

Subject:

Year. Month. Date.

جواب سوال ۱:

$$\begin{aligned}
 P(|X - \mu_x| < k\sigma_x) &= P(-k\sigma_x < X - \mu_x < k\sigma_x) \\
 &= P\left(-k < \underbrace{\frac{X - \mu_x}{\sigma_x}}_Z < k\right) \\
 &= P(Z < k) - P(Z < -k) = P(Z < k) - (1 - P(Z < k)) \\
 &= 2P(Z < k) - 1 = 2\Phi(k) - 1
 \end{aligned}$$

به ازای مقادیر مختلف k داریم:

$$\begin{aligned}
 k=1 &\rightarrow 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826 \\
 k=2 &\rightarrow 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544 \\
 k=3 &\rightarrow 2\Phi(3) - 1 = 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974 \\
 k=4 &\rightarrow 2\Phi(4) - 1 = 2 \times 0.9999 - 1 = 0.9998
 \end{aligned}$$

حال با استفاده از تابلوی چیسف این مقادیر را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
 P(|X - \mu_x| < k\sigma_x) &= P(-k\sigma_x < X - \mu_x < k\sigma_x) \\
 &= P(\mu_x - k\sigma_x < X < \mu_x + k\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}
 \end{aligned}$$

$$k=1 \rightarrow P > 1 - 1 = 0 \rightarrow P \geq 0 \quad \checkmark$$

$$k=2 \rightarrow P > 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \rightarrow P \geq 0.75 \quad \checkmark$$

$$k=3 \rightarrow P > 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} \rightarrow P \geq 0.88 \quad \checkmark$$

$$k=4 \rightarrow P > 1 - \frac{1}{4^2} = \frac{15}{16} \rightarrow P \geq 0.9375 \quad \checkmark$$

اداره جواب سوال ۱:

تقاریر بدست آمده در قسمت اول با استفاده از توزیع
نرمال در بازه نامساوی چیسف قرار می‌گرفت و
آن‌ها را تأیید می‌کند.

جواب سوال ۲:

$$E[X] = 0 \times \frac{k^2 - 1}{k^2} + k \times \frac{1}{2k^2} + (-k) \times \frac{1}{2k^2} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\rightarrow \mu_X = 0$$

$$E[X^2] = 0^2 \times \frac{k^2 - 1}{k^2} + k^2 \times \frac{1}{2k^2} + (-k)^2 \times \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - 0^2 = 1$$

$$\sigma_X^2 = 1 \rightarrow \sigma_X = 1$$

$$P(|X - \mu_X| < k\sigma_X) = P(-k\sigma_X < X - \mu_X < k\sigma_X) \quad (\text{ب.})$$

$$= P(\mu_X - k\sigma_X < X < k\sigma_X + \mu_X) \xrightarrow[\sigma_X=1]{\mu_X=0} P(-k < X < k)$$

$$\rightarrow P(-k < X < k) = P(X=0) = \frac{k^2 - 1}{k^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$$

اداره در صفحه بعد

۱. ادامه جواب سوال ۲:

۲. ادامه قسمت (ب)

۳. حال با استفاده از نامساوی چبیشف عمل می‌کنیم:

$$P(|X - \mu_x| < k\sigma_x) = P(\mu_x - k\sigma_x < X < \mu_x + k\sigma_x)$$

۷. می‌دانیم که احتمال بالا بزرگتر مساوی $1 - \frac{1}{k^2}$ بر اساس نامساوی چبیشف خواهد بود.

$$P \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$P = 1 - \frac{1}{k^2} \rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} > 1 - \frac{1}{k^2}$$

۱۲. که به حالت تساوی رسیدیم که دقیقاً $P = 1 - \frac{1}{k^2}$ هست.

۱۶. جواب سوال ۳:

الف)

۱۸. X را متغیر تصادفی نمرات ونزه دانش‌جو در درس اول و Y را متغیر تصادفی

۱۹. نمرات ونزه دانش‌جو در درس دوم در نظر می‌گیریم.

