به نام خدا

نام و نام خانوادگی : مهراد لیوانی

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: آمار و احتمال — تمرین سری دوم   Year.   Month.   Date.

جواب سوال ۱ :

الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\longrightarrow \int_{0}^{3} \frac{x}{9}\,dx + \int_{3}^{6} \left(\frac{2}{3} - ax\right) dx = 1$$

$$\longrightarrow \left.\frac{x^2}{18}\right|_{0}^{3} + \left.\left(\frac{2}{3}x - \frac{a x^2}{2}\right)\right|_{3}^{6} = 1$$

$$\longrightarrow \left(\frac{9}{18} - \frac{0}{18}\right) + \left((4 - 18a) \underbrace{- \cancel{\left(2 - \frac{9}{2}a\right)}}_{-2 + \frac{9}{2}a}\right) = 1$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} + 2 - \frac{27}{2}a = 1 \longrightarrow -\frac{3}{2} = \frac{-27}{2}a$$

$$\longrightarrow a = \frac{1}{9}$$

ب)

$$P(.\ z \le 4) = \int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{3} \frac{x}{9}\,dx + \int_{3}^{4} \frac{2}{3} - \frac{x}{9}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \left.\left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{18}\right)\right|_{3}^{4} = \frac{1}{2} + \left(\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{18}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{16}{18} - \frac{3}{2} = \frac{9 + 48 - 16 - 27}{18}$$

$$\longrightarrow P(z \le 4) = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

omid

نام و نام خانوادگی: مراد لیویان

شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۱:

ج)

$$P(5<Z) = 1 - P(Z \leq 5)$$

$$P(Z \leq 5) = \int_0^3 \frac{x}{9}\,dx + \int_3^5 \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{9}\right) dx$$

$$P(Z \leq 5) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{18}\right)\Big|_3^5$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{10}{3} - \frac{25}{18} - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{35}{18} - \frac{3}{2} = \frac{35-18}{18} = \frac{17}{18}$$

$$P(Z>5) = 1 - \frac{17}{18} = \frac{1}{18}$$

د)

$$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 \frac{x}{9}\,dx = \frac{x^2}{18}\Big|_2^3 = \frac{1}{2} - \frac{4}{18} = \frac{5}{18}$$

و) در بازه ۰ تا ۳، $\frac{1}{2}$ بیماران از صف انتظار خارج می‌شوند پس در بازه ۳ تا ۶ دنبال مدت زمان می‌گردیم.

$$P(X > w) = \frac{1}{10} \rightarrow P(X \leq w) = \frac{9}{10}$$

ادامه در صفحه بعد

omid 20*30

نام و نام خانوادگی: مهراد لیوایان

شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۱ ة

ادامه و)

$$P(X \le w) = \frac{9}{10}$$

$$\int_0^3 \frac{x}{9}\,dx + \int_3^w \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{9}\right) dx = \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{18}\right)\Bigg|_3^w = \frac{9}{10}$$

$$= \frac{2}{3}w - \frac{w^2}{18} - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{10}$$

$$= \frac{2}{3}w - \frac{w^2}{18} = \frac{4}{10} + \frac{15}{10}$$

$$= \frac{2}{3}w - \frac{w^2}{18} = \frac{19}{10}$$

$$= 120w - 10w^2 = 19 \times 18 \rightarrow 10w^2 - 120w + 342 = 0$$

$$\Delta = (-120) \times (-120) - 40 \times 342 = 14400 - 13680 = 720$$

$$w = \frac{120 \pm \sqrt{720}}{20} \left\langle \begin{array}{l} 6 - 1{,}341 = w_1 \\ 6 + 1{,}341 = w_2 \end{array} \right.$$

چون w_1 در بازه ۳ تا ۶ هست پس مورد قبول هست.

