دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی صنایع

پایان‌نامه

موضوع:

بهینه‌سازی معکوس و استوار

نگارنده:

مهرداد مرادی

استاد راهنما:

دکتر کوروش عشقی

آبان ۱۴۰۰

قدردانی

برای یک دانشجوی کارشناسی، فرصت چند ماهه‌ی پایان‌نامه زمانی است که می‌تواند با تحقیق دانشگاهی در صورت رسمی خود آشنا گردد. همچنین در این دوره، یادگیری به دست آمده از دروس کارشناسی تعمیق شده و دانشجو، آماده می‌گردد تا از دانش و مهارت خود در مراحل بعدی تحصیل خود که به جد به تحقیق نیاز دارند، استفاده نماید. می‌خواهم از استاد راهنمای بزرگوار خویش دکتر عشقی تشکر و قدردانی بکنم. ایشان الگوی اخلاق، آرمان‌گرایی، استادی، کار علمی دقیق و تحقیقات دانشگاهی هستند. همچنین از تمامی اساتیدی که از روزگاران دور تا به امروز در فعالیت دانشکده‌ی صنایع شریف نقش داشته‌اند تشکر می‌کنم چرا که دوران دانشگاه برای من و باقی دانشجویان، دوران رشد و بلوغ فکری، عاطفی، اخلاقی و اجتماعی بوده‌است و این اتفاقات خوب، بدون تلاش تمامی افراد از ابتدای تاسیس دانشکده تا به امروز میسر نمی‌شده‌است.

چکیده

در این پایان‌نامه، موضوعات بهینه‌سازی معکوس و استوار بررسی شده‌است. در بهینه‌سازی معکوس می‌خواهیم ضرایب تابع هدف را به گونه‌ای به دست بیاوریم که یک جواب داده شده، بهینه شود. در بهینه‌سازی استوار به دنبال یافتن جوابی هستیم که در مقابل تغییر پارامترهای مدل، ایمن باشد. در فصل اول، مقدمات برنامه‌ریزی ریاضی آورده شده‌است که برای مطالعه‌ی این پایان‌نامه ضروری می‌باشد. در فصل دوم، به مرور ادبیات در حوزه‌ی بهینه‌سازی استوار پرداخته‌ایم و برای مجموعه‌های عدم قطعیت مختلف، همتایان استوار را برای برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی خطی ترکیبی عدد صحیح ارائه کرده‌ایم. در فصل سوم، به مرور ادبیات در حوزه‌ی بهینه‌سازی معکوس پرداخته‌ایم و به ارائه‌ی فرمول‌ها تحت نرم یک و بی‌نهایت در برنامه‌ریزی خطی و عدد صحیح خطی صفر و یکی پرداخته‌ایم. در فصل چهارم، با ترکیب این دو مفهوم به مفهوم جدیدتر بهینه‌سازی استوار معکوس پرداخته‌ایم. این مسئله، همان بهینه‌سازی معکوس است با این تفاوت که جواب مشاهده شده، قطعی نمی‌باشد. در این فصل، یک مسئله در حوزه‌ی پیشنهاد رژیم غذایی بررسی شده‌است و کارکرد بهینه‌سازی معکوس استوار در آن به بحث گذاشته شده‌است.

کلمات کلیدی

بهینه‌سازی استوار، بهینه‌سازی معکوس، بهینه‌سازی معکوس استوار، مسئله‌ی رژیم غذایی

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست اشکال

۱ اطلاعات اولیه

در این فصل، به ارائه‌ی مفاهیم پایه‌ای در علم تحقیق در عملیات می‌پردازیم. خواننده‌ی این پایان‌نامه در صورت تسلط بر این مفاهیم می‌تواند از این فصل عبور کند و مستقیما به سراغ فصل‌های بعدی برود. تسلط بر مفاهیم ارائه شده در این فصل برای درک مطالب این پایان‌نامه ضروری می‌باشد. منبع اصلی این بخش، کتاب " برنامه‌ریزی خطی: مدلسازی و روشهای حل" از دکتر کوروش عشقی، استاد دانشگاه صنعتی شریف می‌باشد. [1]

۱-۱ برنامه ریزی خطی[1]

در یک مدل برنامه ریزی ریاضی، اگر تمامی توابع موجود به صورت خطی باشند، آن‌گاه با یک برنامه‌ریزی خطی سر و کار داریم. در زیر مدل برنامه‌ریزی خطی کلی آورده شده‌است. رابطه‌ی (۱-۱) به فرم کانونی مسئله‌ی برنامه ریزی خطی نیز معروف است.

(۱-۱)

$$\max Z = CX$$
$$AX \leq B$$
$$X \geq 0$$

در این فرمول، X بردار متغیرهای تصمیم‌گیری است. C بردار ضرایب تابع هدف، A ماتریس ضرایب محدودیت‌ها و B بردار مقادیر سمت راستی است. برای مثال تصور کنید در یک کارخانه می‌خواهیم تعداد تولید سه نوع محصول را در ماه آینده مشخص کنیم؛ در این مسئله، مقادیر تولید متغیرهای تصمیم، میزان سود یا هزینه‌ی محصولات ضرایب تابع هدف، مقدار منابع محدود ضرایب سمت راست و تاثیر هر کالا بر منابع ضرایب محدودیت‌ها هستند. با بازنویسی رابطه‌ی اخیر به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

(۱-۲)

$$\max Z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$
$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad \forall i \in I$$
$$x_j \geq 0$$

در این مسئله، J بیان‌گر مجموعه متغیرهای تصمیم و I بیان‌گر مجموعه‌ی محدودیت‌هاست.

در هر مسئله‌ی برنامه ریزی خطی، تعاریف دیگری در رابطه با محدودیت‌ها و جواب‌ها وجود دارد که در زیر آمده‌است:

۱. جواب شدنی یا موجه:[2] هر برداری را از متغیرهای تصمیم گیری که در تمام محدودیت‌های مسئله صدق می‌کند، یک جواب شدنی می‌نامیم.

[1] Linear Programming
[2] Feasible Solution

۲. جواب نشدنی یا ناموجه:[3] هر برداری از متغیرهای تصمیم گیری که شدنی نباشد، غیر موجه است.
۳. فضای شدنی یا ناحیه‌ی موجه:[4] مجموعه‌ی جواب‌های شدنی خود فضای شدنی یا ناحیه‌ی موجه را شکل می‌دهند. در یک مسئله‌ی برنامه ریزی خطی، ناحیه‌ی شدنی همواره یک چندوجهی محدب است.
۴. نقاط گوشه:[5] در یک مسئله‌ی برنامه ریزی خطی، هر نقطه‌ای که از برخورد حداقل دو محدودیت به دست آید را نقطه‌ی گوشه می‌نامیم. به طور دقیق‌تر، اگر یک جواب شدنی در دو محدودیت مختلف به صورتی صدق کند که آن‌ها را از نامعادله به تساوی تغییر دهد، یک نقطه‌ی گوشه است.
۵. جواب بهینه:[6] جوابی موجه است که بهترین مقدار تابع هدف را موجب می‌شود. در یک مسئله‌ی برنامه ریزی خطی، جواب بهینه در صورت وجود در یکی از نقاط گوشه واقع شده‌است.
۶. محدودیت کارکردی: به تمام محدودیت‌های مسئله، محدودیت‌های کارکردی می‌گویند.
۷. محدودیت زائد:[7] به محدودیتی که وجود یا عدم وجود آن در ناحیه‌ی موجه تاثیری ندارد، محدودیت زائد می‌گویند. در یک مسئله‌ی برنامه ریزی خطی، اگر یک محدودیت را بتوان از ترکیب خطی چند محدودیت دیگر به دست آورد، آن محدودیت زائد است.
۸. محدودیت موثر: برخلاف محدودیت زائد، محدودیتی که حذف آن موجب تغییر در فضای موجه می‌شود، یک محدودیت موثر است.
۹. محدودیت فعال یا الزام‌آور:[8] محدودیتی که اگر نقطه‌ی بهینه را در آن قرار دهیم به تساوی تبدیل شود، محدودیت فعال یا الزام‌آور است.
۱۰. محدودیت غیر فعال یا غیر الزام‌آور:[9] محدودیتی که فعال نباشد غیر فعال است.
۱۱. مسئله‌ی تهی: اگر یک مسئله مانند (۱-۱)، هیچ جواب موجهی نداشته باشد، تهی است.
۱۲. مسئله‌ی بیکران: در صورتی که یک مسئله جواب بهینه‌ی محدودی نداشته باشد بیکران است؛ برای مثال اگر در مسئله‌ی (۱-۱)، جوابی وجود داشته باشد که بتواند تابع هدف را به میزان دلخواه زیاد کند، آن‌گاه مسئله‌ی (۱-۱) بیکران است.

۲-۱ دوگان

به ازای هر مسئله‌ی خطی، یک مسئله‌ی متناظر یکتا با آن وجود دارد که به علت ویژگی‌های جذاب و ارتباطش با مسئله‌ی اولیه[10]، در مسائل بسیار کاربردی است. به این مسئله دوگان[11] می‌گویند. در بسیاری از مواقع به جای دست و پنجه نرم کردن با مسئله‌ی اولیه، مسئله‌ی دوگان آن را در نظر می‌گیریم.

برای مسئله‌ی برنامه ریزی خطی گفته شده (۲-۱)، مسئله‌ی دوگان به صورت زیر خواهد بود:

---

[3] Infeasible Solution
[4] Feasible Region
[5] Extreme Points
[6] Optimal Solution
[7] Redundant Constraint
[8] Binding Constraint
[9] Non-Binding Constraint
[10] Primal
[11] Dual

(۱-۳)

$$\min W = \sum_{i \in I} b_i y_i$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} y_i \geq c_j, \qquad \forall j \in J$$

$$y_i \geq 0$$

همانطور که مشاهده می‌شود به ازای هر محدودیت در مسئله‌ی اولیه، یک متغیر در مسئله‌ی دوگان در نظر گرفته شده‌است. اگر یک محدودیت در مسئله‌ی اولیه به شکل مساوی باشد، متغیر متناظر با آن آزاد در علامت خواهد بود.

در ادامه به بررسی ارتباط بین مسئله‌ی اولیه و مسئله‌ی دوگان به صورت دقیق‌تر می‌پردازیم.

۱-۲-۱ خاصیت ضعیف دوگانگی[۱۲]

در صورتی که مسئله‌ی اولیه مانند (۱-۱) به فرم کانونی باشد و فضای موجه هیچ یک از مسائل اولیه و دوگان تهی نباشد، اگر x^0 و y^0 به ترتیب یک جواب موجه برای مسئله‌ی اولیه و دوگان باشند، آن‌گاه رابطه‌ی زیر بین این دوجواب برقرار خواهد بود:

(۱-۴)

$$cx^0 = z^0 \leq w^0 = y^0 b$$

با این فرمول، در صورتی که به ازای دو جواب موجه x^0 و y^0 توابع هدف دو مسئله با یکدیگر برابر بشود، آن‌گاه این جواب‌ها جواب‌های بهینه خواهند بود.

۱-۲-۲ قضیه‌ی اساسی دوگانگی

رابطه‌ی بین مسئله‌ی اولیه و دوگان بر اساس این قضیه در جدول زیر آمده است:

مسئله‌ی دوگان / مسئله‌ی اولیه	دارای جواب موجه	بدون جواب موجه
دارای جواب موجه	هر دو مسئله دارای جواب بهینه هستند.	مسئله‌ی اولیه بیکران است.
بدون جواب موجه	مسئله‌ی دوگان بیکران است.	هر دو مسئله فاقد جواب موجه هستند.

جدول ۱ قضیه‌ی اساسی دوگانگی

---
[12] Weak Duality Theorem

اگر مسئله‌ی اولیه دارای جواب بهینه‌ی x^* و مقدار بهینه‌ی تابع هدف z^* باشد، آن‌گاه مقادیر بهینه‌ی متغیرهای مسئله‌ی دوگان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

(۱-۵)

$$y^* = C_{B^*}B^*$$

در این رابطه، B^* پایه‌ی بهینه و C_{B^*} بردار ضرایب تابع هدف متناظر با پایه‌ی بهینه می‌باشد.

۱-۲-۳ قضیه‌ی لنگی مکمل[۱۳]

اگر x^0 و y^0 جواب‌های موجهی به ترتیب از مسئله‌ی اولیه و دوگان باشند، اگر و فقط اگر روابط (۱-۶) و (۱-۷) برقرار باشد، این دو جواب، جواب‌های بهینه می‌باشند:

(۱-۶)

$$s_i^0 \times y_i^0 = 0, \qquad \forall i \in I$$

(۱-۷)

$$e_j^0 \times x_j^0 = 0, \qquad \forall j \in J$$

در این روابط، s_i^0 مقدار متغیر کمکی i امین محدودیت مسئله‌ی اولیه است و e_j^0 مقدار متغیر مازاد j امین محدودیت مسئله‌ی دوگان است. به بیان دیگر این روابط می‌گویند، در صورتی که x^0 و y^0 جواب‌های بهینه‌ی مسائل اولیه و دوگان باشند، آن‌گاه ضرب مقدار متغیر کمکی هر محدودیت در مسئله‌ی اولیه و دوگان در متغیر دوگان یا اولیه‌ی متناظر با آن محدودیت، صفر خواهد بود.

۲ بهینه‌سازی استوار[۱۴]

۲-۱ مرور ادبیات

در بسیاری از مسائل بهینه سازی، داده‌های مسئله قطعی[۱۵] فرض می‌شوند اما در عمل، معمولا این اتفاق نمیفتد. داده‌ها به دلیل ماهیت تصادفی[۱۶]، خطای اندازه‌گیری یا دلایل دیگر غیر قطعی [۱۷]هستند. همانطور که بن-تال و نمیروسکی[2] نشان دادند، جواب بهینه‌ی یک مسئله‌ی قطعی، ممکن است حساسیت زیادی به تغییر پارامترها داشته باشد؛ بنابراین، در نظر نگرفتن تغییر پذیری

---

13 Complementary Slackness Theorem
14 Robust Optimization
15 Certain
16 Stochastic
17 Uncertain

داده‌ها[18]، ممکن است ما را به جواب‌های غیر موجه یا بسیار غیر بهینه برساند. برنامه ریزی استوار[19]، روشی است که برای مقابله با عدم قطعیت داده‌ها در ادبیات گسترش داده شده‌است. این روش، مشتمل بر دو مرحله است: در قدم اول، داده‌هایی قطعی در فضایی غیر قطعی برای مسئله در دست است، و در قدم دوم، جواب بهینه‌ای به دست میاید که برای همه‌ی مقادیر ممکن داده‌ها، موجه باشد. قدم دوم روش بهینه سازی استوار، به بهینه سازی همتای استوار [20]نیز معروف است. باوجود اینکه روش‌های متنوعی برای برخورد با عدم قطعیت داده‌ها در بهینه‌سازی در شرایط غیر قطعی توسعه داده شده است، استفاده از بهینه سازی استوار در بسیاری از مسائل یک امر ضروری است؛ به ویژه اگر هیچ‌گونه اطلاعاتی راجع به داده‌ها از قبل موجود نباشد یا غیرموجه‌بودن جواب به هیچ وجه مورد قبول نباشد. برای مثال بن-تال و نمیروسکی[4][3] از برنامه ریزی استوار برای طراحی ساختمان پل‌ها استفاده کردند . در این نوع مسائل به دلیل حساسیت موجود، غیر موجه بودن جواب به دست آمده، به هیچ عنوان قابل پذیرش نیست. در متدولوژی بهینه سازی استوار، در مقایسه با روش بهینه سازی کمینه-بیشنیه [21]می‌توان کیفیت جواب به دست آمده را تنظیم نمود در حالی که در روش کمینه-بیشنیه به جواب با در نظر گرفتن بدترین سناریو می‌رسیم که بسیار محافظه‌کارانه خواهد بود. همچنین در مقایسه با برنامه ریزی تصادفی [22]دو یا چند مرحله‌ای و بهینه سازی پارامتری، بهینه سازی استوار از افزایش نمایی پیچیدگی محاسباتی [23]در صورت افزایش داده‌های غیر قطعی رنج نمی‌برد.[40]

یکی از نخستین تحقیقات در این حوزه، توسط سویستر[5] انجام شد. او در برنامه ریزی خطی، تغییر پذیری محدب را برای ستون‌های ضرایب محدودیت‌ها در نظر گرفت و جوابی بهینه به دست آورد که به ازای همه‌ی مقادیر ممکن این ضرایب، موجه است. این روش، بسیار محافظه کارانه بود و برای مطمئن شدن از موجه بودن جواب به ازای همه‌ی مقادیر ممکن پارامترها، بهینگی جواب را از دست می‌داد. به بیان دیگر، برای استوار کردن جواب، عملکرد مدل بدتر شد. برای برقراری تعادل بین استواری جواب و عملکرد مدل، روش‌هایی توسعه داده شد؛ بن-تال، نمیروسکی و همکاران[8][7][6][2] و القاوی و همکاران [10][9]، به طور مستقل همتایان استوار را برای مسائل خطی و درجه‌ی دومی که داده‌هایشان دارای عدم قطعیت بیضوی[24] هستند، ارائه کردند. القاوی و لبرت [9]، جواب‌های استوار را برای مسئله‌ی کمترین مربعاتی که دارای عدم قطعیت است، بررسی نمودند. القاوی و دیگران [10]، مسائل نیمه معین[25] غیر قطعی را بررسی کردند. بن-تال و نمیروسکی [8][7]، نشان دادند وقتی که پارامترهای یک محدودیت خطی، عدم قطعیت بیضوی دارند، این محدودیت در همتای استوار مسئله، به یک مسئله‌ی مخروطی درجه‌ی دوم [26]تبدیل می‌شود. بن-تال و همکاران [6]، یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی را در نظر گرفتند که تعدادی از متغیرهای تصمیم قبل از مشخص شدن داده‌های غیر قطعی باید تعیین شوند، در حالی که باقی متغیرها می‌توانند بعد از مشخص شدن داده‌ها تعیین شوند. فرمول‌های بهینه‌سازی استوار برای مسائل برنامه‌ریزی خطی، توسط لین و همکاران [11] و جانک و همکاران [12]، به مسائل خطی مرکب عدد صحیح [27]با وجود عدم قطعیت داده‌ها توسعه داده شدند. آن‌ها یک چارچوب کلی برای این نوع مسائل ساختند و توزیع‌های محدود[28] و معروف را بررسی کردند. این چارچوب، بعدها توسط وردرام و فلادز [13] گسترش یافت؛ آن‌ها توزیع‌های پیوسته (عمومی، محدود، یکنواخت،

[18] Data Uncertainty
[19] Robust Programming
[20] Robust Counterpart Optimization
[21] Mini-Max Optimization
[22] Stochastic Programming
[23] Computational Complexity
[24] Ellipsoidal
[25] Semidefinite
[26] Conic Quadratic
[27] Mixed Integer Linear Programming
[28] Bounded

نرمال) و گسسته (عمومی، دوجمله‌ای، پواسون) را برای داده‌های غیر قطعی در نظر گرفتند و در مسائل برنامه ریزی عملیات [29]به کار بردند. این کار، در ادامه توسط وردرام و فلادز [14]، با متدولوژی ارزش در خطر شرطی محور [30]مقایسه شد. وردرام و دیگران [15]، مسائل برنامه ریزی و زمان بندی [31]در شرایط عدم قطعیت را بررسی کردند. لی و لراپتریتو [16]، زمان بندی فرآیند در شرایط عدم قطعیت را بررسی نمودند.

برتسیماس و سیم [17]، بهینه سازی استوار را برای یک مسئله‌ی خطی در حالتی که بودجه‌ی عدم قطعیت برای هر محدودیت مشخص است، بررسی نمودند. این بودجه، برای کنترل تعادل بین میزان استواری و بهینگی در نظر گرفته شد. شکل هندسی مجموعه‌ی عدم قطعیت [32]داده‌ها در این روش، ترکیب فاصله‌ای[33] و چندوجهی[34] بود. برتسیماس و همکاران [18]، بهینه سازی استوار را در برنامه ریزی خطی و عدد صحیح به کار بردند. برتسیماس و همکاران [19]، همتای استوار مسائل برنامه ریزی خطی با داده‌های غیر قطعی که با یک نرم[35] دلخواه توصیف شده‌اند را بررسی نمودند. ایده‌های موجود در برتسیماس و سیم [17]، به مسائل بهینه سازی مخروطی توسط برتسیماس و سیم [20] گسترش یافته‌اند. این ایده‌ها در مسئله‌ی کنترل موجودی برای کمینه‌کردن هزینه در برتسیماس و ثیل [21]، استفاده شده‌اند.

کوولیس و یو [22]، یک چارچوب برای بهینه سازی گسسته‌ی استوار ارائه دادند. در این چارچوب، تلاش می‌شود جوابی یافته شود تا بدترین عملکرد مدل را در تعدادی سناریو برای داده‌ها، کمینه کند. چن و لین [23]، یک الگوریتم تقریبی برای مسئله‌ی بهینه سازی طراحی استوار در یک شبکه‌ی جریان تصادفی [36]ارائه دادند. آتامترک و ژنگ [24]، یک بهینه‌سازی استوار دو مرحله‌ای را در مسائل جریان شبکه و طراحی شبکه با تقاضاهای غیر قطعی ارائه کردند. آن‌ها روش خود را برای مسائل جریان چند کالایی [37]شبکه و طراحی شبکه تعمیم دادند و کاربرد روش خود را در مسائل حمل و نقل و تعیین اندازه‌ی لات[38]، مطالعه نمودند. آتامترک [25]، برای مسائل ترکیبی[39] با متغیرهای تصمیم صفر و یکی، در حالتی که پارامترهای تابع هدف، عدم قطعیت فاصله‌ای دارند، فرمول دیگری ارائه داد. آورباخ [26]، برای دسته‌ای از مسائل بهینه سازی ترکیبی با عدم قطعیت در داده‌های تابع هدف به صورت فاصله‌ای، یک روش کلی برای یافتن کمترین ماکسیمم حسرت[40] پیدا کرد. در این روش، مسئله‌ی دارای عدم قطعیت، به تعدادی مسئله‌ی قطعی تبدیل می‌گردد. کاسپرسکی و زیلینسکی [27]، مسائل مشابهی در نظر گرفتند و یک الگوریتم تقریبی که در زمان چند جمله‌ای [41]حل می‌شود ارائه دادند. برتسیماس و سیم [18]، روشی برای مقابله کردن با عدم قطعیت در برنامه ریزی گسسته و جریان شبکه ارائه دادند. آن‌ها الگوریتمی برای مسئله‌ای خاص ارائه دادند. این مسئله، یک مسئله‌ی جریان شبکه‌ی ترکیبی صفر و یکی بود

---

[29] Process Planning
[30] Conditional Value at Risk
[31] Scheduling
[32] Uncertainty Set
[33] Interval
[34] Polyhedral
[35] Norm
[36] Stochastic Flow Network
[37] Multi Commodity
[38] Lot Size
[39] Combinatorial
[40] Regret
[41] Polynomial

که تنها داده‌های تابع هدف، غیر قطعی بودند. آن‌ها این مسئله را با تبدیل آن به تعداد چند جمله‌ای مسئله‌ی قطعی حداقل کردن هزینه‌ی جریان [42]در یک شبکه‌ی اصلاح شده حل نمودند.

چن و دیگران [28]، مسئله‌ی بهینه‌سازی استوار را در حالتی که مجموعه‌ی عدم قطعیت، غیر متقارن [43]است، بررسی نمودند که حالت عمومی‌تر زمانی است که مجموعه‌ی عدم قطعیت، متقارن است. چن و دیگران [29]، با بررسی بهینه سازی استوار مجموعه محور و تقریبات حد محور ارزش در خطر شرطی برای محدودیت‌های شانسی[44]، نشان دادند هر دوی این‌ها معادل می‌باشند. فیسچتی و موناچی [30]، چارچوب استواری ملایم [45]را برای مقابله کردن با محافظه‌کاری جواب‌ها در بهینه سازی استوار توسعه دادند. آن‌ها یک حد بالای سخت [46]برای تابع هدف قرار دادند و سپس، برای یک مجموعه‌ی عدم قطعیت ثابت، درجه‌ی غیر موجه بودن را کمینه کردند.

گاه و سیم [31]، نشان دادند اگر توزیع دقیق پارامترهای غیر قطعی معلوم باشد، جواب‌های بهینه‌ی مسئله‌ی برنامه ریزی استوار به طور غیر ضروری و زیادی محافظه کار خواهند شد. همچنین اگر توزیع‌های فرض شده با توزیع واقعی پارامترها متفاوت باشند، جواب به دست آمده از متدولوژی برنامه ریزی تصادفی ممکن است بد عمل کند. بنابراین، شاخه‌ای از ادبیات شروع به رشد پیدا کرد تا پلی میان محافظه‌کاری برنامه ریزی استوار و دقیق بودن اطلاعات [47]برنامه ریزی تصادفی راجع به پارامترها بزند. در این زمینه، تلاش می‌شود تا جواب بهینه، با توجه به بدترین توزیع احتمالی که از خانواده‌ی توزیع احتمالی ممکن، رخ خواهد داد به دست آید. القاوی و دیگران [32]، حدود را برای بدترین حالت ارزش در خطر در یک مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه گذاری [48]توسعه دادند. در مسئله‌ی مورد بررسی آن‌ها، حدود فقط برای میانگین‌ها و کوواریانس سرمایه‌ها مشخص بود. چن و دیگران [28]، انحرافات جهت‌دار به عنوان میانگین‌های اضافه را به خانواده‌ای از توزیع‌ها اضافه نمودند. این روش، توسط چن و سیم [33]، در یک مسئله‌ی بهینه سازی آرمان محور [49]به کار گرفته شد. دلیج و یع [34]، برنامه ریزی تصادفی استوار توزیع محوری را مطالعه نمودند که در آن میانگین و کوواریانس عدم قطعیت‌های اولیه، خود غیر قطعی هستند. بن-تال و دیگران [35]، یک چارچوب برای بهینه سازی استوار ارائه دادند که به تصمیم گیر اجازه می‌داد سطح محافظت در برابر عدم قطعیت را بر روی مجموعه‌ی عدم قطعیت کنترل کند.

