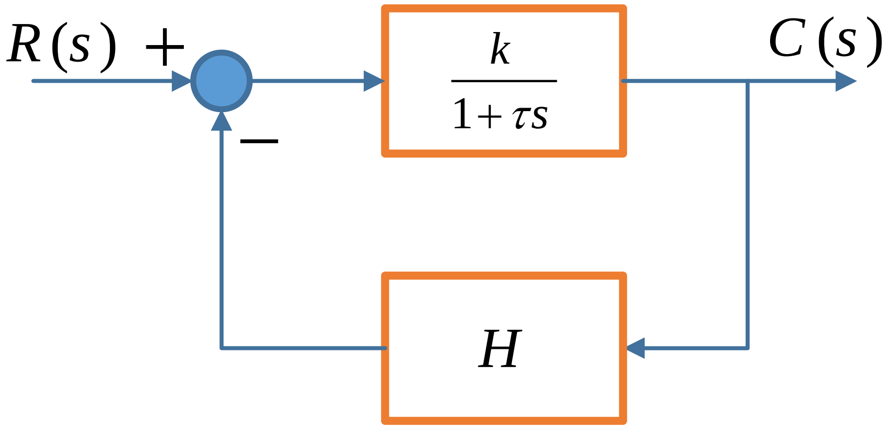
فصل چهارم

اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم‌های کنترل

سعید عبادالهی

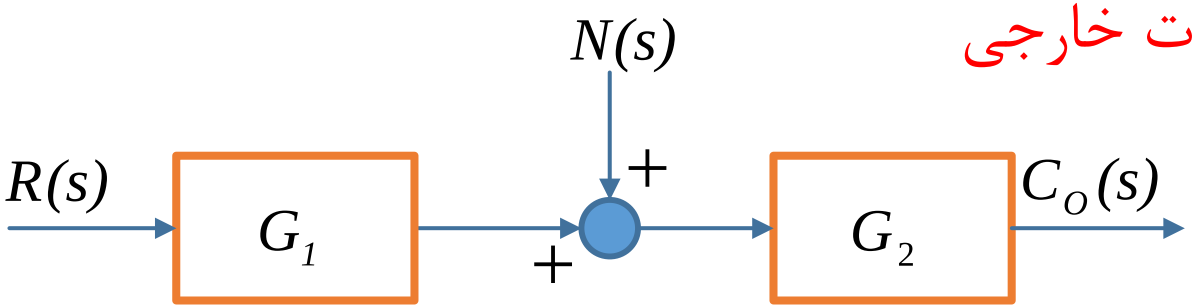
عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

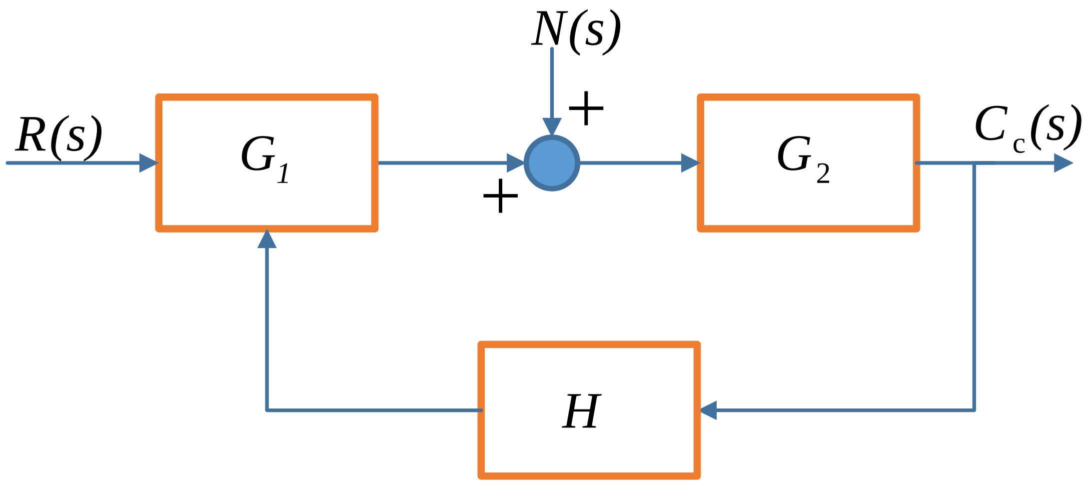
اثرات فیدبک بر بهره و ثابت زمانی سیستم:



اثر فیدبک کوچک‌تر کردن بهره و ثابت زمانی سیستم است. (h>0 , k>0)

