به نام خدا

نام و نام خانوادگی: مهراد لیویان   کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Date: ....   Subject: تمرین اول - DS

جواب سوال ۱:

الف)

```
while (n>0){          →  θ(log n)
    for (int j=0 ; j<n ; j++)
        system . out . println("*") ;
    n = n/2
}
```

حلقه for به شکل زیر تکرار می شود:

$$n \rightarrow \frac{n}{2} \rightarrow \frac{n}{4} \rightarrow \frac{n}{8} \rightarrow \cdots \rightarrow \frac{n}{2^i}$$

$$\frac{n}{2^i} = 1 \longrightarrow i = \log_2^n$$

$$\sum_{i=0}^{\log_2^n} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{\log_2^n} \frac{1}{2^i} = n\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \simeq 2n$$

$T(n) = \theta(n)$

ب)

```
sum = 0;
for ( i=1 ; i<n ; i++)
    for(j=1 ; j<i*i ; j++)         } Σ_{j=1}^{i*i}
        if (j%i == 0)
            for(k=0 ; k<j ; k++)   } → Σ_{k=0}^{j} 1 = j
                sum++;   θ(1)
```

در آن شرط if ، i بار تامین می شود و حلقه for بعدی انجام می شود.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i*i} 1 + \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=0}^{j} 1\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \sum_{j=1}^{i} j\right)$$

Kian

ادامه در صفحه بعد

نام و نام خانوادگی: مهراد لیوبان   کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Date: .... **Subject:** تمرین سری ۱ — دل

ادامه جواب سوال ۱

ادامه ب)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i^{2}+\sum_{j=1}^{i} j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(i^{2}+(1+2+3+\dots+i)i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(i^{2}+\frac{i(i+1)}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(3i^{2}+i^{3}\right)$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(i^{3}\right)=1^{3}+2^{3}+3^{3}+\dots+n^{3}=\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4}$$

$$\longrightarrow T(n)=O(n^{4})$$

ج)

$for(i=n;\ i>2;\ i=i*\frac{1}{5}) \longrightarrow \log_5^n$

$for(int\ j=1;\ j<n;\ j++) \longrightarrow \Theta(1)$

$for(k=1;\ k<n;\ k++) \longrightarrow n$

$j*=2;$

حلقه for سوم به نوعی هر دفعه باعث می‌شود تا j=۲n شود و حلقه for دومی بجز همان دفعه اول اجرا نشود.

$T(n) = n\log^{n}$

نام و نام خانوادگی: مهراد لیوبان کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۴۰۱

Date: Subject: تمرین سری ۱ — ds

جواب سوال ۲:

الف)

$f(n) = 2n$

$g(n) = n$

$\longrightarrow 2n = O(n) \longrightarrow 2^{2n} \neq O(2^n)$

ب)

$f(n) \in O(g(n)) \xrightarrow{\exists c} f(n) \leq c\,g(n)$

$\xrightarrow{\div c} \dfrac{f(n)}{c} \leq g(n) \xrightarrow{\frac{1}{c} = c'} f(n)\,c' \leq g(n)$

$\longrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

ج)

اگر $f(n) = \begin{cases} 2 & n \% 2 = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ و $g(n) = 1$ آنگاه مثال نقض برای این رابطه هست.

$f(n) \neq O(g(n))$ و $f(n) \neq \Omega(g(n))$

Kian

نام و نام خانوادگی: مهراد لیوریان — کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۵

Date: .... Subject: تمرین سری اول - دل

جواب سوال ۳:

الف)

$T(n) = T(\sqrt{n}) + n$

$n = 2^m \longrightarrow T(2^m) = T(2^{\frac{m}{2}}) + 2^m$

$S(m) = T(2^m) \longrightarrow S(m) = S(\frac{m}{2}) + 2^m$

از رابطه قضیه اصلی داریم:

$\left. \begin{array}{l} f(m) = 2^m \\ m^{\log_2 1} = m^0 \end{array} \right\} \longrightarrow f(m) = \Omega(m^{\log_b a})$

$\longrightarrow S(m) = \Theta(2^m) \longrightarrow T(2^m) = \Theta(2^m)$

$\xrightarrow{2^m = n} T(n) = \Theta(n)$

ب)

$\xrightarrow{\div n} \frac{T(n)}{n} = \frac{\sqrt{n}\, T(n)}{n} + \frac{n \log(\log n)}{n}$

