دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین دوم ــ توزیع‌های پیوسته و توابعی از یک متغیر تصادفی

طراح: الهه خداوردی

سوپروایزر: مسعود طهماسبی فرد

تاریخ تحویل: —

۱. خدمات اورژانس ۲۰ نمره

مدت زمان انتظار تا دریافت خدمات در بخش اورژانس یک بیمارستان، با واحد ساعت، با تابع چگالی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۹} & ۰ \leq x < ۳ \\ \frac{۲}{۳} - ax & ۳ \leq x < ۶ \end{cases}$ مدلسازی می‌شود.

الف) ثابت a را محاسبه کنید. (۳ نمره)

ب) احتمال اینکه بیمار کمتر از ۴ ساعت منتظر بماند چقدر است؟ (۳ نمره)

ج) احتمال اینکه مدت زمان انتظار بیشتر از ۵ ساعت باشد چقدر است؟ (۳ نمره)

د) احتمال اینکه مدت زمان انتظار بین ۲ تا ۳ ساعت باشد چقدر است؟ (۳ نمره)

و) مدت زمانی که تنها ۱۰ درصد بیماران بیشتر از آن منتظر می‌مانند را محاسبه کنید. (۵ نمره)

ه) میانگین زمان انتظار را بدست آورید. (۳ نمره)

پاسخ :

الف) از آنجاییکه $f(x)$ یک تابع چگالی است، باید $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = ۱$ باشد، بنابراین:

$$\int_{۰}^{۳} f(x)dx + \int_{۳}^{۶} f(x)dx = \int_{۰}^{۳} \frac{x}{۹}\, dx + \int_{۳}^{۶} (\frac{۲}{۳} - ax)\, dx = (\frac{x^{۲}}{۱۸}\Big|_{۰}^{۳}) + (\frac{۲x}{۳} - \frac{ax^{۲}}{۲}\Big|_{۳}^{۶}) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} - (۲ - ۱۳/۵a) = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۹}$$

برای بخش‌های بعدی، ابتدا تابع توزیع تجمعی مربوطه را بدست می‌آوریم:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{۰}^{x} \frac{x}{۹} du = \frac{x^{۲}}{۱۸} \quad for \quad ۰ \leq x < ۳$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{۰}^{۳} f(u)du + \int_{۳}^{x} f(u)du =$$

$$\int_{۰}^{۳} \frac{u}{۹}du + \int_{۳}^{x} (\frac{۲}{۳} - \frac{u}{۹})du = \frac{۲x}{۳} - \frac{x^{۲}}{۱۸} - ۱ \quad for \quad ۳ \leq x < ۶$$

$$Then,\ F(x) = \begin{cases} \frac{x^۲}{۱۸} & ۰ \leq x < ۳ \\ \frac{۲x}{۳} - \frac{x^۲}{۱۸} - ۱ & ۳ \leq x < ۶ \end{cases}$$

ب)

$$P(X < ۴) = F(۴) = \frac{۸}{۳} - \frac{۱۶}{۱۸} - ۱ = \frac{۷}{۹}$$

ج)

$$P(X > ۵) = ۱ - F(۵) = ۱ - \frac{۱۷}{۱۸} = \frac{۱}{۱۸}$$

د)

$$P(۲ < X < ۳) = F(۳) - F(۲) = \frac{۹}{۱۸} - \frac{۴}{۱۸} = \frac{۵}{۱۸}$$

و)

$$P(X > x) = ۱ - F(x) = ۰/۱ \ \rightarrow F(x) = ۰/۹$$

در قسمت (ب) دیدیم که $F(۴) = \frac{۷}{۹}$، پس با توجه به صعودی بودن تابع توزیع تجمعی، xای که در معادله $F(x) = ۰/۹$ صدق می‌کند، از بازه‌ی ۴ تا ۶ است.

$$\frac{۲x}{۳} - \frac{x^۲}{۱۸} - ۱ = ۰/۹ \rightarrow \frac{۲x}{۳} - \frac{x^۲}{۱۸} = ۱/۹ \quad \rightarrow x = ۴/۶۵۸$$

ه)

$$E(X) = \int_۰^۳ xf(x)\,dx + \int_۳^۶ xf(x)\,dx = \int_۰^۳ \frac{x^۲}{۹}dx + \int_۳^۶ x(\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۹}x)dx = (\frac{x^۳}{۲۷}\Big|_۰^۳) + (\frac{x^۲}{۳} - \frac{x^۳}{۲۷}\Big|_۳^۶) = ۳$$

## ۲. توزیع به توزیع!		۲۰ نمره

متغیر تصادفی $X \sim \exp(\lambda)$ را در نظر بگیرید. تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که $Y = g(X)$ دارای توزیع $Y \sim U(۲,۵)$ باشد.

