جبر خطی کاربردی

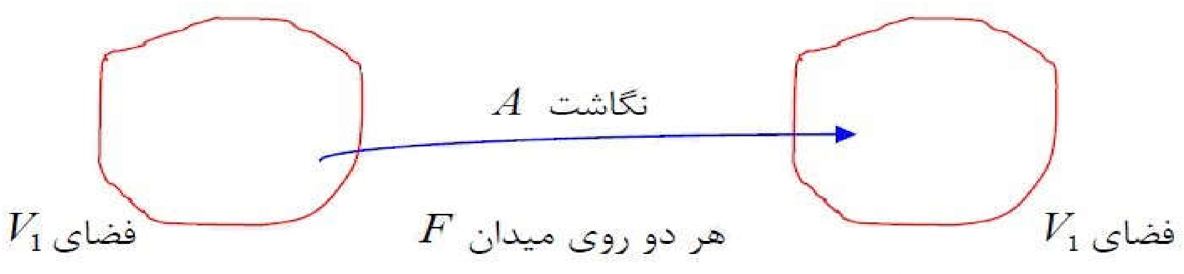
درس ۹ : مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

گروه کنترل–۱۳۹۷

مدرس : دکتر عباداللهی

نگاشت های خطی

$$A_{n\times n} X_{n\times 1} = b_{n\times 1}$$



- نگاشت می‌تواند اندازه و جهت بردار را تغییر دهد،
- نگاشت می‌تواند اندازه بردار را تغییر دهد و امتداد آن را حفظ نماید

چه بردارهایی چنین خاصیتی دارند؟

مقدار ویژه و بردار ویژه

برای نگاشت زیر،

$$A_{n\times n}X_{n\times 1}=b_{n\times 1}$$

اگر b برداری در امتداد بردار غیر صفر x باشد،

$$\boxed{A\underline{x}=\lambda\underline{x} \;\rightarrow\; (A-\lambda I)\underline{x}=0}$$

مقدار ویژه ماتریس A

بردار ویژه ماتریس A

بردارهای ویژه x متعلق به $N(A-\lambda I)$ هستند.

اگر $|A-\lambda I|\neq 0$ باشد، تنها جواب معادله $(A-\lambda I)x=0$ پاسخ بدیهی $x=0$ است.

λ یک مقدار ویژه از ماتریس A است اگر و فقط اگر پاسخ معادله درجه n $\boxed{|A-\lambda I|=0}$ باشد.

معادله مشخصه ماتریس A (Characteristic Equation)

خواص

اگر $|\lambda I_n - A|$ را بسط دهیم معادله مشخصه به صورت زیر بیان میشود

$$\boxed{|\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda - a_{11} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{m} \end{vmatrix} = \underbrace{\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n}_{} = 0}$$

چند جمله‌ای مونیک با ضرایب حقیقی

برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ مقادیر ویژه حقیقی یا مختلط مزدوج $(\alpha \pm j\beta)$ هستند.

اگر ماتریس A متقارن (هرمیتی) باشد، مقادیر ویژه حقیقی هستند.

اگر λ_i مقدار ویژه ماتریس A باشد، λ_i^k مقدار ویژه ماتریس A^k متناظر با همان بردار ویژه است.

اگر λ_i مقدار ویژه ماتریس غیر منفرد A باشد، $\frac{1}{\lambda_i}$ مقدار ویژه ماتریس A^{-1} متناظر با همان بردار ویژه است.

دستور $d = eig(\mathrm{A})$, $[v, d] = eig(\mathrm{A})$ و $poly(\mathrm{A})$ در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

محاسبه دترمینان ماتریس $A_{n\times n}$: $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$

تعیین علامت ماتریس متقارن و مقادیر ویژه ماتریس

مقادیر ویژه ماتریس متقارن اعداد حقیقی هستند.

ماتریس متقارن

مثبت نیمه معین
$$\lambda_i \geq 0$$

مثبت معین
$$\lambda_i > 0$$

منفی معین
$$\lambda_i < 0$$

منفی نیمه معین
$$\lambda_i \leq 0$$

در سایر موارد علامت ماتریس نا معین است.