در مسائل عملی، بسیاری از اوقات نیازی به موجه بودن همیشگی نمی‌باشد. بن-تال و نمیروسکی[2] برای عدم قطعیت محدود و متقارن بر اساس مجموعه‌ی عدم قطعیت فاصله‌ای + بیضوی حدود احتمالی برای موجه نبودن یک محدودیت را ارائه کردند. آن‌ها نشان‌دادند برای بیضی‌هایی با شعاع Ω جواب‌های موجه همتای استوار متناظر، در محدودیت اولیه با احتمال حداقل $1-e^{-\Omega^2/2}$ صدق می‌کنند. برتسیماس و سیم [17] برای عدم قطعیت محدود و متقارن بر اساس مجموعه‌ی عدم قطعیت فاصله‌ای + چندوجهی نشان دادند جواب‌های موجه همتای استوار متناظر با احتمال حداقل $1-e^{-\Gamma^2/2|J_i|}$ صدق می‌کنند؛ به طوری که Γ نمایانگر اندازه‌ی چندوجهی و $|J_i|$ نمایانگر تعداد ضرایب غیر قطعی در محدودیت i هستند. چن و همکاران [28] معیارهای انحراف عمومی‌تری در نظر گرفتند تا بتوانند عدم تقارن توزیع محور را دریابند و از این طریق به حدود احتمالی بهتری رسیدند. برتسیماس

---

[42] Minimum Cost Flow Problem
[43] Asymmetrical
[44] Chance Constraints
[45] Light Robustness
[46] Hard Upper Bound
[47] Specificity
[48] Portfolio Selection
[49] Goal Based

و سیم [19] حدود احتمالی را برای مدل‌های غیر قطعی بر اساس نرم عمومی به دست آوردند. پاسچالیدیس و کنگ [41] حدود احتمالی را برای مجموعه‌ی عدم قطعیت فاصله‌ای + چندوجهی در حالتی که توزیع احتمالی در دسترس است مطالعه کردند. وردرام و فلادز [40] به مطالعه‌ی حدود احتمالی برای صدق کردن یک محدودیت در انواع حالات محدود و نامحدود، دانستن یا ندانستن توزیع احتمالی و مجموعه‌های عدم قطعیت متفاوت پرداختند و راهکارهایی برای انتخاب نوع و پارامترهای مجموعه‌های عدم قطعیت، در مسائل واقعی ارائه دادند تا حداقل احتمال مطلوب ارضا شدن محدودیت برآورده شود. به طور دقیق‌تر با در نظر گرفتن شکل هندسی مجموعه‌ی عدم قطعیت، با استفاده از حداقل احتمال ارضا شدن محدودیت که نام آن را گارانتی احتمالی پیشین [50]نهادند و نشان دادند که به سادگی قابل محاسبه است، توانستند نوع و مقدار پارامتر مجموعه‌ی عدم قطعیت را به دست آورند. همچنین با درنظر گرفتن یک جواب موجه از همتای استوار و دانستن توزیع احتمالی ضرایب غیر قطعی، با استفاده از حداقل احتمال ارضا شدن محدودیت که نام آن را گارانتی احتمالی پسین [51]نهادند، نوع و مقدار پارامتر مجموعه‌ی عدم قطعیت را به دست آوردند. آن‌ها نشان دادند که جواب بهینه‌ی ناشی از گارانتی احتمالی پسین عملکرد بهتری دارد اما محاسبه‌ی آن با استفاده از بهینه سازی جهانی [52]برای یک مسئله‌ی غیر محدب [53]صورت می‌گیرد که بسیار سخت است. پس از آن، وردرام و فلادز [42] الگوریتمی تکرار شونده ارائه نمودند و با ترکیب محاسبه‌ی آسان روش مبتنی بر گارانتی احتمالی پیشین و عملکرد کمتر محافظه کارانه‌ی روش مبتنی بر گارانتی احتمالی پسین، با محاسبات نسبتا ساده نوع و پارامتر مورد نظر برای مجموعه‌ی عدم اطمینان را به دست آوردند و از این طریق توانستند به حداقل احتمال مطلوب برای صدق کردن جواب در محدودیت برسند.

۲-۲ بهینه سازی استوار مجموعه محور [54]

در این چارچوب، فرض می‌شود که پارامترهای غیر قطعی در مجموعه‌های عدم قطعیت حضور دارند. هدف ما این است که در بین همه‌ی جواب‌هایی که به ازای تمام مقادیر مجموعه‌های عدم قطعیت، موجه می‌مانند، بهترین جواب را پیدا کنیم.

۲-۲-۱ همتای استوار برنامه ریزی خطی

۲-۲-۱-۱ مسئله‌ی نمونه برنامه ریزی خطی

مسئله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

(۲-۱)

$$\begin{aligned} &\max\ 8x_1 + 12x_2 \\ &s.t.\ \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le 140 \\ &\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le 72 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

[50] A Priori Probabilistic Guarantee
[51] A Posteriori Probabilistic Guarantee
[52] Global Optimization
[53] Non-Convex
[54] Set Induced Robust Optimization

فرض می‌کنیم ضرایب محدودیت‌ها در سمت چپ غیر قطعی هستند؛ یعنی:

(۲-۲)

$$a_{11} = 10 + e_{11}, \qquad a_{12} = 20 + 2\, e_{12}$$
$$a_{21} = 6 + 0.6\, e_{21}, \qquad a_{22} = 8 + 0.8\, e_{22}$$

همچنین، e_{11}، e_{12}، e_{21}، e_{22} متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که در بازه‌ی $[-1,1]$ مقدار می‌گیرند. بنابراین، ضرایب تابع هدف در سمت چپ، به طور مستقل، از مقادیر نامی‌شان تا ۱۰ درصد می‌توانند تغییر کنند. در چارچوب مجموعه محور بهینه سازی استوار، به دنبال بهترین جوابی هستیم که به ازای همه‌ی مقادیر ممکن ضرایب، موجه بماند و در محدودیت‌ها صدق کند.

۲-۱-۲-۲ مسئله‌ی عمومی برنامه ریزی خطی

در حالت کلی، مسئله‌ی برنامه ریزی خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

(۲-۳)

$$\max cx$$
$$s.t \sum_j \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i \ \ \forall i$$

در این فرمول، $\tilde{a}_{ij}$ و $\tilde{b}_i$ نماینده‌ی مقادیر واقعی پارامترها هستند که غیر قطعی می‌باشند. فرض می‌کنیم که عدم قطعیت در هر محدودیت، مستقل از سایر محدودیت‌هاست. همچنین فرض می‌کنیم پارامترهای سمت راست و سمت چپ، هر دو دارای عدم قطعیت هستند، بنابراین برای محدودیت i، پارامترها به صورت زیر می‌باشند:

(۲-۴)

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + e_{ij}\hat{a}_{ij} \ \ \forall j \in J_i$$
$$\tilde{b}_i = b_i + e_{i0}\hat{b}_i$$

در این فرمول بندی، a_{ij} و b_i نشان‌دهنده‌ی مقادیر اسمی متغیرهای می‌باشند؛ $\hat{a}_{ij}$ و $\hat{b}_i$ نشان‌دهنده‌ی میزان ثابت انحراف از مقدار اسمی هستند که مثبت می‌باشند، و J_i نشان‌دهنده‌ی تمام ضرایب محدودیت i است که غیر قطعی هستند و باقی ضرایب، قطعی می‌باشند. همچنین، $e_{ij}\ \forall i, \forall j \in J_i$ و e_{ij} متغیرهای تصادفی هستند که غیر قطعی می‌باشند. حال محدودیت (۳-۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۲-۵)

$$\sum_{j \notin J_i} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i$$

در ادامه، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۲-۶)

$$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\,\epsilon J_i} e_{ij}\hat{a}_{ij}x_j - e_{i0}\hat{b}_i] \le b_i$$

از آنجا که می‌خواهیم جوابی پیدا کنیم که به ازای همه‌ی مقادیر ممکن پارامترها، در محدودیت صدق کند؛ بنابراین اگر مجموعه‌ی عدم قطعیت را U در نظر بگیریم، محدودیت قبل را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

(۲-۷)

$$\sum_j a_{ij}x_j + [\max_{e\in U}\{\sum_{j\,\epsilon J_i} e_{ij}\hat{a}_{ij}x_j - e_{i0}\hat{b}_i\}] \le b_i$$

حال با جاگذاری این محدودیت، در مسئله‌ی برنامه ریزی خطی عمومی (۳-۲)، به همتای استوار این مسئله خواهیم رسید:

(۲-۸)

$$\begin{aligned}&\max cx\\&s.t. \sum\nolimits_j a_{ij}x_j + [\max_{e\in U}\{\sum\nolimits_{j\,\epsilon J_i} e_{ij}\hat{a}_{ij}x_j - e_{i0}\hat{b}_i\}] \le b_i \ \forall i\end{aligned}$$

حال نتیجه‌ی به دست آمده را به مسئله‌ی نمونه‌ی برنامه ریزی خطی (۱-۲) اعمال می‌کنیم و همتای استوار آن را به دست می‌آوریم:

(۲-۹)

$$\begin{aligned}&\max 8\,x_1 + 12\,x_2\\&s.t.\ \ 10\,x_1 + 20\,x_2 + \max_{(e_{11},e_{12})\in U_1}\{e_{11}x_1 + 2\,e_{12}x_2\} \le 140\\&\qquad 6\,x_1 + 8\,x_2 + \max_{(e_{21},e_{22})\in U_2}\{0.6\,e_{21}x_1 + 0.8\,e_{22}x_2\} \le 72\\&\qquad x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

در این مسئله، $U1$ و $U2$ مجموعه‌های عدم قطعیت متناظر با محدودیت‌های اول و دوم هستند.

۲-۲-۲ همتای استوار برنامه ریزی ترکیبی عدد صحیح خطی

۲-۲-۲-۱ مسئله‌ی نمونه‌ی برنامه ریزی ترکیبی عدد صحیح خطی

مسئله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

(۲-۱۰)

$$
\begin{aligned}
&\max 3\,x_1 + 2x_2 - 10y_1 - 5y_2\\
&s.t.\;\; x_1 + x_2 \le 20\\
&\qquad x_1 + 2\,x_2 \le 12\\
&\qquad a_{31}x_1 + b_{31}y_1 \le 0\\
&\qquad a_{42}x_2 + b_{42}y_2 \le 0\\
&\qquad x_1 - x_2 \le -4\\
&\qquad 0 \le x_1, x_2 \le 10, y_1, y_2 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

فرض می‌کنیم که ضرایب سمت چپ محدودیت‌های سوم و چهارم به شرح زیر، دارای عدم قطعیت می‌باشند:

(۲-۱۱)

$$
\begin{aligned}
&a_{31} = 1 + 0.1\,e_{31}, \qquad b_{31} = -20 + 2\,e_{33}\\
&a_{42} = 1 + 0.1\,e_{42}, \qquad b_{42} = -20 + 2\,e_{44}
\end{aligned}
$$

در این فرمول بندی، متغیرهای تصادفی e_{ij} مستقل بوده و در بازه‌ی $[-1,1]$ تغییر می‌کنند.

۲-۲-۲-۲ مسئله‌ی عمومی برنامه ریزی ترکیبی عدد صحیح خطی

در حالت کلی، مسئله‌ی برنامه ریزی ترکیبی عدد صحیح زیر را در نظر می‌گیریم:

(۲-۱۲)

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_m c_m x_m + \sum_k d_k y_k\\
&\quad s.t.\;\; \textstyle\sum_m \tilde{a}_{im} x_m + \sum_k \tilde{b}_{ik} y_k \le \tilde{p}_i \;\; \forall i
\end{aligned}
$$

در این فرمول بندی، x و y به ترتیب، متغیرهای پیوسته و عد صحیح را نشان می‌دهند و $\tilde{a}_{im}$، $\tilde{b}_{ik}$، $\tilde{p}_i$ مقادیر واقعی پارامترها می‌باشند که ممکن است عدم قطعیت داشته باشند. فرض می‌کنیم عدم قطعیت در این پارامترها به صورت زیر می‌باشد:

(۲-۱۳)

$$
\begin{aligned}
&\tilde{a}_{im} = a_{im} + e_{im}\hat{a}_{im} \;\; \forall m \in M_i\\
&\tilde{b}_{ik} = b_{ik} + e_{ik}\hat{b}_{ik} \; \forall k \in K_i
\end{aligned}
$$

$\tilde{p}_i = p_i + e_{i0}\hat{p}_i$

در این فرمول بندی، M_i و K_i مجموعه‌ی متناظر با ضرایب متغیرهای به ترتیب پیوسته و عدد صحیحی هستند که عدم قطعیت دارند. همچنین، $\tilde{a}_{im}$ و $\tilde{b}_{ik}$ و $\tilde{p}_i$ مقادیر واقعی، a_{im} و b_{ik} و p_i مقادیر اسمی و $\hat{a}_{im}$ و $\hat{b}_{ik}$ و $\hat{p}_i$ میزان ثابت مثبت انحراف از مقادیر اسمی می‌باشند. همچنین e متغیرهای تصادفی هستند که دارای عدم قطعیت می‌باشند. در ادامه، محدودیت i را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۲-۱۴)

$$\sum_{m \notin M_i} a_{im}x_m + \sum_{k \notin K_i} b_{ik}y_k + \sum_{m \in M_i} \tilde{a}_{im}x_m + \sum_{k \in K_i} \tilde{b}_{ik}y_k \le \tilde{p}_i$$

با در نظر گرفتن مقادیر غیر قطعی، در ادامه به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

(۲-۱۵)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \left\{\sum_{m \in M_i} e_{im}\hat{a}_{im}x_m + \sum_{k \in K_i} e_{ik}\hat{b}_{ik}y_k - e_{i0}\hat{p}_i\right\} \le p_i$$

با جایگذاری این محدودیت در رابطه‌ی (۱۲-۲) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

(۲-۱۶)

$$\max \ \sum_{m} c_m x_m + \sum_{k} d_k y_k$$

$$\text{s.t.} \quad \textstyle\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \left\{\sum_{m \in M_i} e_{im}\hat{a}_{im}x_m + \sum_{k \in K_i} e_{ik}\hat{b}_{ik}y_k - e_{i0}\hat{p}_i\right\} \le p_i \ \forall i$$

از آن‌جا که جواب به دست آمده باید به ازای تمام مقادیر ممکن پارامترها محدودیت را ارضا کند، با در نظر گرفتن مجموعه‌ی عدم قطعیت U به صورتی که $e \in U$، مسئله‌ی اخیر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۲-۱۷)

$$\max \ \sum_{m} c_m x_m + \sum_{k} d_k y_k$$

$$\text{s.t.} \quad \textstyle\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \max\limits_{e \in U}\left\{\sum_{m \in M_i} e_{im}\hat{a}_{im}x_m + \sum_{k \in K_i} e_{ik}\hat{b}_{ik}y_k - e_{i0}\hat{p}_i\right\} \le p_i \ \forall i$$

با اعمال این نتیجه بر روی محدودیت‌های سوم و چهارم مسئله‌ی نمونه‌ی برنامه‌ریزی ترکیبی عدد صحیح (۱۰-۲) به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

(۲-۱۸)

$$x_1 - 20y_1 + \max_{(e_{31},e_{33})\in U_1}\{0.1\, e_{31}x_1 + \ 2\, e_{33}y_1\} \leq 0$$

$$x_2 - 20y_2 + \max_{(e_{42},e_{44})\in U_2}\{0.1\, e_{42}x_2 + \ 2\, e_{44}y_2\} \leq 0$$

در این مسئله، $U1$ و $U2$ مجموعه‌های عدم قطعیت متناظر با محدودیت‌های سوم و چهارم هستند. دقت کنید که در این مسئله‌ی نمونه، عدم قطعیت در ضرایب سمت چپی [55]محدودیت‌ها بودند و ضرایب سمت راست محدودیت نداشتند.

۲-۳ مجموعه‌های مختلف عدم قطعیت

در بخش قبل، برای مسائل کلی برنامه ریزی خطی و برنامه ریزی ترکیبی عدد صحیح خطی، بر اساس مجموعه‌ی عدم اطمینان U[56]، همتای استوار [57]را به دست آوردیم. در این بخش به بررسی انواع مختلف مجموعه‌های عدم اطمینان می‌پردازیم و برای هر یک، همتای استوار متناظر را برای هر دو مسئله به دست خواهیم آورد.

۲-۳-۱ مجموعه‌ی عدم اطمینان جعبه‌ای[58]

مجموعه‌ی عدم اطمینان جعبه‌ای، با استفاده از نرم بی‌نهایت تعریف می‌گردد. اگر در محدودیت i، ضرایب موجود در مجموعه‌ی J_i غیر قطعی باشند، آنگاه این مجموعه به صورت زیر تعریف خواهد شد:

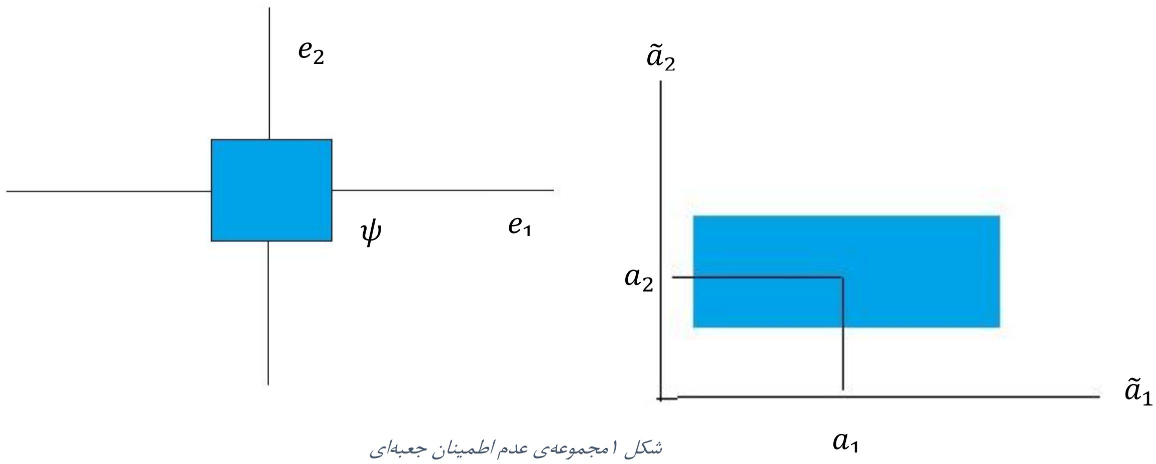
(۲-۱۹)

$$U_\infty = \{e \mid \|e\|_\infty \leq \psi\} = \left\{e \mid |e_j| \leq \psi, \forall j \in J_i\right\}$$

پارامتر ψ اندازه‌ی مجموعه را تعیین می‌کند و می‌توان آن را برای مسئله تنظیم نمود. شکل ۱، این نوع مجموعه‌ی عدم اطمینان را نشان می‌دهد. پارامترهای $j = 1,2$ $\tilde{a}_j = a_j + e_j\hat{a}_j$ را در بگیرید که $\tilde{a}_j$ مقدار واقعی، a_j مقدار نامی، $\hat{a}_j$ مقدار مثبت انحراف از مقدار نامی و e_j متغیر تصادفی را نشان می‌دهند.

---

[55] Left Hand Sided Uncertainty
[56] Uncertainty Set
[57] Robust Counterpart
[58] Box Uncertainty Set



شکل ۱ مجموعه‌ی عدم اطمینان جعبه‌ای

حالت خاصی از عدم اطمینان جعبه‌ای، عدم اطمینان فاصله‌ای می‌باشد که به ازای $\psi = 1$ رخ خواهد داد. در این حالت هر یک از متغیرهای تصادفی عضو بازه‌ی $[-1,1]$ می‌باشند.

۲-۳-۲ مجموعه‌ی عدم اطمینان بیضوی

مجموعه‌ی عدم اطمینان بیضوی، با استفاده از نرم ۲ تعریف می‌شود.

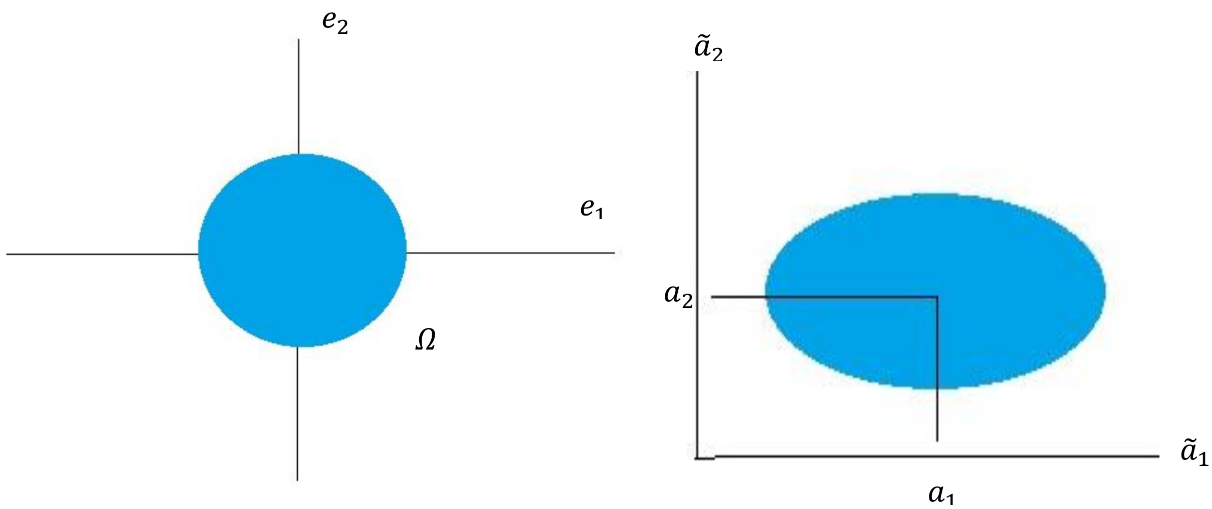
(۲-۲۰)

$$U_2 = \{e \mid \|e\|_2 \leq \Omega\} = \left\{e \middle| \sqrt{\sum_{j \in J_i} e_j^2} \leq \Omega \right\}$$

در این فرمول بندی، Ω پارامتر قابل تنظیم است. در شکل ۲، این نوع مجموعه‌ی عدم اطمینان را مشاهده می‌کنیم. همچنین دقت کنید با استفاده از قواعد هندسه، ثابت می‌شود که اگر متغیرهای تصادفی عضو بازه‌ی $[-1,1]$ باشند (در حالتی که پارامترهای غیر قطعی، در یک بازه‌ی محدود تغییر می‌کنند)، و تعداد پارامترهای غیر قطعی یک محدودیت J_i باشد، آنگاه در صورتی که شریط زیر برقرار باشد، مجموعه‌ی عدم اطمینان U، تمام فضای عدم اطمینان پارامترها را خواهد پوشاند. به بیان دیگر، اگر مجذور تعداد پارامترهای غیر قطعی از پارامتر Ω کمتر باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی U، تمام مقادیر ممکن را خواهد پوشاند.

(۲-۲۱)

$$(|J_i|)^{1/2} \leq \Omega$$



شکل ۲مجموعه‌ی عدم اطمینان بیضوی

۲-۳-۳ مجموعه‌ی عدم اطمینان چند وجهی

مجموعه‌ی عدم اطمینان چند وجهی، با استفاده از نرم ۱ تعریف می‌گردد.

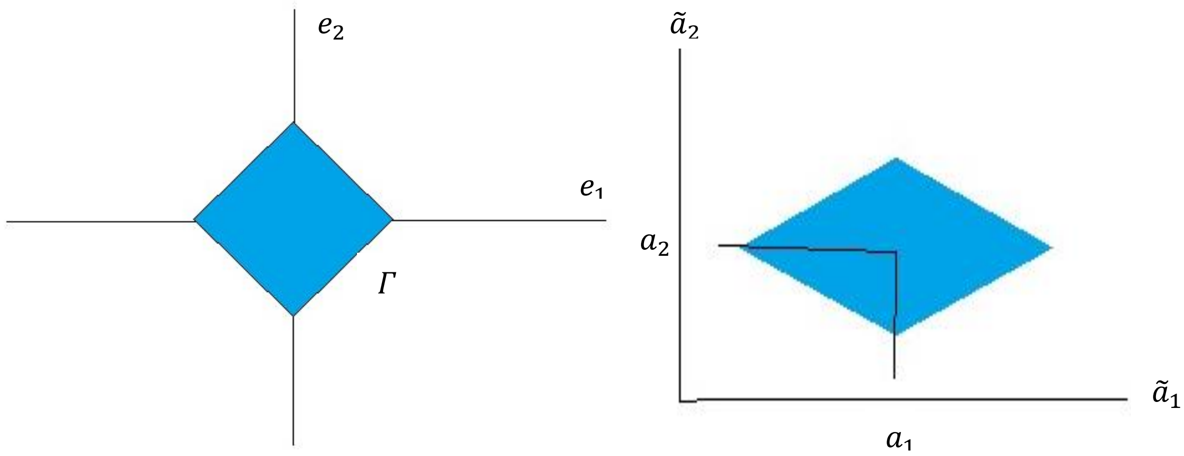
(۲-۲۲)

$$U_1 = \{e \mid \|e\|_1 \leq \Gamma\} = \left\{ e \Big| \sum_{j \in J_i} |e_j| \leq \Gamma \right\}$$

توجه کنید که پارامتر Γ قابل تنظیم برای کنترل اندازه‌ی مجموعه‌ی عدم اطمینان می‌باشد. در شکل ۳، نمونه‌ای از این مجموعه را می‌بینیم. همچنین برای زمانی که پارامترهای غیر قطعی، در فضایی محدود تغییر می‌کنند، در صورت وجود شرط زیر، مجموعه‌ی عدم اطمینان U که یک چند وجهی است، تمام فضای غیر قطعی را خواهد پوشاند.

$$\Gamma \geq |J_i|$$

به این معنی که اگر پارامتر موجود از تعداد ضرایب غیر قطعی یک محدودیت بیشتر باشد، آنگاه مجموعه‌ی عدم اطمینان تمام فضای غیر قطعی را خواهد پوشاند.