پاسخ :

با توجه به توزیع X داریم:

$$F_X(x) = ۱ - e^{-\lambda x} \quad for \quad ۰ < x < \infty$$

$$F_Y(y) = \frac{y-۲}{۳} \quad for \quad ۲ < y < ۵$$

حال چون $Y = g(X)$ است، با فرض صعودی بودن تابع $g(x)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-۱}(y)) = F_X(g^{-۱}(y))$$

بنابراین:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-۱}(y))$$

$$\frac{y-۲}{۳} = ۱ - e^{-\lambda g^{-۱}(y)} \quad \rightarrow \quad \frac{۵-y}{۳} = e^{-\lambda g^{-۱}(y)}$$

$$\ln(\frac{۵-y}{۳}) = -\lambda g^{-۱}(y) \quad \rightarrow \quad -\frac{\ln(\frac{۵-y}{۳})}{\lambda} = g^{-۱}(y)$$

$$-\frac{\ln(\frac{5-y}{3})}{\lambda} = x \quad \rightarrow \ \ln(\frac{5-y}{3}) = -\lambda x$$
$$\frac{5-y}{3} = e^{-\lambda x} \quad \rightarrow \ y = 5 - 3e^{-\lambda x}$$
$$g(x) = 5 - 3e^{-\lambda x}$$

مشاهده می‌شود که تابع بدست آمده صعودی است و فرض ما را نقض نمی‌کند.

۳. دوربین مداربسته — ۲۰ نمره

فرض کنید یک دوربین مداربسته در ارتفاع ۳ متری از زمین قرار گرفته و حول مرکز خود در حال چرخش است. نقطه X را نقطه تحت پوششی روی زمین در نظر بگیرید که دوربین در راستای آن نقطه متوقف می‌شود.

الف) زاویه دوربین با خط عمود بر زمین (θ) یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ است. تابع توزیع مربوط به θ را بدست آورید. (۳ نمره)

ب) رابطه بین X و θ را بنویسید و سپس CDF مربوط به X را محاسبه کنید. میانگین X چقدر است؟ (۱۷ نمره)

پاسخ :

الف) از آنجا که θ در بازه‌ی $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد:

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

بنابراین:

$$F(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta < \frac{-\pi}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\theta}{\pi} & |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ب) با استفاده از CDF مربوط به θ، CDF متغیر تصادفی X را بدست می‌آوریم. می‌دانیم که: $X = 3\tan(\theta)$

$$\rightarrow F_X(x) = P(X \le x) = P(3\tan(\theta) \le x) = P(\theta \le \tan^{-1}(\frac{x}{3})) = \frac{1}{2} + \frac{\tan^{-1}(\frac{x}{3})}{\pi}$$

بنابراین PDF متغیر تصادفی X برابر است با:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{3}{9+x^2} \quad for \quad -\infty < x < \infty$$

همانطور که مشخص است، تابع توزیع فوق، متعلق به توزیع کوشی است. برای این توزیع، میانگین تعریف نمی‌شود چراکه:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{\pi(x^2+9)} dx \\ &= \frac{3\log(x^2+9)}{2\pi}\Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \infty - \infty \rightarrow \text{does not converge} \end{aligned}$$

حال اگر فرض کنیم که میانگینی برای این توزیع وجود دارد (در واقع فرض می‌کنیم انتگرال در بازه n و $-n$ قرار دارد) می‌توان در نظر گرفت که انتگرال مربوطه به دلیل فرد بودن تابع زیر انتگرال برابر صفر شده و میانگین توزیع برابر صفر خواهد بود.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۳x}{\pi(x^۲ + ۹)} dx = ۰$$

برای آشنایی بیشتر با این توزیع می‌توانید به این لینک مراجعه کنید.

