به نام خدا

مهراد لیوبان

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: تمرین ۵ - ترکیبیات و احتمال شرطی   Year.   Month.   Date.

جواب سوال ۱:

الف)

افراد هر کلاس را یک دسته در نظر می‌گیریم که به ۳! حالت امکان دارد کنار هم نشسته باشند.

$\boxed{۳ \times ۲ \times ۱} = ۳!$

حالا ۳ دسته را دور میز از فرمول (n-1)! می‌نشانیم که می‌شود ۲! درنهایت داریم:

تعداد حالات: ۳! × ۳! × ۳! × ۲! = ۲۱۶ × ۲ = ۴۳۲

ب) از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم و حالات نامطلوب را محاسبه می‌کنیم و از کل حالات در آخر کم می‌کنیم:

کل حالات: ۸! ، حالات نامطلوب: $|A \cup B \cup C|$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |B \cap A \cap C|$$

|A| = |B| = |C| = ۳! × (۷-۱)! = ۳! × ۶!

|A∩B| = |B∩C| = |A∩C| = ۳! × ۳! × (۵-۱)! = ۳! × ۳! × ۴!

|A∩B∩C| = ۳! × ۳! × ۳! × (۳-۱)! = ۳! × ۳! × ۳! × ۲!

حالات نامطلوب = ۳ × ۳! × ۶! − ۳ × ۳! × ۳! × ۴! + ۳! × ۳! × ۳! × ۲!

حالات نامطلوب = ۱۲۹۶۰ − ۲۵۹۲ + ۴۳۲ = ۱۰۸۰۰

تعداد کل حالات مطلوب: ۸! − ۱۰۸۰۰ = ۴۰۳۲۰ − ۱۰۸۰۰ = ۲۹۵۲۰

مهرا الهوران

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۰۵۰۱

Subject: Year Month Date

جواب سوال ۳: از امید ریاضی برای حل این سوال استفاده می‌کنیم. در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۲، ما ۱۳ عدد اول داریم، پس احتمال اول بودن کارت را برای بقیه آن‌ها می‌نویسیم.

تعداد حالت‌های به وجود آمدن: $42 - 13 + 1 = 30 \longrightarrow$ حداکثر ۳۰ مرحله وجود دارد.

و احتمال برای هر مرحله: $\frac{29}{42}\times\frac{28}{42}\times\dots\times\frac{29-(n-2)}{42-(n-2)}\times\frac{13}{42-(n-1)}$

حالا برای هر مرحله امکان دارد، احتمال به صورت زیر باشد:

$$\underbrace{\frac{13}{42}}_{\text{کارت اول عددی اول باشد}}+\underbrace{\frac{29}{42}\times\frac{13}{41}}_{\text{کارت دوم عددی اول باشد}}+\underbrace{\frac{29}{42}\times\frac{28}{41}\times\frac{13}{40}}_{\text{کارت سوم عددی اول باشد}}+\dots$$

حالا با استفاده از امید ریاضی جواب مسئله را بدست می‌آوریم:

$$1\times\frac{13}{42}+2\times\frac{29}{42}\times\frac{13}{41}+3\times\frac{29}{42}\times\frac{28}{41}\times\frac{13}{40}+\dots+30\times\frac{29}{42}\times\frac{28}{41}\times\dots\times\frac{1}{14}\times\frac{13}{13}$$

$$=\sum_{i=1}^{30}13\cdot i\cdot\frac{\binom{29}{i-1}}{(42-n+1)\binom{42}{i-1}}=13\sum_{i=1}^{30}i\cdot\frac{\binom{29}{i-1}}{42\binom{41}{i-1}}=\frac{13}{42}\sum_{i=1}^{30}i\frac{\binom{29}{i-1}}{\binom{41}{i-1}}$$

حالا باید $\frac{13}{42}\sum_{i=1}^{30}i\frac{\binom{29}{i-1}}{\binom{41}{i-1}}$ را محاسبه کنیم.