شکل ۳مجموعه‌ی عدم اطمینان چندوجهی

در ادامه با ترکیب سه مجموعه‌ی عدم قطعیت گفته شده، مجموعه‌های جدیدی ایجاد می‌کنیم:

۴-۳-۲ مجموعه‌ی عدم اطمینان جعبه‌ای و بیضوی

این مجموعه، به صورت اشتراک یک مجموعه‌ی جعبه‌ای و یک مجموعه‌ی بیضوی به صورت زیر تعیین می‌گردد:

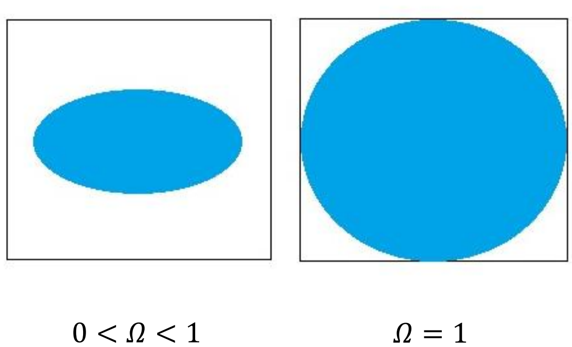
(۲-۲۳)

$$U_{2\cap\infty} = \left\{ e \middle| \sqrt{\sum_{j\in J_i} e_j^2} \le \Omega, |e_j| \le \psi, \forall j \in J_i \right\}$$

به جهت اینکه اشتراک این دو شکل، به هیچ یک کاهش نیابد، بین پارامترهای آن‌ها باید رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

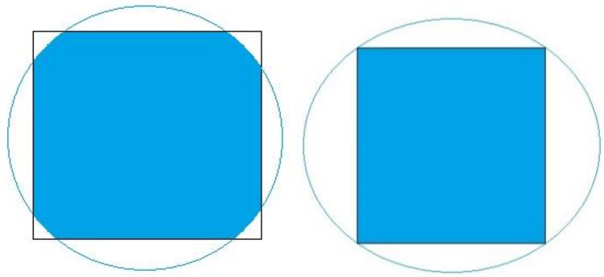
$$\psi \le \Omega \le \psi\sqrt{|J_i|}$$

در شکل ۴، برای حالتی که $\psi = 1$ می‌باشد، انواع مختلف نمودار برای مقادیر مختلف Ω رسم شده‌است. این شکل نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی عدم قطعیت فاصله‌ای (حالت خاص جعبه‌ای) و بیضوی می‌باشد. توجه کنید که $|J_i| = 2$ فرض شده است.



$0 < \Omega < 1$ $\quad\quad$ $\Omega = 1$

$1 < \Omega < \sqrt{|J_i|}$ $\quad\quad$ $\Omega = \sqrt{|J_i|}$



شکل ۴مجموعه‌ی عدم اطمینان فاصله‌ای + بیضوی

۵-۳-۲ مجموعه‌ی عدم اطمینان جعبه‌ای و چند وجهی

این مجموعه، به صورت اشتراک یک مجموعه‌ی جعبه‌ای و یک مجموعه‌ی چندوجهی به صورت زیر تعیین می‌شود:

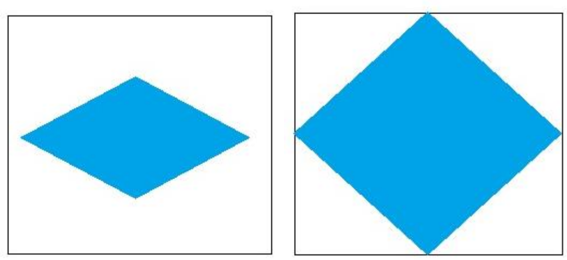
(۲-۲۴)

$$U_{1\cap\infty} = \left\{ e \middle| \sum_{j\in J_i} |e_j| \le \Gamma, |e_j| \le \psi, \forall j \in J_i \right\}$$

به جهت اینکه اشتراک این دو شکل، به هیچ یک کاهش نیابد، بین پارامترهای آن‌ها باید رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

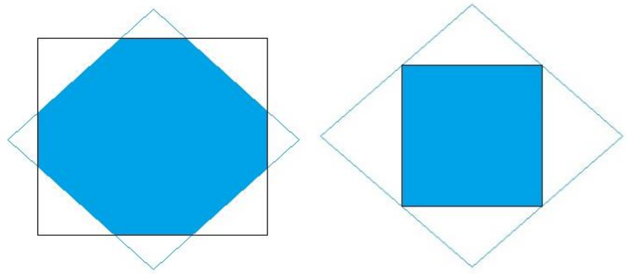
$$\psi \le \Gamma \le \psi |J_i|$$

در شکل ۵، برای حالتی که $\psi = 1$ می‌باشد، انواع مختلف نمودار برای مقادیر مختلف Γ رسم شده‌است. این شکل نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی عدم قطعیت فاصله‌ای و چند وجهی می‌باشد. توجه کنید که $|J_i| = 2$ فرض شده است.



$0 < \Gamma < 1$ $\qquad$ $\Gamma = 1$

$1 < \Gamma < \sqrt{|J_i|}$ $\qquad$ $\Gamma = \sqrt{|J_i|}$



شکل ۵ مجموعه‌ی عدم اطمینان فاصله‌ای + چندوجهی

۶-۳-۲ مجموعه‌ی عدم اطمینان جعبه‌ای و چند وجهی و بیضوی

این مجموعه‌ی عدم اطمینان به صورت اشتراک یک مجموعه‌ی جعبه‌ای، چند وجهی و بیضوی می‌باشد.

(۲-۲۵)

$$U_{1\cap 2\cap\infty} = \left\{ e \middle| \sum_{j\in J_i} |e_j| \le \Gamma, \sqrt{\sum_{j\in J_i} e_j^2} \le \Omega, |e_j| \le \psi, \forall j \in J_i \right\}$$

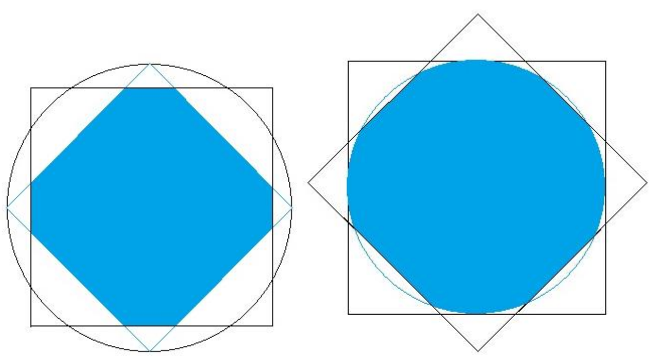
برای اینکه اشتراک این سه مجموعه، به هیچ یک از آن‌ها کاهش نیابد، باید رابطه‌ی زیر بین پارامترهای آن‌ها برقرار باشد:

$$\psi \le \Omega \le \psi\sqrt{|J_i|}$$

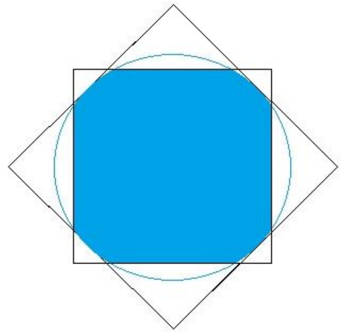
$$\Omega \le \Gamma \le \Omega\sqrt{|J_i|}$$

رابطه‌ی اول برای اطمینان از وجود اشتراک بین بیضی و جعبه است به نحوی که شکل حاصل به هیچ یک از آن‌ها کاهش نیابد. دومین رابطه به طور مشابه برای اطمینان از وجود اشتراک بین بیضی و چند وجهی می‌باشد. تعدادی از حالات ممکن در شکل ۶ نشان داده شده‌است.

$\Gamma = \Omega$ $\quad\quad$ $\Omega < \Gamma < \Omega\sqrt{|J_i|}$



$\Gamma = \Omega\sqrt{|J_i|}$



شکل ۶ مجموعه‌ی عدم اطمینان فاصله‌ای + بیضوی + چندوجهی

در شکل‌های ۷ و ۸، برای درک بهتر روابط بین مجموعه‌های بیضوی و چندوجهی، به ازای مقادیر مختلف پارامترها مجموعه‌های عدم قطعیت را رسم کرده‌ایم. این نمودارها با استفاده از وبسایت cosmos.com رسم شده‌اند.

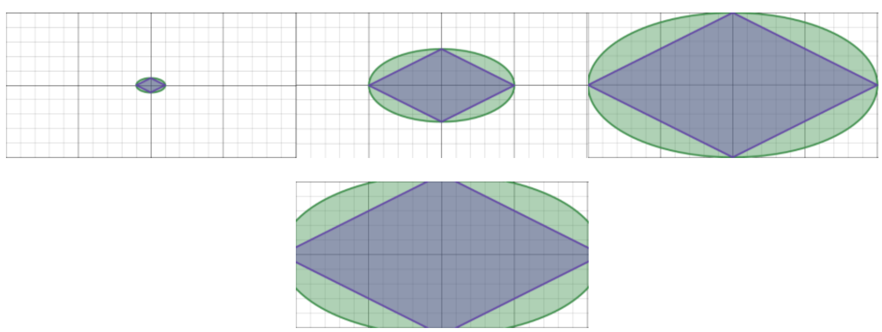
$\tilde{a}_1 = 20 + 2e_1$

$\tilde{a}_2 = 10 + e_2$

$e_1, e_2 \, \epsilon [-1,1]$

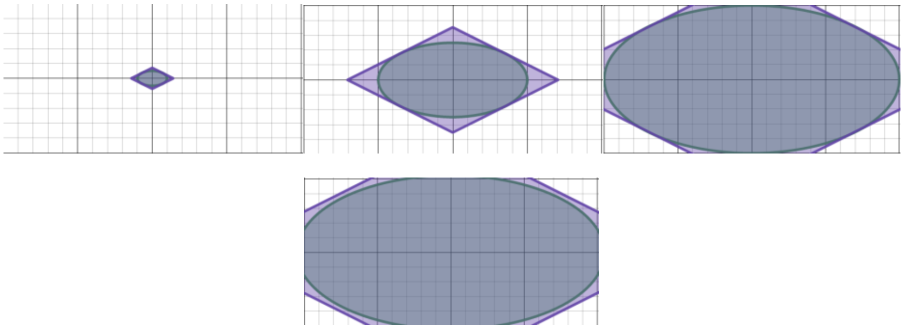
در هر دوی این اشکال، محور افقی نشان‌دهنده‌ی $\tilde{a}_1$ است و از ۱۸ تا ۲۲ تغییر می‌کند؛ زیرا $-1 \leq e_1 \leq 1$ و $\tilde{a}_1 = 20 + 2e_1$. همچنین با استدلال مشابه، محور عمودی نشان‌دهنده‌ی $\tilde{a}_2$ است و از ۹ تا ۱۱ تغییر می‌کند. بنابراین فضای عدم قطعیت مستطیلی به طور ۴ و عرض ۲ است.

در شکل ۷، دو پارامتر Γ و Ω با یکدیگر برابر می‌باشند. از سمت چپ به راست مقادیر این پارامترها به ترتیب ۰.۱، ۰.۵، ۱ و ۱.۱ می‌باشد. همانطور که در شکل هم مشاهده می‌شود در صورتی که $\Gamma = \Omega$ چندوجهی به طور کامل توسط بیضی پوشانده می‌شود. همچنین با بزرگتر شدن این پارامترها از ۱، مجموعه‌ی عدم قطعیت از ناحیه‌ی عدم قطعیت بزرگ‌تر می‌گردد.



شکل ۷ رابطه‌ی بین مجموعه‌های بیضوی و چندوجهی در حالت $\Gamma = \Omega$

در شکل ۸ با در نظر گرفتن $J_i = 2$ و $\Gamma = \Omega\sqrt{|J_i|}$ به رسم ضرایب می‌پردازیم. همچنین از سمت چپ به راست، پارامتر Ω برابر با ۰.۱، ۰.۵، ۱ و ۱.۱ است. همانطور که مشاهده می‌شود، با این شرایط بیضی در چندوجهی محصور می‌گردد.



شکل ۸ رابطه‌ی بین مجموعه‌های بیضوی و چندوجهی در حالت $\Gamma = \Omega\sqrt{|J_i|}$

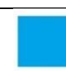
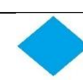
در جدول ۱، خلاصه‌ای از انواع مجموعه‌های عدم قطعیت گفته شده را آورده‌ایم. همچنین بستگی به ماهیت عدم قطعیت موجود مسئله (محدود یا نامحدود) مقادیری برای پارامترهای عدم قطعیت پیشنهاد شده‌است تا بتواند به بهترین نحو فضای عدم قطعیت حقیقی را در بربگیرد. برای ملاحظه‌ی این جدول، چند نکته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

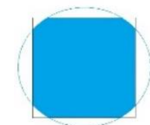
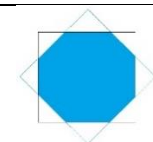
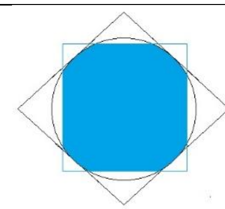
۱. تمام پارامترها باید غیر منفی باشند.

۲. زمانی که ماهیت عدم قطعیت در مسئله نامحدود باشد، از مجموعه‌های عدم قطعیت فاصله‌ای و بیضوی، فاصله‌ای و چند وجهی، فاصله‌ای و بیضوی و چند وجهی استفاده نمی‌کنیم؛ چرا که مجموعه‌ی فاصله‌ای که حالت خاصی از جعبه‌ای بود دارای طبیعت محدود است و عدم قطعیت را در یک بازه محصور می‌کند.

۳. زمانی که ماهیت عدم قطعیت محدود است، وقتی که پارامتر پیشنهادی را مساوی با بیشترین مقدار پیشنهاد شده در جدول بگذاریم، مجموعه‌ی عدم قطعیت تمام فضای غیر قطعی را می‌پوشاند. در این صورت، افزایش پارامتر تنها باعث بزرگ‌تر شدن بیش از حد مجموعه‌ی عدم اطمینان خواهد شد و جواب را محافظه‌کارانه‌تر خواهد کرد؛ به بیان دیگر، عملکرد مدل را ضعیف می‌کند.

۴. برای مجموعه‌های عدم قطعیت ترکیبی، در هنگام نامحدود بودن فضای عدم قطعیت مسئله، پارامترهای پیشنهادی بر این اساس توصیه شده‌اند که مجموعه‌ی ترکیبی حاصل، به هیچ یک از مجموعه‌های منفرد کاهش نیابد.

شکل	نوع	پارامتر قابل تغییر	محدوده‌ی پیشنهادی برای عدم قطعیت محدود	محدوده‌ی پیشنهادی برای عدم قطعیت نامحدود
	جعبه‌ای	ψ	$\psi \leq 1$	$\psi < \infty$
	بیضوی	Ω	$\Omega \leq \sqrt{\lvert J_i \rvert}$	$\Omega \leq \infty$
	چندوجهی	Γ	$\Gamma \leq \sqrt{\lvert J_i \rvert}$	$\Gamma \leq \infty$
	فاصله‌ای + بیضوی	Ω	$\Omega \leq \sqrt{\lvert J_i \rvert}$	

	جعبه‌ای + بیضوی	Ω, ψ	$\psi \le 1, \psi \le \Omega \le \psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	$\psi \le \Omega \le \psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$
	فاصله‌ای + چندوجهی	Γ	$\Gamma \le \sqrt{\lvert J_i \rvert}$	
	جعبه‌ای + چندوجهی	Γ, ψ	$\psi \le 1\ \psi \le \Gamma \le \psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	$\psi \le \Gamma \le \psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$
	فاصله‌ای + بیضوی + چندوجهی	Γ, Ω	$\Omega \le \sqrt{\lvert J_i \rvert}, \Omega \le \Gamma \le \Omega\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	
	جعبه‌ای + بیضوی + چندوجهی	Γ, Ω, ψ	$\psi \le 1, \psi \le \Omega \le \psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$ $\Omega < \Gamma < \Omega\sqrt{\lvert J_i \rvert}$	$\psi \le \Omega \le \psi\sqrt{\lvert J_i \rvert}$ $\Omega < \Gamma < \Omega\sqrt{\lvert J_i \rvert}$

جدول ۲ خلاصه‌ای از مجموعه‌های عدم اطمینان

در بخش‌های آتی به ارائه‌ی همتایان استوار برای حالات مختلف مجموعه‌ی عدم قطعیت می‌پردازیم. به دلیل اینکه اثبات‌های این روابط از هدف نهایی این پایان‌نامه دور بوده‌است آن‌ها را ذکر نکرده‌ایم. خلاصه‌ی روش به این صورت است که برای از بین بردن مسئله‌ی درونی بیشنیه سازی موجود در روابط (۸-۲) و (۱۷-۲)، آن را به مسئله‌ی دوگان مخروطی تبدیل می‌کنیم و سپس مسئله‌ی دوگان به دست آمده را در محدودیت اصلی استفاده می‌کنیم. جزئیات این اثبات‌ها در [39] موجود می‌باشد.

۲-۴ همتای استوار مسائل برنامه‌ریزی خطی

در این قسمت، با فرض دانستن مجموعه‌ی عدم قطعیت (برای مثال جعبه‌ای با پارامتر ۲)، به معرفی همتای استوار برای انواع مختلف مجموعه‌های عدم قطعیتی که در قسمت قبل ارائه دادیم می‌پردازیم. در ابتدا برای حالتی که عدم قطعیت تنها در ضرایب سمت چپ[59] است فرمول‌ها را ارائه می‌کنیم. سپس برای زمانی که تنها در سمت راست [60]عدم قطعیت داریم. در نهایت، برای حضور هم‌زمان عدم قطعیت در سمت چپ و راست، فرمول‌ها را ارائه می‌کنیم.

۲-۴-۱ عدم قطعیت سمت چپی

در صورتی که تنها در سمت چپ محدودیت، عدم قطعیت وجود داشته باشد، محدودیت (۸-۲) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

(۲-۲۶)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + [\max_{e \in U}\{\sum_{j\, \in J_i} e_{ij}\hat{a}_{ij}x_j\}] \le b_i$$

حال با در نظر گرفتن انواع مختلف مجموعه‌های عدم اطمینان، همتای استوار را معرفی می‌کنیم.

---

[59] LHS Only
[60] RHS Only

۲-۴-۱-۱ جعبه‌ای

در این حالت، رابطه‌ی (۲-۲۶) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

(۲-۲۷)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + [\psi \sum_{j\,\epsilon J_i} \hat{a}_{ij}|x_j|] \le b_i$$

در صورتی که متغیرهای تصمیم x_j مثبت باشند، عملگر قدر مطلق از بین می‌رود؛ در غیر این صورت، برای تبدیل این رابطه به شکل خطی، عملگر قدر مطلق را حذف می‌کنیم و به فرمول زیر می‌رسیم. به این نکته توجه می‌کنیم که فرمول‌بندی جدید و قبلی، فضای موجه یکسانی دارند، بنابراین هر دو یکسان می‌باشند.

(۲-۲۸)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + [\psi \sum_{j\,\epsilon J_i} \hat{a}_{ij}u_j] \le b_i$$

$$|x_j| \le u_j, j \in J_i$$

در نهایت، با حذف قدر مطلق به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

(۲-۲۹)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + [\psi \sum_{j\,\epsilon J_i} \hat{a}_{ij}u_j] \le b_i$$

$$-u_j \le x_j \le u_j$$

در حالت خاص وقتی که مقدار پارامتر ψ برابر با یک است، مجموعه‌ی عدم اطمینان حاصل فاصله‌ای است. در این حالت، رابطه‌ی (۲-۲۷) به فرمول زیر تبدیل می‌شود که دقیقا فرمول ارائه شده توسط سویستر[5] می‌باشد. این مدل در حالتی که فضای عدم قطعیت محدود است، بدترین حالت ممکن را برای هر یک از پارامترها در نظر می‌گیرد.

(۲-۳۰)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + \sum_{j\,\epsilon J_i} \hat{a}_{ij}|x_j| \le b_i$$

۲-۴-۱-۲ بیضوی

در این حالت، رابطه‌ی (۲-۲۶) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

(۲-۳۱)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + [\Omega \sqrt{\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2}] \le b_i$$

۲-۴-۱-۳ چند وجهی

در این حالت، رابطه‌ی (۲-۲۶) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌گردد:

(۲-۳۲)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + \Gamma p_i \le b_i$$

$$P_i \ge \hat{a}_{ij}\left|x_j\right|, \forall j \in J_i$$

با معرفی متغیرهای کمکی، عملگر قدر مطلق را حذف می‌کنیم و به فرمول زیر می‌رسیم:

(۲-۳۳)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + \Gamma p_i \le b_i$$

$$P_i \ge \hat{a}_{ij}u_j, \forall j \in J_i$$

$$-u_j \le x_j \le u_j, \forall j \in J_i$$

۲-۴-۱-۴ جعبه‌ای و بیضوی

در این حالت، رابطه‌ی (۲-۲۶) معادل با رابطه‌ی زیر می‌باشد:

(۲-۳۴)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + [\psi \sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}\left|x_j - z_{ij}\right| + \Omega \sqrt{\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2}] \le b_i$$

با معرفی متغیرهای کمکی و حذف عملگر قدر مطلق، به فرمول زیر می‌رسیم:

(۲-۳۵)

$$\sum_{j} a_{ij}x_j + [\psi \sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}u_{ij} + \Omega \sqrt{\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2}] \le b_i$$

$$-u_{ij} \le x_j - z_{ij} \le u_{ij}$$

در صورتی که پارامتر ψ برابر با یک باشد، به حالت خاص فاصله‌ای + بیضوی خواهیم رسید که رابطه‌ی زیر را دارد:

(۲-۳۶)

$$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}u_{ij} + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2}] \le b_i$$

$$-u_{ij} \le x_j - z_{ij} \le u_{ij}$$

که دقیقا همتای استوار ارائه شده توسط بن-تال و نمیروسکی[2] می‌باشد.

۵-۱-۴-۲ جعبه‌ای و چند وجهی

در این حالت، محدودیت موجود در (۲-۲۶) به محدودیت معادل زیر تبدیل می‌شود:

(۲-۳۷)

$$\sum_j a_{ij}x_j + \psi\sum_{j\in J_i} w_{ij} + \Gamma z_i \le b_i$$

$$z_i + w_{ij} \ \ge \hat{a}_{ij}|x_j|, \forall j \in J_i$$

$$z_i, w_{ij} \ge 0$$

با معرفی متغیرهای کمکی و حذف قدر مطلق، به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

(۲-۳۸)

$$\sum_j a_{ij}x_j + \psi\sum_{j\in J_i} w_{ij} + \Gamma z_i \le b_i$$

$$z_i + w_{ij} \ \ge \hat{a}_{ij}u_j, \forall j \in J_i$$

$$-u_j \le x_j \le u_j, \forall j \in J_i$$

$$z_i, w_{ij} \ge 0$$

در صورتی که پارامتر ψ برابر با یک باشد، به حالت خاص فاصله‌ای + چند وجهی خواهیم رسید که رابطه‌ی زیر را دارد که دقیقا همتای استوار ارائه شده توسط برتسیماس و سیم [17] می‌باشد:

(۲-۳۹)

$$\sum_j a_{ij}x_j + \sum_{j\in J_i} w_{ij} + \Gamma z_i \le b_i$$

$$z_i + w_{ij} \ \ge \hat{a}_{ij}u_j, \forall j \in J_i$$

$$-u_j \le x_j \le u_j, \forall j \in J_i$$

$$z_i, w_{ij} \ge 0$$

۶-۱-۴-۲ فاصله‌ای و بیضوی و چند وجهی

در این حالت رابطه‌ی (۲۶-۲) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌گردد:

(۴۰-۲)

$$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\in J_i}|p_{ij}| + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i} w_{ij}^2} + \Gamma z_i] \leq b_i$$

$$z_i \geq |\hat{a}_{ij}x_j - p_{ij} - w_{ij}|, \forall j \in J_i$$

با معرفی متغیرهای کمکی و حذف قدر مطلق‌ها به فرمول معادل زیر خواهیم رسید:

(۴۱-۲)

$$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\in J_i} v_{ij} + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i} w_{ij}^2} + \Gamma z_i] \leq b_i$$

$$-v_{ij} \leq p_{ij} \leq v_{ij}, \forall j \in J_i$$

$$-z_i \leq \hat{a}_{ij}x_j - p_{ij} - w_{ij} \leq -z_i, \forall j \in J_i$$

در پایان این بخش در جدول ۲، فرمول‌های گفته شده را برای برنامه ریزی خطی با عدم قطعیت در سمت چپ، جمع بندی کرده‌ایم. در این جدول، به دلیل اهمیت مجموعه‌ی عدم قطعیت فاصله‌ای برای فضای محدود، تنها فرمول‌های مربوط به این حالت خاص به جای حالت کلی جعبه‌ای آمده‌است. همچنین در فرمول‌های موجود در جدول برای نمایش ساده‌تر، فرمول‌ها را همراه با قدر مطلق گذاشته‌ایم.

