ve her 15 noktada tekrar eden $x[n]$ işaretinin DFT'sini göstermektedir. Bu işaret aşağıdaki şekilde gösterilmektedir. İşaretin birinci ve üçüncü periyodu kolay görülebilmesi için farklı renkle boyanmıştır. Bu işaret, $\boldsymbol{\cos(\frac{3\pi}{5}n)}$ işaretinin üç periyoduna eşit değildir, farklı bir işarettir ve dolayısıyla Fourier dönüşümü hesaplandığında yukarıda solda gösterildiği gibi $\omega = \frac{3\pi}{5}$ ve $\omega = -\frac{3\pi}{5}$ noktalarında dürtüler olmayacaktır. Bu işaretin Fourier dönüşümü yukarıda sağdaki grafikte verildiği gibidir.



Özetle, $\cos(\frac{3\pi}{5}n)$ işaretinin periyodu 10 örnek olduğu için x vekrötünü 10'un tam katları olacak şekilde oluşturduğunuzda DFT genlik grafiğinde sadece 2 tane dürtü görürsünüz. Aksi halde, hesapladığınız DFT $\cos(\frac{3\pi}{5}n)$ işaretine ait değil, başka bir periyodik işarete ait olacaktır. Ödevlerde "tam 2 katını, tam 3 katını elde ediniz, vb" ifadelerin gerekçesi budur.

2.2.2 DFT genlik ve faz grafiklerinden işaret sentezi

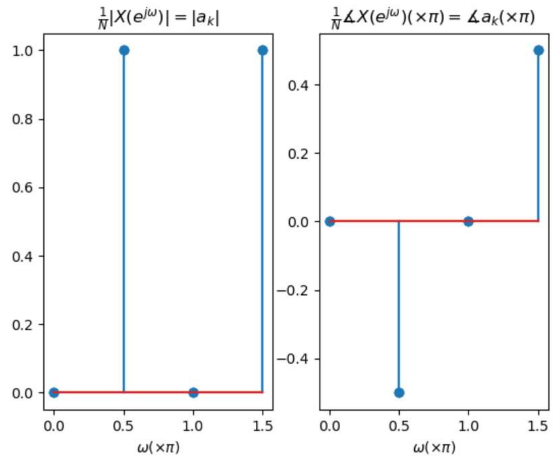
Zamandaki kapalı formunu bilmediğiniz bir diziyi farklı frekanslardaki sinüs ve kosinüslerin doğrusal kombinasyonu şeklinde, dizinin DFT'sine bakarak yazabilirsiniz. Bunun için aşağıda verilen iki denklemi bilmeniz gerekmektedir.

$$\tilde{x}\,[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} \;\; (DFS\ sentez\ denklemi)$$

$$x\,[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} \;\; (DFT\ sentez\ denklemi)$$

