

# دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر آمار و احتمال مهندسی



تمرین اول - متغیرهای تصادفی، واریانس و توزیع های گسسته

طراح: مهدی جمال خواه

سوپروایزر: نسا عباسی

تاریخ تحویل: ۷ آبان ۱۴۰۲

## ۱. برد قطعی

۲۰ نمره

یک بازی را در نظر بگیرید که اگر شما  $x$  دلار شرط ببندید، با احتمال  $\frac{1}{4}$ ،  $x$  دلارتان را می بازید و با احتمال  $\frac{3}{4}$ ،  $x$  دلارتان را بعلاوه  $x$  دلار دیگر خواهید برد. شما با این استراتژی وارد بازی می شوید: بار اول یک دلار شرط می بندید و اگر باختید، بار بعد دو برابر سری قبل شرط می بندید و همین طور ادامه می دهید تا در نهایت برنده شوید؛ یا اینکه پول کافی برای ادامه بازی نداشته باشید. (ما این حالت رو باخت کامل می نامیم) فرض کنید که  $N = 2^k$  دلار پول دارید و وارد این بازی میشوید:

الف) اگر برای شما باخت کامل اتفاق افتد چند دلار را از دست داده اید؟ (۵ نمره)

ب) اگر برنده شوید چند دلار خواهید برد؟ (۵ نمره)

ج) چقدر احتمال دارد که شما هرگز برنده نشوید؟ (یعنی باخت کامل اتفاق بیافتد). (۵ نمره)

د) همان استراتژی را در نظر بگیرید با این تفاوت که اگر بردید دوباره از اول بازی را شروع می کنید، چقدر احتمال دارد که پول شما دو برابر شود؟ (قبل از اینکه به باخت کامل برسید) (۵ نمره)

## ۲. نامه رسان

۱۵ نمره

یک نامه رسان باید  $n$  نامه را پخش کند. او می خواهد بداند که اگر به جای اینکه هر نامه را دقیقاً به گیرنده آن بدهد، به صورت کاملاً تصادفی و مستقل از یکدیگر پخش کند (یعنی همه ی  $n!$  با شانس یکسانی اتفاق می افتد):

الف) به طور میانگین چند نفر نامه ی خود را دریافت میکنند؟ (۵ نمره)

ب) چقدر احتمال دارد دقیقاً  $(n - 1)$  نفر نامه ی خود را دریافت کنند؟ (۵ نمره)

ج) چقدر احتمال دارد که هیچ کس نامه ی خود را دریافت نکند؟ (۵ نمره)

## ۳. سرعت تولید

۲۵ نمره

در یک شرکت ماشین سازی  $n$  کارگر روی یک ماشین، کاری مستقل از دیگری انجام می دهند. کارگر  $i$  ام با احتمال  $p_i$  در یک روز کارش را با موفقیت انجام می دهد اما اگر موفق نشد فردا دوباره از اول آن کار را انجام خواهد داد. مدیر عامل شرکت می خواهد بداند که:

الف) احتمال اینکه ساخت یک ماشین  $k$  روز طول بکشد چقدر است؟ (۱۵ نمره)

ب) به صورت میانگین ساخت یک ماشین چقدر طول خواهد کشید؟ (۱۰ نمره)

## ۴. باگ پنتیوم

۱۰ نمره

همان طور که به احتمال زیاد در درس برنامه نویسی پیشرفته دیده اید برای هر پروژه چند نمونه آزمایش (test case) روی برنامه شما اجرا می شود و بر اساس آن نمره شما تعیین خواهد شد. حال فرض کنید که برنامه شما باید دقیقاً ۱۰۰ ویژگی مستقل از یکدیگر داشته باشد،

اما شما می دانید که ۵ تا از آن ها باگ دارد. اگر ۱۰ تا مورد آزمایشی (test case) روی برنامه شما اجرا شود (هر کدام دقیقاً یک ویژگی متفاوت را آزمایش می کنند) و به ازای هر تست که جواب اشتباه دهد ۲/۵ نمره از ۱۰۰ نمره شما کم می شود:

الف) چقدر احتمال دارد که نمره شما حداقل ۹۵ شود؟ (۵ نمره)

ب) چقدر احتمال دارد که دستیار آموزشی متوجه تمام باگ های برنامه شما شود؟ (۵ نمره)

## ۳۰ نمره

## ۵. ایستگاه مترو

یک مدل از خط شماره ۱ مترو را در نظر بگیرید که به بالای شهر می رود: فرض کنید که این مترو یک برنامه زمانبندی ثابت و قطعی دارد و هر ۱۰ دقیقه یک قطار در هر ایستگاه وارد می شود و تمام مسافرانی را که می خواهند به سمت بالای شهر بروند، سوار می کند. فرض کنید تمام مسافران بدون تأخیر و بدون تغییر در برنامه زمانبندی، سوار و پیاده می شوند. ایستگاه ها از ۱ تا  $m$  به صورت افزایشی از پایین به سمت بالای شهر شماره گذاری شده اند. فرض کنید ورود مسافران به سمت بالای شهر در هر ایستگاه بر اساس توزیع پواسون مستقل با نرخ  $\lambda_i$  در دقیقه در ایستگاه  $i$  ام باشد،  $1 \leq i \leq m-1$ . (ایستگاه  $m$  آخرین ایستگاه است و هیچ کس در این ایستگاه سوار نمی شود تا به بالای شهر برود). فرض کنید هر فرد که وارد ایستگاه  $i$  ام می شود، مستقل از هر کس دیگری با احتمال  $P_{i,j}$  در ایستگاه  $j$  ام پیاده می شود پس به ازای هر  $i$  داریم:  $\sum_{j=i+1}^m P_{i,j} = 1$ . یک سفر به سمت بالای شهر از این مترو را در نظر بگیرید که از ایستگاه اول شروع می شود (در ایستگاه اول نیز همان فرض ها برقرار است).  $D_j$  را تعداد افرادی که در ایستگاه  $j$  ام پیاده می شوند در نظر بگیرید ( $2 \leq j \leq m$ ).

الف) میانگین و واریانس  $D_j$  را بدست آورید. (۱۵ نمره)

ب)  $P(D_2 = 2, D_3 = 3)$  را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

## امتیازی – ۱۰ نمره

## ۶. Perfect shuffle

یک دسته کارت ۵۲ تایی داریم و می خواهیم که آن را بر بزنیم تا به توزیع یکنواخت برسیم، یعنی هر  $52!$  حالت ممکن با شانس یکسانی اتفاق بیفتد. برای اینکار از یک نوع بر زدن خاص استفاده میکنیم به این صورت که کارت بالایی را بر میداریم و با احتمال یکسان در یکی از ۵۲ جای ممکن قرار میدهم (بین کارت ها، روی کارت بالایی و زیر کارت ها). چند بار باید اینکار را انجام دهیم تا به توزیع یکنواخت برسیم؟