مجموعه‌ی عدم قطعیت	همتای استوار
جعبه‌ای	$\sum_j a_{ij}x_j + [\psi\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}\|x_j\|] \leq b_i$
بیضوی	$\sum_j a_{ij}x_j + [\Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2 x_j^2}] \leq b_i$
چندوجهی	$\sum_j a_{ij}x_j + \Gamma p_i \leq b_i$ $P_i \geq \hat{a}_{ij}\|x_j\|, \forall j \in J_i$
فاصله‌ای + بیضوی	$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}\|x_j - z_{ij}\| + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2}] \leq b_i$

$\sum_j a_{ij}x_j + \sum_{j\in J_i} w_{ij} + \Gamma z_i \leq b_i$ $z_i + w_{ij} \geq \hat{a}_{ij}\lvert x_j\rvert, \forall j \in J_i$ $z_i, w_{ij} \geq 0$	فاصله‌ای + چندوجهی
$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\in J_i}\lvert p_{ij}\rvert + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i} w_{ij}^2} + \Gamma z_i] \leq b_i$ $z_i \geq \lvert\hat{a}_{ij}x_j - p_{ij} - w_{ij}\rvert, \forall j \in J_i$	فاصله‌ای + بیضوی + چندوجهی

جدول ۳ همتای استوار برای i امین محدودیت خطی با عدم اطمینان تنها در سمت چپ

۲-۴-۲ عدم قطعیت سمت راستی

در حالتی که عدم قطعیت تنها در ضرایب سمت راستی وجود داشته باشد، محدودیت (۲-۸) به محدودیت زیر تبدیل می‌شود. برای نمایش بهتر، اندیس e را به جای i_0 به i تبدیل می‌کنیم.

(۲-۴۲)

$$\sum_j a_{ij}x_j + [\max_{e\in U}\{e_i\hat{b}_i\}] \leq b_i$$

در این حالت، رابطه‌ی گفته شده به فرمول زیر تبدیل می‌شود:

(۲-۴۳)

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Delta\hat{b}_i \leq b_i$$

در این رابطه، پارامتر Δ بنابر جدول زیر تعیین می‌شود:

Δ	مجموعه‌ی عدم قطعیت
ψ	جعبه‌ای
Ω	بیضوی
Γ	چند وجهی
$\min(\Omega, 1)$	فاصله‌ای + بیضوی
$\min(\Gamma, 1)$	فاصله‌ای + چند وجهی
$\min(\Omega, \Gamma, 1)$	فاصله‌ای + بیضوی + چند وجهی

جدول ۴ مقادیر مختلف Δ برای مجموعه‌های عدم اطمینان مختلف

همانطور که در این جدول مشاهده می‌شود برای انواع مجموعه‌های عدم قطعیت، محدودیت به دست آمده ساختار مشابهی دارد. در جدول ۴، برای هر یک از این مجموعه‌ها، این محدودیت‌ها خلاصه شده است.

مجموعه‌ی عدم قطعیت	همتای استوار
جعبه‌ای	$\sum_j a_{ij}x_j + \psi\hat{b}_i \le b_i$
بیضوی	$\sum_j a_{ij}x_j + \Omega\hat{b}_i \le b_i$
چندوجهی	$\sum_j a_{ij}x_j + \Gamma\hat{b}_i \le b_i$
فاصله‌ای + بیضوی	$\sum_j a_{ij}x_j + \min(\Omega, 1)\,\hat{b}_i \le b_i$
فاصله‌ای + چندوجهی	$\sum_j a_{ij}x_j + \min(\Gamma, 1)\,\hat{b}_i \le b_i$
فاصله‌ای + بیضوی + چندوجهی	$\sum_j a_{ij}x_j + \min(\Omega, \Gamma, 1)\,\hat{b}_i \le b_i$

جدول ۵ همتای استوار برای i امین محدودیت خطی با عدم اطمینان تنها در سمت راست

۲-۴-۳ عدم قطعیت همزمان در سمت راست و سمت چپ

پس از اینکه هر یک از حالات را به تنهایی بررسی کردیم، در این بخش به حالتی می‌پردازیم که پارامترهای سمت راست و سمت چپ به طور همزمان غیر قطعی هستند. در جدول ۶ به ازای مجموعه‌های متفاوت، فرمول مورد نظر را به دست آورده‌ایم.

مجموعه‌ی عدم قطعیت	همتای استوار
جعبه‌ای	$\sum_j a_{ij}x_j + \psi[\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}\lvert x_j\rvert + \hat{b}_i] \le b_i$
بیضوی	$\sum_j a_{ij}x_j + [\Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2 + \hat{b}_i^2}] \le b_i$
چندوجهی	$\sum_j a_{ij}x_j + \Gamma p_i \le b_i$

$P_i \geq \hat{a}_{ij}\lvert x_j\rvert, \forall j \in J_i$ $p_i \geq \hat{b}_i$	
$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}\lvert x_j - z_{ij}\rvert + \hat{b}_i\lvert 1 + z_{i0}\rvert + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2 + \hat{b}_i^2 z_{i0}^2}] \leq b_i$	فاصله‌ای + بیضوی
$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\in J_i} w_{ij} + \Gamma z_i + w_{i0}] \leq b_i$ $z_i + w_{ij} \geq \hat{a}_{ij}\lvert x_j\rvert, \forall j \in J_i$ $z_i + w_{i0} \geq \hat{b}_i, \quad z_i, w_{ij}, w_{i0} \geq 0$	فاصله‌ای + چندوجهی
$\sum_j a_{ij}x_j + [\sum_{j\in J_i}\lvert p_{ij}\rvert + \lvert p_{i0}\rvert + \Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i} w_{ij}^2 + w_{i0}^2} + \Gamma z_i] \leq b_i$ $z_i \geq \lvert\hat{a}_{ij}x_j - p_{ij} - w_{ij}\rvert, \forall j \in J_i$ $z_i \geq \lvert\hat{b}_i + p_{i0} + w_{i0}\rvert$	فاصله‌ای + بیضوی + چندوجهی

جدول ۶ همتای استوار i امین محدودیت خطی با عدم اطمینان همزمان در راست و چپ

۲-۴-۴ عدم قطعیت در ضرایب تابع هدف

تا کنون تمام حالاتی را که عدم قطعیت در پارامترهای موجود در محدودیت‌ها می‌باشد پوشش داده‌ایم. حال اگر تابع هدف به صورت زیر باشد:

(۲-۴۴)

$$max\ \tilde{c}x$$

ضرایب تابع هدف غیر قطعی هستند. در این حالت متغیر کمکی z را تعریف می‌کنیم و ضرایب تابع هدف را در یک محدودیت اضافه وارد می‌کنیم؛ بنابراین با عدم قطعیت در این ضرایب مانند عدم قطعیت در یک محدودیت برخورد می‌کنیم که در بخش قبل روش‌های مربوط به آن را بیان کردیم.

(۲-۴۵)

$$\max\ z$$

$$z - \tilde{c}x \leq 0$$

۲-۵ همتای استوار مسائل ترکیبی عدد صحیح خطی

در این قسمت همتای استوار مسئله‌ی ترکیبی عدد صحیح خطی را برای انواع مختلف مجموعه‌های عدم قطعیت ارائه می‌کنیم. در ابتدا برای عدم قطعیت همزمان در سمت چپ و سمت راست فرمول‌ها را ارائه می‌کنیم. در ادامه به بررسی عدم قطعیت در ضرایب تابع هدف خواهیم پرداخت. محدودیت i در رابطه‌ی (۱۷-۲) را در نظر می‌گیریم:

(۲-۴۶)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \max_{e\in U}\left\{\sum_{m\,\epsilon M_i} e_{im}\hat{a}_{im}x_m + \sum_{k\,\epsilon K_i} e_{ik}\hat{b}_{ik}y_k - e_{i0}\hat{p}_i\right\} \le p_i$$

با اضافه کردن متغیر کمکی زیر به رابطه‌ی (۴۷-۲) می‌رسیم:

$$x_0 = -1$$

(۲-۴۷)

(۸)

$$p_i x_0 + \sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \max_{e\in U}\left\{e_{i0}\hat{p}_i x_0 + \sum_{m\,\epsilon M_i} e_{im}\hat{a}_{im}x_m + \sum_{k\,\epsilon K_i} e_{ik}\hat{b}_{ik}y_k\right\} \le 0$$

با تعریف پارامترهای زیر به رابطه‌ی (۴۸-۲) خواهیم رسید:

$$e_i = [e_{i0}; \{e_{im}\}; \{e_{ik}\}]$$

$$A_i = [p_i; \{a_{im}\}; \{b_{ik}\}]$$

$$\hat{A}_i = \left[\hat{p}_i; \{\hat{a}_{im}\}; \{\hat{b}_{ik}\}\right]$$

$$X = [x_0; \{x_m\}; \{y_k\}]$$

$$j \in J_i = \{0\} \cup M_i \cup K_i$$

(۲-۴۸)

$$\sum_{j} A_{ij}X_j + \max_{e_i\in U}\left\{\sum_{j\,\epsilon J_i} e_{ij}\hat{A}_{ij}X_j\right\} \le 0$$

حال، برای مجموعه‌های مختلف عدم قطعیت مسئله‌ی بهینه سازی موجود در (۴۸-۲)را حذف می‌کنیم و روابط معادل را به دست می‌آوریم.

۲-۵-۱ جعبه‌ای

در صورتی که مجموعه‌ی عدم قطعیت جعبه‌ای باشد، آنگاه همتای استوار (۲-۴۸) به صورت زیر خواهد بود:

(۲-۴۹)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \psi[\sum_{m\,\epsilon M_i} \hat{a}_{im}|x_m| + \sum_{k\,\epsilon K_i} \hat{b}_{ik}|y_k| + \hat{p}_i] \leq p_i$$

در صورتی که x_m و y_k هر یک مثبت باشند، آنگاه می‌توان قدرمطلق متناظر را حذف نمود. در حالت کلی با معرفی متغیرهای کمکی، رابطه‌ی اخیر به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌گردد:

(۲-۵۰)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \psi[\sum_{m\,\epsilon M_i} \hat{a}_{im}u_m + \sum_{k\,\epsilon K_i} \hat{b}_{ik}v_k + \hat{p}_i] \leq p_i$$

$$|x_m| \leq u_m, \forall m \in M_i$$

$$|y_k| \leq v_k, \forall k \in K_i$$

برای اینکه قدر مطلق به طور کامل حذف شود، رابطه‌ی اخیر را به صورت زیر در میاوریم:

(۲-۵۱)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \psi[\sum_{m\,\epsilon M_i} \hat{a}_{im}u_m + \sum_{k\,\epsilon K_i} \hat{b}_{ik}v_k + \hat{p}_i] \leq p_i$$

$$-u_m \leq x_m \leq u_m, \forall m \in M_i$$

$$-v_k \leq y_k \leq v_k, \forall k \in K_i$$

۲-۵-۲ بیضوی

با مجموعه‌ی عدم قطعیت بیضوی رابطه‌ی (۲-۴۸) با عبارت زیر برابر است:

(۲-۵۲)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \Omega\sqrt{\sum_{m\in M_i} \hat{a}_{im}^2 x_m^2 + \sum_{k\in K_i} \hat{b}_{ik}^2 y_k^2 + \hat{p}_i^2} \leq p_i$$

۲-۵-۳ چند وجهی

اگر مجموعه‌ی عدم قطعیت چند وجهی باشد، رابطه‌ی (۲-۴۸) معادل رابطه‌ی زیر است:

(۲-۵۳)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + z_i\Gamma \le p_i$$

$$z_i \ge \hat{a}_{im}|x_m|, \forall m \in M_i$$

$$z_i \ge \hat{b}_{ik}|y_k|, \forall k \in K_i$$

$$z_i \ge \hat{p}_i$$

پس از حذف عملگرهای قدرمطلق به فرمول زیر می‌رسیم:

(۲-۵۴)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + z_i\Gamma \le p_i$$

$$z_i \ge \hat{a}_{im}u_m, \forall m \in M_i$$

$$z_i \ge \hat{b}_{ik}v_k, \forall k \in K_i$$

$$z_i \ge \hat{p}_i$$

$$-u_m \le x_m \le u_m, \forall m \in M_i$$

$$-v_k \le y_k \le v_k, \forall k \in K_i$$

۲-۵-۴ فاصله‌ای و بیضوی

در این حالت همتای استوار معادل رابطه‌ی (۴۸-۲) به صورت زیر است:

(۲-۵۵)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \sum_{m\in M_i} \hat{a}_{im}|x_m - z_{im}| + \sum_{k\in K_i} \hat{b}_{ik}|y_k - z_{ik}| + \hat{p}_i|1 + z_{i0}| + \Omega\sqrt{\sum_{m\in M_i} \hat{a}_{im}^2 z_{im}^2 + \sum_{k\in K_i} \hat{b}_{ik}^2 z_{ik}^2 + \hat{p}_i^2 z_{i0}^2} \le p_i$$

در ادامه با حذف قدرمطلق‌ها به عبارت زیر می‌رسیم:

(۲-۵۶)

$$\sum_{m} a_{im}x_m + \sum_{k} b_{ik}y_k + \sum_{m\in M_i} \hat{a}_{im}u_{im} + \sum_{k\in K_i} \hat{b}_{ik}u_{ik} + \hat{p}_i u_{i0} + \Omega\sqrt{\sum_{m\in M_i} \hat{a}_{im}^2 z_{im}^2 + \sum_{k\in K_i} \hat{b}_{ik}^2 z_{ik}^2 + \hat{p}_i^2 z_{i0}^2} \le p_i$$

$$u_{im} = |x_m - z_{im}|, \forall m \in M_i$$

$$u_{ik} = |y_k - z_{ik}|, \forall k \in K_i$$
$$u_{i0} = |1 + z_{i0}|$$

در نهایت با یک تغییر دیگر به همتای استوار زیر می‌رسیم:

(۲-۵۷)

$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \sum_{m \in M_i} \hat{a}_{im}u_{im} + \sum_{k \in K_i} \hat{b}_{ik}u_{ik} + \hat{p}_i u_{i0} + \Omega\sqrt{\sum_{m \in M_i} \hat{a}_{im}^2 z_{im}^2 + \sum_{k \in K_i} \hat{b}_{ik}^2 z_{ik}^2 + \hat{p}_i^2 z_{i0}^2} \le p_i$$
$$-u_{im} \le x_m - z_{im} \le u_{im}, \forall m \in M_i$$
$$-u_{ik} \le y_k - z_{ik} \le u_{ik}, \forall k \in K_i$$
$$-u_{i0} \le 1 + z_{i0} \le u_{i0}$$

۲-۵-۵ فاصله‌ای و چندوجهی

در این شرایط رابطه‌ی (۴۸-۲) به شکل زیر تبدیل می‌گردد:

(۲-۵۸)

$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \left[z_i\Gamma_i + \sum_{m \in M_i} w_{im} + \sum_{k \in K_i} w_{ik} + w_{i0}\right] \le p_i$$
$$z_i + w_{im} \ge \hat{a}_{im}|x_m|, \forall m \in M_i$$
$$z_i + w_{ik} \ge \hat{b}_{ik}|y_k|, \forall k \in K_i$$
$$z_i + w_{i0} \ge \hat{p}_i$$

با انجام عملیات مشابه با بخش‌های قبل به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

(۲-۵۹)

$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \left[z_i\Gamma_i + \sum_{m \in M_i} w_{im} + \sum_{k \in K_i} w_{ik} + w_{i0}\right] \le p_i$$
$$z_i + w_{im} \ge \hat{a}_{im}u_m, \forall m \in M_i$$
$$z_i + w_{ik} \ge \hat{b}_{ik}v_k, \forall k \in K_i$$

$$z_i + w_{i0} \geq \hat{p}_i$$
$$-u_m \leq x_m \leq u_m, \forall m \in M_i$$
$$-v_m \leq y_k \leq v_k, \forall k \in K_i$$

۲-۵-۶ فاصله‌ای و بیضوی و چند وجهی

همتای استوار معادل (۲-۴۸) به شرح زیر است:

(۲-۶۰)

$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + z_i\Gamma + \sum_{m\in M_i}|q_{im}| + \sum_{k\in K_i}|q_{ik}| + |q_{i0}|$$
$$+ \Omega\sqrt{\sum_{m\in M_i} w_{im}^2 + \sum_{k\in K_i} w_{ik}^2 + w_{i0}^2} \leq p_i$$
$$z_i \geq |\hat{a}_{im}x_m - q_{im} - w_{im}|, \forall m \in M_i$$
$$z_i \geq \left|\hat{b}_{ik}y_k - q_{ik} - w_{ik}\right|, \forall k \in K_i$$
$$z_i \geq |\hat{p}_i - q_{i0} + w_{i0}|$$

با افزودن متغیرهای کمکی و حذف‌کردن عملگرهای قدرمطلق به عبارت زیر خواهیم رسید:

(۲-۶۱)

$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + z_i\Gamma + \sum_{m\in M_i} u_{im} + \sum_{k\in K_i} u_{ik} + u_{i0}$$
$$+ \Omega\sqrt{\sum_{m\in M_i} w_{im}^2 + \sum_{k\in K_i} w_{ik}^2 + w_{i0}^2} \leq p_i$$
$$-z_i \leq \hat{a}_{im}x_m - q_{im} - w_{im} \leq z_i, \forall m \in M_i$$
$$-z_i \leq \hat{b}_{ik}y_k - q_{ik} - w_{ik} \leq z_i, \forall k \in K_i$$
$$-z_i \leq \hat{p}_i - q_{i0} + w_{i0} \leq z_i$$
$$-u_{im} \leq q_{im} \leq u_{im}, \forall m \in M_i$$
$$-u_{ik} \leq q_{ik} \leq u_{ik}, \forall k \in K_i$$
$$-u_{i0} \leq q_{i0} \leq u_{i0}$$

حال که برای انواع مجموعه‌های عدم قطعیت همتای استوار را در صورتی که عدم قطعیت در سمت راست و چپ به صورت همزمان باشد به دست آورده‌ایم، برای به دست آوردن همتای استوار در صورتی که عدم قطعیت تنها در سمت راست یا چپ باشد، کافی است میزان تغییر متغیرهای سمت چپ و راست را به ترتیب صفر کنیم؛ برای مثال اگر میزان تغییر سمت راست یعنی $\hat{p}_i$ برابر با صفر باشد عدم قطعیت در سمت راست از بین می‌رود.

در جدول ۶ خلاصه‌ی روابط را برای مسئله‌ی عمومی ترکیبی عدد صحیح خطی نوشته‌ایم.

عدم قطعیت	همتای استوار
جعبه‌ای	$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \psi[\sum_{m \in M_i} \hat{a}_{im}\lvert x_m\rvert + \sum_{k \in K_i} \hat{b}_{ik}\lvert y_k\rvert + \hat{p}_i] \le p_i$
بیضوی	$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \Omega\sqrt{\sum_{m\in M_i} \hat{a}_{im}^2 x_m^2 + \sum_{k\in K_i} \hat{b}_{ik}^2 y_k^2 + \hat{p}_i^2} \le p_i$
چندوجهی	$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + z_i\Gamma \le p_i$ $z_i \ge \hat{a}_{im}\lvert x_m\rvert, \forall m \in M_i$ $z_i \ge \hat{b}_{ik}\lvert y_k\rvert, \forall k \in K_i$ $z_i \ge \hat{p}_i$
فاصله‌ای + بیضوی	$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \sum_{m\in M_i} \hat{a}_{im}\lvert x_m - z_{im}\rvert + \sum_{k\in K_i} \hat{b}_{ik}\lvert y_k - z_{ik}\rvert + \hat{p}_i\lvert 1 + z_{i0}\rvert + \Omega\sqrt{\sum_{m\in M_i} \hat{a}_{im}^2 z_{im}^2 + \sum_{k\in K_i} \hat{b}_{ik}^2 z_{ik}^2 + \hat{p}_i^2 z_{i0}^2} \le p_i$

$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + \left[z_i\Gamma_i + \sum_{m\in M_i} w_{im} + \sum_{k\in K_i} w_{ik} + w_{i0} \right] \le p_i$$ $$z_i + w_{im} \ge \hat{a}_{im}\lvert x_m\rvert, \forall m \in M_i$$ $$z_i + w_{ik} \ge \hat{b}_{ik}\lvert y_k\rvert, \forall k \in K_i$$ $$z_i + w_{i0} \ge \hat{p}_i$$	فاصله‌ای + چندوجهی
$$\sum_m a_{im}x_m + \sum_k b_{ik}y_k + z_i\Gamma + \sum_{m\in M_i} \lvert q_{im}\rvert + \sum_{k\in K_i} \lvert q_{ik}\rvert + \lvert q_{i0}\rvert + \Omega \sqrt{\sum_{m\in M_i} w_{im}^2 + \sum_{k\in K_i} w_{ik}^2 + w_{i0}^2} \le p_i$$ $$z_i \ge \lvert \hat{a}_{im}x_m - q_{im} - w_{im}\rvert, \forall m \in M_i$$ $$z_i \ge \lvert \hat{b}_{ik}y_k - q_{ik} - w_{ik}\rvert, \forall k \in K_i$$ $$z_i \ge \lvert \hat{p}_i - q_{i0} + w_{i0}\rvert$$	فاصله‌ای + بیضوی + چندوجهی

جدول ۷ همتای استوار i امین محدودیت مسئله‌ی ترکیبی عدد صحیح خطی

۲-۵-۷ وجود عدم قطعیت در تابع هدف

مشابه با مسئله‌ی برنامه ریزی خطی، در این حالت عدم قطعیت در ضرایب تابع هدف را با تبدیل آن به یک محدودیت جدید، به محدودیت‌ها منتقل می‌کنیم و از روابط جدول ۶ استفاده می‌کنیم.

۳ بهینه‌سازی معکوس[۶۱]

۳-۱ مرور ادبیات

در بسیاری از مسائل بهینه سازی، به دنبال یافتن مقادیری از متغیرهای تصمیم هستیم که یک تابع مشخص را حداکثر می‌کنند و در محدودیت‌های از پیش مشخص شده‌ای صدق می‌کنند. به این مسئله، مسئله‌ی بهینه سازی روبه جلو [۶۲]می‌گویند. از طرف دیگر، در بسیاری از مسائل مقادیری از پیش برای متغیرهای تصمیم مشخص گردیده‌است و به دنبال یافتن ضرایب مسئله هستیم به گونه‌ای که جواب بهینه‌ی مسئله، همان جواب از پیش تعیین شده شود. به این نوع مسائل بهینه‌سازی معکوس گفته می‌شود که در ادبیات به طور گسترده بر روی آن‌ها مطالعه شده‌است. یکی از اولین مطالعات در این شاخه از علم، توسط محققانی که با داده‌های ژئوفیزیک کار می‌کردند انجام شده‌است. تارانتولا [43] مسئله‌ی معکوس را به صورت زیر تعریف می‌کند: یک سیستم فیزیکی را می‌توانیم با

[61] Inverse Optimization
[62] Forward

تعدادی پارامتر توصیف نماییم. بعضی از این پارامترها قابل اندازه گیری به صورت مستقیم و بعضی غیر قابل اندازه گیری هستند. برای مثال شعاع هسته‌ی زمین به طور مستقیم قابل اندازه گیری نیست. برای اندازه گیری این پارامترها، تعدادی متغیر دیگر را در نظر می‌گیریم که به این پارامترها وابسته باشد. در یک مسئله‌ی روبه‌جلو، با داشتن پارامترها مقادیر متغیرها را به دست می‌آوریم. از طرفی، در مسئله‌ی معکوس با مشاهده‌ی مقادیر متغیرها مقدار پارامترها را به دست می‌آوریم. بهینه سازی معکوس در زمینه‌های زیادی به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است؛ برای مثال بورتان و توینت [44] در پیش بینی زمین لرزه، تراوت و همکاران [68] در برنامه‌ریزی تولید، برتسیماس و همکاران [72] در مباحث مالی[63]، ارکین و همکاران [73] و چن و همکاران [70] در مسائل سلامت، ترنر و چن [74] در پایایی[64] و بیرج و همکاران [75] در بازارهای انرژی.

