Surfaces de subdivision

Les **surfaces de subdivision** sont basées fondamentalement sur un maillage de base auquel on fixe des règles de subdivision c'est-à-dire un schéma de subdivision. Dans certain cas, comme pour les courbes, la subdivision se factorise.

Pour un schéma sous forme factorisée, **un pas de subdivision** revient à répéter deux étapes consécutives :

1. raffinement linéaire
2. lissage –répété éventuellement en fonction du degré

Vous pourrez trouver une expression factorisée pour les surfaces de degré 3 ci dessous, et plus de détails dans le livre "Subdivision : A constructive Approach" Warren-Weimer (qui est à la bibliothèque de l'n7).

Plus classiquement, la subdivision est exprimée comme un calcul partiel de barycentre pondérés.

Quelques définitions :

— Sommet **pair** : sommet existant à la précédente étape de subdivision
— Sommet **impair** : sommet inséré à l'étape courante
— sommet **régulier** : valence 6 pour pour les maillages triangulaires, 4 pour les maillages quadrangulaires
— Sommet **extraordinaire** : tous les autres sommets
— Schéma **dual** : subdivision de faces
— Schéma **primal** : subdivision des sommets.

Schéma	Type	Maillage Triangulaire	Maillage Quadrangulaire
Primal	Approximation	Loop	Catmull-Clark
Primal	Interpolation	Butterfly modifié	
Dual	Approximation	$\sqrt{3}$	Doo-Sabin

Classification des surfaces de subdivisions

1 Matrice de subdivision

Un schéma de subdivision peut être exprimé par une matrice M de poids ω :
— M est creuse pour les schémas usuels
— M ne doit pas être utilisée pour l'implémentation.

Ce schéma permet l'étude analytique de la surface limite et en particulier de ses propriétés de continuité (tangentes, courbures ...)

$$P^{i+1} = MP^i$$

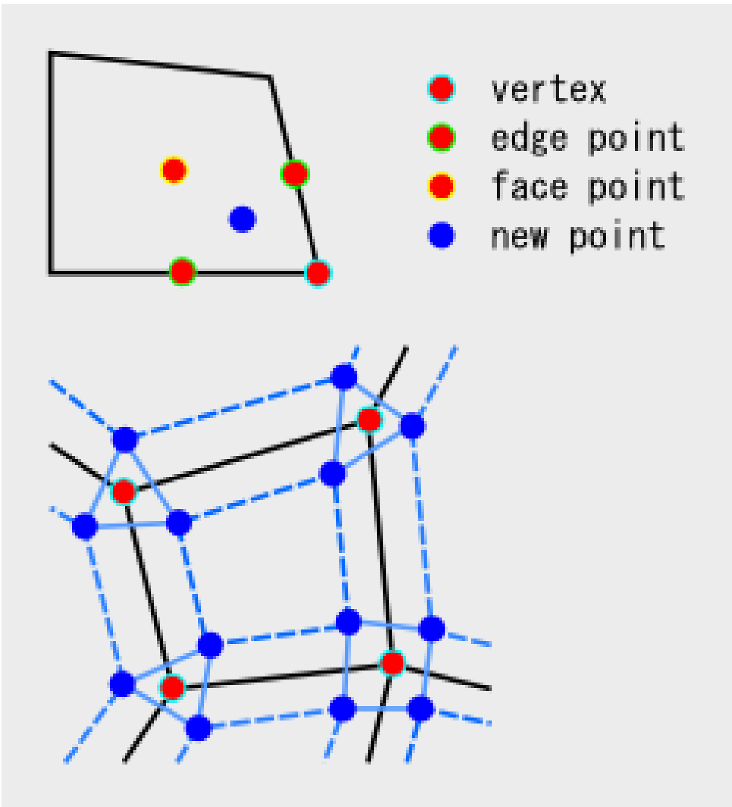
$$\begin{pmatrix} p_0^{i+1} \\ p_1^{i+1} \\ \vdots \\ p_n^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{00} \; \omega_{01} \ldots 0 \\ \omega_{10} \; \omega_{11} \ldots 0 \\ \vdots \, \vdots \, \ddots \, \vdots \\ 0 0 \ldots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^{i} \\ p_1^{i} \\ \vdots \\ p_n^{i} \end{pmatrix}$$

En fait, un schéma est exprimé par 2 matrices, une de raffinement pour insérer les nouveaux sommets et une de convergence pour déplacer les sommets existants (la plus intéressante à étudier).

