تمرینات و پروژه سری اول مبانی هوش محاسباتی ۹۷۱   مهلت تحویل ۹۷/۹/۱

تمرینات (تک نفره)

۱) مسایل بهینه سازی ترکیبی زیر را در نظر بگیرید.

- **مساله مجموعه مستقل بیشینه (The Maximum Independent Set Problem)**

با فرض گراف همبند بدون جهت $G=(V,E)$ که فاقد طوقه است، هدف مساله مجموعه مستقل بیشینه، یافتن زیرمجموعه بیشینه ای از رئوس گراف G است به طوریکه هیچ دو راسی از این زیر مجموعه مجاور هم نباشند.

- **مساله کلیک بیشینه (The Maximum Clique Problem)**

با فرض یک گراف بدون جهت $G=(V,E)$، یک کلیک Q گراف G زیرمجموعه ای از رئوس V است به طوری که هر دو راس موجود در Q مجاور یکدیگر باشند:

$$\forall (i,j) \in Q\times Q, i\neq j \quad (i,j)\in E$$

منظور از یک کلیک بیشینه، کلیکی است که ماکزیمم تعداد اعضا را دارد.

- **مساله پوشش مجموعه ای (The Set Covering Problem)**

با فرض یک ماتریس پوشش بولی $[a_{ij}]_{m\times n}$ که در آن $i\in I=1,\ldots,m$، مجموعه سطرها و $j\in J=1,\ldots,n$، مجموعه ستون هاست. یک درایه a_{ij} این ماتریس برابر با ۱ است چنانچه سطر i توسط ستون j پوشانده شده باشد و در غیر اینصورت برابر با صفر است. هر ستون j ماتریس با یک هزینه مثبت c_j و یک عدد عضویت $card_j$ که بیانگر تعداد سطرهایی است که توسط آن ستون پوشانده می شود، تعریف می گردد. هدف این مساله، انتخاب یک زیرمجموعه ای از ستونها با یک هزینه مجموع کمینه به صورتی است که تمام سطرها پوشانده شده باشند. به بیان دیگر حداقل یک درایه با مقدار ۱ در هر سطر انتخاب شده باشد.

- **مساله دیرکرد وزنی مجموع تک ماشینه (The Single Machine Total Weighted Tardiness Problem)**

n کار با هدف زمانبندی بر روی یک ماشین مفروض است. هر کار i با وزن w_i، یک زمان پردازش p_i و یک تاریخ سررسید d_i تعریف می شود. برای یک زمانبندی داده شده، فرض کنید C_i زمان تکمیل کار i را نشان دهد. هدف این مساله، کمینه کردن دیرکرد وزنی مجموع $\sum_{i=1}^{n} w_i T_i$ است که در آن $T_i=\max(0,C_i-d_i)$ دیرکرد کار i تعریف شده است.

- **مساله فروشنده دوره گرد تعمیم یافته (The Generalized Traveling Salesman Problem)**

گراف کامل $G=(V,E)$ را که V نشان دهنده مجموعه شهرها می باشد، در نظر بگیرید. در این مساله، مجموعه رئوس V به m گروه $W_1, W_2, \ldots, W_m$ افراز می شود که در آن $0<m\leq n$ و $W_1\cup W_2\cup\ldots\cup W_n=V$. هر شهر $v_i\in V$ به یک و فقط یک گروه تعلق دارد. گروه ها از هم متمایز هستند؛ یعنی، $\forall i\neq j, W_i\cap W_j=\varnothing$. هدف مساله، یافتن یک تور کمینه بر حسب فاصله به شرطی است که تنها شامل یک گره از هر گروه W_i باشد.