برخی از کاربردهای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

- قطری سازی ماتریس ها ← Modal Matrix $Ax = 0$
- حل دستگاه معادلات دیفرانسیل
- تشخیص هویت ← Facial Recognition , Eigenfaces & Eigenvoices
- تحلیل و طراحی سیستمها ← Modern Control , Stability
- فشرده سازی تصاویر ← Image Compression
- زمین شناسی و اکتشاف نفت
- تحلیل ارتعاش سازه ها ← Natural Frequency , Eigenfrequency
- تئوری گراف ← Searching the Web , Ranking Theory
- ......

مثال ۱

برای ماتریس A، معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A با استفاده از رابطه $|\lambda I-A|=0$ بدست می آید.

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -2\\ -3 & \lambda+5\end{vmatrix}=0 \rightarrow \lambda^2+9\lambda+14=0$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی متمایز غیر تکراری دارد. برای محاسبه بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه

$$\lambda^2+9\lambda+14=(\lambda+7)(\lambda+2)=0 \rightarrow \lambda_1=-7, \lambda_2=-2$$

$$Av_i=\lambda_i v_i \rightarrow (\lambda_i I-A)v_i=0 \rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_i+4 & -2\\ -3 & \lambda_i+5\end{bmatrix}v_i=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-7 \rightarrow \begin{bmatrix}-3 & -2\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow -3x_1-2x_2=0 \rightarrow x_1=\frac{-2}{3}x_2 \rightarrow v_1=\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-2 \rightarrow \begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow 2x_3-2x_4=0 \rightarrow x_3=x_4 \rightarrow v_2=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی

$$adj(\lambda_i I - A) = adj\begin{bmatrix} \lambda_i + 4 & -2 \\ -3 & \lambda_i + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i + 5 & 2 \\ 3 & \lambda_i + 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -7 \rightarrow adj(-7I - A) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow adj(-2I - A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه v_1 و v_2 مستقل خطی هستند، برای این دترمینان ماتریس $[v_1 \quad v_2]$ را بدست می‌آوریم،

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10$$

از آنجاییکه مقدار دترمینان مخالف صفر است، لذا بردارهای ویژه v_1 و v_2 مستقل خطی هستند

قضیه

اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز باشد، آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی وجود خواهد داشت.

اثبات

بردارهای ویژه نظیر ← $v_1, v_2, \ldots v_n$ و مقادیر ویژه متمایز ← $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$

فرض کنیم فقط k تا از این بردارها مستقل خطی باشند،

$$v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 + v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \qquad (1)$$

طرفین رابطه (۱) را در A ضرب می‌کنیم،

$$A v_{k+1} = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 + \cdots + \alpha_k A v_k$$

می‌دانیم $A v_i = \lambda_i v_i$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k \qquad (2)$$

اگر طرفین رابطه (۱) را در $\lambda_k + 1$ ضرب کنیم،

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} v_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k \qquad (3)$$

حال رابطه (۲) − (۳) را بدست می‌آوریم،

$$\alpha_1 (\lambda_{k+1} \lambda_1) v_1 + (\lambda_{k+1} - \lambda_2) v_2 + \cdots + \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) v_k = 0$$

طبق فرض، $v_1, v_2, \ldots v_k$ مستقل خطی و مقادیر ویژه مجزا هستند، لذا باید،

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

بنابراین طبق رابطه (۱) باید $v_{k+1} = 0$ باشد که با شرط $v_{k+1} \neq 0$ بردار ویژه منافات دارد.

پس نمی‌توان v_{k+1} را بصورت ترکیب خطی از $v_1, v_2, \ldots v_k$ نوشت و $v_1, v_2, \ldots v_n$ مستقل خطی هستند.

نکته

اگر $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه تکراری λ_i از مرتبه k داشته باشد، آنگاه حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری λ_i وجود خواهد داشت.

تعداد بردارهای مستقل خطی در این حالت برابر با $\boxed{n - rank\,(A - \lambda_i I)}$ است.