$$\frac{\binom{29}{i-1}}{\binom{41}{i-1}}=\frac{\dfrac{29!}{\cancel{(i-1)!}\,(30-i)!}}{\dfrac{41!}{\cancel{(i-1)!}\,(42-i)!}}=\frac{29!\,(42-i)!}{41!\,(30-i)!}\times\frac{12!}{12!}=\frac{(42-i)!}{12!\,(30-i)!}\times\frac{12!\times29!}{41!}$$

$$=\binom{42-i}{12}\times\frac{1}{\binom{41}{12}}=\frac{\binom{42-i}{12}}{\binom{41}{12}}\longrightarrow\frac{13}{42}\sum_{i=1}^{30}i\frac{\binom{29}{i-1}}{\binom{41}{i-1}}$$

$$=\frac{13}{42\binom{41}{12}}\sum_{i=1}^{30}\binom{i}{1}\binom{42-i}{12}$$

ادامه حل در صفحه بعد

ادامه جواب سوال ۲:

از اتحاد زیر استفاده می کنیم:

$$\text{اتحاد:}\quad \sum_{k=r-m}^{n-s} \binom{m+k}{r}\binom{n-k}{s} = \binom{m+n+1}{r+s+1}$$

اگر $k=i-1$ و $r=1$ و $m=1$ و $n=41$ و $s=12$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{13}{42\binom{41}{12}} \sum_{i=1}^{30} \binom{i}{1}\binom{42-i}{12} = \frac{13}{42\binom{41}{12}}\binom{43}{14}$$

$$= \frac{13\times 43!}{42\times \frac{41!}{12!\times 29!}\times 14!\times 29!} = \frac{\cancel{13}\times 43\times \cancel{42!}\times \cancel{12!}}{\cancel{42!}\times \cancel{14!}_{14}} = \frac{43}{14} = 3.07$$

به طور متوسط و تقریباً $(\lfloor 3.07 \rfloor = 3)$ باید ۳ کارت بکشیم تا عدد اول بیاید.

راه حل دوم برای سوال ۲ (بدون امید ریاضی):

اگر فرض کنیم ۲۹ کارت دیگر بجز اعداد اول یک خانه هستند
این ۲۹ خانه توسط ۱۳ کارت با اعداد اول به ۱۴ قسمت تقسیم می شوند
طول هر کدام از این بازه ها $\lfloor \frac{29}{14} \rfloor = \lfloor 2.07 \rfloor = 2$ هست.
حالا برای رسیدن به کارت اول باید این بازه را طی کنیم و یک کارت دیگر برداریم.

$$\lfloor 2.07 \rfloor + 1 = \boxed{3} \rightarrow$$ ۳ کارت باید برداریم

مراد لیمویان   کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year.   Month.   Date.

جواب سوال ۳ :

برای حل این سوال سعی می کنیم با نوشتن معادله آن را حل کنیم ،
برای آنکه قرمز باشد دو حالت وجود دارد : حالت اول اینکه
قصد رنگ قرمز داشته باشیم و قرمز بیاید و حالت دیگر
اینکه قصد رنگ قرمز نداشته باشیم و قرمز بیاید.

$X \longrightarrow$ قرمز آمدن با قصد رنگ قرمز

$Y \longrightarrow$ قرمز شدن با نداشتن قصد رنگ قرمز

در همان اول $\frac{1}{3}$ احتمال دارد قرمز بیاید و $\frac{2}{3}$ احتمال دارند
تا قصد ما عوض شود و اتفاق Y رخ دهد :

$$P(X) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} P(Y) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P(Y)$$

حالا اگر قصد عوض شد بعد از اینکه قصد ما عوض شد (مثلا به
رنگ زرد تغییر کرد) حالا اگر دوباره رنگ زرد بیاید که شرایط
Y تامین نمی شود اگر آبی بیاید آن گاه دوباره به Y بر می گردیم
و اگر قرمز بیاید دوباره قصد ما رنگ قرمز می شود و شرایط X
رخ می دهد.

$$P(Y) = \underbrace{\frac{2}{6} \times 0}_{\text{زرد باشد}} + \underbrace{\frac{2}{6} \times P(Y)}_{\text{آبی باشد}} + \underbrace{\frac{2}{6} \times P(X)}_{\text{قرمز بیاید}}$$

$$\frac{2}{3} P(Y) = \frac{1}{3} P(X) \longrightarrow P(X) = 2P(Y)$$

$$P(X) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P(Y) \xrightarrow{P(X) = 2P(Y)} 2P(Y) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P(Y)$$

$$\longrightarrow \frac{4}{3} P(Y) = \frac{1}{3} \longrightarrow P(Y) = \frac{1}{4} \longrightarrow P(X) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