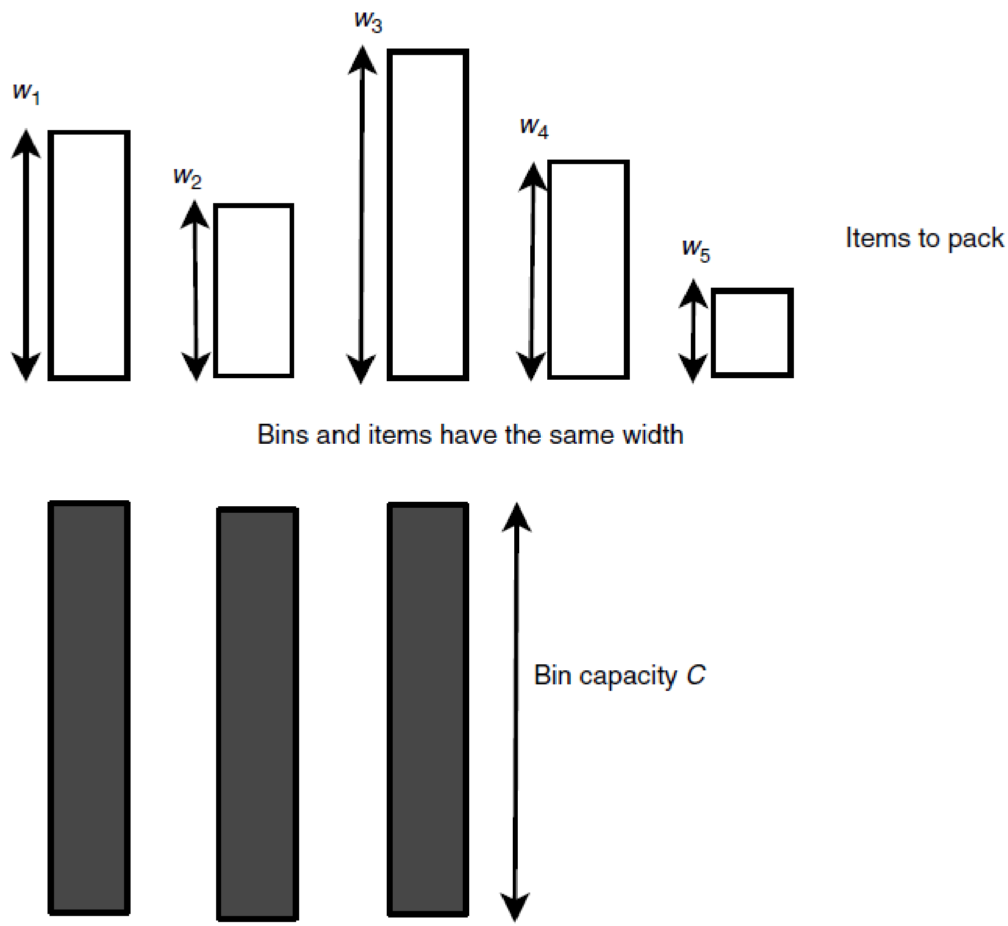
- **مساله مسیریابی وسیله نقلیه ظرفیت دار (The Capacitated Vehicle Routing Problem)**

در این مساله n مشتری $(c_1,c_2,\ldots c_n)$ هر یک با تقاضای $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ تعریف شده اند. m وسیله نقلیه همسان با ظرفیت Q برای تحویل تقاضاهای مشتریان در یک دپوی یک مرکز توزیع در نظر گفته شده است. مدت زمان تحویل دهی تقاضا برای هر مشتری c_i (زمان سرویس) t_i و زمان و هزینه سفر هر کامیون از مشتری c_i به مشتری c_j به ترتیب برابر با t_{ij} و c_{ij} می باشد. در طول سرویس دهی، هر مشتری تنها توسط یک کامیون بازدید شده و تقاضای آن تکمیل می شود. هر کامیون با توجه به ظرفیت خود تعداد محدود مشتری را می تواند سرویس دهی کند

که به آن یک مسیر گویند. مبدا و مقصد هر مسیر ساخته شده توسط هر کامیون دپو می باشد. هدف تولید مجموعه ای از مسیرهاست به طوریکه اولا تمام مشتریان سرویس دهی شوند، حجم کل سفارش هر مسیر حداکثر Q باشد، زمان کل هر مسیر (زمان های سرویس دهی + زمان های سفر) کمتر از یک مقدار از پیش تعیین شده L باشد و در عین حال مجموع هزینه های c_{ij} تمام مسیرها کمینه شود.