۴. پرتاب سکه ۲۰ نمره

یک سکه سالم را n بار پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر سکه ۱۰۰۰ بار پرتاب شود و X نمایانگر تعداد دفعاتی باشد که سکه شیر آمده است، $P(۴۸۰ \leq X \leq ۵۳۰)$ را محاسبه کنید. (۷ نمره)

ب) چندبار باید سکه را پرتاب کرده باشیم تا $P(۰/۴۸n \leq X \leq ۰/۵۲n) = ۰/۹۵$ باشد؟ (۱۳ نمره)

پاسخ :

الف) آزمایش پرتاب سکه دارای توزیع دو جمله‌ای است و از آنجا که در این آزمایش تعداد دفعات پرتاب سکه زیاد است، می‌توانیم توزیع دو جمله ای را با توزیع نرمال تخمین بزنیم. بنابراین:

$$Var(X) = npq = ۲۵۰ \ (q = ۱ - p)$$

$$E(X) = np = ۵۰۰$$

$$\begin{aligned} P(۴۸۰ \leq X \leq ۵۳۰) &= P(\frac{۴۸۰ - ۵۰۰}{\sqrt{۲۵۰}} \leq Z \leq \frac{۵۳۰ - ۵۰۰}{\sqrt{۲۵۰}}) \\ &= P(Z \leq \frac{۵۳۰ - ۵۰۰}{\sqrt{۲۵۰}}) - P(Z \leq \frac{۴۸۰ - ۵۰۰}{\sqrt{۲۵۰}}) \\ &= P(Z \leq ۱/۹) - P(Z \leq -۱/۲۶) \\ &= \Phi(۱/۹) - \Phi(-۱/۲۶) \\ &= \Phi(۱/۹) + \Phi(۱/۲۶) - ۱ = ۰/۸۷ \end{aligned}$$

ب) با توجه به قضیه دموآور_ لاپلاس ، می‌دانیم:

$$P(k_۱ \leq X \leq k_۲) = \Phi(\frac{k_۲ - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k_۱ - np}{\sqrt{npq}})$$

همچنین می‌دانیم: $k_۱ = n(p - \epsilon)\ ,\ k_۲ = n(p + \epsilon)$، بنابراین:

$$\frac{k_۲ - np}{\sqrt{npq}} = \epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}, \qquad \frac{k_۱ - np}{\sqrt{npq}} = -\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

حال با در نظر گرفتن $\epsilon = ۰/۰۲$ خواهیم داشت:

$$P(۰/۴۸n \leq X \leq ۰/۵۲n) = \Phi(۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{۰/۲۵}}) - \Phi(-۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{۰/۲۵}}) = ۲\Phi(۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{۰/۲۵}}) - ۱ = ۰/۹۵$$

$$\Phi(۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{۰/۲۵}}) = ۰/۹۷۵ \ \rightarrow ۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{۰/۲۵}} = ۱/۹۶ \ \rightarrow n = ۴۹^{۲}$$

می‌توانستیم این بخش را با استفاده از Empirical Rule نیز حل کنیم، با این رویکرد که احتمال توزیع نرمال در بازه‌ای متقارن نسبت به میانگین در حالتی برابر ۰/۹۵ است که طول آن بازه برابر ۴σ باشد.

$$\begin{aligned} ۰/۰۴n &= ۴\sigma \\ ۰/۰۴n &= ۴\sqrt{np(۱-p)} \\ ۰/۰۱n &= \sqrt{np(۱-p)} \\ ۱۰^{-۴}n^{۲} &= \frac{n}{۴} \\ n &= ۲۵۰۰ \end{aligned}$$

علت تفاوت پاسخ روش قبلی و این روش این است که ما از مقدار n اطلاعی نداشتیم و تصحیح پیوستگی انجام ندادیم.

## ۵. مسابقه تیراندازی	۲۰ نمره

در یک مسابقه تیراندازی دو نفر به رقابت می‌پردازند. دو شخص ۵ دور بازی می‌کنند و کسی که حداقل سه دور را ببرد، برنده مسابقه می‌شود. در هر دور کسی که تیرش به مرکز هدف نزدیک‌تر باشد، برنده آن دور می‌شود. اگر در هر دور فاصله تیر شخص اول تا مرکز هدف دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۴ و واریانس ۲ باشد و فاصله تیر شخص دوم تا مرکز هدف دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ باشد، احتمال اینکه شخص دوم برنده مسابقه شود چقدر است؟ (راهنمایی: ترکیب خطی دو متغیر تصادفی نرمال مستقل، یک متغیر تصادفی نرمال است و اگر X و Y مستقل باشند: $E[XY] = E[X]E[Y]$)