مثال ۲

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}6&3&-8\\0&-2&0\\1&0&-3\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس Aبصورت زیر بدست می‌آید،

$$|\lambda I_3-A|=\begin{bmatrix}\lambda-6&-3&-8\\0&\lambda+2&0\\-1&0&\lambda+3\end{bmatrix}=0\rightarrow\lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می‌آوریم،

$$\lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=(\lambda+2)^2(\lambda-5)=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2}=-2,\lambda_3=5$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را با روش ماتریس الحاقی محاسبه می‌کنیم،

$$Adj(\lambda I-A)=Adj\begin{bmatrix}\lambda-6&-3&-8\\0&\lambda+2&0\\-1&0&\lambda+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2+5\lambda+6&3\lambda+9&-8\lambda-16\\0&\lambda^2-3\lambda-10&0\\\lambda+2&3&\lambda^2-4\lambda-12\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5\ \rightarrow\ Adj(5I-A)=\begin{bmatrix}56&24&-56\\0&0&0\\7&3&-7\end{bmatrix}\rightarrow v_3=\begin{bmatrix}24\\0\\3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-2\ \rightarrow\ Adj(-2I-A)=\begin{bmatrix}0&3&0\\0&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}\rightarrow v_3=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $n-rank(A-\lambda_1 I)=3-2=1$ است، لذا، برای مقادیر ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=-2$ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی داریم.

مثال ۳

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می‌آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می‌آوریم،

$$\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda^2+3\lambda+3)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=-2, \lambda_{2,3}=\frac{-3}{2}\pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد. بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را با استفاده از تعریف بردار ویژه بدست می‌آوریم،

$$Av_i=\lambda_i v_i \rightarrow \begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix} v_i = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-2 \rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}-x_1-2x_2+x_3=0\\ -x_1=0\end{cases} \rightarrow v_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\frac{-3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1\\ 0 & \frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -1 & 0 & \frac{-1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=\frac{-3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1\\ 0 & \frac{-1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -1 & 0 & \frac{-1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

قضیه کیلی – هامیلتون (Cayley - Hamilton):

هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می‌کند.

اگر معادله مشخصه به‌صورت زیر باشد،

$$\left|\lambda I - A\right| = \alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

آنگاه داریم،

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

اثبات قضیه کیلی – هامیلتون:

برای ماتریس $A_{n\times n}$ معادله مشخصه بصورت زیر است،

$$\left|\lambda I - A\right| = \alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n \qquad (1)$$

ماتریس الحاقی را می توان بصورت چند جمله ای ماتریس با درجه $n-1$ نمایش داد،

$$Adj(\lambda I - A) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1} \qquad (2)$$

$\mathrm{B}_0,\ldots\ldots\mathrm{B}_{n-1}$ ماتریس های $n\times n$ هستند.

از طرفی داریم،

$$(\lambda I - A)Adj(\lambda I - A) = \left|\lambda I - A\right| I \qquad (3)$$

رابطه (۱) و (۲) را در رابطه (۳) جایگذاری می کنیم،

$$(\lambda I - A)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)I$$

با مساوی قرار دادن ضرایب طرفین و ضرب معادلات در $I, A, A^2, \ldots A^{n-1}, A^n$ داریم،

$$\begin{array}{lll}
-AB_0 = \alpha_0 I & \rightarrow I\times \rightarrow & -AB_0 = \alpha_0 I \\
B_0 = -AB_1 = \alpha_1 I & \rightarrow A\times \rightarrow & AB_0 - A^2B_1 = \alpha_1 A \\
B_1 = -AB_2 = \alpha_2 I & \rightarrow A^2\times \rightarrow & A^2B_1 - A^3B_2 = \alpha_1 A^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
B_{n-2} = -AB_{n-1} = \alpha_{n-1} I & \rightarrow A^{n-1}\times \rightarrow & A^{n-1}B_{n-2} - \left|A^nB_{n-1} = \alpha_{n-1}A^{n-1}\right. \\
B_{n-1} = I & \rightarrow A^n \times \rightarrow & A^nB_{n-1} = A^n
\end{array}$$

حال طرفین معادلات را با هم جمع می کنیم،

$$0 = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A$$

مثال ۴ کاربرد قضیه کیلی – هامیلتون در محاسبه ماتریس معکوس

قضیه کیلی – هامیلتون را برای ماتریس A بررسی کنید و سپس با استفاده از آن مقدار A^{-1} را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می‌آید،

$$|\lambda I_2-A|=\begin{bmatrix}\lambda-6 & -16\\ 1 & \lambda+4\end{bmatrix}=0 \quad\to\quad \lambda^2-2\lambda-8=0$$

حال ماتریس A را در این معادله قرار داده و حاصل را محاسبه می‌کنیم،

$$A^2-2A-8I_2=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^2-2\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20 & 32\\ -2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & 32\\ -2 & -8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

بدین ترتیب صحت قضیه کیلی – هامیلتون تصدیق می‌شود.