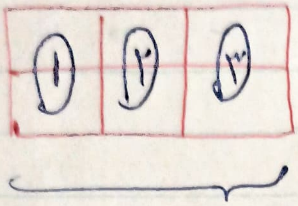
و این همان احتمالی است که می خواسیتم : $P(X) = \frac{1}{2}$

مهرا الیوران

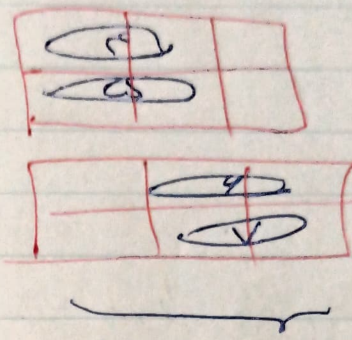
کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

جواب سوال ۴:

ما در انتخاب اول ۷ تا انتخاب داریم ۳ تا عمودی و ۴ تا حالت افقی، به صورت زیر:



۳ حالت عمودی



۴ حالت افقی

اگر در مرحله اول یکی از ۳ حالت عمودی را انتخاب کنیم، در هر صورت یک حالت مطلوب پیش می آید یعنی همه خانه ها مشکی می شوند، پس به احتمال $\frac{3}{7}$ در این قسمت مطلوب است.

حال اگر یکی از افقی ها را انتخاب کنیم که احتمال انتخاب افقی $\frac{4}{7}$ است، در انتخاب بعد ۳ حالت وجود دارد که از این ۳ حالت ۲ تای آن ها که شامل یک ستون عمودی می شود حالت مطلوب است پس در این انجام $\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}$ شانس داریم:

$$P_{\text{کل}} = \underbrace{\frac{3}{7}}_{\text{انتخاب اول عمودی باشد}} + \underbrace{\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}}_{\text{انتخاب اول افقی باشد و ۲ تا حالت مطلوب در قسمت بعد انتخاب شود}} = \frac{3}{7}+\frac{8}{21}=\boxed{\frac{17}{21}}$$

مراد لیوریان
کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۵ :

می دانیم که به طور کلی ۱۲۸ حالت وجود دارد :

$$۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲ = ۲^۷ = ۱۲۸$$

و همچنین می دانیم که تعداد حالت مثبت و منفی برابر هست پس کافی است تعداد حالتی که ۵ می شود را از ۱۲۸ کم کنیم و آن را به ۲ تقسیم کنیم.

چون جمع $۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷ = ۲۸$ می شود کافی است روش های جمع آن ها تا ۱۴ را حساب کنیم و در ۲ ضرب کنیم :

و $۳+۵+۶=۱۴$ و $۳+۴+۷=۱۴$ و $۲+۵+۷=۱۴$ و $۱+۶+۷=۱۴$

۴ حالت شده منفی و مثبت آن ها حساب هست پس مجموعا ۸ حالت ۵ می شود.

جواب: $\frac{۱۲۸-۸}{۲} = ۶۰ \to$ ۶۰ عدد مثبت داریم.

جواب سوال ۶ :

ابتدا احتمال قبول شدن هر کس را حساب می کنیم :

$$۴x+۲x+x=۱ \to ۷x=۱ \to x=\frac{۱}{۷}$$

از آنجا که احتمال شرطی زیر را داریم که ابتدا احتمال به سود رسیدن شرکت را محاسبه می کنیم:

A : احتمال قبول شدن علی $= ۴x = \frac{۴}{۷}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۴}{۷}\times\frac{۷}{۱۰}}{\frac{۴۰}{۷۰}} = \frac{۲۸}{۴۰} = \boxed{\frac{۷}{۱۰}}$$

B : احتمال به سود رسیدن شرکت $= \frac{۲}{۱۰}x + \frac{۵}{۱۰}\cdot ۲x + \frac{۷}{۱۰}\cdot ۴x = \frac{۲}{۷۰}+\frac{۱۰}{۷۰}+\frac{۲۸}{۷۰}$