پس از اولین مطالعات در زمینه‌ی بهینه سازی معکوس، علاقه به مطالعه‌ی برنامه‌ریزی معکوس در میان جامعه‌ی برنامه ریزی ریاضی توسط بورتان و توینت [45][44] گسترش یافت. آن‌ها معکوس مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر [65]را در زمینه‌ی پیش‌بینی حرکات زمین لرزه با استفاده از امواج بررسی نمودند. در ادامه مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر توسط محققان دیگری به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت. در سال۱۹۹۴، کای و یانگ [46]، در سال ۱۹۹۵، اکسو و ژانگ [47]، ژانگ، ما و یانگ [48] و در سال ۱۹۹۷، دیال [49] و بورتان، پولیبلنک و توینت [50] این مسئله را در زمینه‌های دیگری بررسی نمودند. در [44]، [45] و [50] محققان مسئله‌ی معکوس کوتاه‌ترین مسیر (چند منبعی-چند مقصدی[66]) را تحت نرم L_2 با استفاده از تکنیک‌های برنامه‌ریزی غیر خطی حل نمودند. در [44] و [46] محققان این مسئله را تحت نرم L_1 وزن‌دار بررسی نمودند. در سال ۱۹۹۶، یانگ و ژانگ [51]، مسئله‌ی معکوس مسیر حداکثر ظرفیت [67]را با در نظر گرفتن حدود بالا بررسی نمودند. مسئله‌ی معکوس درخت پوشا[68]، در سال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۸ توسط ما، اکسو و ژانگ [52]، سکالینگام، آهوجا و اورلین [53] و آهوجا و اورلین [54] بررسی شد. در [53]، محققان یک الگوریتم $O(n^3)$ را تحت نرم L_1 ارائه دادند. آن‌ها همچنین یک الگوریتم $O(n^2)$ تحت نرم L_∞ ارائه کردند. در این دو الگوریتم منظور از n تعداد نقاط شبکه [69]است. در [54]، آن‌ها یک الگوریتم $O(n^2 \log n)$ تحت نرم L_1 برای مسئله‌ی معکوس درخت پوشا ارائه دادند. آهوجا و اورلین [55]، در سال ۱۹۹۷ معکوس مسئله‌ی مرتب کردن [70]را مطالعه نمودند. در این مقاله آن‌ها، مسئله‌ی مجموعه‌ی محدب مرتب شده [71]را که حالت عمومی‌تر مسئله‌ی معکوس مرتب کردن است، بررسی نمودند. در سال ۱۹۹۵، هو و لیو [56] معکوس مسئله‌ی کوتاه‌ترین حالت شاخه‌ای را بررسی نمودند. آن‌ها در ادامه در همان سال، معکوس مسئله‌ی تناظر دو قسمتی را نیز مطالعه کردند [57]. مسئله‌ی معکوس برش کمینه [72]در ۱۹۹۷، توسط یانگ، ژانگ و ما [58] و ژانگ و کای [59] در سال ۱۹۹۸ بررسی شد. آن‌ها این مسئله را تحت نرم L_1 وزن‌دار بررسی نمودند و نشان دادند مسئله‌ی معکوس یک مسئله‌ی جریان هزینه‌ی کمینه [73]است. در سال ۱۹۹۵، هوانگ و لیو [60] و در سال ۱۹۹۶، سکالینگام [61] مسئله‌ی معکوس جریان هزینه‌ی کمینه را تحقیق نمودند. در [60]، آن‌ها این مسئله را تحت نرم وزن‌دار L_1 بررسی نمودند. در [61] که یک پایان نامه‌ی دکتری

---

[63] Finance
[64] Reliability
[65] Inverse Shortest Path Problem
[66] Multi-source Multi-sink
[67] Maximum Capacity
[68] Inverse Spanning Tree Problem
[69] Network Nodes
[70] Sorting
[71] Ordered Convex Set Problem
[72] Inverse Minimum Cut Problem
[73] Inverse Minimum Cost Flow Problem

بود، این مسئله تحت نرم‌های وزن‌دار L_1 و L_∞ بررسی شد. مسئله‌ی معکوس اشتراک ماترویید [۷۴]در سال ۱۹۹۵ توسط کای و لیو [62] بررسی شد. همچنین کای، یانگ و لی [63]، مسئله‌ی معکوس جریان چند ماترویده را در سال ۱۹۹۶ مورد مطالعه قرار دادند. اهوجا و اورلین [64] در سال ۱۹۹۸ بررسی کاملی در زمینه‌ی معکوس بهینه سازی خطی انجام دادند. در همان سال، آهوجا و اورلین [65] در زمینه‌ی مسائل جریان شبکه [۷۵]در یک مقاله در چارچوبی جامع، بسیاری از تحقیقات پیشین را گردآوری نمودند و تحت نرم‌های L_1 و L_∞ با اثبات‌هایی ساده‌تر، الگوریتم‌های سریع‌تری را برای مسائلی با وزن واحد به دست آوردند. آن‌ها نتایج تمام تحقیقات خود را در مقاله‌ای در سال ۲۰۰۱ منتشر نمودند [66] و موارد زیر را ارائه نمودند:

۱. معکوس یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تحت نرم‌های L_1 و L_∞ یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی می‌ماند.
۲. در مسائل کوتاه‌ترین مسیر، تخصیص و حداقل برش، در صورت واحد بودن اوزان معکوس مسئله مشابه مسئله‌ی روبه‌جلو می‌باشد. در صورتی که اوزان واحد نباشند، معکوس آن‌ها به یک مسئله‌ی جریان هزینه‌ی کمینه تبدیل خواهد شد.
۳. در صورتی که یک مسئله جریان هزینه‌ی کمینه باشد، تحت نرم L_1 و اوزان واحد، مسئله‌ی معکوس جریان هزینه‌ی کمینه با ظرفیت واحد خواهد بود. در صورتی که اوزان واحد نباشند، مسئله‌ی معکوس جریان هزینه‌ی کمینه می‌شود.
۴. معکوس مسئله‌ی جریان هزینه‌ی کمینه تحت نرم L_∞ و اوزان واحد، یک مسئله‌ی میانگین دوره‌ی کمینه [۷۶]است. در صورتی که وزن‌ها واحد نباشند، مسئله‌ی معکوس یک مسئله‌ی نرخ دوره‌ی هزینه و زمان کمینه می‌باشد.
۵. اگر مسئله‌ای تابع هدف خطی داشته باشد و در یک زمان چندجمله‌ای قابل حل باشد، معکوس آن تحت نرم‌های L_1 و L_∞ در زمان چندجمله‌ای قابل حل است.

با این حال، کارهای اولیه در ادبیات در دیدگاه کلاسیک بهینه سازی معکوس قرار داشتند. این دیدگاه در آهوجا و اورلین [66] و در ینگار و کنگ [67] در سال ۲۰۰۵ قابل مشاهده است. در این دیدگاه فرض می‌شود داده‌ی مشاهده شده حتما در بین جواب‌های بهینه‌ی ممکن می‌تواند موجود باشد. با این‌حال، در بسیاری از کاربردهای واقعی بهینه سازی معکوس چنین فرضی نامکن است. داده‌های دنیای واقعی بسیار نویز دارند و بسیاری از مواقع یافتن پارامترهای مدل به نحوی که دقیقا به یک جواب مشخص شده برسیم نا ممکن است. این مشکل توسط تراوت و همکاران [68] در ۲۰۰۶، کشاورز و همکاران [69] در ۲۰۱۱، چن و همکاران [70] در ۲۰۱۴ و برتسیماس و همکاران [71] در ۲۰۱۵ گزارش شده‌است. در چنین شرایطی، استفاده از رویکرد کلاسیک باعث می‌شود که مسئله‌ی معکوس ناموجه باشد یا جواب‌های خوبی ندهد؛ برای مثال همه‌ی ضرایب را صفر بدهد. در این شرایط شاخه‌ای از ادبیات به وجود آمده است که به جای به دست آوردن جواب بهینه، به دنبال یافتن جواب شبه بهینه هستند. در این روش یک تابع اندازه گیری خطا معرفی می‌شود که در تلاش برای کم کردن آن هستیم. بنابراین ضرایب ناشناخته به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که این مقدار خطا کمینه شود. در این دیدگاه جدید، تراوت و همکاران [68]، کشاورز و همکاران [69]، چن و همکاران [70] و برتسیماس و همکاران [71] به مطالعه پرداخته‌اند. چن و همکاران [76] به مطالعه‌ی این موضوع در بهینه سازی خطی پرداختند و با الهام گرفتن از رگرسیون یک معیار خوبی برازش با خواصی مشابه با R^2 در مسائل رگرسیونی ارائه کردند. آن‌ها همچنین یک مدل عمومی بهینه‌سازی معکوس برای برنامه‌ریزی خطی ارائه دادند که غیرمحدب است. سپس فرم بسته‌ی جواب را برای این مسئله ارائه کردند. آن‌ها مدل ارائه شده‌ی خود را در برنامه ریزی تولید آزمایش کردند و نتایج بسیار قابل قبولی به دست آوردند.

---

[74] Matroid Intersection
[75] Network Flow
[76] Minimum Mean Cycle

۳-۲ فرمول بندی مسائل بهینه سازی معکوس

در این بخش به ارائه و استخراج فرمول‌های ارائه شده توسط آهوجا و اورلین [66] می‌پردازیم. مسئله‌ی بهینه‌سازی P را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم S ناحیه‌ی موجه این مسئله باشد و c بردار ضرایب تابع هدف باشد؛ بنابراین مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۳-۱)

$$P = \min\{cx : x \epsilon S\}$$

حال یک نقطه مانند $x^0 \epsilon S$ را در نظر می‌گیریم. این نقطه می‌تواند جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۳-۱) باشد یا نباشد. مسئله‌ی $P(d)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

(۳-۲)

$$P(d) = \min\{dx : x \epsilon S\}$$

مسئله‌ی بهینه‌سازی معکوس به این صورت تعریف می‌شود که می‌خواهیم d را بیابیم به شرطی که x^0 جواب بهینه‌ی مسئله‌ی $P(d)$ شود. در بسیاری از کاربردها تغییر تابع هزینه از c به d هرچه کمتر باشد بهتر است. بنابراین از آنجا که تعداد زیادی d ممکن است وجود داشته باشد، مسئله‌ی معکوس را تحت نرم L_p به این صورت تعریف می‌کنیم که می‌خواهیم d را بیابیم به نحوی که مقدار زیر کمینه شود:

(۳-۳)

$$\|d - c\|_p = \left[\sum_{j \in J} |d_j - c_j|^p\right]^{1/p}$$

در این رابطه J بیانگر فهرست مقادیر متغیرهای تصمیم x_j می‌باشد. حال مسئله‌ی کلی‌تر زیر را در نظر می‌گیریم:

(۳-۴)

$$\min Z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad \forall i \in I$$

$$x_j \geq l_j, \qquad \forall j \in J$$

$$-x_j \geq -u_j, \qquad \forall j \in J$$

در این مسئله l_j و u_j به ترتیب حد پایین و بالای متغیر تصمیم x_j می‌باشند. حال مسئله‌ی دوگان (۳-۴) را به دست می‌آوریم. به این منظور برای محدودیت‌های سطر اول متغیرهای $\alpha_i, \forall i \in I$، برای محدودیت‌های سطر دوم $\beta_j, \forall j \in J$ و برای محدودیت‌های

سطر سوم $\gamma_j, \forall j \in J$ را در نظر می‌گیریم. با این متغیرها بنابر توضیحاتی که در فصل یک دادیم مسئله‌ی دوگان به صورت زیر خواهد بود:

(۳-۵)

$$\max W = \sum_{i\in I} b_i\alpha_i + \sum_{j\in J} l_j\beta_j - \sum_{j\in J} u_j\gamma_j$$

$$\sum_{i\in I} a_{ij}\alpha_i + \beta_j - \gamma_j = c_j, \qquad \forall j \in J$$

$$\alpha_i \geq 0, \qquad \forall i \in I$$

$$\beta_j, \gamma_j \geq 0, \qquad \forall j \in J$$

اگر x جواب موجه مسئله‌ی اولیه و (α, β, γ) جواب متناظر در مسئله‌ی دوگان باشد، بنابر قضیه‌ی لنگی مکمل نتایج زیر حاصل می‌شود:

(۳-۶)

$$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j > b_i \rightarrow \alpha_i = 0$$

$$x_j > l_j \rightarrow \beta_j = 0$$

$$x_j < u_j \rightarrow \gamma_j = 0$$

حال فرض می‌کنیم x^0 جواب موجه مسئله‌ی اولیه است که می‌خواهیم با تغییر مقادیر ضرایب تابع هدف آن را بهینه کنیم. بنابراین مجموعه‌ی محدودیت‌های فعال یا الزام آور مسئله‌ی اولیه را به سه مجموعه‌ی زیر افراز می‌کنیم. همچنین مجموعه‌ی F را تعریف می‌کنیم که در ادامه به آن نیاز خواهیم داشت:

(۳-۷)

$$B = \left\{ i\epsilon I : \sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i \right\}$$

$$L = \left\{ j\epsilon J : x_j^0 = l_j \right\}$$

$$U = \left\{ j\epsilon J : x_j^0 = u_j \right\}$$

$$F = \left\{ j\epsilon J : l_j < x_j^0 < u_j \right\}$$

در نهایت می‌توان قضیه‌ی لنگی مکمل را به صورت زیر بازنویسی نمود:

(۳-۸)

$$\alpha_i = 0, \qquad \forall i \notin B$$
$$\beta_j = 0, \qquad \forall j \notin L$$
$$\gamma_j = 0, \qquad \forall j \notin U$$

حال در مسئله‌ی اولیه به جای ضرایب c_j ضرایب d_j را قرار می‌دهیم. به جای یافتن مستقیم این ضرایب، مسئله‌ی دوگان متناظر را در نظر می‌گیریم. در مسئله‌ی اولیه با ضرایب تابع هدف d_j جواب x^0 بهینه است اگر و تنها اگر متغیرهای دوگان (α, β, γ) موجود باشند به نحوی که در محدودیت‌های (۵-۳) صدق کنند و در شرایط قضیه‌ی لنگی مکمل (۸-۳) نیز برقرار باشند. با این توضیحات حال مجموعه‌ی مقادیر ممکن (α, β, γ) و d_j را به دست می‌آوریم. تمام d_j هایی که در روابط زیر صدق می‌کنند ضرایب تابع هدفی در مسئله‌ی اولیه هستند که جواب x^0 را بهینه می‌کنند.

(۳-۹)

$$\sum_{i \in B} a_{ij}\alpha_i + \beta_j = d_j, \qquad \forall j \in L$$
$$\sum_{i \in B} a_{ij}\alpha_i - \gamma_j = d_j, \qquad \forall j \in U$$
$$\sum_{i \in B} a_{ij}\alpha_i = d_j, \qquad \forall j \in F$$
$$\alpha_i \geq 0, \qquad \forall i \in B$$
$$\beta_j \geq 0, \qquad \forall j \in L$$
$$\gamma_j \geq 0, \qquad \forall j \in U$$

محدودیت‌های (۹-۳) فضای موجه d را می‌دهند. با در نظر گرفتن نرم p به عنوان تابع هدف، مسئله‌ی معکوس ساخته می‌شود.

(۳-۱۰)

$$\|d - c\|_p = \left[\sum_{j \in J} \left|d_j - c_j\right|^p\right]^{1/p}$$

۳-۲-۱ مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی نوع L_1

با در نظر گرفتن ضرایب وزنی مثبت در تابع هدف این مسئله به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

(۳-۱۱)

$$\min Z = \sum_{j \in J} w_j \left| d_j - c_j \right|$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i + \beta_j = d_j, \qquad \forall j \in L$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i - \gamma_j = d_j, \qquad \forall j \in U$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i = d_j, \qquad \forall j \in F$$

$$\alpha_i \geq 0, \qquad \forall i \in B$$

$$\beta_j \geq 0, \qquad \forall j \in L$$

$$\gamma_j \geq 0, \qquad \forall j \in U$$

از آنجا که در عبارت تابع هدف عملگر قدرمطلق وجود دارد، با تبدیل زیر به رابطه‌ی (۳-۱۲) می‌رسیم:

$$d_j - c_j = h_j - f_j$$

$$h_j, f_j \geq 0$$

$$\min Z = \max -Z = -\sum_{j \in J} w_j\, h_j - \sum_{j \in J} w_j\, f_j$$

(۳-۱۲)

$$\max -Z = -\sum_{j \in J} w_j\, h_j - \sum_{j \in J} w_j\, f_j$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i - h_j + f_j + \beta_j = c_j, \qquad \forall j \in L$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i - h_j + f_j - \gamma_j = c_j, \qquad \forall j \in U$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i - h_j + f_j = c_j, \qquad \forall j \in F$$

$$\alpha_i \geq 0, \qquad \forall i \in B$$

$\beta_j \geq 0, \qquad \forall j \in L$

$\gamma_j \geq 0, \qquad \forall j \in U$

$h_j, f_j \geq 0$

در رابطه‌ی (۳-۱۲) متغیرهای f_j و h_j نمی‌توانند با هم مقدار مثبت بگیرند، چرا که در این صورت می‌توان از هر دو مقدار کوچک مثبت ε را کم کرد. در این صورت محدودیت‌ها همچنان موجه هستند اما تابع هدف بهبود می‌یابد. حال متغیر جدید c_j^α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۳-۱۳)

$$c_j^\alpha = c_j - \sum\nolimits_{i \in B} a_{ij}\alpha_i$$

با در نظر گرفتن (۳-۱۳) سه محدودیت اول مسئله‌ی (۳-۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

(۳-۱۴)

$$-h_j + f_j = c_j^\alpha - \beta_j, \qquad \forall j \in L$$

$$-h_j + f_j = c_j^\alpha + \gamma_j, \qquad \forall j \in U$$

$$-h_j + f_j = c_j^\alpha, \qquad \forall j \in F$$

حال با توجه به مقدار c_j^α حالات زیر می‌تواند رخ بدهد.

۱. $c_j^\alpha > 0$:

از آنجا که هر دو متغیر f_j و h_j هر دو مثبت می‌باشند و در تلاشیم مجموع آن‌ها یعنی $h_j + f_j$ را کمینه کنیم، روابط زیر برقرار است:

(۳-۱۵)

$$j\epsilon L \rightarrow \beta_j = c_j^\alpha = |c_j^\alpha|, f_j = h_j = 0 \rightarrow d_j = c_j$$
$$j\epsilon F \cup U \rightarrow h_j = \gamma_j = 0, f_j = c_j^\alpha = |c_j^\alpha| \rightarrow d_j = c_j - |c_j^\alpha|$$

۲. $c_j^\alpha < 0$:

(۳-۱۶)

$$j\epsilon U \rightarrow \gamma_j = -c_j^\alpha = |c_j^\alpha|, f_j = h_j = 0 \rightarrow d_j = c_j$$
$$j\epsilon F \cup L \rightarrow f_j = \beta_j = 0, h_j = -c_j^\alpha = |c_j^\alpha| \rightarrow d_j = c_j + |c_j^\alpha|$$

۳. $c_j^\alpha = 0$:

(۳-۱۷)

$$h_j = f_j = \beta_j = \gamma_j = 0 \rightarrow d_j = c_j$$

اگر α جواب بهینه‌ی مسئله‌ی دوگان باشد، می‌توان d^* را بنابر روابط گفته شده به دست آورد:

(۳-۱۸)

$$\forall j \in J, \qquad d_j^* = \begin{cases} c_j - |c_j^{\alpha}|, & c_j^a > 0, x_j^0 > l_j \\ c_j + |c_j^{\alpha}|, & c_j^a < 0, x_j^0 < u_j \\ c_j, & otherwise \end{cases}$$

با توجه به روابط گفته شده نشان دادیم که مسئله‌ی معکوس معادل با حل مسئله‌ی برنامه ریزی خطی (۳-۱۲)، به دست آوردن مقادیر بهینه‌ی متغیرهای دوگان و به دست آوردن ضرایب بهینه‌ی تابع هدف از رابطه‌ی (۳-۱۸) می‌باشد. حال به جای حل مسئله‌ی (۳-۱۲) مسئله‌ی دوگان آن را حل می‌کنیم. مسئله‌ی دوگان آن به صورت زیر می‌باشد:

(۳-۱۹)

$$\min H = \sum_{j \in J} c_j y_j$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} y_j \geq 0, \qquad \forall i \in B$$

$$y_j \geq 0, y_j \geq -w_j, -y_j \geq -w_j, \qquad \forall j \in L$$

$$-y_j \geq 0, y_j \geq -w_j, -y_j \geq -w_j, \qquad \forall j \in U$$

$$y_j \geq -w_j, -y_j \geq -w_j, \qquad \forall j \in F$$

حال که مسئله‌ی دوگان مسئله‌ی معکوس را در (۳-۱۹) به دست آوردیم با تبدیل (۳-۲۰) این مسئله را بازنویسی می‌کنیم:

(۳-۲۰)

$$y_j = x_j - x_j^0, \qquad \forall j \in J$$

(۳-۲۱)

$$\min H = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad \forall i \in B$$

$$l_j \leq x_j \leq l_j + w_j, \qquad \forall j \in L$$

$$u_j - w_j \leq x_j \leq u_j, \qquad \forall j \in U$$

$$x_j^0 - w_j \leq x_j \leq x_j^0 + w_j, \qquad \forall j \in F$$

همانگونه که مشاهده می‌شود مسئله‌ی (۲۱-۳) تابع هدف و دسته‌ی محدودیت اول مشابه با مسئله‌ی اصلی دارد. هر دو مسئله‌ی (۱۹-۳) و (۲۱-۳) دوگان مسئله‌ی معکوس (۱۲-۳) می‌باشند. به مسئله‌ی (۱۹-۳) دوگان معکوس حول صفر [۷۷]و به مسئله‌ی (۲۱-۳) دوگان معکوس حول x^0 [۷۸]می‌گویند.

۳-۲-۲ مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح صفر و یکی نوع L_1

مسئله‌ی برنامه ریزی خطی عدد صحیح صفر و یک زمانی است که متغیرها عدد صحیح بوده و تنها مقادیر صفر یا یک را اختیار نمایند. در این حالت تمامی متغیرها را می‌توان در محدوده‌ی صفر و یک قرار داد. همچنین به ازای هر متغیر، وزن را برابر با یک قرار می‌دهیم یعنی:

(۳-۲۲)

$$w_j = 1, \qquad \forall j \in J$$

چند مسئله‌ی معروف بهینه سازی ترکیبی مانند مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر و مسئله‌ی تخصیص [۷۹]در این دسته از مسائل می‌گنجند. در این حالت تمامی تعاریف مانند قبل است. فرض می‌کنیم x^0 یک جواب موجه برای مسئله است و می‌خواهیم بردار c را به d تغییر دهیم به گونه‌ای که x^0 جواب بهینه بشود و کمترین تغییر را تحت نرم یک داشته باشیم. در این حالت دوگان معکوس حول x^0 که در (۲۱-۳) مشاهده شد به مسئله‌ی زیر تبدیل می‌گردد. دقت کنید که هر متغیر تصمیم یا ۰ است و یا ۱، بنابراین همه‌ی $\forall j \in J$ یا به U یا به L تعلق دارند.

(۳-۲۳)

$$\min H = \sum_{j\in J} c_j x_j$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad \forall i \in B$$

$$0 \leq x_j \leq 1$$

مسئله‌ی (۲۳-۳) دقیقا همان مسئله‌ی اولیه‌ای است که می‌خواستیم معکوس آن را به دست آوریم با این تفاوت که محدودیت‌های غیر فعال آن حذف شده‌اند. بنابراین، در حالتی که به ازای x^0 همه‌ی محدودیت‌ها فعال یا الزام آور باشند مسئله‌ی دوگان معکوس حول x^0 همان مسئله‌ی اولیه‌ای است که می‌خواهیم معکوس آن را به دست آوریم.

در این مسئله در صورتی که برای محدودیت‌های دسته‌ی اول متغیرهای دوگان α را متناظرا در نظر بگیریم، با استفاده از c_j^α که در (۱۳-۳) تعریف نمودیم و به طور مشابه، با در نظر گرفتن تمام حالات (۱۵-۳)، (۱۶-۳) و (۱۷-۳) به روابط زیر می‌رسیم:

(۳-۲۴)

[77] The 0-Centered Dual Inverse Problem
[78] The x^0-Centered Dual Inverse Problem
[79] Assignment Problem

$$c_j^\alpha < 0 \Leftrightarrow x_j^* = 1$$

$$c_j^\alpha > 0 \Leftrightarrow x_j^* = 0$$

با استفاده از (۳-۱۸) بردار بهینه‌ی ضرایب d از طریق زیر به دست می‌آید:

(۳-۲۵)

$$\forall j \in J, \qquad d_j^* = \begin{cases} c_j - |c_j^\alpha|, & x_j^0 = 1, x_j^* = 0 \\ c_j + |c_j^\alpha|, & x_j^0 = 0, x_j^* = 1 \\ c_j, & x_j^0 = x_j^* \end{cases}$$

مقدار بهینه‌ی تابع هدف برای مسئله‌ی معکوس نیز با رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

(۳-۲۶)

$$\sum_{\{j \in J:\, x_j^0 \neq x_j^*\}} |c_j^\alpha|$$

۳-۲-۳ مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی نوع L_∞

این مسئله به برنامه ریزی خطی معکوس مینی ماکس [۸۰]معروف است. در این مسئله تابع هدف مسئله‌ی (۳-۱۱) به صورت زیر در میاید:

(۳-۲۷)

$$\min \max\{w_j |d_j - c_j| : j \in J\}$$

$$w_j \geq 0, \qquad \forall j \in J$$

محدودیت‌های این مسئله دقیقا محدودیت‌های (۳-۱۱) می‌باشند. حال تابع هدف را به فرم خطی تبدیل می‌کنیم. برای از بین بردن قدر مطلق از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

(۳-۲۸)

$$d_j - c_j = h_j - f_j$$

$$h_j, f_j \geq 0$$

همچنین برای از بین بردن ماکسیمم داخلی، متغیر غیر منفی q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۳-۲۹)

---

[80] Mini Max

$$w_j h_j + w_j f_j \leq q, \qquad \forall j \in J$$

تابع هدف کمینه را نیز به تابع بیشنیه تبدیل می‌کنیم و به مسئله‌ی زیر می‌رسیم:

(۳-۳۰)

$$\max -q$$

$$w_j h_j + w_j f_j - q \leq 0, \qquad \forall j \in J$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i - h_j + f_j + \beta_j = c_j, \qquad \forall j \in L$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i - h_j + f_j - \gamma_j = c_j, \qquad \forall j \in U$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i - h_j + f_j = c_j, \qquad \forall j \in F$$

$$\alpha_i \geq 0, \qquad \forall i \in B$$

$$\beta_j \geq 0, \qquad \forall j \in L$$

$$\gamma_j \geq 0, \qquad \forall j \in U$$

$$h_j, f_j \geq 0$$

حال مشابه با (۳-۱۳) متغیر زیر را تعریف می‌کنیم:

(۳-۳۱)

$$c_j^\alpha = c_j - \sum_{i \in B} a_{ij} \alpha_i$$

محدودیت‌های (۳-۳۰) به صورت زیر در میاید:

(۳-۳۲)

$$-h_j + f_j = c_j^\alpha - \beta_j, \qquad \forall j \in L$$

$$-h_j + f_j = c_j^\alpha + \gamma_j, \qquad \forall j \in U$$

$$-h_j + f_j = c_j^\alpha, \qquad \forall j \in F$$

حالات زیر ممکن است اتفاق بیفتد.