- **مساله جادهی ظرف یک بعدی (The one-dimensional bin packing problem)**

با فرض تعداد n شـــیء با وزن $W_1, W_2, \ldots, W_n$ و مجموعه محدودی ظرف همســـان با ظرفیت وزنی C (که از سنگین ترین شیء موجود بیشتر است)، هدف مساله یافتن کمینه k تعداد ظرف است به طوری که تمام این اشیاء بدون نقض ظرفیت ظرفها در آنها جادهی شده اند (شکل زیر).



The one-dimensional bin packing problem

برای هر یک از مسایل فوق

الف) اجزای مساله را شامل پارامترهای ورودی، متغیرهای تصمیم گیری، متغیر هدف و قیدهای آن را تشریح کنید.

ب) مساله را به شکل یک مدل ریاضی با نوشتن رابطه تابع هدف و اجبارهای آن فرموله کنید.

ج) یک نمایش کروموزوم مبتنی بر کدگذاری خطی ارایه دهید و فرمول رابطه تابع برازش یا هزینه را مطابق آن بنویسید.

د) با توجه به کدگذاری پیشنهاد شده و ویژگی های مساله، عملگرهای تقاطع و جهش مناسب با آن را پیشنهاد دهید.

۲) فرض کنید می خواهیم از الگوریتم بهینه سازی کلونی مورچه ها برای حل هر کدام از مسایل معرفی شده در تمرین شماره (۱) استفاده کنیم. برای هر یک از مسایل فوق

الف) گراف تصمیم گیری (یا ساخت) آن را تعریف و ترسیم کرده و مسیر حرکت یک مورچه را از مبدا تا مقصد به طور دقیق نشان دهید.

ب) ساختمان داده مدل فرومون را طراحی کرده و طبق آن نحوه تعریف پارامتر فرومون T را مشخص کنید.

ج) یک الگوریتم حریصانه احتمالی برای حرکت مورچه طراحی کرده و مطابق آن پارامتر ابتکاری η را تعریف کنید.

د) با توجه به پاسخ خود در دو قسمت (ب) و (ج)، نحوه محاسبه احتمال حرکت گام به گام مورچه را تا ساخت کامل جواب بر اساس دو پارامتر T و η را به صورت ریاضی نشان دهید.

۳) می خواهیم مساله بهینه سازی پیوسته

$$\min f(\mathrm{X})$$
$$s.t. \quad \mathrm{X} \in \Omega$$

را که در آن $f: R^n \to R$ یک تابع غیر خطی و

$$\Omega = \{X \in R^n | -\infty < l_k \le x_k \le u_k < +\infty, k = 1, \dots, n\}$$

است را با استفاده از بهینه سازی کلونی مورچه حل کنیم.

الف) برای مساله فوق، پروسه حرکت یک مورچه از لانه تا منبع غذا را تفسیر کنید.

ب) برای حل این مساله لازم است که بتوان آنرا به فرم یک گراف تصمیم گیری مدل کرد. با فرض k=6 گراف متناظر با این مساله را تعریف و ترسیم کرده و مسیر حرکت یک مورچه از مبدا تا مقصد را به طور دقیق نشان دهید.

ج) در حالت کلی می دانیم که احتمال اینکه مورچه kام از گره کنونی i به گره بعدی j حرکت کند برابر است با:

$$p_{ij}^k = \begin{cases} \dfrac{\tau_{ij}^{\alpha} + \eta_{ij}^{\beta}}{\sum_{j \in N_i^k} \tau_{ij}^{\alpha} + \eta_{ij}^{\beta}} & j \in N_i^k \\ 0 & j \notin N_i^k \end{cases}$$

که در آن N_i^k مجموعه گره هایی است که می توان از گره i به سمت آنها حرکت کرد. تعریف پارامتر η_{ij} در حالت کلی چیست؟ آیا می توان آن را در این مساله تعریف کرد؟ توضیح دهید.

د) فرض کنید برای بروزرسانی فرومون ها از استراتژی بروزرسانی آفلاین مبتنی بر کیفیت استفاده شود. بر پایه این استراتژی رابطه زیر تعریف شده است:

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} + \sum_k \Delta\tau_{ij}^k$$

معادله فوق را به طور دقیق تحلیل کرده و رابطه ای برای محاسبه $\Delta\tau_{ij}^k$ پیشنهاد دهید.