Yukarıdaki iki denkleme baktığınızda periyodik olan ayrık zamanlı işaretin Fourier serisi katsayıları a_k ile DFT katsayıları $X[k]$ arasında $a_k = \frac{X[k]}{N}$ ilişkisi olduğunu görüyoruz. Diğer bir değişle, DFT hesapladıktan sonra elde ettiğiniz diziyi dizinin boyuna bölerseniz elde ettiğiniz yeni dizi DFS katsayıları olur. Örneğin, $x = [0,2,0,-2]$ dizisi $Acos(\omega_0 n + \phi)$ formatında bir sinüzoidal işaretin bir periyotta aldığı değerlere karşılık gelmektedir. Aşağıdaki kod, yukarıdaki dizinin *fft()* komutu ile DFT'sinin alınıp daha sonra işaretin uzunluğu olan $N = 4$'e bölünüp elde ettiğimiz yeni kompleks dizinin genlik ve faz grafiklerini çizmektedir.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.fftpack import fft , ifft
x=np.array([0,2,0,-2])
N=len(x)
n=np.arange(0,4)
w_disc=n*2*np.pi/N # 0-2pi arasında(2pi noktası dahil değil) 2pi/4
adımlı vektör
X_abs=np.abs(fft(x)/N)
X_phase=np.angle(fft(x)/N)
plt.subplot(121)
plt.stem(w_disc/np.pi,X_abs)
plt.xlabel('$\omega (\\times \pi)$')
plt.title('$\\frac{1}{N}|X(e^{j\omega})|=|a_{k}|$')
plt.subplot(122)
plt.stem(w_disc/np.pi,X_phase/np.pi)
plt.xlabel('$\omega (\\times \pi)$')
plt.title('$\\frac{1}{N}\measuredangle X(e^{j\omega})(\\times
\pi)=\measuredangle a_k(\\times \pi)$')
```



Yukarıda, solda *fft()* fonksiyonu ile işaretin DFT'sini hesaplayıp işaretin uzunluğuna bölünmüş yeni dizinin genlik grafiği, sağda ise aynı dizinin faz grafiği verilmiştir. Genlik grafiğinden sadece birinci indisteki 0.5π ve üçüncü indisteki 1.5π frekanslarında DFS katsayılarının sıfırdan farklı değere eşit olduğunu görüyoruz. Bu nedenle DFS sentez denklemini kullanarak $\tilde{x}[n]$'i sentezlemek istersek sadece $a_1 e^{j0.5\pi n}$ ve $a_3 e^{j1.5\pi n}$ kompleks üstel işaretlerini toplamamız gerekir. a_1 katsayısını bulmak için:

$$a_1 = |a_1| e^{j\angle a_1} = 1e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Yukarıda $|a_1|$ değerini genlik grafiğinde birinci indisteki değerden, $\angle a_1$ değerini ise faz grafiğindeki birinci indisteki değerden okuyoruz. Faz grafiğini çizdirirken okuma kolaylığı olması için vektör π 'ye bölünmüştü. Bu nedenle, dik eksendeki değeri alırken π ile çarpılması gerekir. Benzer şekilde a_3'ü hesaplarsak:

$$a_3 = |a_3| e^{j\angle a_3} = 1e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

Sonuç olarak $\tilde{x}[n]$ aşağıdaki ifadeye eşit olur;

$$\tilde{x}\,[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} = a_1 e^{j0.5\pi n} + a_3 e^{j1.5\pi n}$$
$$= 1e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j0.5\pi n} + 1e^{+j\frac{\pi}{2}} e^{j1.5\pi}$$

$e^{j1.5\pi n} = e^{j(2\pi - 0.5\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{-j0.5\pi n} = e^{-j0.5\pi n}$ olduğu için;

$$= 1e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j0.5\pi n} + 1e^{+j\frac{\pi}{2}} e^{-j0.5\pi n}$$
$$= e^{j\left(0.5\pi n - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(0.5\pi n - \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= 2\cos\left(0.5\pi n - \frac{\pi}{2}\right)$$

Buradan $A = 2$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ ve $\phi = -\frac{\pi}{2}$ olduğunu görürüz.

Eğer $n = [0{,}1{,}2{,}3]$ vektörü için $2\cos\left(0.5\pi n - \frac{\pi}{2}\right)$ işaretini hesaplarsanız en başta verilen $[0{,}2{,}0,-2]$ dizisini elde edersiniz.

3 BASAMAK, DÜRTÜ İŞARETLERİNİN KOLAYCA OLUŞTURULMASI

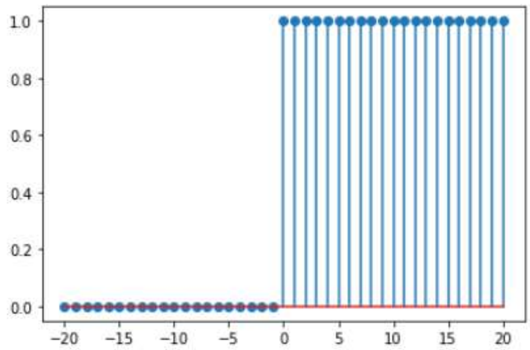
İndis vektörünün $n = -20, -19, \dots, 0, \dots, 20$ olduğunu varsayalım. Bu indis vektörü için aşağıda $u[n]$, $u[n-3]$,$\delta[n]$, $\delta[n+2]$ ve $u[n] - u[n-10]$ işaretlerini üreten kodlar verilmektedir.

Öncelikle $u[n]$'i oluşturalım:

```
n = np.arange(-20,21)
#yol-1
u_n = np.array([0 if i < 0 else 1 for i in n])
#yol-2
u_n = []
for i in n:
    if i<0:
        u_n.append(0)
    else:
        u_n.append(1)

#yol-3(bu yol önerilmemektedir)
u_n = np.concatenate((np.zeros(20),np.ones(21)))
```

```
#yol-4
u_n=np.ones(len(n))
u_n[n<0]=0
```
Yukarıda verilen örneklerden farklı yaklaşımlarla da verilen indis vektörü için basamak fonksiyonu üretilebilir. Yukarıdaki ‘u_n’ değişkenini n’e göre çizdirirseniz aşağıdaki grafiği elde edersiniz.



Şimdi de $u[n-3], \delta\,[n], \delta[n+2]$ ve $u[n]-u[n-10]$ işaretlerini yukarıdaki “1. Yol” ile aynı indis vektörü için oluşturalım. Diğer yollar veya kendinizin bulduğu yollar ile bu üç işareti oluşturmayı ayrıca deneyiniz.

$u[n-3]$:

```
n= np.arange(-20,21)
u_n_3 = np.array([0 if i<3 else 1 for i in n])
```
$\delta\,[n]$:

```
n= np.arange(-20,21)
dirac_n = np.array([0 if i!=0 else 1 for i in n])
```
$\delta[n+2]$:

```
n= np.arange(-20,21)
dirac_n_arti_2 = np.array([0 if i!=-2 else 1 for i in n])
```
$u[n]-u[n-10]$:

