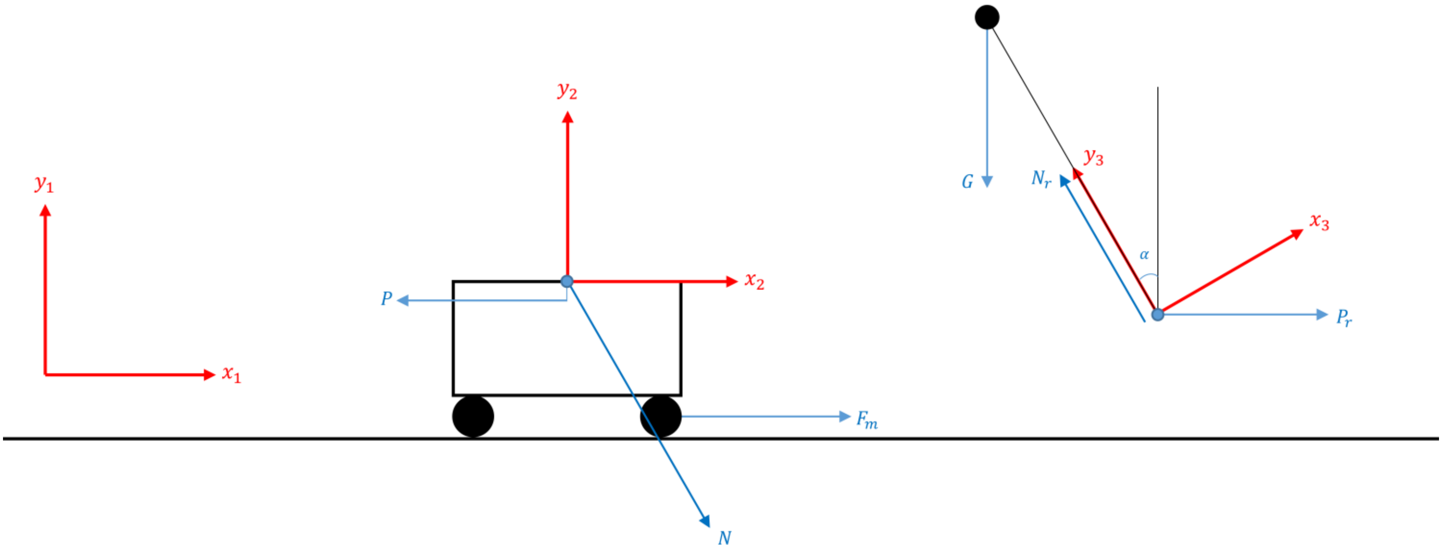

Sistemde kullanılan bazı temel vektörler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

• Motorlar aracılığı ile araca uygulanan itki kuvvetinin 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı ($F_m = +$);

$$\boxed{\overrightarrow{F_m} = F_m.\overrightarrow{x_1}}$$

• Aracın gövdeye uyguladığı kuvvetin 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı ($P_r = +$);

$$\boxed{\overrightarrow{P_r} = P.\overrightarrow{x_1}}$$

• 3 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$$\boxed{\overrightarrow{P_{r_{1\to3}}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P.\cos\alpha \\ -P.\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{ZYX}\ (\varphi = 0,\ \ \theta = 0,\ \ \psi = \alpha)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{P_r} = P.\cos\alpha\,.\overrightarrow{x_3} - P.\sin\alpha\,.\overrightarrow{y_3}}$$

• Aracın gövdeye uyguladığı kuvvete karşı oluşan raksiyon kuvvetinin 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$$\boxed{\vec{P} = -P.\overrightarrow{x_1}}$$

• Gövdenin, araca bağlantı noktasına uyguladığı kuvvetin 3 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı ($N = -$);

$$\boxed{\vec{N} = N.\overrightarrow{y_3}}$$

• 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$$\boxed{\overrightarrow{N_{3\to1}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N.\sin\alpha \\ N.\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{ZYX}\ (\varphi = 0,\ \ \theta = 0,\ \ \psi = \alpha)}$$

$$\boxed{\vec{N} = -N.\sin\alpha\,.\overrightarrow{x_1} + N.\cos\alpha\,.\overrightarrow{y_1}}$$