برای محاسبه A^{-1} می‌توان بصورت زیر عمل کرد،

$$A^2-2A-8I_2=0\to\frac{1}{8}(A^2-2A)=I=AA^{-1}\to\quad \frac{1}{8}A(A-2I)=\mathrm{AA}^{-1}$$

بنابراین A^{-1} بصورت زیر محاسبه می‌شود،

$$A^{-1}=\frac{1}{8}(A-2I)\to\quad \mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2\\ \frac{-1}{8} & \frac{-3}{4}\end{bmatrix}$$

مثال ۵ کاربرد قضیه کیلی – هامیلتون در محاسبه چند جمله ای های ماتریسی

ماتریس A را در نظر بگیرید و چند جمله ای P(A) را برای آن بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix} \qquad P(A)=A^5+16A^4+32A^3+16A^2+4A+I$$

روش اوّل: جایگذاری مستقیم

با قرار دادن ماتریس A در چند جمله ای مذکور جواب را بدست می‌آوریم،

$$p(\mathrm{A})=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}+16\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^4+32\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^3+16\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$p(\mathrm{A})=\begin{bmatrix}1376 & 16\\ -176 & -384\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5376 & 10240\\ -640 & -1024\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2816 & 6144\\ -384 & -1024\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}320 & 512\\ -32 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}24 & 64\\ -4 & -16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$p(\mathrm{A})=\begin{bmatrix}9913 & 19776\\ -1236 & -2447\end{bmatrix} \qquad P(A)=\begin{pmatrix}9913 & 19776\\ -1236 & -2447\end{pmatrix}$$

همانطور که مشخص است این روش مستلزم توان رسانی های متعدد برای ماتریس A است و استفاده از آن برای چند جمله ای های مرتبه بالا بسیار دشوار می‌باشد.

روش دوم: استفاده از قضیه کیلی – هامیلتون

فرض کنید $p(\lambda)$ یک چندجمله ای مرتبه m و $Q(\lambda)$ چندجمله ای مشخصه ماتریس A باشد. حاصل تقسیم $\frac{p(\lambda)}{Q(\lambda)}$ را می‌توان بصورت زیر بیان کرد،

$$\frac{p(\lambda)}{Q(\lambda)}=F(\lambda)+\frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)} \quad \rightarrow p(\lambda)=F(\lambda)+R(\lambda)$$

که در آن، $F(\lambda)$ خارج قسمت و $R(A)$ باقیمانده تقسیمی باشند. حال اگر $\lambda=\lambda_i$ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه $Q(\lambda_i)=0$ خواهد بود و رابطه بالا بصورت زیر قابل نوشتن است،

$$p(\lambda_i)=F(\lambda)Q(\lambda_i)+R(\lambda_i)\rightarrow p(\lambda_i)=R(\lambda_i)$$

حال با توجه به قضیه کیلی – هامیلتون می‌توان نوشت، $P(A)=R(A)$

یعنی می توان به جای جایگذاری ماتریس A در چند جمله ای مرتبه بالا $P(A)$ می توان از چند جمله ای $P(\lambda)$ استفاده کرد که به مراتب درجه کمتری دارد.

حال با این مقدمه حاصل چند جمله ای $P(A)$ را بدست می آوریم، برای منظور دو راه کار وجود دارد،

۱- با انجام تقسیم دو چند جمله ای،

۲- بدون انجام تقسیم چند جمله ای،

۱- با انجام تقسیم چندجمله ای،

در این روش ابتدا تقسیم $\frac{p(\lambda)}{Q(\lambda)}$ را انجام داده و چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ را بدست می‌آوریم،

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 16\lambda^4 + 32\lambda^3 + 16\lambda^2 + 4 + I \qquad Q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$R(\lambda) = 1236\lambda + 2497$$

