



## دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر آمار و احتمال مهندسی

تمرین پنجم – توابعی از متغیرهای تصادفی، امید ریاضی شرطی

طراح: امیرمهدی انصاری پور

سوپروایزر: سروش مس فروش مشهد

تاریخ تحویل: ۵ دی ۱۴۰۲

۱۵ نمره

### ۱. چگالی احتمال مشترک

تابع چگالی احتمال مشترک متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  بصورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

همچنین برای متغیرهای تصادفی  $Z$  و  $W$  داریم  $(W > 0)$ :

$$\begin{cases} Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ W = XY \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال مشترک  $Z$  و  $W$  را بیابید:  $(f_{ZW}(z,w))$

(نوشتن فرم بسته رابطه آخر اجباری نیست و در صورت درست بودن راه حل نمره کامل داده می شود)

۲۵ نمره

### ۲. واریانس شرطی و کوواریانس متغیر تصادفی توام

تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر است. مطلوب است محاسبه:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

الف)  $Var(Y|X = \frac{1}{3})$  (نمره ۱۰)

ب)  $Cov(0.5X, X+Y-2)$  (نمره ۱۵)

۲۰ نمره

### ۳. توزیع انباشته

متغیرهای تصادفی مستقل از هم  $X$  و  $Y$  با توزیع نمایی (بترتیب با پارامترهای  $\lambda$  و  $\mu$ ) را در نظر بگیرید:

$$X \sim \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

$$Y \sim \mu e^{-\mu y} u(y)$$

الف) تابع توزیع انباشته  $S = X + Y$  (CDF or  $F_S(s)$ ) را بیابید. (نمره ۱۰)

(ب) تابع توزیع انباشته  $R = \frac{X}{X+Y}$  (CDF or  $F_R(r)$ ) را بیابید. (۱۰ نمره)

۲۰ نمره

## ۴. قانون احتمال کل

متغیر تصادفی  $N$  بیانگر تعداد کل مشتری هایی است که در یک روز وارد مغازه میشوند. این متغیر دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  است. هر مشتری با احتمال  $p$  از این مغازه کالا می خرد (و بدیهی است که با احتمال  $1-p$  نمی خرد). متغیر تصادفی  $X$  را تعداد مشتری هایی در نظر میگیریم که در یک روز کالا خریده اند و  $Y$  را تعداد مشتری هایی در نظر میگیریم که در همان روز کالایی نخریده اند. با نوشتن توزیع احتمال مشترک  $X$  و  $Y$  ( $P_{XY}$ ) نشان دهید که:

الف)  $X$  و  $Y$  از هم مستقلند. (۱۰ نمره)

ب)  $P_X(x)$ ,  $P_Y(y)$  را بیابید. (۱۰ نمره)

(راهنمایی: از قضیه احتمال کل کمک بگیرید)

۲۰ نمره

## ۵. مستقل و یکنواخت!

دو متغیر تصادفی مستقل  $U_1$  و  $U_2$  را در نظر بگیرید که هر دو توزیع یکنواخت پیوسته  $Uniform(0, 2)$  دارند.

الف)  $P(U_1 | U_1 > U_2)$  و  $P(U_2 | U_1 > U_2)$  را بیابید. (۱۰ نمره)

ب)  $E(U_1 | U_1 > U_2)$  و  $E(U_2 | U_1 > U_2)$  را بیابید. (۱۰ نمره)

۱۰ نمره

## ۶. رگرسیون خطی (امتیازی)

دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  را در مسئله رگرسیون خطی زیر در نظر بگیرید:

$$Y = aX + b$$

الف) با استفاده از روش MSE مقدار بهینه پارامترهای  $a$  و  $b$  را بیابید. پارامتر  $a$  چه رابطه ای با ضریب همبستگی  $X$  و  $Y$  دارد؟ (۵ نمره)

ب) طبق رابطه بدست آمده در بخش الف مقدار  $a$  و  $b$  را با توجه نمونه های داده شده بیابید. (۵ نمره)

میزان مطالعه ( $X$ )	۵	۱۹	۱۰	۲۱
نمره ( $Y$ )	۳۰	۵۵	۴۰	۸۰