اثرات فیدبک بر اغتشاشات خارجی

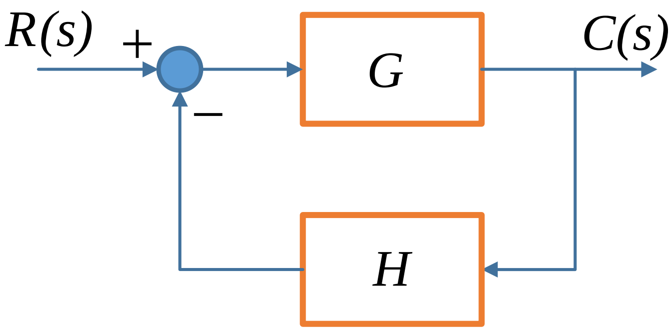




فیدبک باعث کاهش اغتشاش با عامل $1+G_1G_2H_2$ شده‌است.

اثرات فیدبک بر حساسیت سیستم:

$$S_a^T = \frac{\partial T}{\partial a} \times \frac{a}{T}$$



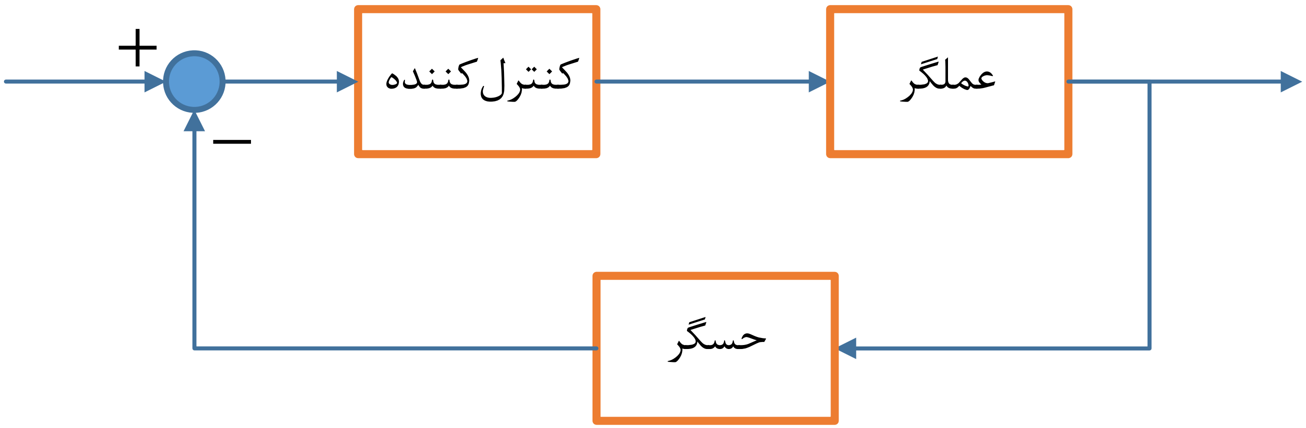
اثر G(s) بر پارامترهای موجود در آن بر روی خروجی کاهش می‌یابد.

حساسیت سیستم کنترلی: نسبت تغییرات در تابع حلقه‌بسته به تغییرات در تابع تبدیل حلقه‌باز.

با افزایش G(s)H(s) می‌توان حساسیت سیستم کنترل را نسبت به تغییرات مدل حلقه باز کم کرد.

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \times \frac{G}{T} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

تحلیل پایداری سیستم کنترل:



در عمل نمی‌توان $e(t) \longrightarrow 0$ در نتیجه یک کران برای خطا تعیین می‌کنیم.

سیستم پایدار خواهد بود. $\Longleftarrow$ $|e(t)| \langle \varepsilon = a$

پایداری و مفاهیم آن:

دو مفهوم اصلی سیستم کنترل:

۱) **پایداری (Stability)**: شرط لازم سیستم کنترلی – محدود شدن یا به سمت صفر رفتن $e(t)$

۲) **عملکرد یا کارایی (Performance)**: چگونگی محدود شدن یا به سمت صفر رفتن $e(t)$ (تعیین پارامترهایی نظیر زمان نشست، زمان صعود و...)

پایداری و مفاهیم آن:

تعریف: به سیستمی پایدار گویند که اگر هر ورودی با دامنه‌ی محدود به آن اعمال گردد، پاسخ بدست آمده، دامنه‌ای محدود داشته باشد

تابع تبدیل سیستم در حالت کلی:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0} \longrightarrow$$ معادله‌ی مشخصه

رابطه بین قطب‌های سیستم و پایداری:

۱. **قطب‌های تابع تبدیل سمت چپ محور موهومی باشد:**
پاسخ سیستم میراشونده است لذا پایدار است.