```
n= np.arange(-20,21)
u_n_eksi_u_n_10 =np.array([1 if i>=0 and i<10 else 0 for i in n])
```

4 ÖDEV-3:

Aşağıdaki sorularda istenenleri Python'da kodlayarak bulunuz. Kodlarınızı .py formatında değil "jupyter notebook" formatı olan .ipynb formatında tek bir dosya halinde teslim ediniz. Rastgele seçilen öğrencilere bu bölümden soru sorulabilir; sorulacak sorulara cevap vermeye hazırlıklı olunuz.

1) DZD olan bir sistemin dürtü cevabı $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ olarak verilmektedir.
   a) $H(e^{j\omega})$'yı elinizle hesaplayın ve yorum olarak ekleyin. Hesapladığınız bu fonksiyonunun genliği $|H(e^{j\omega})|$ ile fazı $\angle H(e^{j\omega})$ 'yı ω'yı $0-2\pi$ aralığında 1000 noktadan oluşacak şekilde oluşturup çizdirin.
   b) $|H(e^{j\omega})|$'ya bakarak bu filtrenin nasıl bir karakteristiğe sahip olduğunu yorumlayın.
   c) $h[n]$ işaretini $n = 0, \ldots, 15$ indislerinde tanımlı 16 noktalı olacak şekilde oluşturun. Oluşturduğunuz bu dizinin *fft()* fonksiyonu ile 16 noktalı DFT'sini hesaplayıp genlik ve faz grafiklerini çizdirin.

5 ÖDEV-3 EK ÇALIŞMA:

Aşağıdaki sorularda istenenleri Python'da kodlayınız. Kodlarınızı .py formatında değil "jupyter notebook" formatı olan .ipynb formatında hazırlayınız. Ödev-3 Ek Çalışma, Ödev-3'Ün bir parçasıdır ve teslim edilmesi zorunludur; rastgele seçilen öğrencilere bu bölümden soru sorulabilir; sorulacak sorulara cevap vermeye hazırlıklı olunuz.

2) Aşağıdaki dizi $Acos(\omega_0 n + \phi)$ formatında olan sinüzoidal işaretin tam bir periyot $n = 0,1, \ldots 7$'ye kadar aldığı değerlere karşılık gelmektedir.

   $$[0, 0.707106, -1, 0.707106, 0, -0.707106, 1, -0.707106]$$

   Bu dizinin DFT'sinin genlik ve faz grafiklerine bakarak A, ω_0 ve ϕ değerlerini bulunuz.

3) $x[n] = cos(\frac{\pi}{3}n)$ işareti dürtü cevabı $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ olan bir sisteme giriş olarak verildiğinde sistemin çıkışında elde edilen $y[n]$ işaretini $n = 0,1,2, \ldots, 10$ aralığında çizdiriniz. **Not:** Bu soruda, giriş işaretinin özfonksiyon olduğuna ve çıkış işaretinin $y[n] = \left|H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\right| cos\left(\frac{\pi}{3}n + \angle H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\right)$ ile bulunabileceğine dikkat ediniz. Dolayısıyla, birinci sorudan yararlanarak önce $\left|H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\right|$ ve $\angle H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)$ değerlerini hesaplayınız ve bu değerleri *print()* komutu ile yazdırınız ve yorum olarak bu değerleri belirtiniz.

6 EK ÇALIŞMA SORULARI:

Aşağıdaki sorulara çalışınız. Ödev-3 EK'in parçası olarak teslim edilMeyecektir:

4) $A = \{3,5,7,9\}$, $\omega_0 = \{\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{9}\}$ ve $\phi = \{\frac{4}{5}, \frac{4\pi}{7}, \frac{4\pi}{9}\}$ kümelerinden rastgele birer değer seçip $x[n] = Acos(\omega_0 n + \phi)$ işaretinin değerini tam bir periyod için elde ediniz: $x = [x[0], x[1], \ldots, x[N-1]]$.

   Elde ettiğiniz bu değerlerin (vektörün), Soru-2'de olduğu gibi, DFT'sinin genlik ve faz grafiklerine bakarak A, ω_0 ve ϕ değerlerini bulunuz. Bulduğunuz değerler, rastgele seçtiğiniz değerlerle aynı mı? Farklılık varsa sebebini açıklayınız. Farklı A, ω_0 ve ϕ değerlerini rastgele seçerek konuyu kavrayıncaya kadar tekrar edebilirsiniz.

5) Üçüncü soruyu $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$ ve $h[n] = \delta[n] - \delta[n-3]$ için tekrarlayınız.

7 TESLİM ŞEKLİ ve ZAMANI

Bu dokümanda verilen örnek kodları kendiniz bir Jupyter Notebook'ta yazarak verilen sonuçlarla karşılaştırınız. Aynı dokümanın devamında olacak şekilde, ÖDEV-3 başlığı altında verilen sorularda istenenleri Python'da (Jupyter Notebook kullanarak) kodlayınız. Yaptığınız çalışmayı aşağıdaki formata uygun isimle kaydediniz:

ÖDEV-3: **ÖDEV3_OgrenciNO.ipynb**

Ayrı bir doküman olarak ÖDEV-3 EK ÇALIŞMA başlığı altında verilen sorularda istenenleri Python'da kodlayınız. Yaptığınız çalışmayı aşağıdaki formata uygun isimle kaydediniz:

ÖDEV-3 EK ÇALIŞMA: **ÖDEV3_EK_OgrenciNO.ipynb**

Bu iki .ipynb uzantılı dosyayı Ms Teams'e yükleyiniz. Sisteme geç yüklenen dosyalar kabul edilmeyecektir. Jupyter Notebook'ta yapacağınız çözümler birinci ödevde verilen **ÖDEV1_OgrenciKOD.ipynb** isimli **şablona göre hazırlanmalıdır. Ödev-1 yazan yerleri Ödev-3 olarak düzenlemeyi unutmayınız.**

ÖDEV3_ÖğrenciNo.ipynb ve ÖDEV3_ÖğrenciNo_EK.ipynb

olmak üzere İKİ DÖKÜMAN yüklenmelidir-ZİP/TAR vb programlarla paketleyip tek dosya olarak yükleMeyiniz.