به نام خدا

نام و نام خانوادگی : مهراد لیوبان

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: آمار و احتمال — تمرین سری سوم

Year. Month. Date.

جواب سوال ۱:

الف)

باید انتگرال دوگانه عبارت برابر ۱ شود.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty A e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy = A\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow A\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx \int_0^\infty e^{-\mu y}\,dy = 1$$

$$\Rightarrow A \times \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^\infty \times \frac{e^{-\mu y}}{-\mu}\Big|_0^\infty = 1 \longrightarrow \frac{A}{\lambda\mu} = 1 \longrightarrow A = \lambda\mu$$

انتگرال دوگانه برابر یک شد همچنین مقدار $f_{X,Y}(x,y)$ همیشه مثبت است چون λ و μ مثبت هستند همچنین تابع e^{u} همیشه مثبت هست پس یک توزیع معتبر هست.

نام: مراد لیویان　　کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۰۵۰۱

Subject:　　Year.　Month.　Date.

ادامه جواب سوال ۱:

ب)

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^\infty \lambda\mu\, e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\,dy$$

$$\longrightarrow f_X(x) = \lambda\mu\, e^{-\lambda x}\int_0^\infty e^{-\mu y}\,dy = \frac{\lambda\mu\, e^{-\lambda x}}{-\mu} \times \cancel{e^{-\mu y}}\Big|_0^\infty{}_{-1}$$

$$\longrightarrow f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^\infty \lambda\mu\, e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\,dx$$

$$\longrightarrow f_Y(y) = \mu\lambda\, e^{-\mu y}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda\mu\, e^{-\mu y}}{-\lambda} \times \cancel{e^{-\lambda x}}\Big|_0^\infty{}_{-1}$$

$$\longrightarrow f_Y(y) = \mu\, e^{-\mu y}$$

$$f_{XY}(x,y) = \lambda\mu\, e^{-(\lambda x+\mu y)} = \underbrace{\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)}_{f_{X(x)}} \underbrace{\left(\mu e^{-\mu y}\right)}_{f_Y(}$$

$$\longrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

X و Y مستقل هستند.

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱ نام : مهراد لیمویان

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۱ :

ج)

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \longrightarrow$$ یک توزیع نمایی هست با پارامتر λ

$$X \sim Exp(\lambda) \longrightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$f_Y(y) = \mu e^{-\mu y} \longrightarrow$$ یک توزیع نمایی هست با پارامتر μ

$$Y \sim Exp(\mu) \longrightarrow E[Y] = \frac{1}{\mu}$$

$$f_{XY}(x,y) = \lambda \mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y}$$

$$E[XY] = \int_0^\infty \int_0^\infty xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$$\longrightarrow E[XY] = \int_0^\infty \int_0^\infty xy\, \lambda \mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\, dx\, dy$$

$$\longrightarrow E[XY] = \lambda \mu \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \int_0^\infty y e^{-\mu y} dy$$

$$\longrightarrow E[XY] = \underbrace{\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx}_{E[X]} \underbrace{\int_0^\infty \mu y e^{-\mu y} dy}_{E[Y]}$$

$$\longrightarrow E[XY] = E[X]\, E[Y]$$

$\longrightarrow$ { استقلال X و Y }

نام: مهراد لبویان — کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۲:

میانگین یک متغیر تصادفی نمایی برابر $\frac{1}{\lambda}$ هست.

$$X \sim Exp(\lambda)$$

فرض کنید زمان ارسال درخواست توسط کاربران را با توزیع نمایی با پارامتر λ نمایش می دهیم. X_1 و X_2 و X_3 و ... و X_{1000}

$$E[X_i] = \frac{1}{\lambda} = 1000 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{1000}$$

حال اگر بخواهیم احتمال آن را حساب کنیم که حداقل یک درخواست از سوی سرور نادیده گرفته شود، از متمم استفاده می کنیم و احتمال آن را حساب می کنیم که زمان ارسال درخواست همه بیشتر از ۲ هست.

