کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۴۵۱ — به نام خدا — شهراد لیویان

Date: .... Subject: ....

جواب سوال ۱:

الف)

فرض می کنیم در مرحله x اُم باختیم:

مبلغ از دست رفته: $\sum_{i=1}^{x} 2^{i-1} = \sum_{j=0}^{x-1} 2^{j} = 2^{x} - 1$

اگر کامل ببازیم باید پول ما از 2^{x} کمتر شود:

$2^{k} - (2^{x} - 1) \le 2^{x} \longrightarrow 2^{k} + 1 \le 2^{x+1} \longrightarrow 2^{k-1} + \frac{1}{2} \le 2^{x} \rightarrow k-1 < x$ (۲)

همچنین می دانیم x باید از k کوچکتر مساوی شود. $x \le k$ (۱)

(۱) و (۲) $\longrightarrow k-1 < x \le k \longrightarrow x = k$

پس از باخت کامل $2^{k} - 1$ دلار از دست می رود.

دلار از دست رفته: $2^{k} - 1$

مثلا اگر k=5 باشد اول ۳۲ دلار داریم و ۳۱ دلار از دست می دهیم.

$32 \xrightarrow{-1} 31 \xrightarrow{-2} 29 \xrightarrow{-4} 25 \xrightarrow{-8} 17 \xrightarrow{-16} 1$

$-1-2-4-8-16 = \boxed{-31}$

ب)

فرض کنید در مرحله i اُم برنده شویم تا قبل از آن $2^{i}-1$ یک دلار از دست داده ایم و در مرحله i اُم 2^{i} دلار می بریم پس:

مقدار از دست رفته: $\sum_{i=1}^{i} 2^{i-1} = 2^{i} - 1$

مقدار برده شده: 2^{i}

$\longrightarrow$ ۱ دلار برنده شدیم

پس اگر برنده شویم ۱ دلار می بریم.

ادامه در صفحه بعد

Kian

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۱۰
مهراد لیمویان

ادامه جواب سوال ۱:

ج)

با توجه به توزیع دوجمله‌ای $p=\frac{1}{2}$ و $q=\frac{1}{2}$ و در $X=0$ مرحله از k مرحله باید پیروز شویم:

$$P\{X=0\} = \binom{k}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

پس احتمال باخت کامل $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ هست.

د)

از قسمت (ب) می‌دانیم با هر بار بردن ۱ دلار برنده می‌شویم پس برای آنکه پول ما دو برابر شود (پول ما در اول 2^k هست) باید 2^k بار ببریم.

از قسمت ج فهمیدیم احتمال باخت کامل $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ هست، پس احتمال بردن $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$ هست.
ما احتیاج داریم 2^k بار این بازی را ببریم:

باید توجه داشت که در مرحله بعد از بازی 2^k-1 اُم ما $2^{k+1}-1$ دلار داریم پس احتمال باخت کامل ما $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ می‌شود:

$$P = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^{2^k-1} \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$$

مراد لیوریان

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Date: .... **Subject:** ....

جواب سوال ۳ :

الف)

این سوال از نوع یک توزیع هندسی هست که چون برای هر فرد مستقل هست باید p آن ها را در هم ضرب کنیم تا کار هر فرد تا روز k ام تمام شود.

احتمال موفقیت فرد i ام در روز : p_i ؛ احتمال شکست فرد i ام در روز : $1-p_i$

باید تمام n فرد کار را تا روز k ام تمام کرده باشند بنابراین باید تمامی احتمالات آن ها را تا روز k ام بدست آورد و تا روز $k-1$ ام از آن کم کرد زیرا ممکن است همه کار را در روز ۲ تمام کنند و فرد n ام کار را در روز k ام تمام کند.

افراد از هم مستقل هستند پس احتمال آن ها در هم ضرب می شوند.

$$P_{\text{مطلوب}} : P\{X \le k\} - P\{X \le k-1\}$$

$$\boxed{P_{\text{مطلوب}} = \prod_{i=0}^{n} \left(\sum_{t=0}^{k} (1-p_i)^{t} p_i \right) - \prod_{i=0}^{n} \left(\sum_{t=0}^{k-1} (1-p_i)^{t-1} p_i \right)}$$

ب)

می دانیم میانگین برای توزیع هندسی $\frac{1}{p}$ هست ($E[X] = \frac{1}{p}$)

پس برای اینکه کار در روز k ام تمام شود باید تمامی کار افراد تا آن روز را تمام کرده باشند. (به عنوان مثال) باید ماکزیمم $E_i[X]$ ها گرفته شود.

$$E[X] = \max(E_1[X], E_2[X], \ldots, E_n[X])$$

$$E[X] = \frac{1}{\min(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$$

Kian

مهراد لیویان

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Date: .... Subject: ....

