نام و نام خانوادگی: عماد ایمان ـ نام جدا

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Year. Month. Date.

Subject:

جواب سوال ۱:

ابتدا دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ w = xy \end{cases}$$

$$z^2 = x^2+y^2 \longrightarrow z^2 - x^2 = y^2$$

$$\pm\sqrt{z^2-x^2} = y_{1,2}$$

$$w = x\left(\pm\sqrt{z^2-x^2}\right) \xrightarrow{\text{توان ۲}} w^2 = x^2\left(z^2-x^2\right)$$

$$\longrightarrow w^2 = x^2z^2 - x^4 \longrightarrow x^4 - x^2z^2 + w^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{z^2 \pm \sqrt{z^4-4w^2}}{2} \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{z^2 \pm \sqrt{z^4-4w^2}}{2}}$$

$$y = \frac{w}{x} \longrightarrow y = \frac{\pm w\sqrt{2}}{\sqrt{z^2 \pm \sqrt{z^4-4w^2}}}$$

چهار جواب داریم:

$$(x_1, y_1) = \left(\sqrt{\frac{z^2+\sqrt{z^4-4w^2}}{2}} \,,\, \frac{\sqrt{2}\,w}{\sqrt{z^2+\sqrt{z^4-4w^2}}}\right)$$

$$(x_2, y_2) = \left(-\sqrt{\frac{z^2+\sqrt{z^4-4w^2}}{2}} \,,\, \frac{-\sqrt{2}\,w}{\sqrt{z^2+\sqrt{z^4-4w^2}}}\right)$$

$$(x_3, y_3) = \left(-\sqrt{\frac{z^2-\sqrt{z^4-4w^2}}{2}} \,,\, \frac{-\sqrt{2}\,w}{\sqrt{z^2-\sqrt{z^4-4w^2}}}\right)$$

$$(x_4, y_4) = \left(\sqrt{\frac{z^2-\sqrt{z^4-4w^2}}{2}} \,,\, \frac{\sqrt{2}\,w}{\sqrt{z^2-\sqrt{z^4-4w^2}}}\right)$$

نام و نام خانوادگی: مهرداد لعوان — کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۱:

حال با استفاده از فرمول $f_{ZW}(z,w) = \sum_i \frac{f_{XY}(x_i,y_i)}{|J(x_i,y_i)|}$ آن را حساب می‌کنیم:

$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y & x \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow |J(x,y)| = \frac{(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{z^4-4w^2}}{|z|}}$$

سپس از صفحه پیش x_1 و y_1 را برای $J_{(x_1,y_1)}$ استفاده می‌کنیم همچنین برای x_2 و y_2 و ... و سپس در فرمول زیر می‌گذاریم.

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_{i=1}^{4} \frac{f_{XY}(x_i,y_i)}{|J(x_i,y_i)|}$$

از آنجا که $x_1^2 = x_2^2$ و $x_3^2 = x_4^2$ پس می‌توان آن را به دو قسمت جدا کرد:

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{|J(z,w)|}\left(2f_{(x_3,y_2)} + 2f_{(x_4,y_4)}\right)$$

نام و نام خانوادگی: مهرداد الوردان   کد دانشجویی: ٨١٩١٩٠١٥٠١

Subject: Year.   Month   Date.

جواب سوال ۲:

الف)

ابتدا $f_{Y|X}(y|x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{xy}{f_X(x)}$$

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 xy\,dy = \frac{xy^2}{2}\Big|_x^1$$

$$\longrightarrow f_X(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}$$

$$\longrightarrow f_{Y|X}(y|x) = \frac{xy}{\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}} \qquad x<y<1$$

$$\longrightarrow f_{Y|X}(y|\tfrac{1}{3}) = \frac{y}{\frac{1}{2}-\frac{1}{18}} = \frac{y}{\frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{18}\,9}}$$

$$\longrightarrow f_{Y|X}(y|x=\tfrac{1}{3}) = \frac{9}{4}y \qquad \tfrac{1}{3}<y<1$$

$$E[Y|X=\tfrac{1}{3}] = \int_{\frac{1}{3}}^1 y f_{Y|X}(y|x=\tfrac{1}{3})\,dy = \int_{\frac{1}{3}}^1 y(\tfrac{9}{4}y)\,dy$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{9}{4}y^2\,dy = \frac{3}{4}y^3\Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{3}{4}\overbrace{\cancel{(1-\tfrac{1}{27})}}^{\frac{26}{27}} = \frac{26}{9\times 4} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$E[Y^2|X=\tfrac{1}{3}] = \int_{\frac{1}{3}}^1 y^2(\tfrac{9}{4}y)\,dy = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{9}{4}y^3\,dy$$

$$\frac{9}{4}\frac{y^4}{4}\Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{9}{16}\overbrace{\cancel{(1-\tfrac{1}{81})}}^{\frac{80}{81}} = \frac{\cancel{10}\,5}{9\times\cancel{2}\,1} = \frac{5}{9}$$

نام و نام خانوادگی: مهرداد [illegible]   کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۴۵۱

Subject: Year.   Month.   Date.