$$P\{\text{حداقل یک درخواست نادیده گرفته شود}\} = 1 - P\{X_1 > 2, X_2 > 2, \dots, X_{1000} > 2\}$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل اند}} P = 1 - P\{X_1 > 2\} \times P\{X_2 > 2\} \times \dots \times P\{X_{1000} > 2\}$$

$$\longrightarrow P = 1 - (1 - F_X(2)) \times (1 - F_X(2)) \times \dots \times (1 - F_X(2))$$

$$\xrightarrow[\text{نمایی}]{F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}} P = 1 - \underbrace{\underset{e^{-2\lambda}}{\cancel{(1-(1-e^{-2\lambda}))}} \times \dots \times \underset{e^{-2\lambda}}{\cancel{(1-(1-e^{-2\lambda}))}}}_{\text{۱۰۰۰ تا}}$$

$$\xrightarrow{\lambda = \frac{1}{1000}} P = 1 - \left(e^{-\frac{2}{1000}}\right)^{1000} = 1 - e^{-2}$$

$$\longrightarrow P = 1 - e^{-2} = 1 - 0.13533 = \boxed{0.864664}$$

omid 20*30

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۹۰۱ نام: مراد لیوپیان

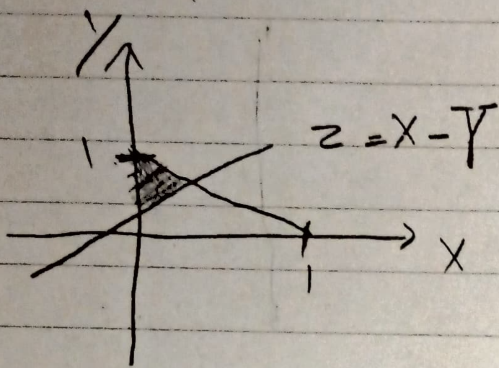
Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۳:

$$F_Z(z) = \text{Prob}\{Z \leq z\} = \text{Prob}\{X - Y \leq z\}$$

برای گرفتن انتگرال و بازه بندی نمودار آن را رسم می کنیم:

اگر z منفی باشد:



بازه y ها از پایین به $y = x - z$ و از بالا به $y = 1 - x$ بسته می شود و x ها از ۰ تا تقاطع دو خط هستند

$$\left.\begin{array}{l} y = x - z \\ y = 1 - x \end{array}\right\} \rightarrow x - z = 1 - x \rightarrow 2x = 1 + z \rightarrow x = \frac{1+z}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1+z}{2}} \int_{x-z}^{1-x} 6x \, dy \, dx = \int_0^{\frac{1+z}{2}} 6x(1+z-2x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1+z}{2}} 6x + 6zx - 12x^2 \, dx = 3x^2 + 3zx^2 - 4x^3 \Big|_0^{\frac{1+z}{2}}$$

$$= \frac{3(1+z)^2}{4} + \frac{3z(1+z)^2}{4} - \frac{4(1+z)^3}{8} = \frac{(3+3z)(1+z)^2}{4} - \frac{(1+z)^3}{2}$$

$$= \frac{(1+z)^3}{4}$$

ادامه در صفحه بعد

omid 20*30

نام: مهراد لیوبان

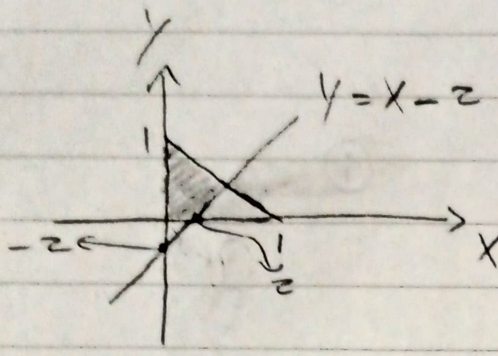
کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject:

Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۳:

اگر z مثبت باشد:



برای این قسمت ۱ را منهای قسمت سفید می‌کنیم. برای قسمت سفید بازه های x و y را مشخص می‌کنیم.

بازه x بین دو خط $x=z+y$ تا $x=1-y$ هست.

و بازه y بین ۰ تا تقاطع دو خط $x=z+y$ و $x=1-y$ هست.

$$\left.\begin{array}{l} x=1-y \\ x=z+y \end{array}\right\} \longrightarrow 1-y=z+y \longrightarrow 2y=1-z$$

$$y=\frac{1-z}{2}$$

$$1-\int_0^{\frac{1-z}{2}}\int_{z+y}^{1-y} 6x \, dx \, dy$$

$$=1-\int_0^{\frac{1-z}{2}} 3x^2\Big|_{z+y}^{1-y} dy \Rightarrow 1-\int_0^{\frac{1-z}{2}} 3(1-y)^2-3(z+y)^2 \, dy$$

$$=1-\int_0^{\frac{1-z}{2}} 3+\cancel{3y^2}-6y-3z^2-\cancel{3y^2}-6zy \, dy$$

$$=1-\int_0^{\frac{1-z}{2}} 3-3z^2-6y-6zy \, dy$$

$$=1-\left(\frac{3(1-z)}{2}-\frac{3z^2(1-z)}{2}-\frac{3(1-z)^2}{4}-\frac{3z(1-z)^2}{4}\right)$$

$$=1-\left(\frac{3}{2}(1-z)\right)\left(1-z^2-\frac{1-z}{2}-\frac{3z(1-z)}{2}\right)$$