۲. **وجود یک یا چند زوج قطب مزدوج روی محور موهومی (غیر تکراری)**
معمولا نوسانی (ناپایدار)

۳. **وجود حداقل یک قطب سمت راست محور موهومی:**
پاسخ افزایشی است و لذا سیستم ناپایدار است.

ریشه‌های معادله‌ی مشخصه = قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته

$$T(s)=\frac{G_c(s).G(s)}{1+G_c(s).G(s).G_s(s)}=\frac{C(s)}{R(s)}$$

تابع تبدیل حلقه باز =

تابع تبدیل حلقه =

اشکال مختلف معادله‌ی مشخصه:

روش‌های تعیین پایداری:

۱) روش هرویتز

۲) روش روث - هرویتز

۳) مکان ریشه

۴) معیار نایکوییست

۵) منحنی‌های بد

روش هرویتز:

تمامی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرارمی‌گیرند و سیستم پایدار است اگر و فقط اگر $\Delta i > 0$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & & a_0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & \cdots & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

مثال:

$$s^3 + 4s^2 + 7s + 12 = 0$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

شرط **لازم** برای اینکه قسمت حقیقی قطب‌ها منفی باشد:

۱- هم علامت بودن تمام a_iها

۲- غیر صفر بودن تمام a_iها

روش روث-هرویتز:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 \\
\vdots & & \vdots & \\
s^1 & & & \\
s^0 & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{(a_{n-1} \times a_{n-2}) - (a_n \times a_{n-3})}{a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{(a_{n-1} \times a_{n-4}) - (a_n \times a_{n-5})}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{(a_{n-1} \times a_{n-6}) - (a_n \times a_{n-7})}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{(b_1 \times a_{n-3}) - (b_2 \times a_{n-1})}{b_1} \quad c_2 = \frac{(b_1 \times a_{n-5}) - (b_3 \times a_{n-1})}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{(b_1 \times a_{n-7}) - (b_4 \times a_{n-1})}{b_1}$$

تعداد قطب‌های سمت راست محور موهومی تابع تبدیل حلقه بسته (ریشه‌های معادله‌ی مشخصه) برابر است با تعداد تغییر علامت در ستون اول آرایش روث هروتیز.

مثال:

$$9s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 6s + 2 = 0$$

اگر در هر سطر یک عدد مثبت ضرب کنیم در نتیجه تغییری حاصل نمی‌شود این کار برای راحتی محاسبات توصیه می‌شود.

در مثال پیشین $s \to \frac{1}{s}$ تبدیل کنید.

$$2s^5 + 6s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 9 = 0$$

بررسی حالت‌های خاص روش روث-هرویتز

۱) یکی از عناصر ستون اول صفر شود

الف) به جای صفر ε می‌گذاریم.

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3 = 0$$

ب) اگر در معادله $s \rightarrow \frac{1}{s}$ تبدیل کنیم ریشه‌ها عکس می‌شوند ولی صفحه‌ی ریشه‌ها عوض نمی‌شود.

$$s \rightarrow \frac{1}{s}: 3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 2s + 1 = 0$$

ج) معادله مشخصه را در یک عبارت دیگر ضرب می‌کنیم.

در مثال قبل:

$$(s+1)(s^5+2s^4+3s^3+6s^2+5s+3)=$$
$$s^6+3s^5+5s^4+9s^3+11s^2+8s+3=0$$

۲) تمامی عناصر یک سطر صفر شود.

مثال :

یک معادله‌ی کمکی تشکیل می‌دهیم:
این معادله از روی سطر بالای سطر صفر ساخته می‌شود.

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

از معادله کمکی مشتق می‌گیریم ضرایب مشتق معادله
کمکی به جای سطر صفر می‌نشیند.

الف) صفر شدن یک سطر می‌تواند به خاطر وجود یک جفت ریشه بر روی محور موهومی باشد.

مثال:

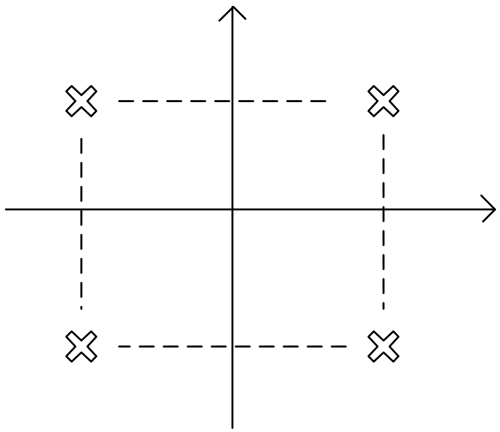
$$s^4 + 9s^3 + 4s^2 - 36s - 32 = 0$$

ب) هرگاه معادله یک جفت ریشه متقارن نسبت به مبدا بر روی محور حقیقی داشته باشد یک سطر صفر داریم.