• Gövdenin, aracın bağlantı noktasına uyguladığı kuvvete karşı oluşan reaksiyon kuvvetinin 3 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$$\boxed{\overrightarrow{N_r} = -N.\overrightarrow{y_3}}$$

• 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$$\boxed{\overrightarrow{N_{r_{3\to1}}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ -N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N.\sin\alpha \\ -N.\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{ZYX}\ (\varphi = 0,\ \ \theta = 0,\ \ \psi = \alpha)}$$

$\boxed{\overrightarrow{N_r} = N.\sin\alpha.\overrightarrow{x_1} - N.\cos\alpha.\overrightarrow{y_1}}$

• Gövdenin ağırlık kuvvetinin 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$\boxed{\vec{G} = -m_p.g.\overrightarrow{y_1}}$

• Gövdenin kütle merkezine ait konum vektörünün tanımı;

$\boxed{\overrightarrow{X_{CoM}} = \vec{X} + \overrightarrow{X_P}}$

$\boxed{\vec{X} = x.\overrightarrow{x_1}}$

$\boxed{\overrightarrow{X_P} = L.\overrightarrow{y_3}}$

• 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$$\boxed{\overrightarrow{X_{P\,3\to1}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L.\sin\alpha \\ L.\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{ZYX}\ (\varphi = 0,\ \ \theta = 0,\ \ \psi = \alpha)}$$

$\boxed{\overrightarrow{X_P} = -L.\sin\alpha.\overrightarrow{x_1} + L.\cos\alpha.\overrightarrow{y_1}}$

$\boxed{\overrightarrow{X_{CoM}} = (x - L.\sin\alpha).\overrightarrow{x_1} + L.\cos\alpha.\overrightarrow{y_1}}$

• Gövdenin kütle merkezine ait hız vektörünün 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$$\boxed{\overrightarrow{V_{CoM}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{X_{CoM}}\right) = \dot{x}.\overrightarrow{x_1} - L.\dot{\alpha}.\cos\alpha.\overrightarrow{x_1} - L.\dot{\alpha}.\sin\alpha.\overrightarrow{y_1} = (\dot{x} - L.\dot{\alpha}.\cos\alpha).\overrightarrow{x_1} + (-L.\dot{\alpha}.\sin\alpha).\overrightarrow{y_1}}$$

• Gövdenin kütle merkezine ait ivme vektörünün 1 numaralı kartezyen çerçeveye göre tanımı;

$$\boxed{\overrightarrow{a_{CoM}} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\overrightarrow{X_{CoM}}\right) = (\ddot{x} - L.\ddot{\alpha}.\cos\alpha + L.\dot{\alpha}^2.\sin\alpha).\overrightarrow{x_1} + (-L.\ddot{\alpha}.\sin\alpha - L.\dot{\alpha}^2.\cos\alpha).\overrightarrow{y_1}}$$

Sisteme ait dinamikleri elde etmek için Newton-Euler formüllerini uygularım.

• Araç için kuvvet eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$\boxed{\vec{P} + \overrightarrow{F_m} + \vec{N} = m_c.\overrightarrow{a_c}}$$

$$\boxed{(F_m - P - N.\sin\alpha).\overrightarrow{x_1} = (m_c.\ddot{x}).\overrightarrow{x_1}} \quad (1)$$

• Gövde için kuvvet eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$\boxed{\vec{G} + \overrightarrow{P_r} + \overrightarrow{N_r} = m_p.\frac{d^2}{dt^2}\left(\overrightarrow{X_{CoM}}\right)}$$

$$\boxed{(P + N.\sin\alpha).\overrightarrow{x_1} + \left(-m_p.g - N.\cos\alpha\right).\overrightarrow{y_1} = \left(m_p.\ddot{x} - m_p.L.\ddot{\alpha}.\cos\alpha + m_p.L.\dot{\alpha}^2.\sin\alpha\right).\overrightarrow{x_1} + \left(-m_p.L.\ddot{\alpha}.\sin\alpha - m_p.L.\dot{\alpha}^2.\cos\alpha\right).\overrightarrow{y_1}}$$