ادامه در صفحه بعد

نام: مهراد لیمویان — کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject:

Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۳:

$$= ۱ - \left(\frac{۳}{۲}(۱-z)\right)\left(۱ - z^۲ - \frac{۱}{۲} + \frac{z}{۲} - \frac{۳z}{۲} + \frac{۳z^۲}{۲}\right) - ۱ =$$

$$= ۱ - \left(\frac{۳}{۲}(۱-z)\right)\left(\frac{۱}{۲} + \frac{z^۲}{۲} - z\right) = ۱ - \frac{۳}{۴}(۱-z)(۱-z)^۲$$

$$= ۱ - \frac{۳(۱-z)^۳}{۴}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x - y \\ ۰ < x + y < ۱ \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -۱ \Leftarrow x = ۰ \text{ و } y = ۱ \\ z = ۱ \Leftarrow x = ۱ \text{ و } y = ۰ \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow -۱ < z < ۱$$

حال داریم:

$$F_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{(۱+z)^۳}{۴} & -۱ < z < ۰ \\ ۱ - \dfrac{۳}{۴}(۱-z)^۳ & ۱ > z > ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } z} f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{۳(۱+z)^۲}{۴} & -۱ < z < ۰ \\ \dfrac{۹(۱-z)^۲}{۴} & ۰ < z < ۱ \end{cases}$$

omid

نام: مهراد لبویان — کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۴۰۱

Subject: — Year. Month. Date.

جواب سوال ۴:

یک متغیر تصادفی جدید به نام z تعریف می‌کنیم که فاصله نقطه برخورد تا مرکز است.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اگر $\{ \alpha$ را حساب کنیم و برابر $\text{prob}\{z < \alpha\}$ را حساب کنیم و برابر ۱٪ شود آنگاه حداکثر مقدار α مشخص می‌شود.

$$X \sim \text{Normal}(0, 9) \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$Y \sim \text{Normal}(0, 9)$$

$$\rightarrow f_X(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{18}}$$

$$\rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{18}}$$

$$F_Z(z) = \text{prob}\{Z < z\} = \text{prob}\{\sqrt{x^2+y^2} < z\}$$

$$= \iint_{\sqrt{x^2+y^2} < z} f_{XY}(x, y)\, dx\, dy$$

مختصات قطبی $\rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{z} f_{XY}(x, y)\, r\, dr\, d\theta$

چون X و Y از هم مستقلند پس $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{18}} \times \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{18}}$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{18\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{18}} = \frac{1}{18\pi} e^{-\frac{r^2}{18}}$$

ادامه در صفحه بعد

نام : مهراد لیویان

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year.   Month.   Date.

ادامه جواب سوال ۴ :

$$F_Z(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{1}{18\pi} e^{-\frac{r^2}{18}} r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{18\pi} \int_0^z r e^{-\frac{r^2}{18}} dr = \frac{1}{9} \times \frac{-18}{2} \int_0^z \frac{-2r}{18} e^{-\frac{r^2}{18}} dr$$

$$-\frac{r^2}{18} = u \longrightarrow du = \frac{-2r}{18} dr$$

$$\longrightarrow -\int_0^z e^u du = -e^u = -e^{-\frac{r^2}{18}} \Big|_0^z$$

$$= -\left(e^{-\frac{z^2}{18}} - 1\right) = \left(1 - e^{-\frac{z^2}{18}}\right)$$

$$F_Z(r) = 0/1 \longrightarrow \left(1 - e^{-\frac{r^2}{18}}\right) = 0/1$$

$$\longrightarrow 0/9 = e^{-\frac{r^2}{18}} \longrightarrow \ln 0/9 = \frac{-r^2}{18} \longrightarrow -r^2 = 18 \ln 0/9$$

$$\longrightarrow r = \sqrt{-18 \ln 0/9}$$

$$\longrightarrow \boxed{r = \sqrt{1,89648} \simeq 1,377127}$$