پاسخ :

اگر D_Aو D_B به ترتیب نمایانگر توزیع مربوط به فاصله تیر شخص اول و دوم تا مرکز هدف باشند، برد نفر دوم معادل است با این که:

$$D_B < D_A \quad \rightarrow \quad D_B - D_A < ۰$$

حال با توجه به راهنمایی، تفریق دو متغیر تصادفی با توزیع نرمال، دارای توزیع نرمال است. برای بدست آوردن میانگین و واریانس داریم:

$$\begin{aligned} E[D_B - D_A] &= E[D_B] - E[D_A] = -۲; \\ Var(D_B - D_A) &= E[(D_B - D_A)^{۲}] - E^{۲}[(D_B - D_A)] \\ &= E[(D_B)^{۲}] + E[(D_A)^{۲}] - ۲E[D_B D_A] - (E^{۲}[(D_B)] + E^{۲}[(D_A)] - ۲E[D_B]E[D_A]) \\ &= E[(D_B)^{۲}] - E^{۲}[(D_B)] + E[(D_A)^{۲}] - E^{۲}[(D_A)] \\ &= Var(D_B) + Var(D_A) = ۸ \end{aligned}$$

حال اگر تعریف کنیم $D_{BA} \triangleq D_B - D_A$، خواهیم داشت: $D_{BA} \sim N(-۲, ۸)$. بنابراین برای محاسبه احتمال برد شخص دوم:

$$P(D_{BA} < ۰) = P(\frac{D_{BA} - (-۲)}{۲\sqrt{۲}} <) = P(Z < \frac{۱}{\sqrt{۲}}) = \Phi(۰/۷۰۷) = ۰/۷۶$$

حال برای اینکه شخص دوم برنده مسابقه شود، باید حداقل سه دور برنده شده باشد. تعداد بردهای شخص دوم دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای ۵ و ۰/۷۶ است. بنابراین احتمال برد شخص دوم برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}(۰/۷۶)^{۳}(۱-۰/۷۶)^{۲} + \binom{۵}{۴}(۰/۷۶)^{۴}(۱-۰/۷۶)^{۱} + \binom{۵}{۵}(۰/۷۶)^{۵} = ۰/۹۰۶$$

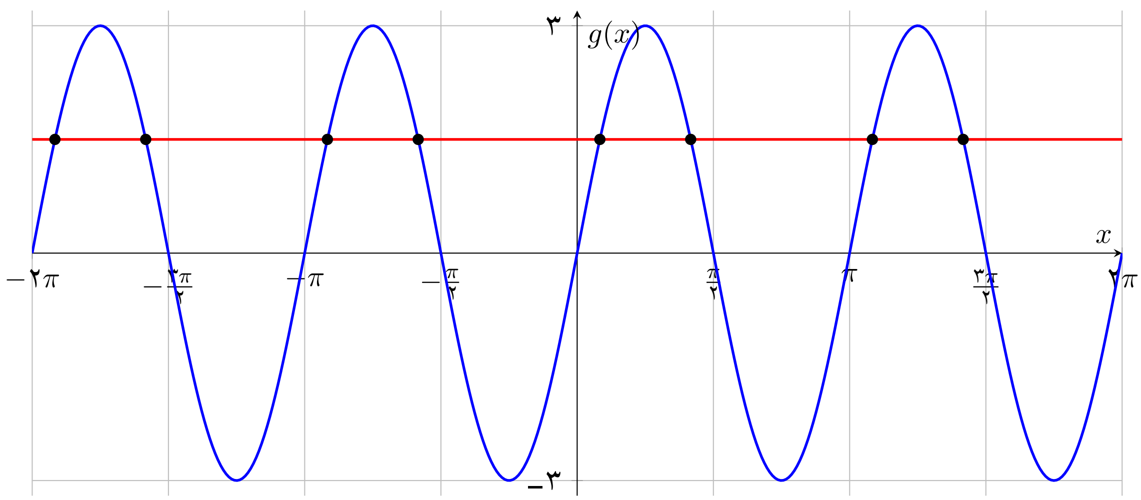
۶. یکنواختِ سینوسی! (سوال امتیازی) ۱۵ نمره

فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در بازه $(-۲\pi, ۲\pi)$ است. اگر داشته باشیم: $Y = ۳\sin(۲X)$، PDF و CDF متغیر تصادفی Y را محاسبه کنید.