2 Doo Sabin

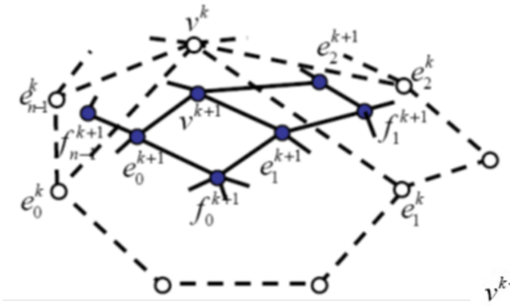
L'algorithme de Doo-Sabin est une subdivision de spline par produit tensoriel de degré 2. Si vous faites des splines de degré 2 en produit tensoriel, vous obtenez l'algorithme de Doo-Sabin pour le cas régulier (tous les sommets sont réguliers).

— Point sur la face : moyenne entre les sommets du polygone
— point sur une arête : moyenne de l'arête
— nouveau point : moyenne des 4 points (point de la face, 2 points de l'arête et le sommet)



3 Schéma Catmull-Clark

Le schéma de Catmull-Clark est un schéma approximant pour maillages quadrangulaires avec un raffinement primal. La continuité est C^2 partout sauf aux sommets extraordinaires (C^1).
La façon classique d'exprimer l'algorithme de Catmull-Clark est la suivante :



$$f_j^{k+1} = \frac{1}{|F_j|} \sum_{f_i^k \in F_j} f_i^k$$

$$e_j^{k+1} = \frac{v^k + e_j^k + f_j^{k+1} + f_{j-1}^{k+1}}{4}$$

$$v^{k+1} = \frac{n-2}{n} v^k + \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} e_j^k + \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} f_j^{k+1}$$

— Pour chaque face, un nouveau sommet est créé en son centre.
— Pour chaque arête, un nouveau sommet est créé comme le barycentre entre le milieu de l'arête et les deux face points adjacents à l'arête
— déplacer les anciens sommets en utilisant le barycentre des k face point adjacents et le barycentre des k edge point adjacents pour déplacer le somme vers le sommet satisfaisant la formule suivante de v^{k+1}.

Remarque : Si vous faites des splines de degré 3 en produit tensoriel, vous obtenez l'algorithme de Catmull-Clark pour le cas régulier (tous les sommets sont réguliers).

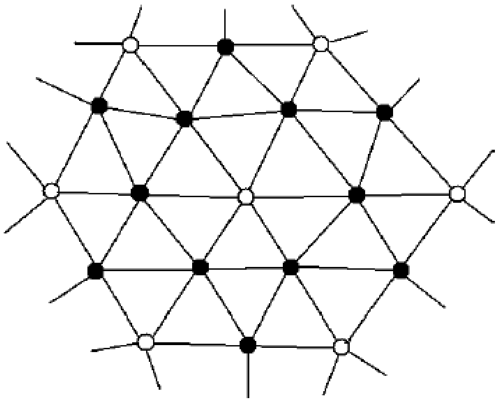
Forme factorisée Comme pour le cas des courbes, on peut exprimer cet algorithme de subdivision plus simplement sous une forme factorisée (ça marche dans le cas régulier et aussi irrégulier) :
— on commence par effectuer une subdivision linéaire : chaque arête et coupée en 2, chaque face est coupée en 4.
— on calcule un barycentre par face (isobarycentre des 4 sommets)
— on replace chaque sommet au barycentre des barycentres des faces qui le contiennent.

On remarque que les 2 dernières étapes peuvent être effectuées en un parcours des faces, lorsque l'on a calculé le barycentre $baryc\_face$ de la face, on ajoute sa contribution à chacun des sommets v de la face :

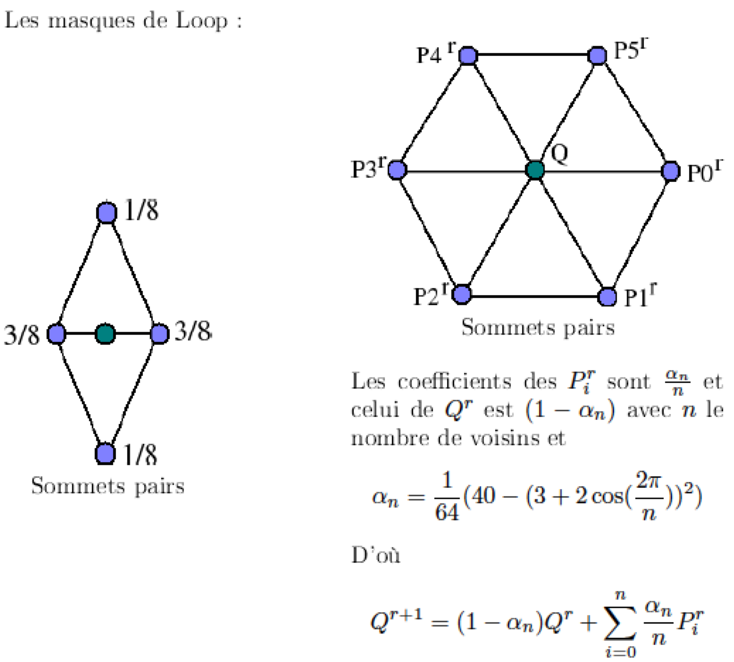
$$nouvelle\_position(v) += baryc\_face/valence(v).$$

4 Schéma Loop

Il s'agit d'un schéma approximant pour des maillages triangulaires avec un raffinement primal. La continuité est C^2 par tout sauf aux sommets extraordinaires où la continuité est C^1.