$\xrightarrow{S(n) = \frac{T(n)}{n}} S(n) = S(\sqrt{n}) + \log\log(n)$

$\xrightarrow{n = 2^{2^m}} S(2^{2^m}) = S(2^{2^{m-1}}) + m$

$T(n) = \Theta(n(\log\log n)^2)$

$\xrightarrow{F(m) = S(2^{2^m})} F(m) = F(m-1) + m$

$\longrightarrow F(m) = F(1) + m + (m-1) + \cdots + 1 = \Theta(m^2)$

$\longrightarrow S(2^{2^m}) = F(m) = \Theta(m^2) \xrightarrow{n = 2^{2^m}} S(n) = \Theta((\log\log n)^2)$

$\longrightarrow T(n) = \Theta(n(\log\log n)^2)$

Kian

ادامه جواب سوال ۳:

ج)
$$T(n) = T\left(\frac{n}{۲}\right) + n(۵ - \cos(n))$$
$\underbrace{(۵ - \cos(n))}_{\text{عددی ثابت} = c_1}$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{۲}\right) + c_1 n$$

با استفاده از قضیه اصلی:

$$a = ۱ \quad b = ۲ \quad f(n) = n$$

$$n^{\log_b^a} = n^{\log_۲^۱} = n^0 = ۱ \longrightarrow f(n) = \Omega(n^{\log_b^a})$$

$$\longrightarrow T(n) = \Theta(f(n)) \longrightarrow T(n) = \Theta(n)$$

جواب سوال ۴:

الف)
$$\log(n),\ n^n,\ \sum_{i=1}^{n} n - ۲i,\ \log^{(n!)},\ ۲^n,\ \sqrt[۱۰]{n}$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{۲}} n - ۲i = (n-۲) + (n-۴) + \dots + 0 = \frac{(n-۲)\frac{n}{۲}}{۲} = \frac{n^۲}{۴} - \frac{n}{۲}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^a(n)}{n^b} = 0 \longrightarrow \log(n) < \frac{n^۲}{۴} - \frac{n}{۲} \leq \sum_{i=1}^{n} n - ۲i$$
$$\longrightarrow \log(n) < n^{\frac{۱}{۱۰}} \leq \sqrt[۱۰]{n}$$

$$\log^{(n!)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log^{n^n} = n\log^n \longrightarrow n\log^n < \frac{n^۲}{۴} - \frac{n}{۲} \leq \sum_{i=1}^{n} n - ۲i$$
$$\longrightarrow n\log^n > \sqrt[۱۰]{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} n - ۲i < ۲^n \qquad ۲ < n \longrightarrow ۲^n < n^n$$

پس:
$$\log^n < \sqrt[۱۰]{n} < \log^{(n!)} < \sum_{i=1}^{n} n - ۲i < ۲^n < n^n$$

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۰۰۱ نام و نام خانوادگی : مهراد لیوبان

Date: Subject: تمرین اول - دل

۱

ادامه جواب سوال ۴ :

ب) $n\log(\log(n))$ و $n^{\log(\log(n))}$ و n^{π} و $(\log(n))!$

همیشه مقدار ثابت ما مقداری از هر عبارت n دار رشد کمتری دارد.

$\pi < \log(n) \longrightarrow \pi < \log(\log(n)) \longrightarrow n^{\pi} < n^{\log(\log(n))}$

$n^{\log(\log(n))} = 2^{\log(\log(n))\log n}$ (1)

$n! \xrightarrow{n\to\infty} n^n \Longrightarrow (\log n)! \longrightarrow (\log(n))^{\log n}$ (2)

$2 < \log(n) \longrightarrow 2^{\log(n)} < (\log n)^{\log(n)}$

$\xrightarrow{\text{(1) و (2) و } \log\log n \text{ صعودی است}} 2^{\log(n)\log(\log(n))} < (\log n)^{\log(n)} \longrightarrow n^{\log(\log(n))} < (\log n)!$

$\log(n) < n \longrightarrow \log(\log(n)) < n \xrightarrow{\times n} n\log(\log(n)) < n^2$

$\xrightarrow{2<\pi} n\log(\log(n)) < n^{\pi}$

پس : $n\log(\log(n)) < n^{\pi} < n^{\log(\log(n))} < (\log(n))!$

ج) $\sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}$ و $n2^n$ و $n^{n\log\log(n)}$ و $\log n!$ و n^3 و 2^n

