



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر آمار و احتمال مهندسی

تمرین ششم - نامساوی چبیشف، قضیه حد مرکزی، نمونه برداری

طراح: نفیسه مقنی زاده

سوپروایزر: سروش مس فروش مشهد

تاریخ تحویل: ۱۷ دی ۱۴۰۲

۲۰ نمره

۱. نامساوی چبیشف

اگر X یک متغیر تصادفی نرمال باشد احتمال $p(|X - \mu_x| < k\sigma_x)$ را با استفاده از توزیع نرمال و نامساوی چبیشف به ازای مقادیر $k = 1, 2, 3, 4$ به دست آورید. مقدارهای به دست آمده از هر دو روش را به ازای k های مختلف مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۲۰ نمره

۲. نامساوی چبیشف در حالت تساوی

فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k^x - 1}{k^x} & x = 0, k \geq 1 \\ \frac{1}{k^x} & x = -k, k \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مطلوبست:

الف) محاسبه μ_x, σ_x (۱۰ نمره)

ب) محاسبه احتمال $p(|X - \mu_x| < k\sigma_x)$ به کمک تابع احتمال و نامساوی چبیشف (۱۰ نمره)

۲۵ نمره

۳. قضیه حد مرکزی

یک دانشجوی در ترم تابستان ۲ درس اخذ کرده است فرض کنید نمره های درس اول دارای توزیع نرمال با معدل ۱۰۰ و انحراف معیار ۸ و نمره های درس دوم نیز نرمال با معدل ۸۰ و واریانس ۳۶ است و نمره های دو درس از هم مستقل است.

الف) اگر بدانیم مجموع نمرات دو درس دانشجوی از ۱۷۰ بیشتر بوده است، احتمال آنکه مجموع نمرات وی کمتر از ۲۰۰ باشد چقدر است؟ (۱۵ نمره)

ب) اگر پنج دانشجوی به تصادف انتخاب شوند احتمال آنکه حداقل ۲ نفر از آنها مجموع نمراتشان از ۱۸۰ کمتر شد چقدر است؟ (۱۰ نمره)

۲۰ نمره

۴. نااریب بودن تخمین گر

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل از توزیعی دلخواه با میانگین مشترک μ و واریانس σ^2 و $Var(X) = \sigma^2$ و $Var(Y) = \sigma^2$ باشند. مطلوب است تعیین مقادیری از a, b به طوری که اولاً متغیر تصادفی $Z = aX + bY$ برآورد نااریب برای پارامتر μ و ثانیاً Z دارای کمترین واریانس در کلاس برآوردگرهای نااریب باشد.

۵. نمونه برداری

۱۵ نمره

نمونه‌های تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n با توزیع نرمال $N(0, 4)$ را در نظر بگیرید. اگر \bar{X}, S^2 به ترتیب واریانس و میانگین این نمونه تصادفی باشد، مقدار a را طوری تعیین کنید که $p(a \cdot \bar{X} > S) = 0.05$ باشد.