

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر آمار و احتمال مهندسی



تمرین سوم - توزیع‌های توام، استقلال

طراح: علی آریایی

سوپروایزر: مسعود طهماسبی فرد

تاریخ تحویل: ۳۰ آبان ۱۴۰۲

۲۰ نمره

۱. تابع توزیع مشترک نمایی

تابع توزیع مشترک دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y به صورت زیر داده شده است. $(\lambda, \mu > 0)$

$$f_{XY}(x, y) = Ae^{-(\lambda x + \mu y)} \quad ; \quad x, y > 0$$

الف) مقدار A را بیابید و ثابت کنید که این تابع، یک تابع چگالی معتبر است. (۵ نمره)

ب) توابع چگالی حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را بیابید. آیا X و Y مستقلند؟ (۵ نمره)

ج) میانگین X ، Y و میانگین توزیع مشترک X و Y ($E\{XY\}$) را بیابید. درستی نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) در رابطه با استقلال متغیرهای X و Y را براساس میانگین‌های بدست آمده تصدیق کنید. (۱۰ نمره)

۲۰ نمره

۲. سامانه انتخاب واحد

یک سامانه انتخاب واحد فرضی را در نظر بگیرید. در این سامانه، یک سرور و ۱۰۰۰ کاربر (دانشجو) وجود دارند که زمان انتخاب واحد همه‌ی دانشجویان، ساعت ۸ صبح است. از آنجاییکه اخذ درس (به خصوص دروس عمومی!) برای دانشجویان مهم است، همه‌ی دانشجویان، راس ساعت ۸، برای ورود به سامانه، برای احراز هویت به سرور درخواستی ارسال می‌کنند. فرض کنید سرور نیز راس ساعت ۸ شروع به کار می‌کند. به دلیل محدودیت‌های فیزیکی، ۲ میلی ثانیه طول می‌کشد تا سرور آماده‌ی پاسخ‌دهی شود و در طول این مدت، هر درخواستی که دریافت کند را نادیده می‌گیرد. فرض کنید زمان دریافت درخواست هر یک از کاربران توسط سرور، یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱۰۰۰ میلی ثانیه و مستقل از زمان دریافت درخواست سایر کاربران باشد. احتمال اینکه حداقل یک درخواست از سوی سرور نادیده گرفته شود، چقدر است؟

۲۵ نمره

۳. چگالی تفریق!

اگر تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد، تابع چگالی احتمال $Z = X - Y$ را بیابید.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6x & ; \quad x, y \geq 0, x + y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{Otherwise} \end{cases}$$

۱۵ نمره

۴. بهرام دارت‌باز! (امتیازی)

بهرام می‌خواهد در سیرک شکرستان یک مسابقه دارت‌بازی برگزار کند. قوانین مسابقه بدین شکل است که شرکت‌کننده تنها در صورت برخورد دارت به دایره‌ی وسط، برنده جایزه می‌شود. با توجه به هزینه ورود به مسابقه و میزان جایزه برندگان، بهرام به این نتیجه رسیده است

که زمانی سود می‌کند که احتمال برد هر شرکت‌کننده، کمتر از $0/1$ باشد. اگر صفحه‌ی دارت را به صورت یک صفحه‌ی مختصات به مرکز نقطه‌ی مرکز آن در نظر بگیریم و X و Y دو متغیر تصادفی مستقل نرمال با میانگین 0 و واریانس 9 به ترتیب بیانگر طول و عرض نقطه‌ی برخورد دارت شرکت‌کننده باشند، حداکثر شعاع دایره وسط باید چقدر باشد تا بهرام سود کند؟ (راهنمایی: از تغییر مختصات استفاده کنید!)