Дисциплина: Численные методы

Лабораторное задание №3

**Отчёт**

Тема: «Метод обратных итераций определения пары с минимальным по модулю собственным значением симметричной матрицы простой структуры»

Выполнил:  
студент 3 курса 62 группы  
Дорохов М.В.

Проверила:  
старший преподаватель  
Фролова О.А.

**1. Постановка задачи**

Для решения линейной системы уравнений использовать метод Халецкого решения СЛАУ с ленточными матрицами

Требуется написать алгоритм нахождения минимального по модулю собственного значения и собственного вектора, соответствующего минимальному собственному значению.

Если для решения системы уравнений с матрицей А применяется один из методов LU разложения матрицы А, то один раз найденное LU разложение используется в дальнейшем.

Необходимо написать тест для средней оценки точности собственных значений, собственных векторов, меры точности, числа итераций.

При записи погрешностей используются 2–3 значащие цифры, не более.

**2. Теоретическая часть**

Зная собственные вектора и собственные значения симметричная матрица может быть получена через перемножение матриц, вам понадобятся следующие формулы и свойства:

Симметричная матрица — это матрица, у которой транспонированная матрица равна исходной: A = AT.

Если матрица P состоит из собственных векторов по столбцам, а матрица D содержит собственные значения на диагонали и нули вне диагонали, то симметричная матрица A может быть выражена как A = PDP(-1), где:

P — матрица, содержащая собственные векторы по столбцам.

D — матрица, содержащая собственные значения на диагонали и нули вне диагонали.

P(-1) — обратная матрица к матрице P.

Теперь приведем формулы для объяснения этого процесса:

1. Пусть P — матрица с собственными векторами по столбцам:  
   P = [v1, v2, ..., vn], где каждый vi является собственным вектором.
2. Пусть D — диагональная матрица с собственными значениями:  
   D = [[λ1, 0, ..., 0],  
   [0, λ2, ..., 0],  
   ...,  
   [0, 0, ..., λn]], где λi — собственные значения.
3. Тогда произведение PDP(-1) будет иметь вид:  
   PDP(-1) = [v1, v2, ..., vn] \* [[λ1v1, λ2v2, ..., λnvn]]
4. Это даст нам симметричную матрицу A:  
   A = PDP(-1),

Таким образом, через умножение матриц P (содержащей собственные векторы), D (содержащей собственные значения на диагонали), и P(-1) (обратной матрицы P) можно получить симметричную матрицу A.

**3. Алгоритм**

**Шаг 1. Генерация симметричной матрицы**

1. Инициализировать диапазоны λmin и λmax для собственных значений.

2. Сгенерировать диагональную матрицу D со случайными λ ∈ [λmin, λmax].

3. Создать случайную матрицу V (собственные векторы) в диапазоне [min, max].

4. Вычислить симметричную матрицу: A = V \* D \* V⁻¹ \* size (обратная матрица вычисляется методом Гаусса-Жордана).

**Функции:**

* multiply(): Стандартное умножение матриц (тройной цикл).
* inverseMatrix(): Обращение матрицы методом Гаусса-Жордана (расширенная матрица + элементарные преобразования).

**Шаг 2. Поиск минимального |λ| и вектора**

1. Инициализировать случайный вектор x.

2. Итеративно:

a. Нормализовать x → v.

b. Решить системуA·xnew = v → обновить x.

c. Вычислить приближение λ: q = vᵀ·x, λ = 1/q.

d. Оценить погрешности вектора (max|Δv|) и значения (|Δλ|).

e. Проверить критерии останова: точность или макс. итерации.

3. Вычислим меру точности r = ||A·v - λ·v||\_∞.

**Функции:**

normalizeVector(): Деление на норму (L₂).

Алгоритм генерирует симметричную матрицу через спектральное разложение и находит минимальное |λ| методом обратных итерайций с оценкой точности через меру точности.

**4. Алгоритм**

Оценим средние собственные значения, собственные вектора, r и количество итераций.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **#** | **Размерность** | **λ-диапазон** | **E** | **Ср. оценка собственного значения** | **Ср. оценка собственного вектора** | **Ср. r** | **Ср.  кол-во**  **итераций** |
| 1 | 10 | [-2; 2] | 1.0e-05 | 6.281e-06 | 2.688e-06 | -9.100e-07 | 105 |
| 2 | 10 | [-2; 2] | 1.0e-08 | 4.177e-09 | 5.615e-09 | -1.244e-09 | 56 |
| 3 | 10 | [-50; 50] | 1.0e-05 | 2.369e-06 | 6.605e-06 | -1.938e-05 | 33 |
| 4 | 10 | [-50; 50] | 1.0e-08 | 9.465e-10 | 6.887e-09 | -3.721e-08 | 175 |
| 5 | 30 | [-2; 2] | 1.0e-05 | 1.823e-04 | 1.499e-05 | -1.337e-06 | 145 |
| 6 | 30 | [-2; 2] | 1.0e-08 | 4.674e-09 | 2.358e-09 | -2.252e-10 | 128 |
| 7 | 30 | [-50; 50] | 1.0e-05 | 1.984e-06 | 5.774e-06 | -1.538e-05 | 33 |
| 8 | 30 | [-50; 50] | 1.0e-08 | 1.384e-09 | 6.994e-09 | -2.197e-08 | 155 |
| 9 | 50 | [-2; 2] | 1.0e-05 | 5.751e-06 | 2.398e-06 | -1.006e-07 | 82 |
| 10 | 50 | [-2; 2] | 1.0e-08 | 5.264e-09 | 1.258e-09 | -4.054e-11 | 30 |
| 11 | 50 | [-50; 50] | 1.0e-05 | 4.160e-06 | 1.080e-05 | -2.530e-05 | 150 |
| 12 | 50 | [-50; 50] | 1.0e-08 | 2.826e-09 | 6.704e-09 | -7.391e-09 | 62 |