۱. $c_j^\alpha > 0$:

از آنجا که هر دو متغیر f_j و h_j هر دو مثبت می‌باشند و در تلاشیم حداکثر $w_j h_j + w_j f_j$ را کمینه کنیم، روابط زیر برقرار است:

(۳-۳۳)

$$j \epsilon L \rightarrow \beta_j = c_j^\alpha = \left|c_j^\alpha\right|, f_j = h_j = 0 \rightarrow d_j = c_j$$
$$j \epsilon F \cup U \rightarrow h_j = \gamma_j = 0, f_j = c_j^\alpha = \left|c_j^\alpha\right| \rightarrow d_j = c_j - \left|c_j^\alpha\right|$$

در این حالت، محدودیت‌های مسئله‌ی (۳-۳۰) به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

(۳-۳۴)

$$w_j c_j^\alpha \leq q, \qquad \forall j \in F \cup U$$

۲. $c_j^\alpha < 0$:

(۳-۳۵)

$$j \epsilon U \rightarrow \gamma_j = -c_j^\alpha = \left|c_j^\alpha\right|, f_j = h_j = 0 \rightarrow d_j = c_j$$
$$j \epsilon F \cup L \rightarrow f_j = \beta_j = 0, h_j = -c_j^\alpha = \left|c_j^\alpha\right| \rightarrow d_j = c_j + \left|c_j^\alpha\right|$$

در این حالت، محدودیت‌های مسئله‌ی (۳-۳۰) به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

(۳-۳۶)

$$-w_j c_j^\alpha \leq q, \qquad \forall j \in F \cup L$$

۳. $c_j^\alpha = 0$:

(۳-۳۷)

$$h_j = f_j = \beta_j = \gamma_j = 0 \rightarrow d_j = c_j$$

در این حالت تمامی محدودیت‌های (۳-۳۰) برقرار هستند.

اگر α جواب بهینه‌ی مسئله‌ی دوگان باشد، می‌توان d^* را بنابر روابط گفته شده به دست آورد:

(۳-۳۸)

$$\forall j \in J, \qquad d_j^* = c_j + h_j - f_j$$

$$\forall j \in J, \qquad d_j^* = \begin{cases} c_j - \left|c_j^\alpha\right|, & c_j^a > 0, x_j^0 > l_j \\ c_j + \left|c_j^\alpha\right|, & c_j^a < 0, x_j^0 < u_j \\ c_j, & otherwise \end{cases}$$

نتیجه‌ی به دست آمده در رابطه‌ی (۳-۳۸) منطبق بر نتیجه‌ی متناظر به دست آمده در مسئله‌ی معکوس برنامه‌ریزی خطی تحت نرم یک می‌باشد. در ادامه رابطه‌ی (۳-۳۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۳-۳۹)

$$\max -q$$

$$-w_j\left(c_j-\sum_{i\in B}a_{ij}\alpha_i\right)\le q, \qquad \forall j\in F\cup L$$

$$w_j\left(c_j-\sum_{i\in B}a_{ij}\alpha_i\right)\le q, \qquad \forall j\in F\cup U$$

$$\alpha_i\ge 0, \qquad \forall i\in B$$

با تبدیلات دیگر، به فرمول‌بندی زیر می‌رسیم:

(۳-۴۰)

$$\max -q$$

$$\sum_{i\in B}a_{ij}\alpha_i-\frac{q}{w_j}\le c_j, \qquad \forall j\in F\cup L$$

$$-\sum_{i\in B}a_{ij}\alpha_i-\frac{q}{w_j}\le -c_j, \qquad \forall j\in F\cup U$$

$$\alpha_i\ge 0, \qquad \forall i\in B$$

در (۴۰-۳) فرض می‌کنیم هیچ یک از وزن‌ها صفر نیستند؛ به عبارت دیگر:

(۳-۴۱)

$$w_j\ne 0, \qquad \forall j\in J$$

حال که در (۴۰-۳) مسئله‌ی معکوس را داریم، دوگان مسئله‌ی معکوس را با متغیرهای دوگان y_j^+ و y_j^- می‌نویسیم.

(۳-۴۲)

$$\min\sum_{j\in L}c_jy_j^+ +\sum_{j\in F}c_j(y_j^+-y_j^-)-\sum_{j\in U}c_jy_j^-$$

$$\sum_{j\in L}a_{ij}y_j^+ +\sum_{j\in F}a_{ij}(y_j^+-y_j^-)-\sum_{j\in U}a_{ij}y_j^-\ge 0, \qquad \forall i\in B$$

$$\sum_{j\in L}\frac{1}{w_j}y_j^+ +\sum_{j\in F}\frac{1}{w_j}(y_j^+ + y_j^-)+\sum_{j\in U}\frac{1}{w_j}y_j^- = 1$$

$$y_j^+,y_j^-\ge 0, \qquad \forall j\in J$$

حال تبدیل زیر را برای متغیرها انجام می‌دهیم:

(۳-۴۳)

$$\forall j \in J, \qquad y_j = \begin{cases} y_j^+, & j \in L \\ y_j^+ - y_j^-, & j \in F \\ -y_j^-, & j \in U \end{cases}$$

با این تغییر متغیر، فرمول (۴۲-۳) به فرمول زیر تبدیل می‌گردد:

(۴۴-۳)

$$\min \sum_{j \in J} c_j y_j$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} y_j \geq 0, \qquad \forall i \in B$$

$$\sum_{j \in J} \frac{1}{w_j} |y_j| = 1$$

$$y_j \geq 0, \qquad \forall j \in L$$

$$y_j \leq 0, \qquad \forall j \in U$$

رابطه‌ی (۴۴-۳) به مسئله‌ی دوگان معکوس مینی ماکس حول صفر [81]معروف است. اگر α مقدار بهینه‌ی دوگان مسئله‌ی (۴۴-۳) باشد، آنگاه ضرایب تابع هدف بهینه یعنی d^* از رابطه‌ی (۳۸-۳) به دست می‌آید. با تبدیل (۴۵-۳) به مسئله‌ی دوگان معکوس مینی ماکس حول x^0 [82]خواهیم رسید.

(۴۵-۳)

$$y_j = x_j - x_j^0, \qquad \forall j \in J$$

(۴۶-۳)

$$\min \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad \forall i \in B$$

---

[81] The 0-Centered Dual Inverse Problem
[82] The x^0-Centered Dual Inverse Problem

$$\sum_{j\in J}\frac{1}{w_j}\left|x_j - x_j^0\right| = 1$$

$$x_j \ge x_j^0, \qquad \forall j \in L$$

$$x_j \le x_j^0, \qquad \forall j \in U$$

۴ بهینه‌سازی معکوس استوار

۴-۱ مرور ادبیات

در مسائل بهینه سازی معکوس، یک مشاهده جمع آوری می‌شود و ضرایب تابع هدف به گونه‌ای محاسبه می‌شوند که با آن ضرایب، جواب بهینه‌ی مسئله‌ی رو به جلو همان داده‌ی مشاهده شده باشد. این مسئله و روش‌های فرمول بندی آن در حالتی که داده‌ی مشاهده شده در ناحیه‌ی موجه باشد در فصل ۳ این پایان‌نامه به طور کامل بررسی شد. در بخشی از ادبیات، به بررسی حالتی پرداخته شده‌است که به جای وجود یک مشاهده، تعدادی از مشاهدات موجود باشد. از آنجا که نمی‌توان ضرایب تابع هدف را به گونه‌ای معین کرد که تمام چند نقطه به طور همزمان بهینه شوند، تابع خطایی تعریف می‌شود و سعی می‌گردد ضرایب تابع هدف به گونه‌ای محاسبه شوند که این تابع بین نقطه‌ی بهینه و نقاط داده شده‌ی مشاهده حداقل شود. این نوع مسئله در [80][79][78][68][69][77] بررسی شده است. با گسترش این ایده و با الهام از بهینه سازی استوار که در فصل ۲ بررسی شد، اگر داده‌های مشاهده شده به جای چندین نقطه، در یک مجموعه‌ی عدم قطعیت تعریف شوند آن‌گاه با مسئله‌ی بهینه سازی معکوس استوار [83]سر و کار داریم.[81] در ترکیب بهینه سازی معکوس و استوار تلاش‌های دیگری نیز انجام شده‌است. چاسین و گوریک [82] یک مسئله‌ی قطعی بهینه سازی را در نظر گرفتند و جواب بهینه‌ی آن را که جواب بهینه‌ی نامی [84]آن می‌باشد به دست آوردند. سپس با در نظر گرفتن مجموعه‌های عدم قطعیت متغیر، تعیین نمودند اندازه‌ی این مجموعه‌ها تا چه حدی می‌تواند باشد به شرطی که جواب بهینه‌ی نامی، بهینه بماند. متدولوژی آن‌ها به بهینه سازی استوار معکوس [85]معروف است، چرا که مجموعه‌های عدم قطعیت را برای اینکه یک جواب بهینه بماند محاسبه می‌کند. در ادامه به فرمول بندی مسئله خواهیم پرداخت و انواع حالات را بحث خواهیم نمود.

۴-۲ فرمول بندی

۴-۲-۱ مسئله‌ی رو به جلو

مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

(۴-۱)

[83] Robust Inverse Optimization
[84] Nominal Optimal Solution
[85] Inverse Robust Optimization

$FO(c): \min_{x} c'x$

$s.t. Ax \geq b$

در این فرمول، $x \in R^n$ متغیرهای تصمیم، $c \in R^n$ ضرایب تابع هدف، $A \in R^{m\times n}$ ماتریس ضرایب محدودیت‌ها و $b \in R^m$ مقادیر سمت راستی می‌باشند. همچنین اندیس متغیرها عضو مجموعه‌ی $J = \{1, \dots, n\}$ و اندیس محدودیت‌ها عضو مجموعه‌ی $I = \{1, \dots, m\}$ می‌باشند. a_i نیز نشان‌دهنده‌ی سطر i از ماتریس A می‌باشد. ناحیه‌ی موجه این مسئله برای متغیرهای x را با χ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم از نظر ابعادی کامل [86]است، غیر تهی [87]است و محدودیت زائد ندارد. همچنین e_i را i امین بردار تکین [89][88]در نظر می‌گیریم. حال $\chi^{OPT}(c)$ را مجموعه جواب‌های بهینه‌ی $FO(c)$ در نظر می‌گیریم. در ادامه، χ^{OPT} را مجموعه‌ی همه‌ی جواهای بهینه‌ی $FO(c)$ در حالتی که $c \neq 0$ است تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم غیر تهی است.

۴-۲-۲ مسئله‌ی معکوس

فرض می‌کنیم مشاهده‌ی $x^0 \in \chi^{OPT}$ انجام شده‌است. مدل بهینه‌سازی معکوس $IO(x)$ بردار ضرایب تابع هدف $c\epsilon C \neq \emptyset$ را به دست می‌آورد به گونه‌ای که x^0 جواب بهینه‌ی $FO(c)$ شود. مجموعه‌ی C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۴-۲)

$$C = \{c\epsilon R^n | \|c\|_1 = 1\}$$

با این تعریف، تمام ضرایب تابع هدف به دست آمده نرمال می‌شوند و ضریب 0 به عنوان جواب مسئله‌ی معکوس به دست نمی‌آید. حال مسئله‌ی معکوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۴-۳)

$IO(x^0): \min_{c,y} 0$

$s.t.\ A'y = c$

$c'x^0 = b'y$

$\|c\|_1 = 1$

$y \geq 0$

در این فرمول بندی، مشابه با مطالب گفته شده در فصل ۳، محدودیت اول و آخر در جهت موجه بودن دوگان [90]می‌باشد. همچنین محدودیت دوم، در جهت خاصیت قوی دوگان [91]است. اگر $x^0 \in \chi \setminus \chi^{OPT}$ باشد؛ برای مثال یک نقطه‌ی داخلی از فضای موجه باشد، مسئله‌ی (۳-۴) غیر موجه خواهد بود. برای غلبه بر این مشکل فرمول عمومی بهینه‌سازی معکوس توسط چن و همکاران [76] ارائه شد. در این فرمول‌بندی، بردار ضرایب تابع هدف به گونه‌ای پیدا می‌شود که یک تابع خطا تحت یک نرم مشخص، کمینه گردد.

---

86 Full-dimensional
87 Nonempty
88 Unit Vector

۸۹ برداری که یک درایه‌ی ۱ دارد و باقی درایه‌هایش صفر می‌باشند.

90 Dual Feasibility
91 Strong Duality

در ادامه، با استفاده از فرمول آن‌ها و با در نظر گرفتن حالت اسمی مسئله‌ی معکوس در حالتی که عدم قطعیت وجود ندارد، فرمول بهینه‌سازی معکوس اسمی [۹۲]را ارائه می‌کنیم.

۴-۲-۳ بهینه‌سازی معکوس اسمی

در این رابطه، از آنجا که x^0 عضو نقاط بهینه نیست، یک نقطه‌ی بهینه‌ی متناظر x در نظر گرفته می‌شود و تابع فاصله بین این دو نقطه با یافتن بردار ضرایب تابع هدف کمینه می‌گردد.

(۴-۴)

$$
\begin{aligned}
&NIO(x^0): \min_{\mathrm{c,y,x}} d(x, x^0)\\
&s.t.\ A'y = c\\
&c'x = b'y\\
&Ax \geq b\\
&\|c\|_1 = 1\\
&y \geq 0
\end{aligned}
$$

در این فرمول بر خلاف چن و همکاران [76]، x^0 می‌تواند عضو ناحیه‌ی موجه نباشد که در این حالت با اضافه کردن محدودیت سوم در (۴-۴)، نقطه‌ی x حتما در ناحیه‌ی موجه خواهد بود. برای تابع فاصله نیز ۶ خاصیت زیر را در نظر می‌گیریم:

(۴-۵)

$$
\begin{aligned}
&d(x, x^0) \geq 0\\
&x = x^0 \rightarrow d(x, x^0) = 0\\
&d(x, x^0) = d(x^0, x)\\
&d(x, x^0) \leq d(x, \tilde{x}) + d(\tilde{x}, x^0)\\
&d(x, x^0) = d(x + \varepsilon, x^0 + \varepsilon)\\
&|\lambda| d(x, x^0) = d(\lambda x, \lambda x^0)
\end{aligned}
$$

خواص گفته‌شده عمومی هستند و توابع فاصله معمولا دارای آن‌ها می‌باشند؛ برای مثال فواصل تحت نرم عمومی.

۴-۲-۴ مسئله‌ی معکوس استوار

مجموعه‌ی عدم قطعیت $u \epsilon R^n$ را در نظر می‌گیریم که غیر تهی و محدود[۹۳] است. بردار ضرایب تابع هدف را به گونه‌ای می‌یابیم که بدترین خطا را در مجموعه‌ی عدم قطعیت کمینه کند.

---

[92] Nominal Inverse Optimization (NIO)
[93] Bounded

با توجه به مفهومی که از استوار بودن بردار ضرایب تابع هدف گفتیم، رابطه‌ی زیر به صورت معادل برقرار است:

(۴-۶)

$$c \epsilon arg\ min_{c \epsilon C} min_{x \epsilon \chi^{OPT}(c)} max_{\hat{x} \in u} d(x, \hat{x})$$

حال مسئله‌ی بهینه‌سازی معکوس استوار[۹۴] را به صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم:

(۴-۷)

$$ROI(u): min_{x,y,c}\ max_{\hat{x} \in u} d(x, \hat{x})$$

$$s.t.\ \ A'y = c$$

$$c'x = b'y$$

$$Ax \geq b$$

$$\|c\|_1 = 1$$

$$y \geq 0$$

گزاره‌ی ۱

حال ثابت می‌کنیم مسئله‌ی (۴-۷) برای هر مجموعه‌ی عدم قطعیت محدود و غیرتهی، یک جواب بهینه دارد. بدین منظور یک جواب موجه برای مسئله خواهیم ساخت؛ با جایگذاری $A'y$ به جای c در (۴-۷) به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

(۴-۸)

$$y'(Ax) = b'y$$

$$Ax \geq b$$

$$\|A'y\|_1 = 1$$

$$y \geq 0$$

$x = \hat{x}$ به گونه‌ای که $a'_{\tilde{\imath}}\tilde{x} = b_{\tilde{\imath}}$ برای یک $\tilde{\imath}$ مشخص و $a'_i\tilde{x} > b_i$ برای $i \in I, i \neq \tilde{\imath}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین یک $y = \lambda e_{\tilde{\imath}}$ برای $\lambda > 0$ وجود دارد به طوری که $\|\lambda a_{\tilde{\imath}}\|_1 = 1$ یا به بیان دیگر، $\lambda = \frac{1}{\|a_{\tilde{\imath}}\|_1}$. بنابراین $x = \hat{x}$ و $y = \frac{e_{\tilde{\imath}}}{a_{\tilde{\imath}}}$ برای (۴-۸) یک جواب موجه هستند. پس سه تایی مرتب $(c, y, x) = (\lambda a_{\tilde{\imath}}, \lambda e_{\tilde{\imath}}, \tilde{x})$ یک جواب موجه برای (۴-۷) است. از آنجا که مجموعه‌ی عدم قطعیت محدود است و هر جواب موجه در رابطه‌ی (۴-۸) عضوی از χ^{OPT} است، تابع فاصله برای هر $\hat{x} \in u$ محدود است؛ بنابراین بردار بهینه‌ی ضرایب تابع هدف نیز محدود است. حال که گزاره‌ی ۱ را اثبات کردیم به سراغ گزاره‌ی ۲ می‌رویم.

---

94 Robust Inverse Optimization (ROI)

گزاره‌ی ۲

حال ثابت می‌کنیم بردار ضرایب تابع هدف بهینه برای (۷-۴) در مقابل مجموعه‌ی عدم قطعیت استوار است. فرض کنید سه تایی مرتب (c^*, y^*, x^*) یک جواب بهینه برای (۷-۴) باشد. از آنجا که محدودیت‌های (۷-۴) موجه بودن مسئله‌ی اولیه و دوگان را در کنار خاصیت قوی دوگانگی تضمین می‌کنند، پس $x^* \in \chi^{OPT}(c^*)$. بنابراین (۷-۴) معادل است با رابطه‌ی زیر:

(۴-۹)

$$min_{c\in C, x\epsilon\chi^{OPT}(c)}\ max_{\hat{x}\in u} d(x,\hat{x})$$

بنابراین نتیجه‌ی زیر حاصل می‌گردد:

(۴-۱۰)

$$c^* \epsilon arg\ min_{c\epsilon C} min_{x\epsilon\chi^{OPT}(c)} max_{\hat{x}\in u} d(x,\hat{x})$$

که همان مفهوم استواری رابطه‌ی (۶-۴) است.

بنابر محدودیت دوم در رابطه‌ی (۷-۴)، مسئله‌ی معکوس استوار گفته‌شده، غیر محدب است. حال اگر تابع فاصله قابل خطی‌سازی باشد؛ مثلا فاصله تحت نرم ۱ یا بی‌نهایت باشد، بردار ضرایب تابع هدف مثبت باشد و جایگذاری $A'y = c$ در رابطه‌ی (۷-۴) رخ دهد، مسئله به فرم برنامه‌ریزی دو خطی [95]درخواهد آمد که با الگوریتم عمومی برنامه‌ریزی دوخطی قابل حل است. حال برای تابع فاصله‌ی عمومی به شرط دارا بودن شرایط موجود در (۵-۴) به بیان گزاره‌های دیگر می‌پردازیم.

گزاره‌ی ۳

سه تایی مرتب(c^*, y^*, x^*) جواب بهینه‌ی (۷-۴) است اگر و تنها اگر x^* جواب بهینه‌ی (۱۱-۴) و (c^*, y^*) جواب بهینه‌ی $IO(x^*)$ باشد.

(۴-۱۱)

$$min_{x\epsilon\chi^{OPT}} max_{\hat{x}\in u} d(x,\hat{x})$$

ابتدا طرف برگشت را اثبات می‌کنیم؛ از آنجا که $x^* \epsilon\chi^{OPT}$ و (c^*, y^*) جواب بهینه‌ی $IO(x^*)$ است، (c^*, y^*, x^*) برای $ROI(u)$ موجه است. از آنجا که $\chi^{OPT} = \bigcup_{c\neq 0}\chi^{OPT}(c) = \bigcup_{c\neq 0}\{x|Ax \geq b, c'x = b'y, A'y = c, y \geq 0\} = \bigcup_{c\epsilon C}\chi^{OPT}(c) = \bigcup_{c\neq 0}\{x|Ax \geq b, c'x = b'y, A'y = c, y \geq 0\}$. بنابراین انتخاب x^* در رابطه‌ی (۱۱-۴) توسط (c, y) محدود نشده‌است. از آنجایی که (۱۱-۴) یک حد پایین برای تابع هدف $ROI(u)$ است با در نظر گرفتن سه تایی مرتب (c^*, y^*, x^*) در $ROI(u)$ به این حد پایین می‌رسیم. بنابراین این سه تایی مرتب، جواب بهینه‌ی $ROI(u)$ است.

حال طرف برگشت را اثبات می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم (c^*, y^*, x^*) جواب بهینه‌ی $ROI(u)$ است. از آنجا که این مسئله، دارای محدودیت‌هایی است که خاصیت قوی دوگانگی، موجه بودن اولیه و دوگان را تضمین می‌کنند بنابراین که$x^* \epsilon\chi^{OPT}(c^*)$ حال

[95] Bilinear Program

فرض کنید که یک $\tilde{x} \in \chi^{OPT}$ وجود دارد به طوری که $\tilde{x} \neq x^*$ و $max_{\hat{x}\in u} d(\tilde{x},\hat{x}) < max_{\hat{x}\in u} d(x^*,\hat{x})$. از آنجا که $\tilde{x} \in \chi^{OPT}$ آنگاه $\tilde{c}$ وجود دارد به طوری که $\tilde{x} \in \chi^{OPT}(\tilde{c})$ که نشان می‌دهد $\tilde{x} \in \chi^{OPT}(\frac{\tilde{c}}{\|\tilde{c}\|_1})$. بنابراین سه تایی مرتب $(\frac{\tilde{c}}{\|\tilde{c}\|_1}, \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{c}\|_1}, \tilde{x})$ به طوری که $A'\tilde{y} = \tilde{c}$ و $\tilde{y} \geq 0$ یک جواب موجه برای $ROI(u)$ است. بنابراین تابع هدف متناظر $ROI(u)$ به مقدار $max_{\hat{x}\in u} d(\tilde{x},\hat{x}) < max_{\hat{x}\in u} d(x^*,\hat{x})$ که تناقض است. بنابراین $x^* \epsilon arg\ min_{x\epsilon\chi^{OPT}} max_{\hat{x}\in u} d(x,\hat{x})$ و (c^*,y^*) یک جواب بهینه برای $IO(x^*)$ می‌باشد.

از این گزاره می‌توان نتیجه گرفت که اگر $x^* \in \chi^{OPT}$ باشد به طوری که بیشترین فاصله تا u را کمینه کند، سه تایی مرتب (c,y,x^*) برای $ROI(u)$ بهینه خواهد بود اگر (c,y) شرایط موجه بودن دوگان و خاصیت قوی دوگانگی را با توجه به x^* ارضا نماید. از این مهم‌تر، مسئله‌ی (۷-۴) می‌تواند به دو مسئله شکسته شود، یک مسئله‌ای که x^* را می‌یابد به نحوی که بیشترین فاصله را تا $\hat{x} \in u$ کمینه می‌کند و مسئله‌ی دیگر که در آن c^* یافت می‌شود به گونه‌ای که $x^* \epsilon FO(c^*)$. در نتیجه‌ی بعد ساختار رسمی این مسئله را نشان می‌دهیم.

نتیجه‌ی ۱

یک جواب بهینه برای $ROI(u)$ سه تایی مرتب $(c^*,y^*,x^*) = (\frac{a_i}{\|a_i\|_1}, \frac{e_i}{\|a_i\|_1}, x^*)$ می‌باشد به گونه‌ای که برای یک $i\epsilon I$ رابطه‌ی $x^* = arg\ min_{\{x|a_i'x=b_i, Ax\geq b\}} max_{\hat{x}\in u} d(x,\hat{x})$.

بنابر گزاره‌ی ۳، c^* برای $RIO(u)$ بهینه است اگر و تنها اگر برای $IO(x^*)$ بهینه باشد به نحوی که $x^* \epsilon arg\ min_{x\epsilon\chi^{OPT}} max_{\hat{x}\in u} d(x,\hat{x})$ حال $I(x^*) = \{i|a_i'x^* = b_i\}$. بنابراین $c^* \in C^* = \{\sum_{i\in I(x^*)} a_i y_i\ |y_i \geq 0, \forall i\epsilon I(x^*), \left\|\sum_{i\in I(x^*)} a_i y_i\right\|_1 = 1\}$. با در نظر گرفتن $y_{\tilde{\imath}} = \frac{1}{\|a_{\tilde{\imath}}\|_1}$ برای یک $\tilde{\imath}\epsilon\ I(x^*)$ و $y_i = 0$ برای $i \neq \tilde{\imath}$، $c^* = \frac{a_{\tilde{\imath}}}{\|a_{\tilde{\imath}}\|_1} \in C^*$ در کنار y متناظر یعنی $y^* = \frac{e_{\tilde{\imath}}}{\|a_{\tilde{\imath}}\|_1}$ ساخته می‌شود.