Yatay ve dikey yönlerdeki kuvvet bileşenlerini eşitlerim.

$$\boxed{P + N.\sin\alpha = m_p.\ddot{x} - m_p.L.\ddot{\alpha}.\cos\alpha + m_p.L.\dot{\alpha}^2.\sin\alpha} \quad (2)$$

$$\boxed{-m_p.g - N.\cos\alpha = -m_p.L.\ddot{\alpha}.\sin\alpha - m_p.L.\dot{\alpha}^2.\cos\alpha} \quad (3)$$

• Pendulumun kütle merkezine göre tork eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$\boxed{(-L).\overrightarrow{y_3} \times \overrightarrow{P_r} = J_p.\overrightarrow{a_p}}$$

$$\boxed{P.L.\cos\alpha = J_p.\ddot{\alpha}} \quad (4)$$

• Motorun uyguladığı tork vektörünün genliği aşağıdaki gibidir.

$$\boxed{T = V.\left(\frac{k_e.n}{R_m}\right) - \dot{x}.\left(\frac{k_e.k_b.n^2}{R_m.r_w}\right)}$$

Motorun uyguladığı kuvvet vektörünün genliği aşağıdaki gibidir.

$$\boxed{F_m = \frac{T}{p} = V.\left(\frac{k_e.n}{p.R_m}\right) - \dot{x}.\left(\frac{k_e.k_b.n^2}{R_m.p^2}\right)}$$

Kullanacağım diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi sıralarım.

$\boxed{F_m - P - N.\sin\alpha = m_c.\ddot{x}}$ (1)

$\boxed{P + N.\sin\alpha = m_p.\ddot{x} - m_p.L.\ddot{\alpha}.\cos\alpha + m_p.L.\dot{\alpha}^2.\sin\alpha}$ (2)

$\boxed{-m_p.g - N.\cos\alpha = -m_p.L.\ddot{\alpha}.\sin\alpha - m_p.L.\dot{\alpha}^2.\cos\alpha}$ (3)

$\boxed{P.L.\cos\alpha = J_p.\ddot{\alpha}}$ (4)

$\boxed{F_m = V.\left(\frac{k_e.n}{p.R_m}\right) - \dot{x}.\left(\frac{k_e.k_b.n^2}{R_m.p^2}\right)}$ (5)

Sisteme ait durum uzayı modelini elde etmek için aşağıdaki adımları uygularım.

• (1) ile (2) numaralı denklemleri toplarım.

$\boxed{F_m = \ddot{x}.(m_c + m_p) + \ddot{\alpha}.(-m_p.L.\cos\alpha) + \dot{\alpha}^2.(m_p.L.\sin\alpha)}$ (6)

• (5) numaralı denklemi, (6) numaralı denklemde yerine koyarım.

$\boxed{\ddot{x}.(m_c + m_p) + \dot{x}.\left(\frac{k_e.k_b.n^2}{R_m.p^2}\right) + \ddot{\alpha}.(-m_p.L.\cos\alpha) + \dot{\alpha}^2.(m_p.L.\sin\alpha) = V.\left(\frac{k_e.n}{p.R_m}\right)}$ (7)

• $(2).\cos\alpha + (3).\sin\alpha$ işlemini gerçekleştiririm.

$\boxed{P.\cos\alpha - m_p.g.\sin\alpha = \ddot{x}.(m_p.\cos\alpha) + \ddot{\alpha}.(-m_p.L)}$ (8)

• (4) numaralı denklem ile 8 numaralı denklemi birleştiririm.

$\boxed{\ddot{x}.(-m_p.L.\cos\alpha) + \ddot{\alpha}.(J_p + m_p.L^2) + (-m_p.g.L.\sin\alpha) = 0}$ (9)

Durum uzayı formunu elde etmek için (7) ve (9) numaralı denklemleri kullanırım.
İşlem kolaylığı olması açısından aşağıdaki kısaltmaları tanımlarım.