پاسخ :

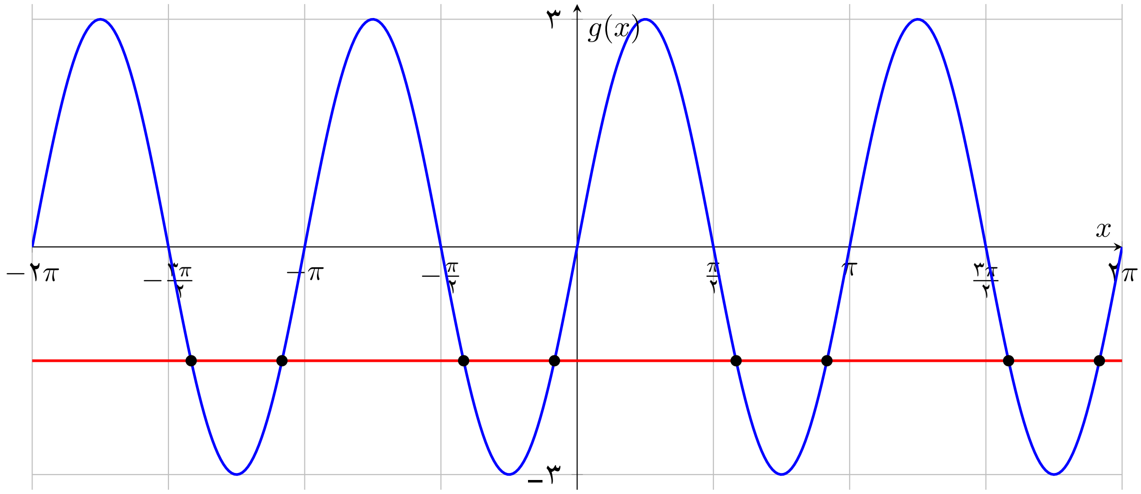
روش اول: در این روش، مسئله را به کمک رابطه‌ی $f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$ حل می‌کنیم. به این منظور باید معادله‌ی $y = ۳\sin(۲x)$ را به ازای $-۳ < y < ۳$ حل کنیم.

اگر $۰ < y < ۳$ باشد، پاسخ‌های معادله به شکل زیر خواهند بود:



$$x_۰ = \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳}) , \qquad x_۱ = -۲\pi + x_۰$$
$$x_۲ = -\frac{۳\pi}{۲} - x_۰ , \qquad x_۳ = -\pi + x_۰$$
$$x_۴ = -\frac{\pi}{۲} - x_۰ , \qquad x_۵ = \frac{\pi}{۲} - x_۰$$
$$x_۶ = \pi + x_۰ , \qquad x_۷ = \frac{۳\pi}{۲} - x_۰$$

اگر $-۳ < y < ۰$ باشد، پاسخ‌های معادله به شکل زیر خواهند بود:



$$x_۰ = \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳})\ , \qquad x_۱ = -\frac{۳\pi}{۲} - x_۰$$
$$x_۲ = -\pi + x_۰\ , \qquad x_۳ = -\frac{\pi}{۲} - x_۰$$
$$x_۴ = \frac{\pi}{۲} - x_۰\ , \qquad x_۵ = \pi + x_۰$$
$$x_۶ = \frac{۳\pi}{۲} - x_۰\ , \qquad x_۷ = ۲\pi + x_۰$$

می‌توان اثبات کرد که ریشه‌های بدست آمده برای هر دو حالت به جواب یکسانی برای $f_Y(y)$ منجر می‌شوند، چراکه مقدار $f_X(x)$، با توجه به توزیع یکنواخت X، برای تمام ریشه‌ها یکسان است. حال مقدار $|g'(x_i)|$ را برای دو ریشه‌ی $x_j = ۲\pi + \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳});\ \ -۳ < y < ۰$ و $x_k = -۲\pi + \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳});\ \ ۰ < y < ۳$ محاسبه می‌کنیم:

$$|g'(x_j)| = |۶\cos(۲(۲\pi + \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳})))| = |۶\cos(\sin^{-۱}(\frac{y}{۳}))| = ۲\sqrt{۹ - y^۲}$$

$$|g'(x_k)| = |۶\cos(۲(-۲\pi + \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳})))| = |۶\cos(\sin^{-۱}(\frac{y}{۳}))| = ۲\sqrt{۹ - y^۲}$$