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \longrightarrow n^3 < 2^n < n2^n$

$\lim_{n\to\infty} \log n! = \log n^n = n\log n \xrightarrow{\log(n)<n} n\log(n) < n^2$

$\sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!} = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \dots = e^n > 2^n$ و $e^n < n2^n$

ادامه در صفحه بعد

نام و نام خانوادگی: مهرداد لیوبان		کد دانشجویی: ۴۰۰۱۰۱۰۸۱

Date:		Subject: تمرین سری اول - ds

ادامه جواب سوال ۴ (قسمت ج) :

$2^n < n^n \xrightarrow{\times n} n2^n < n^{n+1} \xrightarrow[n+1 < n\log^n]{} n2^n < n^{n\log^n}$

$\longrightarrow n2^n < n^{n\log^n(\log\log^n)}$

پس :

$$\longrightarrow \log^{n!} < n^2 < 2^n < \sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!} < n2^n < n^{n\log\log^n}$$

جواب سوال ۵ :

الف)

```
func(n){
  if n<=1
     return          } θ(1)
  for i in to n*n:  } θ(n^2)
     // o(1)
  func(n-2);  ——> T(n-2)
}
```

$T(n) = T(n-2) + n^2 + 1$

$T(n-2) = (n-2)^2 + 1 + T(n-4)$

$T(n-4) = (n-4)^2 + 1 + T(n-6)$

$T(n) = T(n-6) + n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + 1+1+1$

$T(n) = T(\underbrace{n-2i}_{=0}) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} (n-2i)^2 + \frac{n}{2}$

$\rightarrow n = 2i \rightarrow \frac{n}{2} = i$

$\longrightarrow T(n) = T(0) + \underbrace{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} (n-2i)^2}_{O(\frac{n}{2} \times n^2) = O(n^3)} + \frac{n}{2} \longrightarrow T(n) = \frac{n}{2}(n^2)$

$\longrightarrow T(n) = \theta(n^3)$

Kian

نام و نام خانوادگی: مهرا دلعوتان   کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Date: .... **Subject:** تمرین سری اول – DS

ادامه جواب سوال ۳:

ب) $\boxed{T(a,b) = O(\log^{\min(a,b)})}$

```
func(a, b):
    if (b == 0):
        return a
    return func(b, a%b)
```

سه مرحله داریم:

$f(a,b) \rightarrow f(b, a\%b) \rightarrow f(a\%b, b\%(a\%b))$

که مرحله سوم نصف شده مرحله اول است و یک $O(1)$ بین آن ها قرار دارد.

این الگوریتم ب.م.م دو عدد را به صورت تابع بازگشتی محاسبه می کند

$f(a,b) \longrightarrow f(b, a\%b) \longrightarrow f(a\%b, b\%(a\%b))$

$f(a,b) = f(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) + 1$

$f(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

$T(n) = T(\frac{n}{2}) + O(1) \xrightarrow{\text{قضیه اصلی}} T(n) = \log^{(n)} \xrightarrow{n=\min(a,b)} \boxed{T(a,b) = O(\log^{(\min(a,b))})}$

قضیه اصلی: $a=1$, $b=2$, $f(n)=1$ $\rightarrow n^{\log_b^a} = n^{\log_2^1} = n^0 = 1$ $\Big\}$ $T(n) = O(1 \cdot \log^n) = O(\log n)$

جواب سوال ۴:

اگر اعضای مجموعه را a_1 و a_2 و ... و a_n بنامیم داریم:

$a_1 \quad a_1+a_2 \quad a_1+a_2+a_3 \quad \dots \quad a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$

$a_2 \quad a_2+a_3 \quad a_2+a_3+a_4 \quad \dots \quad a_2+a_3+\dots+a_n$

$\vdots$

a_n

شبه کد:

```
sum = 0
for i=1 to n
    sum = sum + a[i-1] * (n+1-i) (i+1)
print (sum)
```

برای هر a_i در مجموعه توسط $i-1$ عضو قبل $n-i+1$ بار جمع شده است و برای خودش $n-i+1$ بار جمع می شود و توسط بعدی ها جمع شده نمی شود،

پس تعداد تکرار هر a_i، $i(n-i+1)$ هست.

a_i تعداد تکرار $= (i-1)(n-i+1) + (n-i+1) = \underbrace{i(n-i+1)}$

Kian