به نام خدا

نام و نام خانوادگی: مهراد لیوریان

(تمرین سری چهارم)

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

جواب سوال ۱:

الف)

$$\phi_X(s) = \sum_k e^{sk} P_X(k)$$

برای مقادیر گسسته

$$\longrightarrow \phi_X(s) = \sum_k \frac{\alpha}{2} \frac{e^{sk}}{e^{\alpha|k|}} = \frac{\alpha}{2} \sum_k \frac{e^{sk}}{e^{\alpha|k|}}$$

ب)

$$E[X^n] = m_n = \phi^{(n)}(0)$$

$$\longrightarrow m_1 = E[X] = \phi'(0)$$

$$E[X] = \sum_k k P_X(k) = \sum_k k \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|k|} = \frac{\alpha}{2} \sum_k \frac{k}{e^{\alpha|k|}} \quad (1)$$

$$\phi'(s)\Big|_{s=0} = \left(\frac{\alpha}{2} \sum_k \frac{k e^{sk}}{e^{\alpha|k|}} \right)\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha}{2} \sum_k \frac{k}{e^{\alpha|k|}} \quad (2)$$

$(1) == (2) \longrightarrow$ برابر هستند و برابر هم هستند

نام و نام خانوادگی : مهراد لیویان

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

جواب سوال ۲ :

روش PDF :

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 (1 - e^{\beta y} - e^{\alpha x} + e^{\alpha x + \beta y})}{\partial x \, \partial y}$$

$$= \frac{\partial(-\alpha e^{\alpha x} + \alpha e^{\beta y} e^{\alpha x})}{\partial y} = \beta \alpha e^{\alpha x} e^{\beta y}$$

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} \beta \alpha e^{\alpha x} e^{\beta y} \, dy = \frac{\beta \alpha e^{\alpha x}}{\beta} e^{\beta y} \Big|_0^{+\infty} = \alpha e^{\alpha x} (e^{\beta y}) \Big|_0^{+\infty}$$

$$\longrightarrow f_Y(y) = \beta e^{\beta y} (e^{\alpha x}) \Big|_0^{\infty}$$

چون $F_{XY}(x,y)$ در بی نهایت ($x,y \to \infty$) برابر ۱ هست پس

$$\left.\begin{array}{l} 1 - e^{\alpha x} = 1 \longrightarrow \alpha < 0 \\ 1 - e^{\beta y} = 1 \longrightarrow \beta < 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} f_X(x) = -\alpha e^{\alpha x} \\ f_Y(y) = -\beta e^{\beta y} \end{array}$$

روش PDF

$$\left.\begin{array}{l} f_{XY}(x,y) = e^{\alpha x + \beta y} \alpha \beta \\ f_X(x) = -\alpha e^{\alpha x}, \; f_Y(y) = -\beta e^{\beta y} \end{array}\right\} \longrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \to$$

مستقل هستند

روش CDF :

$$\left.\begin{array}{l} f_X(x) = -\alpha e^{\alpha x} \xrightarrow[\lambda = \alpha]{\text{توزیع نمایی}} F_X(x) = 1 - e^{\alpha x} \\ f_Y(y) = -\beta e^{\beta y} \xrightarrow[\beta = \lambda]{\text{توزیع نمایی}} F_Y(y) = 1 - e^{\beta y} \end{array}\right\} F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

مستقل هستند

روش CDF

ادامه در صفحه بعد

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

نام و نام خانوادگی: مهراد لیوبان

ادامه جواب سوال ۳ :

روش تابع مولد گشتاور:

$$f_X(x) = -\alpha e^{\alpha x}$$

در $\phi_X(s) = \int_0^\infty e^{sx}(-\alpha e^{\alpha x})\,dx = \int_0^\infty -\alpha e^{sx+\alpha x}\,dx$

$$= \frac{-\alpha}{s+\alpha} e^{(s+\alpha)x}\Big|_0^\infty \quad (1)$$

$$f(y) = -\beta e^{\beta x}$$

در $\phi_Y(s) = \int_0^\infty e^{\rho y}(-\beta e^{\beta y})\,dy = \int_0^\infty -\beta e^{(\rho+\beta)y}\,dy$

$$= \frac{-\beta}{\rho+\beta} e^{(\rho+\beta)y}\Big|_0^\infty \quad (2)$$

$$f_{XY}(x,y) = (1-e^{-\alpha x})(1-e^{\beta y})$$

در $\phi_{XY}(s,\rho) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{sx}\alpha e^{\alpha x} e^{\rho y}\beta e^{\beta y}\,dx\,dy$

$$= \int_0^\infty e^{\rho y}\beta e^{\beta y}\,dy \cdot \int_0^\infty e^{sx}\alpha e^{\alpha x}\,dx$$

$$= \frac{\beta}{\rho+\beta} e^{(\rho+\beta)y} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+s} e^{(\alpha+s)x}\Big|_0^\infty \quad (3)$$

$$(1) * (2) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+s)(\rho+\beta)} e^{(\rho+\beta)y} e^{(\alpha+s)x}\Big|_0^\infty$$

$(3) = (1) * (2) \longrightarrow$ مستقل هستند

طبق روش تابع مولد گشتاور