دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین هفتم ــ مقدمه‌ای بر برآورد، آزمون فرض و بازه اطمینان

طراح: سارا معصومی

سوپروایزر: سروش مس‌فروش مشهد

تاریخ تحویل: ۲۷ دی ۱۴۰۲

۱. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی — ۲۰ نمره

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی زیر هستند:

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2}, \qquad 0 < \theta \leq x$$

برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر θ را به‌دست آورید.

۲. برآوردگر پایدار — ۲۰ نمره

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی زیر باشند. ابتدا به روش گشتاوری یک برآوردگر برای θ پیدا کنید و سپس بررسی کنید که آیا این برآوردگر پایدار[1] است یا نه؟

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \theta x), \qquad -1 < x, \theta < 1$$

یادآوری: $\hat{\theta}$ یک برآوردگر پایدار برای θ است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند، $(*)$

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}) = \theta,$$

$$\lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$$

۳. تحلیل فاصله اطمینان — ۱۵ نمره

فرض کنید $X \sim B(n, p)$. برای nهای بزرگ، کدام یک از فاصله‌های اطمینان زیر با احتمال بیشتری پارامتر p را در برمی‌گیرد؟

آ. $\left(\frac{X}{n}, 1\right)$

ب. $\left(\frac{X}{n}, \infty\right)$

ج. $\left(\frac{X}{n} - 0/67\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}}, \frac{X}{n} + 0/67\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}}\right)$

---

[1] Consistent estimator

۴. تست فرض ۲۵ نمره

نمونه‌ای تصادفی به اندازه ۲۵ از یک توزیع نرمال با $\mu = ۱۰$ و $\sigma = ۲$ به یک دانشجو داده شده است. هر چند این دانشجو در جریان مقدار واقعی میانگین این توزیع نیست. اگر این دانشجو علاقه‌مند به بررسی آزمون فرض $H_۰ : \mu_۰ = ۱۰/۴ \quad vs \quad H_۱ : \mu_۰ \neq ۱۰/۴$ باشد، با فرض $\alpha = ۰/۰۵$ مقدار β را محاسبه کنید.

اطلاعات بیشتر: در مبحث آزمون فرض α و β خطاهای آزمون نامیده می‌شوند. به α خطای نوع اول آزمون می‌گویند و مقدار آن برابر با "احتمال رد فرض $H_۰$ به شرط برقرار بودن فرض $H_۰$" است. و همچنین β خطای نوع دوم آزمون است و مقدار آن برابر با "احتمال پذیرفتن فرض $H_۰$ به شرط برقرار نبودن فرض $H_۰$" است.

$$\begin{cases} \text{Type I error :} & \alpha = P\big(\text{incorrectly rejecting the } H_۰\big) = P\big(\text{reject } H_۰ | H_۰ \text{ is true}\big) \\ \text{Type II error :} & \beta = P\big(\text{incorrectly failing to reject the } H_۰\big) = P\big(\text{not rejecting } H_۰ | H_۰ \text{ is not true}\big) \end{cases}$$

۵. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی ناااریب (امتیازی) ۲۰ نمره

$X_۱, X_۲, ..., X_n$ نمونه‌های تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^۲)$ هستند و μ مقداری معلوم دارد. ابتدا برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی $\sigma^۲$ را به‌دست آورید و سپس بررسی کنید آیا این برآوردگر نااریب است؟

یادآوری ۱: $\hat{\theta}$ برآوردگری نااریب[۲] برای θ است اگر $E(\hat{\theta}) = \theta$.
یادآوری ۲: اگر $Z \sim N(۰, ۱)$، آنگاه[۳] $Y = Z^۲ \sim \chi^۲_{(۱)}$ و $E(Y) = ۱$.

۶. آشنایی با توزیع Student's t (امتیازی) ۱۰ نمره

گفته می‌شود که میانگین وزن نوزادان سالمی که ۱۲ ساعت از تولدشان می‌گذرد $۷/۵lbs$ (پوند) است. لیست زیر شامل وزن نمونه‌ای از نوزادانی است که ۱۲ ساعت از تولدشان می‌گذرد و همگی در محله‌ای کم بضاعت متولد شده‌اند. آیا در سطح $\alpha = ۰/۰۱$ می‌توان نتیجه گرفت که نوزادان متولد شده در این محله دچار کمبود وزن هستند؟

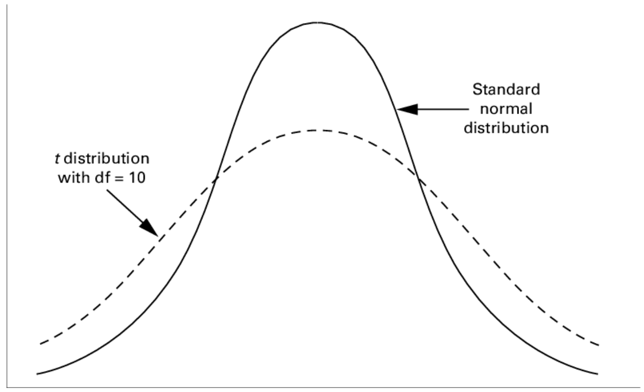
$$۶,\ ۸/۲,\ ۶/۴,\ ۴/۸,\ ۸/۶,\ ۸,\ ۶,\ ۷/۵,\ ۸/۱,\ ۷/۲$$

راهنمایی (توزیع t)[۴]: اگر $X \sim N(۰, ۱)$ و $Y \sim \chi^۲_{(r)}$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، آنگاه $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{r}}} \sim t_{(r)}$. یعنی T دارای توزیع t با درجه آزادی[۵] r است.

اطلاعات بیشتر: توزیع t بسیار شبیه به توزیع نرمال استاندارد است و تابع چگالی احتمال زنگوله‌ای شکل دارد، با این تفاوت که دو سر تابع چگالی توزیع t دیرتر به سمت صفر میل می‌کنند؛ یا به بیان دیگر توزیع t دم‌های محتمل‌تری دارد.
در مباحث فاصله اطمینان و آزمون فرض، در مواقعی که اندازه نمونه کوچک است یا واریانس جامعه نامعلوم است به جای توزیع نرمال استاندارد از توزیع t استفاده می‌شود.

---

[۲] Unbiased estimator
[۳] Chi-squared distribution
[۴] Student's t-distribution
[۵] degrees of freedom



شکل ۱: مقایسه pdf توزیع t و توزیع نرمال استاندارد