با توجه به قضیه کیلی – هامیلتون داریم،

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{R}(\mathrm{A})$$

$$p(\mathrm{A}) = 1236\,\mathrm{A} + 2497\,\mathrm{I} = 1236\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + 2497\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9913 & 19776 \\ -1236 & -2447 \end{bmatrix}$$

۱- با انجام تقسیم چندجمله ای،

در این روش تقسیم $\frac{p(\lambda)}{Q(\lambda)}$ انجام نمی شود. با توجه به مرتبه چند جمله ای مشخصه، بدیهی است که چندجمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ از مرتبه یک می‌باشد.
لذا آن را بصورت کلی زیر در نظر می‌گیریم،

$$\mathrm{R}(\lambda) = \mathrm{c}_1\,\lambda + c_0$$

حال مقدار c_1 و c_0 را بدست می‌آوریم.

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow R(\lambda_1) = P(\lambda_2) = \mathrm{c}_0 + c_1\lambda_1 \rightarrow 7441 = c_0 - 4c_1$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow R(\lambda_1) = P(\lambda_2) = \mathrm{c}_0 + c_1\lambda_2 \rightarrow 25 = c_0 - 2c_1$$

لذا با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=1236$ و $c_0=2497$ بدست می‌آید.

$R(\lambda) = 1236\lambda + 2497$

و با توجه به قضیه کیلی – هامیلتون می‌توان نوشت،

$$P(A) = R(A)$$

$$p(\mathrm{A}) = 1236\,\mathrm{A} + 2497 I = 1236\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + 2497\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9913 & 19776 \\ -1236 & -2447 \end{bmatrix}$$

مثال ۶

ماتریس A را در نظر بگیرید و چند جمله ای P(A) را به کمک قضیه کیلی – هامیلتون برای آن بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\quad,\quad P(\mathrm{A})=\mathrm{A}^5+16A^4+32A^3+16A^2+4A+I$$

- ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس را بدست می‌آوریم،

$$|\lambda I-A|=Q(\lambda)=(\lambda-2)^3\quad\rightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$$

با توجه به اینکه $Q(\lambda)$ مرتبه سه است، چند جمله ای باقیمانده تقسیم $\mathrm{P}(\lambda)$ بر $Q(\lambda)$ چند جمله ای مرتبه دو خواهد بود،

$$\mathrm{R}(\lambda)=\mathrm{c}_2\,\lambda^2+\mathrm{c}_1\,\lambda+c_0$$

حال مقدار c_2،c_1 و c_0 را بدست می‌آوریم،

$$\lambda_1=2\rightarrow\mathrm{R}(\lambda_1)=P(\lambda_1)=\mathrm{c}_0+\mathrm{c}_1\,\lambda_1+\mathrm{c}_2\,\lambda_1\rightarrow P(2)=\mathrm{c}_0+2c_1+4c_2$$

چون مقادیر ویژه تکراری هستند برای دو مقدار ویژه بعدی معادله جدیدی بدست نمی‌آید. در این مواقع از مشتقات $R(\lambda)$ کمک می‌گیریم . در این مسئله دو معادله دیگر باید بدست آوریم لذا از مشتق مرتبه اول و دوم $R(\lambda)$ استفاده می‌کنیم.

حال داریم،

$$\dot{R}(\lambda) = 2c_2\lambda + c_1 \qquad \ddot{R}(\lambda) = 2c_2$$

لذا مقادیر c_2، c_1 و c_0 از حل دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید،

$$\begin{cases} c_0 + 2c_1 + 4c_2 = P(2) = 617 \\ c_1 + 4c_1 + \dot{P}(2) = 1044 \\ 2c_2 = \ddot{P}(2) = 1344 \end{cases} \rightarrow \quad c_0 = -4159\ ,\ c_1 = -1644\ ,\ c_2 = 672$$

بنابراین داریم، $R(\lambda) = -672\lambda^2 - 1644\lambda - 4159$

با توجه به قضیه کیلی – هامیلتون می‌توان نوشت،

$$P(A) = R(A)$$

$$P(A) = 672A^2 - 1644A - 41591 = \begin{bmatrix} -4759 & 1044 & 672 \\ 0 & -4759 & 1044 \\ 0 & 0 & -4759 \end{bmatrix}$$