مثال:

$$(s^4+4s^2+4)(s^2+4s+8)=0$$

$$s^6+4s^5+12s^4+16s^3+41s^2+36s+72=0$$



ج) صفر شدن یک سطر می‌تواند به علت وجود دو جفت ریشه‌ی مختلط مزدوج، متقارن نسبت به هر دو محور (متقارن نسبت به مبدا) باشد.

مثال: پارامتر K را طوری بدست آورید که سیستم نوسانی شود.

$$s^3 + 4s^2 + s + k = 0$$

مثال:

$$(s+1)(s^2+1)^2 = s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1$$

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی در زیر داده شده‌است. به هنگام عبور مکان ریشه‌ها از محورموهومی مقدار فرکانس چقدر است؟

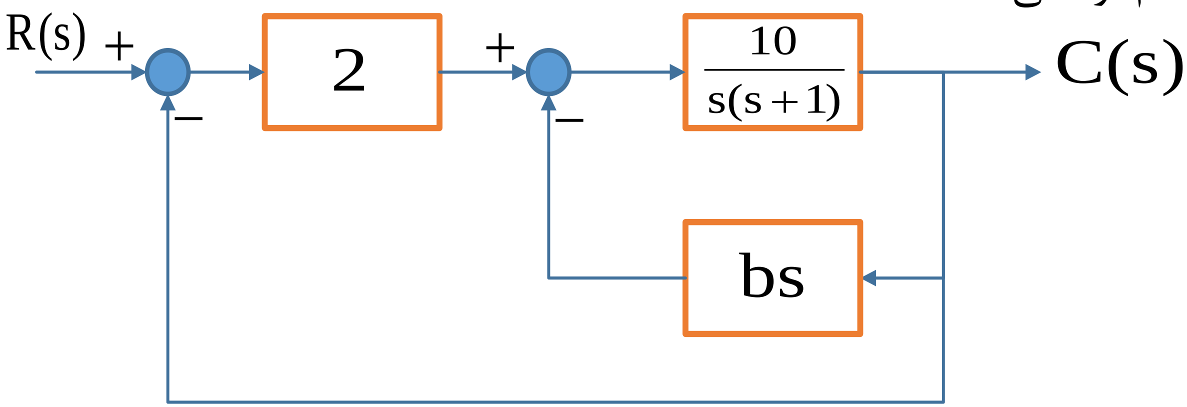
$$G(s) = \frac{80\,k}{s(s+4)(S^2+4\,s+20)}$$

مثال: به ازای چه مقدار K ریشه‌های معادله زیر در نیم‌صفحه چپ قرار می‌گیرد؟

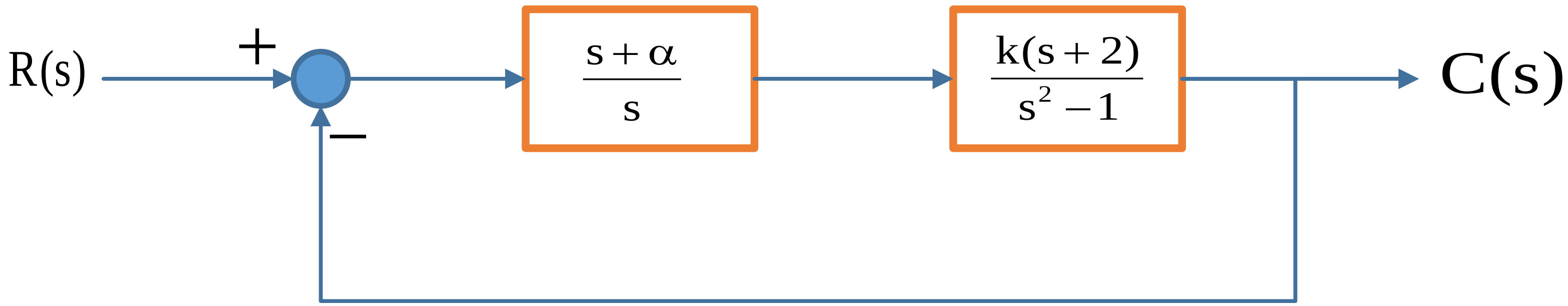
$$s^3 + Ks^2 + (K+2)s + 4s = 0$$

مثال: به ازای چه مقدار b سیستم پایدار است؟

به ازای چه مقدار b سیستم نوسانی است؟



مثال: در چه ناحیه‌ای از صفحه سیستم زیر پایدار است



پایان