ادامه جواب سوال ۲:

ادامه الف)

$$Var(Y|X=\tfrac{1}{4}) = E[Y^2|X=\tfrac{1}{4}] - \left(E[Y|X=\tfrac{1}{4}]\right)^2$$

$$Var(Y|X=\tfrac{1}{4}) = \frac{5}{9} - \left(\frac{14}{18}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{196}{324} = \boxed{0.033}$$

ب)

$$cov(0.5X, X+Y-2) = E[(0.5X)(X+Y-2)] - E[0.5X]E[X+Y-2]$$

$$= E[0.5X^2 + 0.5XY - X] - 0.5E[X](E[X]+E[Y]-2)$$

$$= \frac{1}{2}E[X^2] + \frac{1}{2}E[XY] - \cancel{E[X]} - \frac{E[X]^2}{2} - \frac{E[X]E[Y]}{2} + \cancel{E[X]}$$

$$= \frac{1}{2}\left(Var(X) + cov(X,Y)\right)$$

$$E[XY] = \int_0^1\int_0^y yx(xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{y^5}{3}\,dy = \frac{y^6}{18}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{18}}$$

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\right)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{15}}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y xy\,dx = \frac{y^3}{2}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y\frac{y^3}{2}\,dy = \frac{y^5}{10}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{10}}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\right)dx = \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

$$cov(0.5X, X+Y-2) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{Var(X)}_{\frac{1}{24}-\left(\frac{1}{15}\right)^2} + \underbrace{cov(X,Y)}_{\frac{1}{18}-\frac{1}{10}\times\frac{1}{15}}\right) = \frac{1}{2}(0.0372 + 0.0488) = \boxed{0.043}$$

omid 20×30

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱ — نام و نام خانوادگی مهرداد الیوطیان

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۳:

الف)

$$f_S(s)=\int_0^s f_X(s-y)\,f_Y(y)\,dy$$

$$f_S(s)=\int_0^s \lambda e^{-\lambda(s-y)}\,\mu e^{-\mu y}\,dy$$

$$f_S(s)=\lambda\mu\int_0^s e^{-\lambda s}e^{\lambda y}e^{-\mu y}\,dy$$

$$f_S(s)=\lambda\mu e^{-\lambda s}\int_0^s e^{y(\lambda-\mu)}\,dy$$

$$f_S(s)=\frac{\lambda\mu e^{-\lambda s}}{\lambda-\mu}\,e^{y(\lambda-\mu)}\Big|_0^s$$

$$f_S(s)=\frac{\lambda\mu e^{-\lambda s}}{\lambda-\mu}\left(e^{s(\lambda-\mu)}-1\right) \qquad \left.\begin{matrix} y>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow s>0$$

$$F_S(s)=\int_0^s f_S(s)\,ds=\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\int_0^s \left(e^{-\mu s}-e^{-\lambda s}\right)ds$$

$$\rightarrow F_S(s)=\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(\frac{-e^{-\mu s}}{\mu}+\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda}\right)\Bigg|_0^s$$

$$\rightarrow F_S(s)=\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(\frac{e^{-\lambda s}-1}{\lambda}+\frac{1-e^{-\mu s}}{\mu}\right)$$

omid 20×30

نام و نام خانوادگی: [illegible] — کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۰۱۵۰۰۱

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۳:

ب)

ابتدا از دو متغیر R و S استفاده می‌کنیم و $f_{R,S}$ را حساب می‌کنیم و سپس از آن f_R را حساب می‌کنیم؛

$$\begin{cases} R = \dfrac{X}{X+Y} & \longrightarrow X = SR \\ S = X+Y & \longrightarrow Y = S - SR \end{cases}$$

$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} \dfrac{y}{(x+y)^2} & \dfrac{-x}{(x+y)^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{y+x}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y}$$

$$\longrightarrow |J(x,y)| = \frac{1}{S}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y}$$

$$f_{R,S}(r,s) = \sum_i \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{|J(x_i,y_i)|}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{S}} \sum_{i=1}^{1} f_{XY}(x_i, y_i) \frac{y = S - SR}{x_1 = SR} \; S \lambda e^{-\lambda SR} \mu e^{-\mu(S - SR)}$$

$$f_{R,S}(r,s) = S \lambda \mu e^{-\lambda SR - \mu S + \mu SR}$$

omid 20-30

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱ نام و نام خانوادگی: مهراد الیوبان

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۳:
(ادامه ...)

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{R,S}(r,s)\, ds = \int_0^{\infty} s\lambda\mu\, e^{-\lambda sR - \mu(s - sR)}\, ds$$

$$= \lambda\mu \int_0^{\infty} s\, e^{s(-\lambda R - \mu + \mu R)}\, ds$$

$$= \lambda\mu \left(\frac{-s}{+\lambda R + \mu - \mu R} e^{s(-\lambda R - \mu + \mu R)} - \frac{e^{s(-\lambda R - \mu + \mu R)}}{(+\lambda R + \mu - \mu R)^2} \right)\Bigg|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\lambda\mu}{(+\lambda R + \mu - \mu R)^2} \longrightarrow f_R(r)$$

$$F_R(r) = \int_0^r f_R(r)\, dr = \lambda\mu \int_0^r \frac{1}{(R(\lambda - \mu) + \mu)^2}\, dr$$

$$= \lambda\mu \left(\frac{1}{(\mu - \lambda)((\lambda - \mu)R + \mu)} \right)\Bigg|_0^r$$

$$\xrightarrow{\text{یا } \lambda > \mu} \lambda\mu \left(\left(\frac{-1}{(\mu - \lambda)\mu} \right) + \frac{1}{(\mu - \lambda)((\lambda - \mu)r + \mu)} \right)$$

$$\downarrow$$

$$F_R(r)$$

نام و نام خانوادگی: مهراد لعویان   کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۰۷۵۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۵:

الف)

$$P_{X,Y}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} P(X|N)\,P(Y|N)\,P_N(n)$$

$$P_{X|N}=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$P_{Y|N}=\binom{n}{y}(1-p)^{y}p^{n-y}$$

$$P_{X,Y}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^{x}(1-p)^{n-x}\frac{n!}{y!(n-y)!}(1-p)^{y}p^{n-y}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}$$

$$\overset{n=x+y}{\underset{\lambda^{n}=\lambda^{x}\lambda^{y}}{=}}e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^{x}((1-p)\lambda)^{y}}{x!\,y!}=\underbrace{\frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^{x}}{x!}}_{P_X}\times\underbrace{\frac{e^{-(1-p)\lambda}((1-p)\lambda)^{y}}{y!}}_{P_Y}$$

مستقل هستند و می توان P_X و P_Y را از آن ها جدا کرد.

ب)

$$P_X=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n!}\,\lambda^{n}}{x!(n-x)!\,\cancel{n!}}p^{x}(1-p)^{n-x}=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}p^{x}}{x!}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-x}(1-p)^{n-x}}{(n-x)!}}_{e^{\lambda(1-p)}}$$

$$=\frac{\lambda^{x}\cancel{e^{-\lambda}}p^{x}\cancel{e^{\lambda}}e^{-p\lambda}}{x!}=\frac{(p\lambda)^{x}e^{-p\lambda}}{x!}$$

omid 20×30

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۱۱۰۱ نام و نام خانوادگی: مهراد لعیبان

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۴ :

ادامه ب) :

از تقارن بین X و Y می توان P_Y را نوشت و فقط باید توجه داشت که به جای P باید 1-P را نوشت :

$$P_Y(Y) = e^{-(1-P)\lambda}\frac{(\lambda(1-P))^Y}{Y!}$$

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۰۱۰۱ نام و نام خانوادگی: [illegible]

Subject: Year. Month. Date.

ادامه سوال ۵:

الف)

$$f_{U_1U_2} \overset{\text{مستقل}}{=} f_{U_1}\cdot f_{U_2} = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0<u_1, u_2<2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$P(U_1 \mid U_1>U_2) = \frac{P(U_1, U_1>U_2)}{P(U_1>U_2)} = \frac{P(U_1>U_2 \mid U_1=u_1)P(U_1)}{\underbrace{P(U_1>U_2)}_{\text{احتمال کل}}}$$

$$= \frac{F_{U_2}(u_1)}{\int_0^2 P(U_1>U_2 \mid U_1=u_1)P(U_1=u_1)\,du_1}$$

$$= \frac{\frac{u_1}{2}}{\int_0^2 \underbrace{P(U_1>U_2 \mid U_1=u_1)}_{F_{U_2}}\,du_1} = \frac{\frac{u_1}{2}}{\int_0^2 \frac{u_1}{2}\,du_1} = \frac{\frac{u_1}{2}}{\underbrace{\cancel{\frac{u_1^2}{4}\Big|_0^2}}_{1}} = \boxed{\frac{u_1}{2}}$$

$$P(U_2 \mid U_1>U_2) = \frac{P(U_2, U_1>U_2)}{P(U_1>U_2)} = \frac{P(U_2)P(U_1>U_2 \mid U_2=u_2)}{P(U_1>U_2)}$$

$$= \frac{1-F_{U_1}(u_2)}{\int_0^2 P(u_1>U_2 \mid U_2)P(u_2)\,du_2} = \frac{1-\frac{u_2}{2}}{\int_0^1 1-\frac{u_2}{2}\,du_2} = \frac{1-\frac{u_2}{2}}{u_2-\frac{u_2^2}{4}\Big|_0^2}$$

$$= \frac{1-\frac{u_2}{2}}{2-1} = \boxed{1-\frac{u_2}{2}}$$

omid 20×30

نام و نام خانوادگی: مهراد لیوارلمان   کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

ب)

$$E[U_1 \mid U_1 > U_2] = \int_0^2 u_1 f_{U_1 \mid U_1 > U_2} \, du_1$$

$$= \int_0^2 u_1 \frac{u_1}{2} \, du_1 = \frac{u_1^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{\cancel{6}} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$E[U_2 \mid U_1 > U_2] = \int_0^2 u_2 f_{U_2 \mid U_1 > U_2} \, du_2$$

$$= \int_0^2 u_2 \left(1 - \frac{u_2}{2}\right) du_2 = \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_2^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{6}$$

$$= \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$