مدت زمان: ۴٫۶۵۸

نام و نام خانوادگی : مهراد لیوبان

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: *Year.* *Month.* *Date.*

ادامه جواب سوال ۱ :

۵)

$$E[X] = \int_0^3 \frac{x^2}{9}\,dx + \int_3^6 \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{27}\Big|_0^3 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}\right)\Big|_3^6 = (1-0) + \big((12-8)-(3-1)\big)$$

$$= 1 + (4-2) = \boxed{3}$$

میانگین آن ۳ ساعت هست.

نام و نام خانوادگی : مهراد لیویان

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۲ :

فرض می کنیم $y=g(x)$ آنگاه برای $F_Y(y)$ داریم :

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{g(x) < y\}$$

$$F_Y(y) = P\{X < g^{-1}(y)\} = F_X\left(g^{-1}(y)\right) = 1 - e^{-\lambda g^{-1}(y)}$$

$$\longrightarrow F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda g^{-1}(y)}$$

از طرفی می دانیم :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 & y > 5 \\ \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} & 2 \le y \le 5 \\ 0 & y < 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}y - \frac{2}{3} = 1 - e^{-\lambda g^{-1}(y)} \longrightarrow e^{-\lambda g^{-1}(y)} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}y$$

$$\longrightarrow -\lambda g^{-1}(y) = \ln\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}y\right) \longrightarrow g^{-1}(y) = \frac{\ln\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}y\right)}{-\lambda}$$

$$\longrightarrow -\lambda X = \ln\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}y\right) \longrightarrow e^{-\lambda X} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}y$$

$$\longrightarrow y = 5 - 3e^{-\lambda X}$$

$$y = \begin{cases} 5 - 3e^{-\lambda X} & 0 \le X \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

نام و نام خانوادگی: مهراد لیویان

شماره دانشجویی: ٨١٠١٠١٥٥١

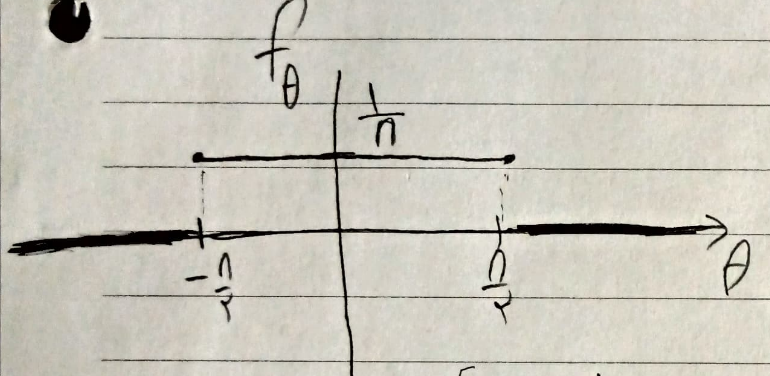
Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۳:

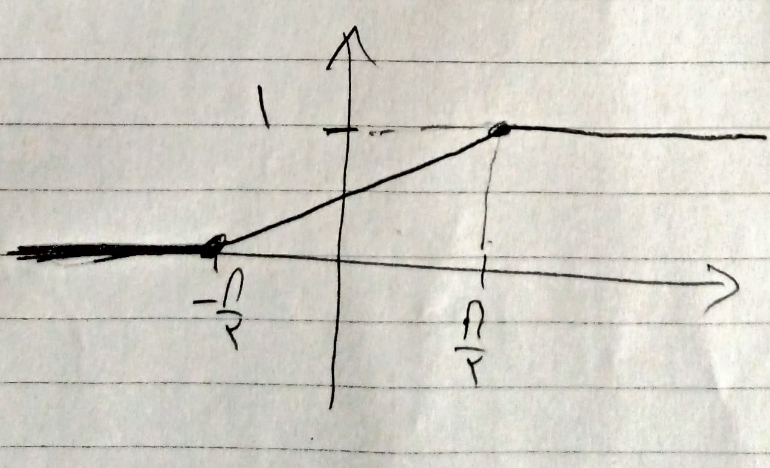
الف)

$$\Theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta > \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \theta < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$F_\Theta(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta > \frac{\pi}{2} \\ \frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \theta < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