نتیجه‌ی ۱ نشان می‌دهد که یافتن بردار ضرایب تابع هدف بهینه از طریق جست و جو در فرمول‌های متناظر با هر محدودیت است که در کل تعداد محدودی می‌باشد. همچنین x^* یک نقطه روی ابر صفحه‌ی $a_i'x = b_i$ می‌باشد که انحراف از بهترین بدترین نقطه در مجموعه‌ی عدم قطعیت u می‌باشد. به بیان دیگر، $x^* = x^w - \varepsilon^*$ که $x^w \in \arg max_{\hat{x}\in u} d(x^*,\hat{x})$ و ε^* یک بردار انحراف بهینه است. در حالت خاصی که x^w شناخته شده‌است؛ یعنی $u = \{x^0\}$ آنگاه $RIO(u)$ به $NIO(x^w)$ تبدیل می‌گردد که همان مسئله‌ی معکوس استوار با یک نقطه است. در مسائلی که این یک نقطه موجه است، چن و همکاران [76] ساختار مشابه را برای c^* و y^* نشان دادند. آن‌ها همچنین برای x^* و ε^* نیز تحت یک نرم دلخواه برای تابع هدف یک فرم بسته ارائه دادند. در حالتی که مجموعه‌ی عدم قطعیت u عمومی است و تابع فاصله نیز عمومی است، یک فرم بسته برای x^* به احتمال زیاد وجود ندارد. با این‌حال در قضیه‌ی ۱، نتیجه‌ی ۱ را بهبود داده و نشان می‌دهیم $RIO(u)$ می‌تواند به m زیر مسئله تبدیل گردد.

قضیه‌ی ۱

به ازای هر $i\epsilon I$ ، فرض می‌کنیم دوتایی مرتب $(\tilde{x}_i, \tilde{z}_i)$ یک جواب بهینه برای مسئله‌ی زیر باشد:

(۴-۱۲)

$min_{x,z_i} z_i$

$s.t.\ z_i \geq d(x,\hat{x}), \qquad \hat{x}\epsilon u$

$a_i' x = b_i$

$Ax \geq b$

بنابراین جواب بهینه برای $RIO(u)$ سه تایی مرتب $(c^*, y^*, x^*) = (\frac{a_{i^*}}{\|a_{i^*}\|_1}, \frac{e_{i^*}}{\|a_{i^*}\|_1}, \widetilde{x}_{i^*})$ که در آن $i^* \in \arg\min_{i\epsilon I} \widetilde{z_i}$.

برای اثبات این قضیه فرض می‌کنیم برای هر $i\epsilon I$، $\tilde{z}_i = \quad min_{\{x|a_i' x = b_i, Ax \geq b\}} max_{\hat{x}\epsilon u} d(x,\hat{x})$ و $\widetilde{x_i}\epsilon arg\ min_{\{x|a_i' x=b_i,Ax\geq b\}} max_{\hat{x}\epsilon u} d(x,\hat{x})$ باشد. بنابراین سه تایی مرتب $(\frac{a_{i^*}}{\|a_{i^*}\|_1}, \frac{e_{i^*}}{\|a_{i^*}\|_1}, \widetilde{x}_{i^*})$ در صورتی که $i^* \in \arg\min_{i\epsilon I} \widetilde{z_i}$ ساختار جواب به دست آمده در نتیجه‌ی ۱ را ارضا می‌کند. تنها باید نشان دهیم که مقدار بهینه برای مسئله‌ی $RIO(u)$ برای $i^* \in \arg\min_{i\epsilon I} \widetilde{z_i}$ حاصل می‌گردد. برای این منظور به رابطه‌ی زیر دقت می‌کنیم:

(۴-۱۳)

$$\widetilde{x_i}\epsilon arg\ min_{\bigcup_{i\epsilon I}\{x|a_i' x=b_i,Ax\geq b\}} \{max_{\hat{x}\epsilon u} d(x,\hat{x})\}$$

در این رابطه $\bigcup_{i\epsilon I}\{x|a_i' x = b_i, Ax \geq b\}$ با χ^{OPT} معادل است. این موضوع نشان می‌دهد رابطه‌ی (۴-۱۳) همان رابطه‌ی (۴-۱۱) است. پس $(\frac{a_{i^*}}{\|a_{i^*}\|_1}, \frac{e_{i^*}}{\|a_{i^*}\|_1}, \widetilde{x}_{i^*})$ به صورتی که $i^* \in \arg\min_{i\epsilon I} \widetilde{z_i}$ جواب بهینه‌ای برای $RIO(u)$ می‌باشد.

دقت کنید که برای هر $i \in I$، فرمول (۴-۱۲) یک مسئله‌ی بهینه‌سازی استوار با عدم قطعیت در محدودیت می‌باشد. بنابراین قضیه‌ی ۱ نشان می‌دهد که مسئله‌ی بهینه‌سازی معکوس استوار $RIO(u)$ می‌تواند به m مسئله‌ی بهینه‌سازی استوار تبدیل گردد که هر یک برای یکی از $i \in I$ ها می‌باشند و سپس کمینه‌ی بدترین فاصله برای تمام $i \in I$ها ما را به جواب می‌رساند. اگر فرمول (۴-۱۲) چند i^* را به ما بدهد می‌توان برای انتخاب i^* بهینه از یک تابع هدف ثانویه نیز استفاده کنیم. در این حالت، می‌توان از ایده‌ی آهوجا و اورلین [66] که در فصل ۳ بررسی شد استفاده کرد و فاصله‌ی ضرایب تابع هدف تا یک ضرایب تابع هدف ایده‌آل را کمینه کرد.

به صورت کلی پیچیدگی مسئله‌ی (۴-۱۲) به دو عامل بستگی دارد:

۱. تابع فاصله‌ی $d(x,\hat{x})$
۲. ساختار مجموعه‌ی عدم قطعیت u

در حالت کلی، اگر تابع فاصله را بتوان به صورت یک تابع محدب نوشت، برای مجموعه‌های عدم قطعیت معروف که در فصل ۲ بررسی شد، مسئله‌ی (۴-۱۲) را به سادگی می‌توان حل نمود. با توجه به مطالب فصل ۳، تابع هدف به صورت نرم ۱ یا بی‌نهایت می‌تواند به صورت خطی نوشته شود. همچنین انتخاب‌های ما برای مجموعه‌ی عدم قطعیت به صورت زیر است:

۱. جعبه‌ای
۲. بیضوی
۳. چندوجهی

۴. جعبه‌ای + بیضوی
۵. جعبه‌ای + چندوجهی
۶. جعبه‌ای + بیضوی + چندوجهی

حال در بخش بعدی با استفاده از قضیه‌ی ۱ به حل یک مسئله می‌پردازیم.

۴-۳ مسئله‌ی برنامه‌ریزی رژیم غذایی[96]

در مسئله‌ی رو به جلوی برنامه‌ریزی رژیم غذایی، متغیرهای تصمیم مقدار مصرف از هر نوع ماده‌ی غذایی را نشان می‌دهد. محدودیت‌هایی نیز وجود دارد، برای مثال حداقل دریافت کلسیم، کربوهیدرات و .... هر ماده‌ی غذایی یک هزینه نیز با خود دارد که ضریب تابع هدف مربوط به آن متغیر تصمیم می‌باشد. در این مسئله، به دنبال تعیین مقدار مصرف از مواد غذایی مختلف هستیم به طوری که هزینه‌ی ما کمینه شود و محدودیت‌ها ارضا شوند. نمونه‌ای از این مسئله با ۴ نوع مواد غذایی و ۴ محدودیت در [1] بررسی شده‌است. حال فرض می‌کنیم هر فرد با یک تابع هدف در ذهن خود مواد غذایی مصرفی خود را انتخاب می‌کند. برای مثال در ذهن یک فرد، کیک شکلاتی عدم محبوبیت ۰.۱ و کیک میوه‌ای عدم محبوبیت ۰.۲ را دارد. بنابراین فرض می‌کنیم هر فرد برای انتخاب مواد غذایی خود از یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی رژیم غذایی استفاده می‌کند و با بهینه کردن آن، به انتخاب خوراکی‌هایش می‌پردازد. ضرایب تابع هدف نیز عدم مطلوبیت هر یک از این مواد در ذهن وی می‌باشد. در مسئله‌ی معکوس رژیم غذایی با مشاهده‌ی مواد خوراکی انتخابی یک فرد در یک روز به دنبال محاسبه‌ی عدم مطلوبیت هر ماده برای وی هستیم. از آنجا که رفتار فرد دچار عدم قطعیت می‌باشد و به طور کلی ممکن است انحرافاتی از حالت بهینه داشته باشد، رفتار وی در طی روزهای متمادی دچار عدم قطعیت می‌باشد. بنابراین همانطور که در [81] بررسی شده‌است، با مشاهده‌ی عادات غذایی فرد در طول زمان، می‌توان با متدولوژی بهینه‌سازی معکوس استوار به ضرایب مطلوبیت وی رسید. پس از محاسبه‌ی این ضرایب، می‌توان به فرد مواد غذایی بهینه پیشنهاد داد. این کاربرد، در اپلیکیشن‌های مربوط به دستیاری سلامت [97]و وبسایت‌های سلامت شخصی می‌تواند بسیار مفید باشد.

در اینجا برای آزمایش عملکرد مدل ساخته شده‌ی خود، به ساخت یک مسئله می‌پردازیم. ابتدا یک مسئله‌ی رو به جلوی برنامه‌ریزی رژیم غذایی را برای یک فرد فرضی در نظر می‌گیریم. سپس، با حل این مسئله به مقدار بهینه‌ی آن می‌رسیم. پس از آن مقدار بهینه را به عنوان مقدار اسمی در نظر می‌گیریم و برای هر نوع ماده‌ی غذایی، عدم قطعیت حول مقدار بهینه در نظر می‌گیریم. ابتدا بدون استفاده از برنامه‌ریزی استوار نشان می‌دهیم که هزینه‌ی عدم استفاده از برنامه‌ریزی استوار بالاست. سپس به بحث در مورد مسئله‌ی معکوس استوار می‌پردازیم.

۴-۳-۱ مسئله‌ی رو به جلوی برنامه‌ریزی غذایی

این مسئله از کتاب دکتر عشقی [1] آورده شده‌است. می‌خواهیم یک برنامه‌ی تغذیه‌ی روزانه مابین وعده‌ی صبحانه و ناهار را برای خود برنامه‌ریزی کنیم تا در اوقات فراغت در دانشگاه بر طبق آن عمل کنیم. چهار نوع تنقلات در بوفه‌ی دانشگاه موجود است که عبارتند از کیک شکلاتی، بستنی، نوشابه و آجیل. در جدول زیر اطلاعات مربوط به عدم ترجیح ما که ناشی از هزینه‌ی اقلام و سلایق ماست به همراه اطلاعات تغذیه‌ای اقلام آورده شده‌است.

---
96 Diet Problem
97 Health Assistant

	میزان کالری	میزان کلسیم (گرم)	میزان قند (گرم)	میزان چربی (گرم)	ضریب عدم مطلوبیت
هر قطعه کیک شکلاتی	۴۰۰	۳	۲	۲	۵
هر واحد بستنی	۲۰۰	۲	۲	۴	۲
هر بطری نوشابه	۱۵۰	-	۴	۱	۳
هر بسته آجیل	۵۰۰	-	۴	۵	۸

جدول ۸ اطلاعات مطلوبیت و تغذیه‌ی مربوط به هر نوع ماده‌ی غذایی مسئله‌ی رژیم غذایی

با توجه به تناسب وزن و قد خود در هر روز نیازمند حداقل ۵۰۰ کالری، ۶ گرم کلسیم، ۱۰ گرم قند، و ۸ گرم چربی هستیم. می‌خواهیم تابع مربوط به عدم مطلوبیت خود را کمینه کنیم. در این صورت مدل برنامه‌ریزی خطی مربوطه به صورت زیر در خواهد آمد:

(۴-۱۴)

$$\min Z = 5\,x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4$$
$$s.t.\, 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

این مسئله را در نرم افزار CPLEX مدل‌سازی و حل می‌کنیم که در پیوست ۱، کدهای مربوط آورده شده‌است. جواب بهینه‌ی به دست آمده، برای متغیرهای تصمیم به ترتیب اندیس ۰، ۳، ۱ و ۰ می‌باشد. مقدار بهینه‌ی تابع هدف نیز ۹ به دست آمده‌است. در جدول زیر، پاسخ مسئله‌ی رو به جلو آمده‌است.

متغیر	مقدار بهینه
x_1	۰
x_2	۳
x_3	۱
x_4	۰
Z	۹

جدول ۹ جواب بهینه‌ی مسئله‌ی رو به جلو

۴-۳-۲ مسئله‌ی معکوس نامی[98]

برای اینکه بتوانیم مسئله‌ی معکوس را به فرم (۳-۴) درآوریم، لازم است مسئله‌ی رو به جلو به فرم (۱-۴) باشد، از این رو مسئله‌ی رو به جلوی (۱۴-۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۴-۱۵)

$$\min Z = 5\,x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4$$
$$s.t.\, 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_4 \geq 0$$

حال مسئله‌ی معکوس را با استفاده از رابطه‌ی (۳-۴) می‌نویسیم. دقت کنید که ضرایب به دست آمده در این فرمول، نرمال می‌باشند. اما به این دلیل که ممکن است ضرایب متنوعی در این رابطه موجه باشند، تابع هدف را میزان فاصله از ضریب مطلوب (5,2,3,8) تحت نرم ۱ در نظر می‌گیریم و محدودیت مربوط به نرمال بودن ضرایب را حذف می‌کنیم. از آنجا که این فاصله با قدرمطلق است، از متغیرهای کمکی استفاده می‌کنیم.

(۴-۱۶)

$$\min \sum_{i=1,2,3,4} a_i + b_i$$
$$a_1 - b_1 = 5 - c_1$$
$$a_2 - b_2 = 2 - c_2$$
$$a_3 - b_3 = 3 - c_3$$
$$a_4 - b_4 = 8 - c_4$$
$$400y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 = c_1$$

[98] Nominal Inverse Problem

$200y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_6 = c_2$

$150y_1 + 4y_3 + 1y_4 + y_7 = c_3$

$500y_1 + 4y_3 + 5y_4 + y_8 = c_4$

$500y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 8y_4 = 3c_2 + c_3$

$y_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 8$

$a_i, b_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4$

پس از حل (۴-۱۶) در CPLEX که کد مربوط به آن را در پیوست ۲ آورده‌ایم، به جواب‌های زیر برای ضرایب تابع هدف می‌رسیم:

ضریب	مقدار
c_1	۵
c_2	۲
c_3	۳
c_4	۸
تابع هدف	۰

جدول ۱۰ جواب‌های مسئله‌ی معکوس نامی

۴-۳-۳ جواب مسئله‌ی معکوس در حالت عدم قطعیت

حال فرض می‌کنیم هر یک از مشاهدات در مسئله‌ی معکوس، حول مقدار نامی تغییر می‌کند. بنابراین مسئله‌ی (۴-۱۶) به مسئله‌ی زیر تبدیل می‌گردد و در جدول بعد بازه‌ی تغییر پارامترهای عدم قطعیت را آورده‌ایم.

(۴-۱۷)

$$\min \sum_{i=1,2,3,4} a_i + b_i$$

$a_1 - b_1 = 5 - c_1$

$a_2 - b_2 = 2 - c_2$

$a_3 - b_3 = 3 - c_3$

$a_4 - b_4 = 8 - c_4$

$400y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 = c_1$

$200y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_6 = c_2$

$150y_1 + 4y_3 + 1y_4 + y_7 = c_3$

$500y_1 + 4y_3 + 5y_4 + y_8 = c_4$

$500y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 8y_4 = x_1^o c_1 + x_2^o c_2 + x_3^0 c_3 + x_4^o c_4$

$y_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 8$

$a_i, b_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4$

پارامتر	حد پایین	مقدار نامی	حد بالا
x_1^o	۰	۰	۱
x_2^o	۲	۳	۴
x_3^o	۰	۱	۲
x_4^o	۰	۰	۱

جدول ۱۱ بازه‌های مربوط به پارامترهای مدل برنامه‌ریزی معکوس

حال می‌خواهیم هزینه‌ی استفاده نکردن از متدولوژی بهینه‌سازی استوار را برای ۶ امکان مختلف پارامترها محاسبه نماییم. از این رو، در مدل (۱۷-۴) ۶ امکان مختلف پارامترهای غیر قطعی را قرار می‌دهیم و مسئله را حل می‌کنیم و مقدار ضرایب به دست آمده و تابع هدف به دست آمده را در جدول بعد می‌آوریم.

مقدار پارامترها	تابع هدف به دست آمده	ضرایب به دست آمده	موجه بودن یا نبودن جواب نامی
(1,4,2,1)	۱۸	(0,0,0,0)	ناموجه
(1,4,2,0)	۱۰	(0,0,0,8)	ناموجه
(0,2,2,1)	۹	(5,3.6,1.8,1.8)	ناموجه
(0,4,2,1)	۱۳	(5,0,0,0)	ناموجه
(1,4,0,0)	۴	(2,2,4,8)	ناموجه
(0,2,0,0)	۰	(5,2,3,8)	موجه

جدول ۱۲ جواب‌های به دست آمده به ازای امکان‌های مختلف با مدل برنامه‌ریزی معکوس نامی

همانطور که دیده می‌شود، میانگین تابع هدف به دست آمده برای این ۶ امکان مختلف، ۹ و انحراف معیار آن ۶.۳۸ می‌باشد. این آزمایش کوچک نشان می‌دهد در صورتی که تغییر پذیری پارامترها در مدل‌سازی لحاظ نشود هزینه‌ی عدم استفاده از استواری جواب، بسیار بالا خواهد بود. در این امکان‌ها، سطرهای اول و ششم حالاتی هستند که پارامترها به ترتیب بیشترین و کمترین مقدارشان را گرفته‌اند. هزینه‌ی عدم استفاده از برنامه‌ریزی استوار به چند صورت خواهد بود:

۱. تغییر پذیری: همانطور که در آزمایش کوچکی که انجام دادیم مشاهده شد، تغییرات زیاد موجب می‌شود نتوانیم برنامه‌ریزی مناسبی انجام دهیم. به بیان شهودی، تغییر پذیری مخالف هدف اصلی مدل‌سازی و تصمیم‌گیری است که آن هم، تلاش برای کنترل بهتر طبیعت می‌باشد.
۲. موجه نبودن جواب مسئله‌ی نامی: همانطور که دیدیم، مسئله آنقدر نسبت به تغییرات حساس است که در ۵ حالت از ۶ حالت جواب به دست آمده برای مسئله‌ی معکوس نامی، به کلی ناموجه می‌شود.

۳. از دست دادن بهینگی: میانگین تابع هدف ۹ می‌باشد که رشد بسباری را نسبت به حالت اسمی یعنی صفر تجربه کرده‌است. همچنین بدون استفاده از برنامه‌ریزی استوار کنترلی بر روی میزان بهینگی و استواری نداریم. از این رو در قسمت بعد با استفاده از مجموعه‌ی عدم قطعیت جعبه‌ای این موازنه را کنترل می‌کنیم.

۴-۳-۴ حل مسئله‌ی معکوس استوار

در اینجا چون عدم قطعیت در یک محدودیت مساوی رخ داده‌است، نمی‌توانیم به طور مستقیم از رابطه‌ی (۲-۲۷) که برای عدم قطعیت سمت چپی با مجموعه‌ی عدم قطعیت جعبه‌ای در هنگامی که محدودیت نامساوی بود، استفاده می‌شد. در اینجا چون عدم قطعیت محدود است، بنابر جدول ۲، پارامتر جعبه را تا ۱ تغییر می‌دهیم. همچنین چون محدودیت مساوی است، مقادیر منفی را نیز برای آن در نظر می‌گیریم. رابطه‌ی (۴-۱۸) همتای استوار (۴-۱۷) با پارامتر ψ می‌باشد.

(۴-۱۸)

$$\min \sum_{i=1,2,3,4} a_i + b_i$$

$$a_1 - b_1 = 5 - c_1$$

$$a_2 - b_2 = 2 - c_2$$

$$a_3 - b_3 = 3 - c_3$$

$$a_4 - b_4 = 8 - c_4$$

$$400y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 = c_1$$

$$200y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_6 = c_2$$

$$150y_1 + 4y_3 + 1y_4 + y_7 = c_3$$

$$500y_1 + 4y_3 + 5y_4 + y_8 = c_4$$

$$500y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 8y_4 = 3c_2 + c_3 + \psi(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$$

$$y_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, 8$$

$$a_i, b_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

کد مربوطه در پیوست ۳ ضمیمه شده‌است. در جدول زیر، به ازای مقادیر مختلف ψ مقدار تابع هدف نوشته شده‌است. همچنین ضرایب به دست آمده نیز جمع آوری شده‌است.

ψ	مقدار تابع هدف	مقدار ضرایب
-۱	۴.۵	(5,6.5,3,8)
-۰.۹	۳.۴۳	(5,5.43,3,8)

(5,4.46,3,8)	۲.۴۶	-۰.۸
(5,3.57,3,8)	۱.۵۷	-۰.۷
(5,2.75,3,8)	۰.۷۵	-۰.۶
(5,2,3,8)	۰	-۰.۵
(5,2,3,8)	۰	-۰.۴
(5,2,3,8)	۰	-۰.۳
(5,2,3,8)	۰	-۰.۲
(5,2,3,8)	۰	-۰.۱
(5,2,3,8)	۰	۰
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۱
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۲
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۳
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۴
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۵
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۶
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۷
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۸
(0,0,0,0)	۱۸	۰.۹
(0,0,0,0)	۱۸	۱

جدول ۱۳ مقادیر ضرایب و تابع هدف مسئله‌ی معکوس استوار

همانطور که دیده شد، از ۱- تا ۰.۶- مقدار بهینه‌ی تابع هدف بهبود می‌یابد و از ۰.۷- تا ۰ به همان ضرایب مطلوب خواسته شده با مقدار تابع هدف ۰ می‌رسیم. از هنگامی که پارامتر مثبت می‌شود، مدل مقدار ضرایب را ۰ باز می‌گرداند تا بتواند حداقل‌ترین مقدار تابع هدف که فاصله از ضرایب عدم مطلوبیت در مسئله‌ی رو به جلو بود را بدهد. این مشکل، ناشی از این است که ضرایب را نرمال نکردیم. در صورت نرمال کردن، متوجه می‌شویم که مسئله به ازای برای مثال پارامتر ۰.۱ ناموجه می‌شود. دلیل این امر همان مشکل بهینه سازی استوار کلاسیک است که فرض می‌کرد نقطه‌ی مشاهده شده عضوی از ناحیه‌ی موجه می‌باشد. برای حل این مشکل رابطه‌ی (۴-۱۸) را با گرفتن ایده از (۴-۴) به رابطه‌ی (۴-۱۹) تبدیل می‌کنیم. در این رابطه نقطه‌ی متناظری درون ناحیه‌ی موجه در نظر گرفته می‌شود که با نقطه‌ی داده شده حتی‌الامکان تحت نرم یک نزدیک باشد.

(۴-۱۹)

$$\min \sum_{i=1,2,3,4} a_i + b_i$$

$$a_1 - b_1 = x_1^o - x_1$$

$$a_2 - b_2 = x_2^o - x_2$$

$$a_3 - b_3 = x_3^o - x_3$$

$$a_4 - b_4 = x_4^o - x_4$$

$$400y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 = c_1$$

$$200y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_6 = c_2$$

$$150y_1 + 4y_3 + 1y_4 + y_7 = c_3$$

$$500y_1 + 4y_3 + 5y_4 + y_8 = c_4$$

$$500y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 8y_4 = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + x_4c_4$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 18$$

$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

$$y_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots ,8$$

$$a_i, b_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

حال همتای استوار را مشابه با قبل به دست می‌آوریم. برای سادگی برای محدودیت‌های دچار عدم قطعیت، یک پارامتر برابر در نظر می‌گیریم.

(۴-۲۰)

$$\min \sum_{i=1,2,3,4} a_i + b_i$$

$$a_1 - b_1 = 0 - x_1 + \psi$$

$$a_2 - b_2 = 3 - x_2 + \psi$$

$$a_3 - b_3 = 1 - x_3 + \psi$$

$$a_4 - b_4 = 0 - x_4 + \psi$$

$$400y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 = c_1$$

$$200y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_6 = c_2$$

$$150y_1 + 4y_3 + 1y_4 + y_7 = c_3$$

$$500y_1 + 4y_3 + 5y_4 + y_8 = c_4$$

$$500y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 8y_4 = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + x_4c_4$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 18$$

$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

$$y_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots ,8$$

$$a_i, b_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

رابطه‌ی (۴-۲۰) یک برنامه‌ریزی خطی نمی‌باشد، بلکه یک برنامه‌ریزی درجه‌ی دو یا کوادراتیک است. به جای حل این مسئله، از قضیه‌ی ۱ استفاده می‌کنیم و رابطه‌ی زیر را برای نمونه برای محدودیت اول می‌نویسیم. همچنین تابع فاصله را تحت نرم بی نهایت در نظر می‌گیریم.

