



دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر آمار و احتمال مهندسی

تمرین چهارم - تابع مولد گشتاور، توزیع‌های شرطی، کوواریانس

طراح: سالار صفردوست - علی آریایی

سوپروایزر: مسعود طهماسبی فرد

تاریخ تحویل: ۲۱ آذر ۱۴۰۲

۲۰ نمره

۱. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی گسسته

تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته X به صورت $P_X(k) = \frac{\alpha}{\gamma} e^{-\alpha|k|}$ است.

(الف) تابع مولد گشتاور متغیر X را به دست آورید. (۵ نمره)

(ب) یک بار به روش امید ریاضی و بار دیگر به کمک تابع مولد گشتاور بدست آمده در قسمت (الف) میانگین متغیر تصادفی X را محاسبه کنید و صحت پاسخ‌های بدست آمده را بررسی کنید. (۱۵ نمره)

۱۵ نمره

۲. استقلال و مولد گشتاور!

تابع CDF دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است. تابع مولد گشتاور توام و حاشیه‌ای را برای این دو متغیر تصادفی حساب کنید. استقلال این دو متغیر تصادفی را به سه روش، با استفاده از تابع CDF، تابع PDF و تابع مولد گشتاور بررسی کنید.

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta y}) & ; \quad x, y \geq 0 \\ 0 & ; \quad \text{Otherwise} \end{cases}$$

راهنمایی: تعریف مولد گشتاور توام:

The joint moment generating function of (X, Y) is $M(t_1, t_2) = \mathbb{E}[e^{t_1 X + t_2 Y}]$

Generating Moments:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \frac{\partial M(\cdot, \cdot)}{\partial t_1} & \mathbb{E}[Y] = \frac{\partial M(\cdot, \cdot)}{\partial t_2} \\ \mathbb{E}[X^2] = \frac{\partial^2 M(\cdot, \cdot)}{\partial t_1^2} & \mathbb{E}[Y^2] = \frac{\partial^2 M(\cdot, \cdot)}{\partial t_2^2} \\ \mathbb{E}[XY] = \frac{\partial^2 M(\cdot, \cdot)}{\partial t_1 \partial t_2} \end{cases}$$

توجه:

$$\text{if } X \perp Y \rightarrow \phi_{XY} = \phi_X \times \phi_Y$$

۱۵ نمره

۳. از توام به شرطی

دو متغیر تصادفی X و Y توزیع توأمی به صورت زیر دارند:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x+2y}{3} & ; \quad 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

A را پیشامد $\{Y \leq \frac{1}{4}\}$ در نظر بگیرید.

الف) مقدار $P(A)$ چقدر است؟ (۳ نمره)

ب) توابع $f_{X|A}(x)$ ، $f_{X,Y|A}(x,y)$ و $f_{Y|A}(y)$ را بدست آورید. (۹ نمره)

ج) توابع $f_{X|Y}(x|y)$ و $f_{Y|X}(y|x)$ را بدست آورید. (۳ نمره)

۴. گاو صندوق

۲۰ نمره

یک گاوصندوق دارای دو قفل، یکی ۴ رقمی و دیگری ۵ رقمی (با ارقام ممکن ۰ و ۱) است که برای باز شدن گاو صندوق، باید هر دو قفل باز شده باشند. همچنین اگر در مجموع بیش از ۳۰ تلاش برای باز کردن قفل‌ها صورت بگیرد، امکان وارد کردن رمز از بین می‌رود. برای باز کردن این گاوصندوق، پیدا کردن رمز هر قفل را به یک فرد می‌سپاریم. هر دوی این افراد به صورت کاملاً تصادفی و مستقل از یکدیگر، هر بار یک عدد را به عنوان رمز امتحان می‌کنند. (به محض وارد شدن عدد درست، فرد از درست بودن آن اطلاع پیدا می‌کند)

الف) احتمال آنکه بتوانیم گاوصندوق را باز کنیم چقدر است؟ (می‌توانید برای محاسبه‌ی پاسخ نهایی از پایتون یا هر نرم‌افزار دیگری استفاده کنید) (۱۰ نمره)

ب) اگر گاوصندوق باز شده باشد و بدانیم فرد مسئول قفل ۵ رقمی، ۱۲ تلاش انجام داده است، احتمال آنکه فرد مسئول قفل ۴ رقمی کمتر یا مساوی ۵ تلاش انجام داده باشد چقدر است؟ (۱۰ نمره)