$\boxed{c_1 = m_c + m_p}$

$\boxed{c_2 = \frac{k_e.k_b.n^2}{R_m.p^2}}$

$\boxed{c_3 = -m_p.L.\cos\alpha}$

$\boxed{c_4 = m_p.L.\sin\alpha}$

$\boxed{c_5 = \frac{k_e.n}{p.R_m}}$

$\boxed{c_6 = -m_p.L.\cos\alpha}$

$\boxed{c_7 = J_p + m_p.L^2}$

$\boxed{c_8 = -m_p.g.L.\sin\alpha}$

Tanımladığım kısaltmaları (7) ve (8) numaralı diferansiyel denklemlerde yerine koyarım.

$$\ddot{x}.C_1 + \dot{x}.C_2 + \ddot{\alpha}.C_3 + \dot{\alpha}^2.C_4 = V.C_5 \quad (10)$$

$$\ddot{x}.C_6 + \ddot{\alpha}.C_7 + C_8 = 0 \quad (11)$$

---

(11) numaralı diferansiyel denklem aracılığı ile $\ddot{x}$ ve $\ddot{\alpha}$ işaretlerini birbiri cinsinden yazarak aynı diferansiyel denklemde bulunmalarını engelliyeyim ki durum uzayı modelini (10) numaralı diferansiyel denklem aracılığı ile oluşturayım.

$$\ddot{x} = \ddot{\alpha}.(\tfrac{-C_7}{C_6}) + (\tfrac{-C_8}{C_6}) = 0 \quad (12)$$

$$\ddot{\alpha} = \ddot{x}.(\tfrac{-C_6}{C_7}) + (\tfrac{-C_8}{C_7}) = 0 \quad (13)$$

---

(13) numaralı diferansiyel denklemi (10) numaralı diferansiyel denklemde yerine koyarım.

$$\ddot{x}.\left(C_1 - \tfrac{C_3.C_6}{C_7}\right) + \dot{\alpha}^2.C_4 + \dot{x}.C_2 + (\tfrac{-C_3.C_8}{C_7}) = V.C_5 \quad (14)$$

Aşağıdaki kısaltmaları tanımlarım.

$$H_1 = C_1 - \tfrac{C_3.C_6}{C_7} \quad (15)$$

$$H_2 = \tfrac{-C_3.C_8}{C_7} \quad (16)$$

---

(15) ve (16) numaralı kısaltmaları (14) numaralı diferansiyel denklemde yerine koyarım.

$$\ddot{x} = \dot{x}.\left(\tfrac{-C_2}{H_1}\right) + \dot{\alpha}^2.\left(\tfrac{-C_4}{H_1}\right) + \left(\tfrac{-H_2}{H_1}\right) + V.\left(\tfrac{C_5}{H_1}\right) \quad (17)$$

---

(12) numaralı diferansiyel denklemi (10) numaralı diferansiyel denklemde yerine koyarım.

$$\ddot{\alpha}.\left(C_3 - \tfrac{C_1.C_7}{C_6}\right) + \dot{\alpha}^2.C_4 + \dot{x}.C_2 + (\tfrac{-C_1.C_8}{C_6}) = V.C_5 \quad (18)$$

Aşağıdaki kısaltmaları tanımlarım.

$$H_3 = C_3 - \tfrac{C_1.C_7}{C_6} \quad (19)$$

$$H_4 = \tfrac{-C_1.C_8}{C_6} \quad (20)$$

---

(19) ve (20) numaralı kısaltmaları (18) numaralı diferansiyel denklemde yerine koyarım.

$$\ddot{\alpha} = \dot{x}.\left(\tfrac{-C_2}{H_3}\right) + \dot{\alpha}^2.\left(\tfrac{-C_4}{H_3}\right) + \left(\tfrac{-H_4}{H_3}\right) + V.\left(\tfrac{C_5}{H_3}\right) \quad (21)$$

Durum değişkenlerimi, çıkfı fonksiyonlarımı ve girdi fonksiyonlarımı aşağıdaki gibi tanımlayarak (17) ve (21) numaralı diferansiyel denklemler aracılığı ile sistemime ait durum uzay modelimi rahatça elde edebilirim. Durum uzay modelinin elde edilip linnerleştirme işlemleri Matlab üzerinde yapılmıştır.