۲۰. می‌دانیم که:

$$P(X + Y < 200 | X + Y > 170) \rightarrow \text{حالت}$$

$$W = X + Y \rightarrow W \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

$$P(W < 200 | W > 170) = \frac{P(170 < W < 200)}{P(W > 170)}$$

از این استفاده

ادام جواب سوال ۳

ادام الف

$$P(W < 200 | W > 170) = \frac{P(170 < W < 200)}{P(W > 170)}$$

$$= \frac{P(W < 200) - P(W < 170)}{1 - P(W < 170)}$$

$$W \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2) = N(180, 100)$$

$$= \frac{P\left(\frac{W-180}{10} < \frac{200-180}{10}\right) - P\left(\frac{W-180}{10} < \frac{170-180}{10}\right)}{1 - P\left(\frac{W-180}{10} < \frac{170-180}{10}\right)}$$

$$= \frac{P(Z < 2) - P(Z < -1)}{1 - P(Z < -1)} = \frac{\Phi(2) - \Phi(-1)}{1 - \Phi(-1)}$$

$$= \frac{\Phi(2) - (1 - \Phi(1))}{1 - (1 - \Phi(1))} = \frac{\Phi(2) + \Phi(1) - 1}{\Phi(1)}$$

$$= \frac{0.9772 + 0.8413 - 1}{0.8413} = \frac{0.8185}{0.8413} = 0.9729$$

ادام جواب سوال ۳

Subject:

Year. Month. Date.

۱. ادامه جواب سوال ۲:

۲. ب

۳. از ستم استفاده می کنیم

$$P(\text{حداقل ۲ نفر از مجموع ۱۸۰ نفر کمتر از ۱۸۰ شود}) = 1 - P(\text{یک نفر مجموع ۱۸۰ نفر کمتر از ۱۸۰ شود}) - P(\text{هیچ نفر مجموع ۱۸۰ نفر کمتر از ۱۸۰ شود})$$

$$P(W < 180) = P\left(\frac{W - 180}{10} < \frac{180 - 180}{10}\right) = P(Z < 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{مطلوب}) = 1 - \binom{15}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{14} - \binom{15}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 1 - \frac{15}{2^2} - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{16}{2^2}$$

$$\rightarrow P(\text{مطلوب}) = 1 - \frac{16}{16} = \frac{16}{16} = 0.1125$$

۱۸. جواب سوال ۲:

۱۹. برای آنکه Z نارنجی پارامتر باشد باید $E[Z] = 0$ شود.

$$E[ax + by] = 0 \rightarrow E[Z] = 0 \text{ : سیم نارنجی بودن}$$

$$\rightarrow aE[x] + bE[y] = 0 \rightarrow (a+b)0 = 0$$

$$\rightarrow a+b=1 \text{ : رابطه } a \text{ و } b \text{ باید برای هر } a \text{ و } b \text{ باشد}$$

ادامه جواب در صفحه بعد

ادامه جواب سوال ۲

می دانیم که $a + b = 1$ و می خواهیم a و b را طوری انتخاب کنیم که $\text{Var}(z)$ کمترین مقدار خود باشد پس:

$$\text{Var}(z) = \text{Var}(aX + bY) \xrightarrow{\text{مستقلند}} a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y)$$

$$\rightarrow \text{Var}(z) = a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2 \xrightarrow{b=1-a} \text{Var}(z) = a^2 \sigma_1^2 + (1-a)^2 \sigma_2^2$$

$$= a^2 \sigma_1^2 + a^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - 2a \sigma_2^2 = a^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2a \sigma_2^2 + \sigma_2^2$$

حالا از عبارت مشتق می گیریم نسبت به a (برابر صفر قرار می دهیم)

$$\frac{d \text{Var}(z)}{da} = 2a (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2 \sigma_2^2 = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{\cancel{\sigma_2^2}}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \rightarrow a$$

$$b = 1 - a \xrightarrow{a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} b = 1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \rightarrow b$$