Forme classique (non factorisée)



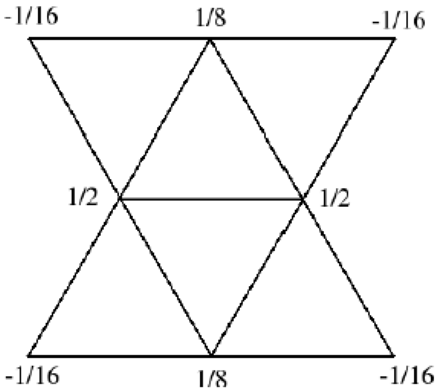
Forme factorisée Comme pour pour Catmull-Clark, on peut exprimer cet algorithme de subdivision plus simplement sous une forme factorisée (ça marche dans le cas régulier et aussi irrégulier) :

- on commence par effectuer une subdivision linéaire : chaque arête et coupée en 2, chaque face est coupée en 4.
- on calcule 3 barycentres par face (isobarycentre des 4 sommets)
- on replace chaque sommet au barycentre des barycentres des faces qui le contiennent.

Vous trouverez aussi plus de dtéail sur la forme factorisée dans le livre cité ci dessus.

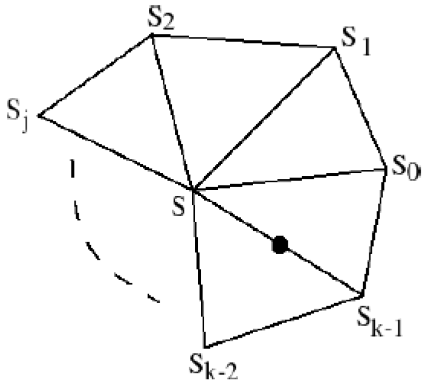
5 Butterfly (modifié)

Il s'agit d'un schéma interpolant pour maillage triangulaire qui est C^1 partout avec cette version modifiée.



sommets impairs modifiés

Bords et arêtes vives



Sommets impairs extraordinaires

$$k = 3 \quad s_0 = \frac{5}{12} \quad s_{1,2} = \frac{-1}{12}$$

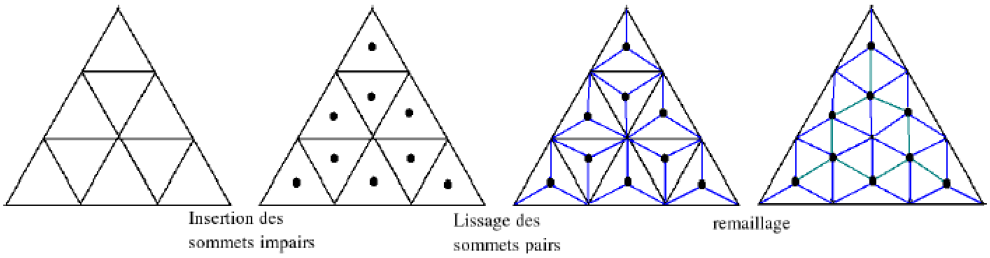
$$k = 4 \quad s_0 = \frac{3}{8} \quad s_2 = \frac{-1}{8} \quad s_{1,3} = 0$$

$$k > 5 \quad \frac{1}{4}(\frac{1}{4} + \cos\frac{2i\pi}{n} + \frac{1}{2}\cos\frac{4i\pi}{k})$$

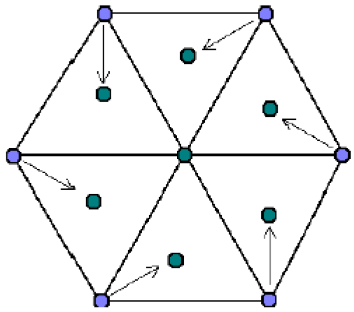
Note : comme ce schéma est interpolant, il y a uniquement des masques de sommets impairs

6 Racine de 3

C'est un schéma triadic (raffinement 1-3) pour maillage triangulaire (rotation de la topologie locale) avec une étape de rafinement plus fine que le schéma loop.



Insertion des sommets impair : on prend le barycentre du triangle :



$$q = \frac{1}{3}(p_i + p_j + p_k)$$

Relaxation des sommets pairs : on fait une interpolation entre la position d'origine et le barycentre du 1-voisinage :

$$S(p) = (1 - \alpha_n)p + \alpha_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} p_j$$

avec

$$\alpha_n = \frac{4 - 2\cos(\frac{2\pi}{n})}{9}$$