$x_1 = x$ $\quad y_1 = x$ $\quad u_1 = V$

$x_2 = \dot{x}$ $\quad y_2 = \alpha$

$x_3 = \alpha$

$x_4 = \dot{\alpha}$

---

(16) ve (17) numaralı denklemleri kullanarak sisteme ait durum uzay modelini aşağıdaki gibi elde edeebilirim.

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = x_2.\left(\frac{a_3.a_7 - a_2.a_8}{a_1.a_8 - a_3.a_6}\right) + {x_4}^2.\left(\frac{-a_4.a_8}{a_1.a_8 - a_3.a_6}\right) + \left(\frac{a_3.a_9}{a_1.a_8 - a_3.a_6}\right) + V.\left(\frac{a_5.a_8 - a_3.a_{10}}{a_1.a_8 - a_3.a_6}\right)$$

$$\dot{x_3} = x_4$$

$$\dot{x_4} = x_2.\left(\frac{a_1.a_7 - a_2.a_6}{a_3.a_6 - a_1.a_8}\right) + {x_4}^2.\left(\frac{-a_4.a_6}{a_3.a_6 - a_1.a_8}\right) + \left(\frac{a_1.a_9}{a_3.a_6 - a_1.a_8}\right) + V.\left(\frac{a_5.a_6 - a_1.a_{10}}{a_3.a_6 - a_1.a_8}\right)$$

Swing-up

Düşey doğrultuda serbest duran bir sarkaç sisteminin dikey doğrultuda sıfır derece etrafına kadar getirme sürecine swing-up fazı denilir. Swing-up kontrol algoritması için Lyapunov fonksiyonumu belirleyip ilgili fonksiyonumu kararlı hale getirmek için Lyapunov indirect metodunu uygularım. Bu metotta Lyapunov fonksiyonumu negative-semi definite koşulunda tutmalıyım ki stabil kalsın. Kontrol sinyalimi ilgili kriterleri sağlayacak şekilde ayarlamam lazım.

Lyapunov fonksiyonumu aşağıdaki gibi belirlerim.

$$V(\alpha) = \tfrac{1}{2}.(E_0 - E)^2$$

E_0 değeri, getirmek istediğim durumdaki enerji miktarımı temsil eder. Bizim sistemimizde sıfır olarakseçilir. Sistemin enerji fonksiyonu aşağıdaki gibidir. Enerji formülündeki terimler sırası ile dairesel hareketten kaynaklı kinetik enerji, pendulumun kütle merkezinin çizgisel hareketinden kaynaklı kinetik enerji ve pendulumun kütle merkezinin potansiyel enerjisidir.

$$E(t) = \frac{1}{2}.J_p.\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}.m_p.L^2.\dot{\alpha}^2 + m_p.g.L.(\cos(\alpha) - 1)$$

$$J_{eq} = J_p + m_p.L^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2}.J_{eq}.\dot{\alpha}^2 + m_p.g.L.(\cos(\alpha) - 1)$$

Lyapunov fonksiyonunun negative-semi definite olması için olması için $\frac{dV(\alpha)}{dt} \leq 0$ şartının sağlanması lazım.

$$V(\dot{\alpha}) = -(E_0 - E).E(\dot{t}) \qquad (22)$$

$$E(\dot{t}) = J_{eq}.\dot{\alpha}.\ddot{\alpha} - \dot{\alpha}.\sin(\alpha).m_p.g.L$$

$$E(\dot{t}) = \dot{\alpha}.(J_{eq}.\ddot{\alpha} - \sin(\alpha).m_p.g.L) \qquad (23)$$