برای بقیه‌ی ریشه‌ها هم می‌توان ثابت کرد که همگی به جواب یکسانی منتهی می‌شوند. به عنوان مثال، دو مورد از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم.

$$x_۰ = \frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳})\ , \qquad x_۱ = \pi - x_۰$$

$$|g'(x_۰)| = |۶\cos(۲x_۰)| = |۶\cos(\sin^{-۱}(\frac{y}{۳}))| = ۲\sqrt{۹ - y^۲}$$

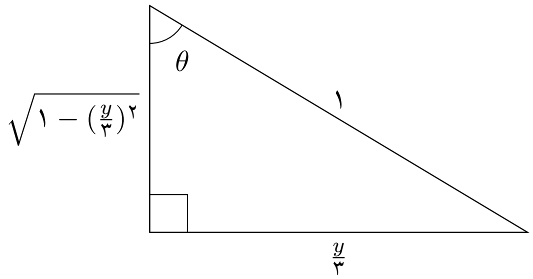
$$|g'(x_۱)| = |۶\cos(۲\pi - ۲x_۰)| = |۶\cos(x_۰)| = |۶\cos(\sin^{-۱}(\frac{y}{۳}))| = ۲\sqrt{۹ - y^۲}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، به شکل مشابهی می‌توان نشان داد که تمام ریشه‌ها به پاسخ زیر می‌رسند:

$$|g'(x_i)| = ۲\sqrt{۹ - y^۲}$$

بنابراین برای هر دو حالت $۰ > y > -۳$ و $۰ < y < ۳$، $\underline{۸}$ ریشه بدست می‌آید و پاسخ بدست آمده برای $f_Y(y)$ برای هر دو حالت یکسان است.

لازم به ذکر است که برای محاسبه عبارت $\cos(\sin^{-۱}(\frac{y}{۳}))$ از شکل زیر کمک می‌گیریم. مطابق شکل زیر:



$$\sin(\theta)=\frac{y}{۳}\rightarrow\theta=\sin^{-۱}(\frac{y}{۳})\rightarrow\cos(\sin^{-۱}(\frac{y}{۳}))=\cos(\theta)=\sqrt{۱-\frac{y^۲}{۹}}=\frac{۱}{۳}\sqrt{۹-y^۲}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی $f_Y(y)=\sum_i\frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$، تابع چگالی Y را محاسبه می‌کنیم.

$$f_X(x)=\frac{۱}{۴\pi}\Rightarrow$$

$$f_Y(y)=\frac{۸}{۴\pi\times۲\sqrt{۹-y^۲}}=\frac{۱}{\pi\sqrt{۹-y^۲}}\qquad for\quad -۳<y<۳$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F_Y(y)&=\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)dy\\&=\int_{-\infty}^{-۳}f_Y(y)dy+\int_{-۳}^{y}f_Y(y)dy\\&=\int_{-۳}^{y}\frac{۱}{\pi\sqrt{۹-y^۲}}dy\\&=\frac{۱}{۲}+\frac{\sin^{-۱}(\frac{y}{۳})}{\pi}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}۰ & y<-۳\\ \frac{۱}{۲}+\frac{\sin^{-۱}(\frac{y}{۳})}{\pi} & -۳<y<۳\\ ۱ & ۳<y\end{cases}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y<y)\\&=P(۳\sin(۲X)<y)\\&=P(\sin(۲X)<\frac{y}{۳})\\&=P(X<\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳}))\qquad for\quad -۳<y<۳\end{aligned}$$

برد تابع $\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(\frac{y}{۳})$ برابر $(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$ است، پس محدودیت $-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}$ به مسئله اضافه می‌شود؛ یعنی $X\sim U(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$.

حال برای محاسبه CDF توزیع خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{y}{3})} \frac{2}{\pi} dx \\ &= \frac{2}{\pi}(\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{y}{3}) + \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin^{-1}(\frac{y}{3}) \qquad for \quad -3 < y < 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -3 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sin^{-1}(\frac{y}{3})}{\pi} & -3 < y < 3 \\ 1 & 3 < y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{9 - y^2}} \qquad for \quad -3 < y < 3$$