۴) الگوریتم بهینه سازی توده ذرات را در نظر بگیرید. می دانیم که این الگوریتم اساسا برای حل مسایل بهینه سازی پیوسته پیشنهاد و طراحی شده است. می خواهیم تلاش کنیم که این الگوریتم را برای حل مسایل بهینه سازی ترکیبی هم مورد استفاده قرار دهیم. در اینصورت

الف) مدل سرعت الگوریتم و نحوه بروزرسانی بردار موقعیت آن را برای نمایش گسسته بر پایه مدل احتمالی (stochastic) طراحی کنید.

ب) مدل سرعت الگوریتم و نحوه بروزرسانی بردار موقعیت آن را برای نمایش جایگشتی بر پایه مدل احتمالی (stochastic) طراحی کنید.

۵) یکی از پارامترهای کنترلی الگوریتم بهینه سازی توده ذرات (PSO) اینرسی وزنی w است که در رابطه بروزرسانی بردار سرعت استفاده می شود. یک رابطه ریاضی جهت تطبیق پذیر کردن این پارامتر با فرض یک مساله کمینه سازی بر اساس فرمول زیر ارایه شده است:

$$w = \begin{cases} w_{\min} + \frac{(w_{\max} - w_{\min})(f - f_{\min})}{(f_{avg} - f_{\min})}, f \leq f_{avg} \\ w_{\max}, f > f_{avg} \end{cases}$$

که در آن $w_{\max}$ و $w_{\min}$ به ترتیب مقادیر بیشینه و کمینه تعریف شده برای پارامتر اینرسی وزنی، $f_{\min}$ و f_{avg} به ترتیب مقادیر کمینه و متوسط برازش ذرات و f برازش یک ذره است. کارآمدی این رابطه را از دیدگاه تاکید بر روی پویش و انتفاع تحلیل کنید.

پروژه کلاسی (پیاده سازی شده توسط هر تیم)

- مساله n وزیر مطرح شده در کلاس را در نظر بگیرید. با توجه به وجود الگوریتم های دقیق با پیچیدگی چندجمله ای، عملا بکارگیری الگوریتم های تکاملی برای حل آن فاقد توجیه عملی است. اکنون می خواهیم درستی این گزاره را به صورت تجربی (empirical) نشان دهیم.

الف) با توجه به کدگذاری جایگشتی پیشنهادی در کلاس، الگوریتم محاسبه تابع هزینه آن که همان کل تعداد تهدیدها را بر می گرداند، پیاده سازی کرده و مرتبه پیچیدگی زمانی و مکانی آن را بر حسب n (تعداد وزیرها) بدست آورید.

ب) الگوریتم ژنتیک را با (۱) تولید تصادفی جمعیت اولیه به اندازه ۱۰، (۲) انتخاب تورنمنت با اندازه مسابقه ۳، (۳) عملگر تقاطع PMX با احتمال تقاطع ۰/۹، ۴) عملگر جهش SWAP با احتمال جهش ۰/۱ و ۵) مکانیزم جایگزینی نسلی با نخبه گرایی ۲ و نیز با توجه به الگوریتم پیاده شده تابع هزینه در قسمت (الف) پیاده سازی کنید. شرط خاتمه الگوریتم ژنتیک زمانی است که تعداد کل تهدیدها صفر شود.

ج) رویکرد حل مبتنی بر برگشت به عقب (backtracking) معرفی شده در اسلایدهای درس را پیاده سازی کنید و مرتبه پیچیدگی زمانی و مکانی آن را بر حسب n (تعداد وزیرها) بدست آورید.

د) رویکرد حل تحلیلی (analytical) معرفی شده در اسلایدهای درس را پیاده سازی کنید و مرتبه پیچیدگی زمانی و مکانی آن را بر حسب n (تعداد وزیرها) بدست آورید.

ه) با توجه به کدهای پیاده سازی شده در سه قسمت (ب)، (ج) و (د) کارآیی زمان اجرای این سه الگوریتم را با توجه به افزایش n (تعداد وزیرها) در قالب یک نمودار میله ای نمایش داده و آن را تحلیل کنید.