(9) numaralı denklemi L ile çarpıp, (23) numaralı denklemde yerine koyarım.

$$E(\dot{t}) = -\dot{\alpha}.\ddot{x}.m_p.L.\cos(\alpha) \qquad (24)$$

(9) numaralı denklem aracılığı ile $\ddot{\alpha}$ sinyalini, $\ddot{x}$ sinyali cinsinden aşağıdaki gibi ifade edebilirim.

$$\ddot{\alpha} = \ddot{x}.\left(\frac{-m_p.L.\cos(\alpha)}{J_{eq}}\right) + \left(\frac{m_p.g.\sin(\alpha)}{J_{eq}}\right) \qquad (25)$$

(25) numaralı denklemi, (6) numaralı denklemde yerine yazarak, F_m işareti ile $\ddot{x}$ işareti arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi bulabilirim.

$$\ddot{x}.\left(m_p + m_c\right) + \left(\frac{m_p.g.L.\sin(\alpha).\cos(\alpha)}{J_{eq}}\right) + \ddot{x}.\left(\frac{-m_p{}^2.L^2.\cos(\alpha)}{J_{eq}}\right) - \dot{\alpha}^2.\left(m_p.L.\sin(\alpha)\right) = F_m$$

$$\ddot{x} = \left(\frac{-m_p{}^2.g.L.\sin(\alpha).\cos(\alpha) + \dot{\alpha}^2.m_p.J_{eq}.L.\sin(\alpha)}{J_{eq}.\left(m_p + m_c\right) - m_p{}^2.L^2.\cos(\alpha)}\right) + F_m.\left(\frac{J_{eq}}{J_{eq}.\left(m_p + m_c\right) - m_p{}^2.L^2.\cos(\alpha)}\right)$$

Kısaltma olması açısından aşağıdaki tanımlamaları yaparım.

$$f_x(\alpha) = \left(\frac{-m_p{}^2.g.L.\sin(\alpha).\cos(\alpha) + \dot{\alpha}^2.m_p.J_{eq}.L.\sin(\alpha)}{J_{eq}.\left(m_p + m_c\right) - m_p{}^2.L^2.\cos(\alpha)}\right)$$

$$b_x(\alpha) = \left(\frac{J_{eq}}{J_{eq}.\left(m_p + m_c\right) - m_p{}^2.L^2.\cos(\alpha)}\right)$$

$$\ddot{x} = f_x(\alpha) + F_m.b_x(\alpha) \tag{26}$$

(26) numaralı denklemi, (24) numaralı denklemde yerine koyarım.

$$E(\dot{t}) = -\dot{\alpha}.m_p.L.\cos(\alpha).\left(f_x(\alpha) + F_m.b_x(\alpha)\right) \tag{27}$$

(27) numaralı denklemi, (22) numaralı denklemde yerine koyarım.

$$V(\dot{\alpha}) = (E_0 - E).\dot{\alpha}.m_p.L.\cos(\alpha).\left(f_x(\alpha) + F_m.b_x(\alpha)\right)$$

Kısaltma olması açısından aşağıdaki tanımlamaları yaparım.

$$\mu = (E_0 - E).\dot{\alpha}.m_p.L.\cos(\alpha)$$

$$V(\dot{\alpha}) = \mu.\left(f_x(\alpha) + F_m.b_x(\alpha)\right)$$

$$V(\dot{\alpha}) = \mu.f_x(\alpha) + \mu.b_x(\alpha).F_m$$

Sistemin kararlı olabilmesi için $V(\dot{\alpha}) \leq 0$ olması gerekiyordu.

$$\mu.b_x(\alpha).F_m \leq \mu.f_x(\alpha)$$

$$f(x) \leq \begin{cases} \dfrac{-f_x(\alpha)}{b_x(\alpha)}, & \mu.b_x(\alpha) > 0 \\[2ex] \dfrac{-f_x(\alpha)}{b_x(\alpha)}, & \mu.b_x(\alpha) < 0 \end{cases}$$