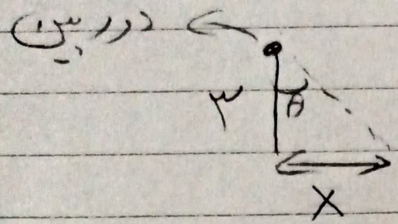
نام و نام خانوادگی: مهراد لبویان

شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۳:

ب)



$X = 3\tan\theta$

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{3\tan\theta < x\}$$

$$= P\{\theta < \tan^{-1}(\tfrac{x}{3})\} = F_\theta(\tan^{-1}(\tfrac{x}{3}))$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \tan^{-1}(\frac{x}{3}) > \frac{\pi}{2} \\ \frac{\tan^{-1}(\frac{x}{3})}{\pi} + \frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} \le \tan^{-1}(\frac{x}{3}) \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \tan^{-1}(\frac{x}{3}) < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \tan^{-1}(\tfrac{x}{3}) \le \frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan(-\tfrac{\pi}{2}) \le \frac{x}{3} \le \tan(\tfrac{\pi}{2})$$

$$\longrightarrow -\infty < x < \infty$$

پس تمامی ضابطه آن از بین می رود: (چون همه X ها در ضابطه وسطی هستند.)

$$F_X(x) = \frac{\tan^{-1}(\frac{x}{3})}{\pi} + \frac{1}{2}$$

ادامه در صفحه بعد

نام و نام خانوادگی: مهراد لعیان

۸۱۰۱۰۱۵۰۱ شماره دانشجویی:

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۳:

ادامه ب)

$$E_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\tan^{-1}(\frac{x}{3})}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{dx}$$

$$\longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{\pi\left(3+\frac{x^2}{3}\right)}$$

$$E_X[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi\left(3+\frac{x^2}{3}\right)} dx = \frac{3}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{9+x^2} dx$$

$$= \frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{9+x^2} dx = \frac{3}{2\pi} \ln(9+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x^2 \to \infty} \frac{3}{2\pi} \ln\left(\frac{9+x^2}{9+x^2}\right) = \frac{3}{2\pi} \ln(1) = 0$$

omid 20×30

نام و نام خانوادگی : مهراد ییوبان

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۴ :

الف) چون n بزرگ است و $p=\frac{1}{2}$ است پس به جای Binomial از توزیع نرمال (N) استفاده می کنیم. ($npq \geq 10$):

$$X = Y \sim N(E[X], Var(X)) = N(np, npq)$$

$$X = N\left(1000\times\frac{1}{2}, 1000\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = N(500, 250)$$

$$P(480 \le X \le 530) = P\left(\frac{480-500}{5\sqrt{10}} \le \frac{X-500}{5\sqrt{10}} \le \frac{530-500}{5\sqrt{10}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-20.5}{15.8} < \frac{X-500}{5\sqrt{10}} < \frac{30.5}{15.8}\right)$$

$$= P(-1.3 \le Y \le 1.93)$$

$$= P(Y \le 1.93) - P(Y < -1.3)$$

$$= P(Y \le 1.93) - (1 - P(Y \le 1.3))$$

با توجه به جدول ϕ

$$= \phi(1.93) + \phi(1.3) - 1 = 0.9732 + 0.9032 - 1$$

$$= 0.8764$$

نام و نام خانوادگی : مهرا الیوریان

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۴:

ب)

$$Y = N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$$

$$P(0.48n \le X \le 0.52n) =$$

$$= P\left(\frac{0.48n - 0.5n}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \le \frac{X - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \le \frac{0.52n - 0.5n}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right)$$

$$= P(-0.04\sqrt{n} \le Y \le 0.04\sqrt{n})$$

$$= P(Y \le 0.04\sqrt{n}) - P(Y < -0.04\sqrt{n})$$

$$= P(Y \le 0.04\sqrt{n}) - (1 - P(Y < 0.04\sqrt{n}))$$

$$= 2P(Y \le 0.04\sqrt{n}) - 1$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به جدول } \phi} 2\phi_{(0.04\sqrt{n})} - 1 = 0.95 \longrightarrow 2\phi_{(0.04\sqrt{n})} = 1.95$$

$$\longrightarrow \phi_{(0.04\sqrt{n})} = 0.975 \longrightarrow 0.04\sqrt{n} = 1.96$$

$$\longrightarrow 4\sqrt{n} = 196 \longrightarrow \sqrt{n} = 49 \longrightarrow n = 49 \times 49$$

$$\longrightarrow \boxed{n = 2401}$$

نام و نام خانوادگی: مراد الیویان

شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۵ :