(۴-۲۱)

$$min_{x,z_1} z_1$$

$$s.t.\ z_1 \geq a_i + b_i, \qquad \forall i = 1,2,3,4$$

$$a_1 - b_1 = 0 - x_1 + \psi$$

$$a_2 - b_2 = 3 - x_2 + \psi$$

$$a_3 - b_3 = 1 - x_3 + \psi$$

$$a_4 - b_4 = 0 - x_4 + \psi$$

$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 = 500$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

حال، برای مقدار پارامتر ۰.۵، از قضیه‌ی ۱ ضرایب مورد نظر را به دست می‌آوریم. دقت کنید که ۸ محدودیت وجود دارد و ۸ مسئله‌ی متناظر حل می‌گردد. به علت اینکه آوردن صورت این مسائل ارزش جدیدی اضافه نمی‌کند و همگی مشابه با (۴-۲۱) هستند، تنها نتایج آن‌ها را در جدول زیر آورده‌ایم.

متغیر	مقدار
z_1	مسئله ناموجه است.
z_2	۰.۵
z_3	۰.۵
z_4	۲.۵
z_5	۰.۵
z_6	۳.۵
z_7	۱.۵
z_8	۰.۵

جدول ۱۴ نتیجه‌ی استفاده از قضیه‌ی ۱

همانطور که دیدیم ۴ متغیر متفاوت، کمترین مقدار ۰.۵ را دارند. حال برای هر یک، ضریب متناظر را به دست می‌آوریم. در نهایت ضریبی که تحت نرم ۱ به ضریب مطلوب نزدیک‌تر است انتخاب می‌گردد. بنابر قضیه‌ی ۱، ضریب از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد. مقادیر ضرایب را در جدول بعد آورده‌ایم. همچنین به دلیل اینکه نرمال نکردیم و مجموع درایه‌های ضرایب را برابر ۱۸ در نظر گرفتم، بنابراین در انتها ضرایب نرمال شده را در ۱۸ ضرب می‌کنیم.

(۴-۲۲)

$$(c^*, y^*, x^*) = \left(\frac{a_{i^*}}{\|a_{i^*}\|_1}, \frac{e_{i^*}}{\|a_{i^*}\|_1}, \tilde{x}_{i^*}\right)$$

اندیس	c نرمال	۱۸*	فاصله از ضریب (5,2,3,8) تحت نرم ۱
۲	(0.6,0.4,0,0)	(10.8,7.2,0,0)	۱۱
۳	(0.17,0.17,0.66,0.66)	(3.06,3.06,11.88,11.88)	۱۵.۷۶
۵	(1,0,0,0)	(18,0,0,0)	۲۶
۸	(0,0,1,0)	(0,0,18,0)	۳۰

جدول ۱۵ ضرایب به دست آمده از قضیه‌ی ۱

بنابراین ضرایب عدم مطلوبیتی که به دنبال آن بودیم، از طریق مسئله‌ی معکوس استوار با در نظر گرفتن عدم قطعیت جعبه‌ای با پارامتر ۰.۵، تحت نرم ۱، ۱۱ واحد از ضریب اصلی فاصله دارد. دقت می‌کنیم که با تغییر پارامتر مجموعه‌ی عدم قطعیت، ضرایب دیگری به دست می‌آید. اینکه چه پارامتری را انتخاب کنیم بستگی به میزان استواری و عملکرد مطلوب دارد. به طور کلی هر چقدر پارامتر گفته شده بزرگتر باشد و از صفر به سمت ۱ برود، جواب به دست آمده بدتر خواهد شد. از مقادیر منفی ۱ تا صفر نیز همانطور که در جدول ۶ دیدیم جواب بهبود یافت. در بازه‌ی ۰.۵- تا ۰ نیز دقیقا ضرایب عدم مطلوبیت خواسته شده به دست آمد.

۵ نتیجه‌گیری و جهت‌های آینده

در بسیاری از کاربردهای واقعی در صنعت، داده‌های مسئله‌ی بهینه‌سازی قطعی نیستند. به بیان دقیق‌تر، ناممکن است که بعضی داده‌ها را قطعی فرض نمود؛ چرا که عدم قطعیت خاصیت ذاتی طبیعت و اندازه‌گیری می‌باشد. با استفاده از متدولوژی بهینه‌سازی استوار می‌توان کمی از عملکرد خوب مدل کاست ولی به ایمنی در مقابل این عدم قطعیت رسید. به این موضوع، هزینه‌ی استواری می‌گویند. همچنین در صورت عدم استفاده از بهینه‌سازی استوار، با حالات مختلف، ممکن است جواب بهینه‌ی فعلی ناموجه شود و ضررهای بی‌شماری به بار آید. به این موضوع هزینه‌ی عدم استواری می‌گویند. به طور کلی بهینه‌سازی استوار دیدگاهی محافظه‌کارانه دارد. در فصل ۲ به بررسی این دیدگاه پرداختیم و راه‌هایی برای کاهش محافظه‌کاری در عین حفظ نمودن عملکرد خوب مدل ارائه دادیم. تمامی این راهکارها با این فرض هستند که عدم قطعیت موجود، در درون خود از یک رفتار مشخص تبعیت می‌کند؛ برای مثال از جنس بیضوی است.

در بسیاری از کاربردها، ضرایب تابع هدف موجود نمی‌باشد. در عوض، با مشاهده‌ی یک حالت می‌خواهیم ضرایب تابع هدف را به دست آوریم. در این نوع مسائل از بهینه‌سازی معکوس استفاده می‌شود. بهینه‌سازی معکوس ممکن است برای محاسبه‌ی ضرایب محدودیت‌ها نیز به کار آید که در این پایان‌نامه بررسی نشد و می‌تواند جهت خوبی برای مطالعات آینده باشد. در فصل پایانی به حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی معکوس پرداختیم و نشان دادیم که ترکیب بهینه‌سازی معکوس و استوار در قالب بهینه‌سازی معکوس استوار، در پیشنهاد رژیم غذایی برای فردی که رفتارش را مشاهده کرده‌ایم مفید است. بررسی مفصل انواع مجموعه‌های عدم قطعیت بر روی این مسئله و استفاده از مجموعه داده‌ی وسیع‌تر با تعداد اقلام خوراکی بیشتر می‌تواند جهت خوبی برای مطالعه باشد. پیاده سازی نتایج بر روی داده‌های یک اپلیکیشن دستیار سلامت نیز یک راه خوب برای تحقیق در آینده‌است. به نظر می‌رسد رویکردی که در به دست آوردن ضرایب عدم مطلوبیت در مسئله‌ی حل شده استفاده نمودیم، بتواند در مسائل یادگیری ماشین برای یافتن ضریب هزینه‌ی هر اتریبیوت به کار رود. در این نوع مسائل به یک مجموعه‌ای از محدودیت‌ها نیاز است که با افزایش این محدودیت‌ها و افزایش اطلاعات اولیه، ضرایب به دست آمده دقیق‌تر خواهند شد. در نهایت ممکن است مقایسه‌ی عملکرد این متد با الگوریتم‌های یادگیری ماشین، راه خوبی برای مطالعات آینده باشد.

برای تعیین مجموعه‌ی عدم قطعیت مطللوب، می‌توان از داده‌های تاریخی استفاده نمود و یک شکل هندسی از اشکال بحث شده را برای آن در نظر گرفت. با این رویکرد، می‌توان از اطلاعات غنی داده‌ها استفاده‌ی بسیاری کرد و مسائل دنیای واقعی را به خوبی حل نمود. این ایده، می‌تواند به تحقیقات مطالعه‌ی موردی ارزشمندی منجر شود.

۶ منابع

[1]- ک. عشقی، برنامه ریزی خطی: مدل‌سازی و روش‌های حل. ۱۳۹۷.

[2]-Ben-Tal, A.; Nemirovski, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Math. Program. 2000, 88, 411–424.

[3]- Ben-Tal, A.; Nemirovski, A. Robust truss topology design via semidefinite programming. SIAM J. Optim. 1997, 7 (4), 991–1016.

[4]- Ben-Tal, A.; Nemirovski, A. Robust optimization—Methodology and applications. Math. Program. 2002, 92 (3), 453–480.

[5]- Soyster, A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Oper. Res. 1973, 21, 1154–1157.

[6]- Ben-Tal, A.; Goryashko, A.; Guslitzer, E.; Nemirovski, A. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. Math. Program. 2004, 99 (2), 351–376.

[7]- Ben-Tal, A.; Nemirovski, A. Robust convex optimization. Math. Oper. Res. 1998, 23 (4), 769–805.

[8]- Ben-Tal, A.; Nemirovski, A. Robust solutions of uncertain linear programs. Oper. Res. Lett. 1999, 25 (1), 1–13.

[9]- ElGhaoui, L.; Lebret, H. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. Siam J. Matrix Anal. Appl. 1997, 18 (4), 1035–1064.

[10]- El-Ghaoui, L.; Oustry, F.; Lebret, H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. SIAM J. Optim. 1998, 9, 33–52.

[11]- Lin, X.; Janak, S. L.; Floudas, C. A. A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty: I. Bounded uncertainty. Comput. Chem. Eng. 2004, 28, 1069–1085.

[12]- Janak, S. L.; Lin, X.; Floudas, C. A. A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty: II. Uncertainty with known probability distribution. Comput. Chem. Eng. 2007, 31, 171–195.

[13]- Verderame, P. M.; Floudas, C. A. Operational planning of largescale industrial batch plants under demand due date and amount uncertainty. I. Robust optimization framework. Ind. Eng. Chem. Res. 2009, 48 (15), 7214–7231.

[14]- Verderame, P. M.; Floudas, C. A. Operational planning of largescale industrial batch plants under demand due date and amount uncertainty: II. Conditional value-at-risk framework. Ind. Eng. Chem. Res. 2010, 49 (1), 260–275.

[15]- Verderame, P. M.; Elia, J. A.; Li, J.; Floudas, C. A. Planning and scheduling under uncertainty: A review across multiple sectors. Ind. Eng. Chem. Res. 2010, 49 (9), 3993–4017.

[16]- Li, Z.; Ierapetritou, M. G. Process scheduling under uncertainty: Review and challenges. Comput. Chem. Eng. 2008, 32, 715–727.

[17]- Bertsimas, D.; Sim, M. The price of robustness. Oper. Res. 2004, 52 (1), 35–53.

[18]- Bertsimas, D.; Sim, M. Robust discrete optimization and network flows. Math. Program. 2003, 98 (1_3), 49–71.

[19]- Bertsimas, D.; Pachamanovab, D.; Simc, M. Robust linear optimization under general norms. Oper. Res. Letters 2004, 32, 510–516.

[20]- Bertsimas, D.; Sim, M. Tractable approximations to robust conic optimization problems. Math. Program. 2006, 107 (1_2), 5–36.

[21]- Bertsimas, D.; Thiele, A. A robust optimization approach to inventory theory. Oper. Res. 2006, 54 (1), 150–168.

[22]- Kouvelis, P.; Yu, G. Robust Discrete Optimization and Its Applications; Kluwer Academic Publishers: Norwell, MA, 1997.

[23]- Chen, S. G.; Lin, Y. K. An approximate algorithm for the robust design in a stochastic-flow network. Commun. Stat.—Theory Methods 2010, 39 (13), 2440–2454.

[24]- Atamturk, A.; Zhang, M. Two-stage robust network flow and design under demand uncertainty. Oper. Res. 2007, 55 (4), 662–673.

[25]- Atamturk, A. Strong formulations of robust mixed 0_1 programming. Math. Program. 2007, 108 (2_3), 235–250.

[26]- Averbakh, I. Minmax regret solutions for minimax optimization problems with uncertainty. Oper. Res. Lett. 2000, 27 (2), 57–65.

[27]- Kasperski, A.; Zielinski, P. An approximation algorithm for interval data minmax regret combinatorial optimization problems. Inform. Process. Lett. 2006, 97 (5), 177–180.

[28]- Chen, X.; Sim, M.; Sun, P. A robust optmization perspective on stochastic programming. Oper. Res. 2007, 55 (6), 1058–1071.

[29]- Chen, W. Q.; Sim, M.; Sun, J.; Teo, C. P. From CVaR to uncertainty set: Implications in joint chance-constrained optimization. Oper. Res. 2010, 58 (2), 470–485.

[30]- Fischetti, M.; Monaci, M. Light robustness. Lect. Notes Comput. Sci. 2009, 5868, 61–84.

[31]- Goh, J.; Sim, M. Distributionally robust optimization and its tractable approximations. Oper. Res. 2010, 58 (4), 902–917.

[32]- El Ghaoui, L.; Oks, M.; Oustry, F. Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach. Oper. Res. 2003, 51 (4), 543–556.

[33]- Chen, W. Q.; Sim, M. Goal-driven optimization. Oper. Res. 2009, 57 (2), 342–357.

[34]- Delage, E.; Ye, Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. Oper. Res. 2010, 58 (3), 595–612.

[35]- Ben-Tal, A.; Bertsimas, D.; Brown, D. B. A soft robust model for optimization under ambiguity. Oper. Res. 2010, 58 (4), 1220–1234.

[36]- Allen, D. H. Linear programming models for plant operations planning. Brit. Chem. Eng. 1971, 16, 685–691.

[37]- Leiras, A.; Hamacher, S.; Elkamel, A. Petroleum refinery operational planning using robust optimization. Eng. Optimization 2010, 42 (12), 1119–1131.

[38]- Ierapetritou, M. G.; Floudas, C. A. Effective continuous-time formulation for short-term scheduling. 1. Multipurpose batch processes. Ind. Eng. Chem. Res. 1998, 37 (11), 4341–4359.

[39]- Li, Z.; Ding, R.; Floudas, C. A. A comparative theoretical and computational study on robust counterpart optimization: I. Robust linear and robust mixed integer linear optimization. Ind. Eng. Chem. Res. 2011, 50 (18), 10567−10603.

[40]- Li, Z.; Tang, Q.; Floudas, C. A. A Comparative Theoretical and Computational Study on Robust Counterpart Optimization: II. Probabilistic Guarantees on Constraint Satisfaction. Ind. Eng. Chem. Res. 2012, 51, 6769−6788.

[41]- Paschalidis, I. C.; Kang, S.-C. In Robust Linear Optimization: On the Benefits of Distributional Information and Applications in Inventory Control, 44th IEEE Conference on Decision and Control, Seville, Spain, 2005; IEEE: Seville, Spain, 2005.

[42]- Li, Z.; & Floudas, C. A. A comparative theoretical and computational study on robust counterpart optimization: III. improving the quality of robust solutions Ind. Eng. Chem. Res. 2014, 53(33), 13112−13124.

[43]- Tarantola, A. 1987. *Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation.* Elsevier, Amsterdam.

[44]- Burton, D., and Ph. L. Toint. 1992. On an instance of the inverse shortest paths problem. *Mathematical Programming* **53,** 45-61.

[45]- Burton, D., and Ph. L. Toint. 1994. On the use of an inverse shortest paths algorithm for recovering linearly correlated costs. *Mathematical Programming* **63,** 1-22.

[46]- Cai, M. and X. Yang. 1994. Inverse shortest path problems. Technical Report, Institute of Systems Sciences, Academia Sinica, Beijing, China.

[47]- Xu, S., and J. Zhang. *1995.* An inverse problem of the weighted shortest path problem. *Japanese Journal of Industrial and Applied Mathematics* 12, 47-59.

[48]- Zhang, J., Z. Ma, and C. Yang. 1995. A column generation method for inverse shortest path problems, *ZOR-Mathematical Methods for Operations Research* **41,** 347-*358.*

[49]- Dial, B. 1997. Minimum-revenue congestion pricing, Part 1: A fast algorithm for the single-origin case. Technical Report, The Volpe National Transportation Systems Center, Kendall Square, Cambridge, MA 02142.

[50]- Burton, D., B. Pulleyblank, and Ph. L. Toint. 1997. The inverse shortest paths problem with upper bounds on shortest paths costs. In *Network Optimization,* edited by P. Pardalos, D. W. Hearn, and W. H. Hager, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,* Volume 450, pp. 156-171.

[51]- Yang, C., and J. Zhang. 1996. Inverse maximum capacity path with upper bound contraints. To appear in *OR Spektrum.*

[52]- Ma, Z., S. Xu, and J. Zhang. 1996. Algorithms for inverse minimum spanning tree problem, Working Paper, Department of Mathematics, City Polytechnic of Hong Kong, Hong Kong.

[53]- Sokkalingam, P.T., R. K. Ahuja, and J. B. Orlin. 1996. Solving the inverse spanning tree problems through network flow techniques. Working Paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA. To appear in *Operations Research.*

[54]- Ahuja, R. K., and J. B. Orlin. 1998a. A fast algorithm for the bipartite node weighted matching problem on path graphs with application to the inverse spanning tree problem. Working Paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.
[55]- Ahuja, R. K., and J. B. Orlin. 1997. Solving the convex ordered set problem with applications to isotonic regression. Working Paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.
[56]- Hu, Z., and Z. Liu. 1995. A strongly polynomial algorithm for the inverse shortest arborescence problem. Working Paper, Institute of Systems science, Academia Sinica, Beijing, China.
[57]- Huang, S., and Z. Liu. 1995a. On the inverse problem of k-matching of bipartite graph. Working Paper, Department of Management, School of Business and Management, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong.
[58]- Yang, C., J. Zhang, and Z. Ma. 1997. Inverse maximum flow and minimum cut problem. *Optimization* **40,** 147-170.
[59]- Zhang, J., and and M. C. Cai. 1998. Inverse problem of minimum cuts. *Mathematical Methods of Operations Research* 47, No. 1.
[60]- Huang, S., and Z. Liu. 1995b. On the inverse version of the minimum cost flow problem. Working Paper, Dept. of ISMT, School of Business and Management, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong.
[61]- Sokkalingam, P.T. 1996. *The Minimum Cost Flow Problem : Primal Algorithms and Cost Perturbations.* Unpublished Dissertation, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kanpur, INDIA.
[62]- Cai, M., and Y. Li. 1995. Inverse matroid intersection problem. Research Report, Institute of System Science, Academia Sinica, Beijing, China. To appear *in ZORMathematical Methods of Operations Research.*
[63]- Cai, M., X. Yang, and Y. Li. 1996. Inverse polymatroidal flow problem. Research Report, Institute of System Science, Academia Sinica, Beijing, China.
[64]- Ahuja, R. K., and J. B. Orlin. 1998a. Inverse Optimization, Part 1: Linear programming and general problem. Working Paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.
[65]- Ahuja, R. K., and J. B. Orlin. 1998b. Combinatorial algorithms for inverse network flow problems. Working Paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.
[66]- Ahuja RK, Orlin JB (2001) Inverse optimization. *Oper. Res.* 49(5): 771–783.
[67]- Iyengar G, Kang W (2005) Inverse conic programming with applications. *Oper. Res. Lett.* 33(3):319–330.
[68]- Troutt MD, Pang W-K, Hou S-H (2006) Behavioral estimation of mathematical programming objective function coefficients. *Management Sci.* 52(3):422–434.
[69]- Keshavarz A, Wang Y, Boyd S (2011) Imputing a convex objective function. *2011 IEEE Internat. Sympos. Intelligent Control* ¹*ISIC*º (IEEE, Piscataway, NJ), 613–619.
[70]- Chan TCY, Craig T, Lee T, Sharpe MB (2014) Generalized inverse multi-objective optimization with application to cancer therapy. *Oper. Res.* 62(3):680–695.

[71]- Bertsimas D, Gupta V, Paschalidis ICh (2015) Data-driven estimation in equilibrium using inverse optimization. *Math. Programming* 153(2):595–633.

[72]- Bertsimas D, Gupta V, Paschalidis ICh (2012) Inverse optimization: A new perspective on the Black-Litterman model. *Oper. Res.* 60(6):1389–1403.

[73]- Erkin Z, Bailey MD, Maillart LM, Schaefer AJ, Roberts MS (2010) Eliciting patients' revealed preferences: An inverse Markov decision process approach. *Decision Anal.* 7(4):358–365.

[74]- Turner SDO, Chan TCY (2013) Examining the LEED rating system using inverse optimization. *J. Solar Energy Engrg.* 135(4): 040901-1–040901-8.

[75]- Birge JR, Hortaçsu A, Pavlin JM (2017) Inverse optimization for the recovery of market structure from market outcomes: An application to the MISO electricity market. *Oper. Res.* 65(4):837–855.

[76]- T. C. Y. Chan, T. Lee, and D. Terekhov. Inverse optimization: Closed-form solutions, geometry and goodness of fit. *Management Science*, 2018. Forthcoming.

[77]- D. Bertsimas, V. Gupta, and I. Ch. Paschalidis. Data-driven estimation in equilibrium using inverse optimization. Mathematical Programming, 153(2):595–633, 2015.

[78]- M. D. Troutt, A. A. Brandyberry, C. Sohn, and S. K. Tadisina. Linear programming system identification: The general nonnegative parameters case. European Journal of Operational Research, 185(1):63–75, 2008.

[79]- J. Y. J. Chow and W. W. Recker. Inverse optimization with endogenous arrival time constraints to calibrate the household activity pattern problem. Transportation Research Part B: Methodological, 46(3):463–479, 2012.

[80]- A. Aswani, Z.-J. M. Shen, and A. Siddiq. Inverse optimization with noisy data. Operations Research, 2018. Forthcoming.

[81]- K. Ghobadi, T. Lee, H. Mahmoudzadeh, D. Terekhov, Robust inverse optimization, Operations Research Letters (2018).

[82]- A. Chassein and M. Goerigk. Variable-sized uncertainty and inverse problems in robust optimization. European Journal of Operational Research, 264(1):17–28, 2018.

۷ پیوست‌ها

۷-۱ پیوست ۱

در این قسمت، کد مربوط به پیاده‌سازی مسئله‌ی (۴-۱۴) در نرم افزار CPLEX آمده‌است.

کد مربوط به فایل مدل‌سازی (.mod)

```
range i=1..4;
 float avoidance[i]=...;

 float cal[i]=...;
 float calc[i]=...;
 float sugar[i]=...;
 float fat[i]=...;

 float mincal=...;
 float mincalc=...;
 float minsugar=...;
 float minfat=...;

dvar float+ x[i];

minimize sum(i in i)(avoidance[i]*x[i]);


subject to{
	sum(i in i)cal[i]*x[i]>=mincal;
	sum(i in i)calc[i]*x[i]>=mincalc;
	sum(i in i)sugar[i]*x[i]>=minsugar;
	sum(i in i)fat[i]*x[i]>=minfat;
}
```

کد مربوط به قسمت داده (.dat)

```
avoidance=[5,2,3,8];
cal=[400,200,150,500];
calc=[3,2,0,0];
sugar=[2,2,4,4];
fat=[2,4,1,5];

 mincal=500;
 mincalc=6;
 minsugar=10;
 minfat=8;
```

جواب به دست آمده در نرم افزار (solution)

```
// solution (optimal) with objective 9
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Max. unscaled (scaled) Ax-b resid.          = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) c-B'pi resid.        = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) |x|                  = 3 (3)
// Max. unscaled (scaled) |slack|              = 250 (1.25)
// Max. unscaled (scaled) |pi|                 = 0.75 (3)
// Max. unscaled (scaled) |red-cost|           = 5 (5)
// Condition number of scaled basis            = 3.9e+000
//

x = [0
        3 1 0];
```

۷-۲ پیوست ۲

در این قسمت، کد مربوط به پیاده‌سازی مسئله‌ی (۱۶-۴) در نرم افزار CPLEX آمده‌است.

کد مربوط به فایل مدل‌سازی (.mod)

```
range i=1..4;
 range j=1..8;
dvar float+ a[i];
dvar float+ b[i];
dvar float+ y[j];
dvar float c[i];


minimize sum(i in i)(a[i]+b[i]);


subject to{
        a[1]-b[1]==5-c[1];
        a[2]-b[2]==2-c[2];
        a[3]-b[3]==3-c[3];
        a[4]-b[4]==8-c[4];

        400*y[1]+3*y[2]+2*y[3]+2*y[4]+y[5]==c[1];
        200*y[1]+2*y[2]+2*y[3]+4*y[4]+y[6]==c[2];
        150*y[1]+0*y[2]+4*y[3]+1*y[4]+y[7]==c[3];
        500*y[1]+0*y[2]+4*y[3]+5*y[4]+y[8]==c[4];

        500*y[1]+6*y[2]+10*y[3]+8*y[4]==3*c[2]+c[3];            }
```

جواب به دست آمده در نرم افزار (solution)

```
// solution (optimal) with objective 0
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Max. unscaled (scaled) Ax-b resid.          = 4.44089e-016 (8.67362e-019)
// Max. unscaled (scaled) c-B'pi resid.        = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) |x|                  = 8 (8)
// Max. unscaled (scaled) |pi|                 = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) |red-cost|           = 1 (1)
// Condition number of scaled basis            = 1.7e+001
//

a = [0
        0 0 0];
b = [0 0 0 0];
c = [5 2 3 8];
y = [0 0.75 0.25 0 2.25 0 2 7];
```

۷-۳ پیوست ۳

در این قسمت، کد مربوط به پیاده‌سازی مسئله‌ی (۱۸-۴) در نرم افزار CPLEX آمده‌است.

کد مربوط به فایل مدل‌سازی (.mod)

```
range i=1..4;
 range j=1..8;


dvar float+ a[i];
dvar float+ b[i];
dvar float+ y[j];
dvar float c[i];


float psi=...;

minimize sum(i in i)(a[i]+b[i]);


subject to{
          a[1]-b[1]==5-c[1];
          a[2]-b[2]==2-c[2];
          a[3]-b[3]==3-c[3];
          a[4]-b[4]==8-c[4];
```

```
400*y[1]+3*y[2]+2*y[3]+2*y[4]+y[5]==c[1];
200*y[1]+2*y[2]+2*y[3]+4*y[4]+y[6]==c[2];
150*y[1]+0*y[2]+4*y[3]+1*y[4]+y[7]==c[3];
500*y[1]+0*y[2]+4*y[3]+5*y[4]+y[8]==c[4];

500*y[1]+6*y[2]+10*y[3]+8*y[4]==3*c[2]+1*c[3]+psi*(sum(i in i)c[i]);

}
```