به نام خدا

نام و نام خانوادگی: مهرا لوران

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: تمرین سری ۷ - آمار و احتمال   Year.   Month.   Date.

جواب سوال ۱:

ابتدا تابع درست‌نمایی بیشینه را برای f می‌نویسیم:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n \mid \theta)$$

مستقل هستند

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^2} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$$

$$\longrightarrow LL(\theta) = n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{-2}$$

$$LL(\theta) = n \ln \theta - 2 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\longrightarrow \frac{\partial LL(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} = 0 \longrightarrow$$ این معادله جواب ندارد

ولی با توجه به شرط $0 < \theta \le x_1, x_2, \dots, x_n$ باید $\hat{\theta}_{ML} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$

چون مقداری برای θ بدست نیامد، از نقاط مرزی استفاده می‌کنیم پس:

$$\boxed{\hat{\theta}_{ML} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

نام: مهراد لیوریان

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۲۹۱

Subject:

Year. Month. Date.

جواب سوال ۲:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{(x)}\, dx = \int_{-1}^{+1} x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta x\right) dx$$

$$\longrightarrow E[X] = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{\theta x^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\theta}{6} - \frac{(-\theta)}{6} = \frac{\theta}{3}$$

پس گشتاور مرتبه اول برابر $\frac{\theta}{3}$ هست.

$$E[X] = m_1 = \frac{\theta}{3} \longrightarrow \hat{m}_1 = \frac{\hat{\theta}}{3}$$

می دانیم که $\hat{m}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ هست پس:

$$\boxed{\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\hat{\theta}}{3} \longrightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

حالا می خواهیم پایدار بودن $\hat{\theta}$ را چک کنیم:

$$E[\hat{\theta}] = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \frac{3\cancel{n}E[x_i]}{\cancel{n}} = 3E[X] = 3 \times \frac{\theta}{3} = \theta$$

می دانیم که برای $n\to\infty$ داریم $E[x_i]=E[X]$.

پس برای $n\to\infty$: $\lim_{n\to\infty} E[\hat{\theta}] = \theta$.

حالا باید شرط دوم را چک کنیم:

$$\boxed{Var(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{9}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \xrightarrow{i.i.d} \frac{9}{n^2}\, n Var(X)}$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{9\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} Var(X) = 0$$

پس این برآوردگر پایدار است.

omid 20×30

نام: مهرا ایزان — کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۰۱۰۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۳:

X یک توزیع برنولی هست با شانس موفقیت p و n بار تکرار شده است پس $\hat{p}$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

و $\hat{p}$ را می‌توان توزیع نرمالی با میانگین p و انحراف معیار $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ در نظر گرفت.

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

الف)

$$\left(\frac{X}{n}, 1\right) \to \left(\hat{p}, 1\right)$$

$$P(\hat{p} \le p \le 1) = P(\hat{p} \le p) = P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le 0\right)$$

$$= P(Z \le 0) = \Phi(0) = \boxed{0/5}$$

ب)

$$\left(\frac{X}{n}, +\infty\right) \to \left(\hat{p}, +\infty\right)$$

$$P(\hat{p} \le p \le \infty) = P(\hat{p} \le p) = P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le 0\right)$$

$$= P(Z \le 0) = \Phi(0) = \boxed{0/5}$$

ادامه در صفحه بعد

نام مهراد لیویان کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۰۱۵۱

Subject: Year. Month. Date.

ادامه جواب سوال ۳:

ج)
$$\left(\frac{X}{n} - 0/97\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}} \text{ و } \frac{X}{n} + 0/97\sqrt{\frac{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}{n}}\right)$$

$$=\left(\hat{p} - 0/97\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \text{ و } \hat{p}+0/97\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$$P\left(\hat{p}-0/97\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p}+0/97\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$$\longrightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0/97 \xrightarrow[\text{جدول } \phi(z)]{\text{طبق}} 1-\frac{\alpha}{2} = 0/7486$$

$$\longrightarrow 0/2514 = \frac{\alpha}{2} \longrightarrow \alpha = 0/5028$$

بازه اطمینان برابر $1-\alpha$ هست که برابری شود با:

$$\boxed{1-\alpha = 0/4972}$$

از مقایسه سه قسمت نتیجه می شود که قسمت های الف و ب احتمال بیشتری برای بازاست p را در بر می گیرند.

نام: مهرا ابریان   کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject: Year. Month. Date.