فاصله تیر شخص اول تا هدف

$$d_1 = N(14, 2)$$

فاصله تیر دوم تا هدف

$$d_2 = N(12, 6)$$

یک متغیر دیگر بنام x تعریف می کنیم که اختلاف فاصله تیر دوم تا مرکز با اختلاف فاصله تیر اول تا مرکز هست.

$$X = d_2 - d_1$$

اختلاف فاصله تیر دوم از تیر اول

طبق این که این دو توزیع نرمال از هم مستقل هستند پس می توان برای x نیز توزیع نرمال نوشت:

$$X = N(\mu_x , \sigma_x^2) \longrightarrow \begin{cases} \mu_x = \mu_{d_2} - \mu_{d_1} \\ \sigma_x^2 = \sigma_{d_2}^2 + \sigma_{d_1}^2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \mu_x = 12 - 14 = -2 \\ \sigma_x^2 = 6 + 2 = 8 \end{cases} \longrightarrow X = N(-2, 8)$$

می دانیم اگر $d_2 - d_1$ عددی منفی باشد بدین معنا است که شخص دو برنده شده است:

$$P(d_2 - d_1 < 0) \longrightarrow P(X < 0)$$

$$\longrightarrow P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{-\mu_x}{\sigma_x}\right)$$

ادامه در صفحه بعد

نام و نام خانوادگی: مهرداد لیویان

شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۵:

$$P\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} < \frac{-\mu_x}{\sigma_x}\right)$$

$$= P\left(Y < \frac{-(-2)}{\sqrt{8}}\right) = P\left(Y < \frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= P\left(Y < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(0/707)$$

$= 0/7580 \longrightarrow$ احتمال برد نفر دوم فقط در یک مرحله

حال با استفاده از توزیع دوجمله‌ای با بینومیال با احتمال موفقیت ۰/۷۵۸۰ احتمال بردن بیشتر از ۲ بار نفر دوم را حساب می‌کنیم:

$$P(2 < X) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \binom{5}{3}(0/7580)^3(1-0/7580)^{\overset{5-3}{2}} + \binom{5}{4}(0/7580)^4(1-0/7580)^{\overset{5-4}{1}}$$

$$+ \binom{5}{5}(0/7580)^5(1-0/7580)^{\overset{5-5}{0}}$$

$$\longrightarrow P(2<X) \simeq 0/2550 + 0/3994 + 0/2502 = \boxed{0/9046}$$

نام و نام خانوادگی: مهراد لیوان

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۶:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x > 2\pi \\ \frac{1}{4\pi} & -2\pi \leq x \leq 2\pi \\ 0 & x < -2\pi \end{cases}$$

$$\theta = 2X \longrightarrow f_\theta(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta > 4\pi \\ \frac{1}{8\pi} & -4\pi \leq \theta \leq 4\pi \\ 0 & \theta < -4\pi \end{cases}$$

$$F_\theta(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta > 4\pi \\ \frac{\theta}{8\pi} + \frac{1}{2} & -4\pi \leq \theta \leq 4\pi \\ 0 & \theta < -4\pi \end{cases}$$

$$Y = 3\sin(\theta)$$

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{3\sin(\theta) < y\}$$

$$= P\{\theta < \sin^{-1}(\tfrac{y}{3})\} = F_\theta\left(\sin^{-1}(\tfrac{y}{3})\right)$$

$$F_Y(y) = \frac{\sin^{-1}(\frac{y}{3})}{8\pi} + \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}}{8\pi} = \boxed{\frac{1}{24\pi\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}}$$