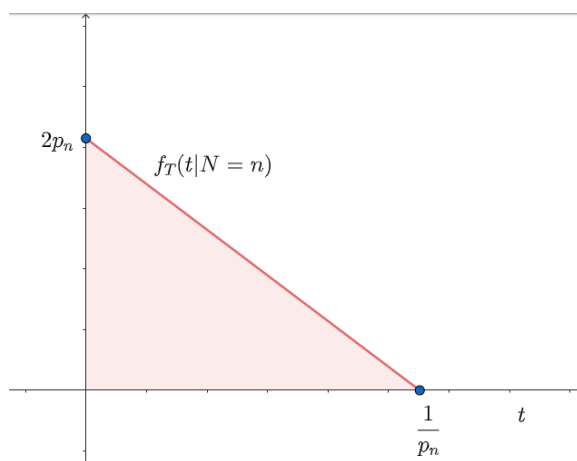
۵. ماهواره

۲۵ نمره

یک دیش ماهواره برای دریافت اطلاعات، نیاز دارد که در جهت یکی از چهار ماهواره‌ی بالای سر خود قرار بگیرد و سپس به آن متصل شود. انتخاب ماهواره‌ها بر اساس تابع جرم احتمال زیر مشخص می‌شود:

$$p_n = 0.5 - 0.1n; \quad n = 1, 2, 3, 4$$

همچنین در صورت انتخاب ماهواره‌ی n ام، مدت زمان اتصال دیش به ماهواره از توزیعی به شکل زیر پیروی خواهد کرد: (واحد t ، ثانیه می‌باشد).



الف) احتمال آنکه دیش به ماهواره‌های ۳ یا ۴ متصل شده باشد و کمتر از ۵ ثانیه زمان برای اتصال سپری شده باشد چقدر است؟ (۱۵ نمره)

ب) اگر بدانیم دیش در عرض ۲ ثانیه متصل شده است، احتمال اینکه به ماهواره‌ی ۳ متصل شده باشیم چقدر است؟. (۱۰ نمره)

۶. پونه!

۲۰ نمره

تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y به شکل زیر تعریف شده است:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c & 0 < x^{\frac{1}{n}} < y < x^n < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

که n عددی بین ۰ و ۱ و غیرتصادفی است.

الف) ناحیه‌ای که تابع چگالی در آن مقدار دارد را رسم کنید و مقدار c را به دست آورید. (به ازای $n = \frac{1}{3}$) (۵ نمره)

ب) کواریانس و ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی را محاسبه کنید. (به ازای $n = \frac{1}{3}$) (۱۰ نمره)

ج) با افزایش n به سمت ۱ انتظار داریم ضریب همبستگی چه تغییری کند؟ به طور کیفی چرا؟ (۵ نمره)

۷. لپ‌تاپ فروشی

۲۰ نمره

جدول زیر احتمال فروش سه نوع لپ‌تاپ در طول هفته را نشان می‌دهد.

	Type A	Type B	Type C
شنبه	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۳
یکشنبه	۰/۰۲	۰/۰۵	۰/۰۳
دوشنبه	۰/۰۲	۰/۰۴	۰/۰۴
سه‌شنبه	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۵
چهارشنبه	۰/۰۵	۰/۰۳	۰/۰۲
پنجشنبه	۰/۰۴	۰/۰۸	۰/۰۸
جمعه	۰/۰۳	۰/۰۶	۰/۰۲۱

الف) چه نوع لپ‌تاپی بیشترین احتمال خرید را دارد؟ (۵ نمره)

ب) احتمال خرید انواع مختلف لپ‌تاپ در روزهای سه‌شنبه و چهارشنبه را بدست آورید. (۵ نمره)

ج) در روزهای فرد، با چه احتمالی لپ‌تاپ‌های نوع B خریداری می‌شوند؟ (۵ نمره)

د) فرض کنید روزها را به ترتیب از ۰ تا ۶ و نوع لپ‌تاپ‌ها را نیز از ۰ تا ۲ نام‌گذاری کنیم. کوواریانس و همبستگی این دو متغیر تصادفی را بدست آورید. (۵ نمره)

۸. فرفره (امتیازی)

۲۰ نمره

روی یک صفحه‌ی دایره‌ای شکل، دو فرفره‌ی آبی و قرمز به طور همزمان و در نزدیکی هم چرخانده می‌شوند، به طوری که مدت زمان چرخش هر کدام از فرفره‌ها به ترتیب برابر X و Y ثانیه می‌باشد؛ همچنین تابع چگالی احتمال Y و تابع چگالی احتمال X به شرط دانستن آنکه $Y = y$ به شکل زیر می‌باشند. (c یک ضریب ثابت است)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{e^{-y}}{y+1} & y > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} (y+1)e^{-x-xy} & x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

الف) اگر بدانیم فرفره ی آبی x ثانیه چرخیده است، تابع چگالی احتمال Y را بیابید. (۵ نمره)

ب) اگر پس از انجام آزمایش فقط بدانیم که مدت زمان چرخش فرفره ی آبی دو برابر فرفره ی قرمز بوده است، تابع چگالی احتمال X را به دست آورید. (۱۵ نمره)

(راهنمایی ۱: برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال، ابتدا تابع توزیع تجمعی را بدست آورید.)

(راهنمایی ۲: $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$)