جواب سوال ۴:

$n=25$ و $\mu_0 = 10$ و $\sigma = 2 \rightarrow \bar{X} \sim N\left(10, \frac{4}{25}\right)$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \phi_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)} = \phi_{(0.975)} = 1.96$$

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{10-10.4}{\frac{2}{5}} = \frac{-0.4}{0.4} = -1$$

آماره آزمون

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{25} = 0.16$$

بازه اطمینان برابر می‌شود با:

$$\left(\mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} , \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

$$(10.4 - 1.96 \times 0.4 , 10.4 + 1.96 \times 0.4)$$

$\rightarrow (9.616 , 11.84) \rightarrow$ بازه مورد پذیرش H_0 برای $\alpha = 0.05$

not rejecting H_0

حالا برای محاسبه β داریم: ($\mu = 10$ می‌شود.)

$$\beta = P(9.616 < \bar{X} < 11.184 \mid \mu = 10) = P\left(\frac{9.616-10}{0.4} < Z < \frac{11.184-10}{0.4}\right)$$

$$\rightarrow P(-0.96 < Z < 2.96) = \phi_{(2.96)} - \phi_{(-0.96)}$$

$$= \phi_{(2.96)} - (1 - \phi_{(0.96)}) = \phi_{(2.96)} + \phi_{(0.96)} - 1$$

$$\rightarrow \beta = 0.9985 + 0.8315 - 1 = 1.83 - 1 = \boxed{0.83}$$

$$\rightarrow \boxed{\beta = 0.83}$$

نام: مهراد لیویان

کد دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject:

Year. Month. Date.

جواب سوال ۵:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\sigma) = f(x_1, x_2, \dots, x_n \mid \sigma)$$

$$\longrightarrow L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\longrightarrow L(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\longrightarrow LL(\sigma) = n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\longrightarrow LL(\sigma) = -n \ln \sqrt{2\pi}\,\sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2$$

$$\longrightarrow \frac{\partial LL(\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n\cancel{\sqrt{2\pi}}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\,\sigma} + \frac{\cancel{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\cancel{2}\,\sigma^3} = 0$$

$$\longrightarrow -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} = 0 \longrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n} = \hat{\sigma}^2_{ML}$$

برای چک کردن ناریب بودن $\hat{\sigma}^2_{ML}$ کافی هست که $E[\hat{\theta}] = \theta$ را چک کنیم.

$$E\left[\hat{\sigma}^2_{ML}\right] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E\left[(x_i-\mu)^2\right]}_{Var(x_i)}$$

$$\longrightarrow E\left[\hat{\sigma}^2_{ML}\right] = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\, Var(x_i) = \sigma^2$$

پس ناریب است.

$\hat{\sigma}^2_{ML}$ ناریب است

omid

نام : مهراد لیویان

کد دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۵۰۱

Subject:　　　　Year.　　Month.　　Date.

جواب سوال ۶:

چون $n < 30$ هست و واریانس جامعه را نمی دانیم که می توانیم از توزیع t به جای z استفاده کنیم.

t یک پارامتر دارد که (r) برابر درجه آزادی است که برابر $n-1$ است، پس:

$$\boxed{r = n-1 = 10-1 = 9}$$

و برای $\frac{\alpha}{2}$ داریم:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005$$

از طرفی دیگر برای محاسبه $\bar{x}$ و s^2 با توجه به نمونه بدست آمده می توان گفت:

$$\bar{x} = \frac{6 + 8.2 + 6.4 + 4.8 + 7.6 + 8 + 6 + 7.5 + 8.1 + 7.2}{}$$

$$\longrightarrow \bar{x} = \frac{70.8}{10} = \boxed{7.08}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} \times 15.03 = 1.67$$

$$\longrightarrow s^2 = 1.67 \longrightarrow s = \sqrt{1.67} \simeq 1.29$$

طبق جدول مقادیر توزیع t برای $\alpha = 0.01$ داریم:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.005 = 99.50\% \xrightarrow[\text{یک طرفه}]{\text{جدول}} 99.75\%$$

$$\boxed{t_{9, 99.75\%} = 3.69}$$

چون ۵٫۵ در این بازه هست پس نوزادان کمبود وزن ندارند

بازه اطمینان: $\left(7.08 - 3.69 \times \frac{1.29}{\sqrt{10}} , 7.08 + 3.69 \times \frac{1.29}{\sqrt{10}}\right) = (5.58 , 8.58)$

omid 20×30