جواب سوال ۴ :

الف)

سوال از نوع توزیع فوق هندسی هست. بدین صورت که ۱۰۰ ویژگی داریم و ۵ تای آن خراب و ۹۵ تای آن سالم هست.
از این ۱۰۰ تا ۱۰ تا انتخاب می کنیم و می خواهیم بدانیم چندتای آن ها خراب و چندتای آن سالم هست.

$$P(X) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

N: تعداد کل تست کیس ها

M: تعداد تست کیس های خراب

n: تعداد تست کیس های انتخاب شده

X: تعداد تست های مورد نظر

حال الان می خواهیم حداقل نمره ها ۹۵ شود باید حداکثر ۲ تا از تست ها غلط در بیاید.
از CDF استفاده می کنیم:

$$F_X(2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$F_X(2) = \frac{\binom{5}{0} \times \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{1}\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{95}{8}}{\binom{100}{10}}$$

ب) چون هر تست یکی از ۵ ویژگی را هدف قرار می دهد پس کافی است ۵ تست غلط باشد.

$$P(5) = \frac{\binom{5}{5}\binom{95}{5}}{\binom{100}{10}}$$

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱ مهراد لیویان

Date: .... Subject: ....

جواب سوال ۵ :

الف) $E[D_j] = \sum_{i=1}^{j-1} P(i,j) \times \underbrace{\text{(تعداد افرادی که به طور میانگین در ایستگاه i ام سوار می شوند.)}}_{E[X_i]}$

با توجه به توزیع پواسون : $E[X] = \lambda_i$:

$E[X_i] = 10\lambda_i \longrightarrow$ هر ایستگاه ۱۰ دقیقه است

پس : میانگین : $E[D_j] = 10 \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i P(i,j)$

برای محاسبه واریانس :

$$E[(D_j)^2] = \sum_{i=1}^{j-1} P(i,j) \times (E[X_i])^2$$

$$E[(D_j)^2] = 100 \sum_{i=1}^{j-1} (\lambda_i)^2 P(i,j)$$

$$Var(D_j) = 100 \sum_{i=1}^{j-1} (\lambda_i)^2 P(i,j) - 100 \left(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i P(i,j) \right)^2$$

ب) از توزیع دوجمله ای داریم :

① : $P\{D_2 = 2\} = \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k}{2} (P(1,2))^2 (1 - P(1,2))^{k-2} \frac{e^{-10\lambda_1}(10\lambda_1)^k}{k!}$

② : $P\{D_3 = 3\} = \sum_{t=0}^{3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{t} P(1,3)^t (1 - P(1,3))^{k-t} \frac{e^{-10\lambda_1}(10\lambda_1)^k}{k!} \right.$

$\left. * \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j}{3-t} P(2,3)^{3-t} (1 - P(2,3))^{j-(3-t)} \frac{e^{-10\lambda_2}(10\lambda_2)^j}{j!} \right)$

$P\{D_2 = 2, D_3 = 3\} = ① * ②$

ضرب

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Date: Subject:

مهراد لیویان

جواب سوال ۶:

در هر مرحله با جابه‌جا کردن هر کارت ۵۲ حالت جدید به وجود می‌آید، پس با جابه‌جا کردن n کارت 52^n حالت جدید به وجود می‌آید.

خیلی واضح است که ۵۲! حالت را بیشتر به وجود آوردیم پس شانس هر جایگشت ها $\frac{1}{52!}$ نیست.

$$\left.\begin{array}{l} 52! \overset{5}{\equiv} 0 \\ 52^x \overset{5}{\equiv} 2^x \equiv c \end{array}\right\}$$

$c \neq 0$ پس همچین حالتی به وجود نمی‌آید.

هیچ‌وقت نمی‌تواند تعداد حالات ها برابر ۵۲! شود

یا از آن کمتر است و یا از آن بیشتر است