جبر خطی کاربردی

درس ۱۰ : مقادیر ویژه و بردار های ویژه

گروه کنترل– ۱۳۹۷

مدرس :دکتر عباداللهی

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

-معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر همگن با ضرایب ثابت،

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t)$$

پاسخ کلی ،

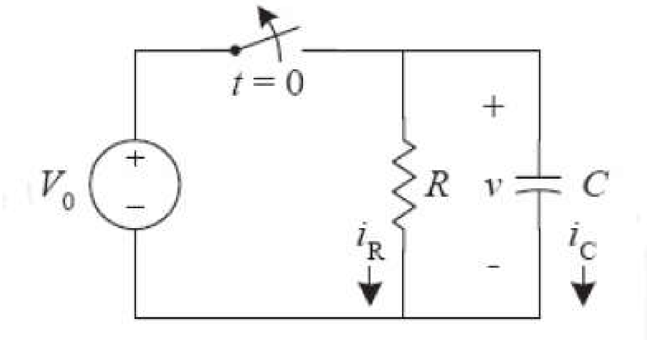
$$y(t) = e^{a(t-t_0)}\, y(t_0) + e^{at} \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau} bu(\tau)\, d\tau$$

زمان اولیه و $y(t_0)$ مقدار اولیه $y(t)$ است.

مثال کاربردی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن

مثال ۱

مدار الکتریکی زیر را در نظر بگیرید ،



اگر برای زمان های $t \le 0$ ولتاژ دو سر خازن $v(t) = V_0$ باشد ، و در لحظه t=0 کلید باز شود ، ولتاژ دو سر خازن را برای به دست آورید.

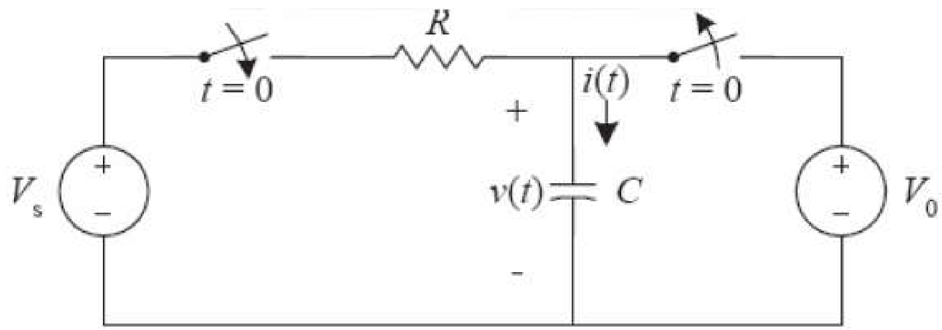
$$i_c(t) + i_R(t) = 0 \rightarrow C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = 0$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}v(t) \rightarrow \quad v(t)\begin{cases} V_0 e^{-t/RC} & t \ge 0 \\ V_0 & t \le 0 \end{cases}$$

لذا توانستیم با حل معادله دیفرانسیل همگن مرتبه اول ولتاژ دو سر خازن را به دست آوریم.

مثال ۲

مدار الکتریکی زیر را در نظر بگیرید،



اگر برای زمان های $t \le 0$ ولتاژ دو سر خازن $v(t) = V_0$ باشد ، و در لحظه t=0 کلید سمت راست باز شده و کلید سمت چپ بسته شود ، ولتاژ دو سر خازن را برای $t > 0$ به دست آورید.

با اعمال قوانین مدارهای الکتریکی معادلات دیفرانسیل مربوطه را به دست می‌آوریم،

$$V_s - v(t) = Ri(t) \rightarrow V_s - v(t) = RC\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}v(t) + \frac{1}{RC}v_s \rightarrow v(t)\begin{cases}(V_0 - V_s)e^{-t/RC} + V_s & t > 0\\ V_0 & t \le 0\end{cases}$$

در این مثال برای به دست آوردن ولتاژ دو سر خازن نیاز به حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر همگن داشتیم.

معادلات دیفرانسیل ماتریسی

- معادله دیفرانسیل مرتبه n سیستمی به فرم زیر باشد ،

$$y^{n}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0u(t)$$

با تعریف n متغیر جدید این معادله دیفرانسیل را به n معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می‌نماییم،

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t) \\ x_3(t)=\ddot{y}(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t)=y^{n-2}(t) \\ x_n(t)=y^{n-1}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=x_3(t) \\ \dot{x}_3(t)=x_4(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t)=x_n(t) \\ \dot{x}_n(t)=y^{(n)}(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}_n(t)=y^{(n)}(t)=-a_{n-1}y^{(n-1)}(t)-\ldots-a_1\dot{y}(t)-a_0y(t)+b_0u(t)$$

$$=-a_{n-1}x_n(t)-\ldots-a_1x_2(t)-a_0x_1(t)+b_0u(t)$$

صورت ماتریسی معادلات ،

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

- چنین طرز نمایش معادلات را فرم همبسته (companion form) گویند.
- متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را متغیرهای حالت می‌نامند .

صورت کلی معادلات دیفرانسیل ماتریسی ،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$A_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی، $B_{n\times 1}$ و $x_{n\times 1}$ هم بردار هستند.

مثال ۳

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید،

$$\ddot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t) - 3\,y(t) = u(t)$$

با تغییر متغیرهای فاز فرم همبسته آن را به دست آورید.

واضح است که در این جا دو متغیر فاز خواهیم داشت ،

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

حال معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه اول به صورت زیر به دست می آید،

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

نمونه ای از معادلات دیفرانسیل ماتریسی مرتبه اول

معادلات فضای حالت سیستم

State space equation

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}}$$

x(t) بردار متغیرهای حالت (state variable)

A ماتریس حالت سیستم

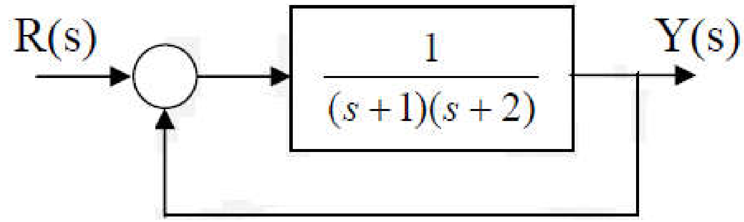
u(t) بردار متغیرهای ورودی

Y(t)بردار خروجی های قابل اندازه گیری

کاربرد در نمایش سیستم ها

نمایش سیستم با استفاده از تابع تبدیل

-سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید،



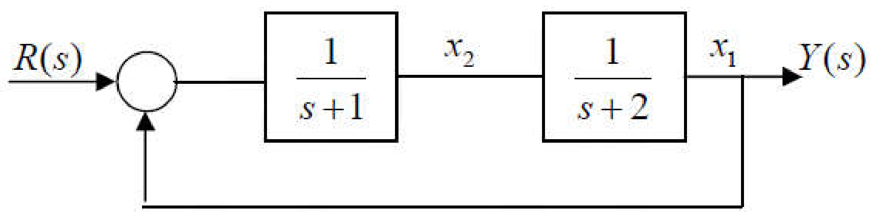
$$\boxed{G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)} \rightarrow T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^{2}+3s+s}}$$

$$\boxed{s=\frac{-3}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ریشه های چند جمله ای مشخصه قطب های حلقه بسته سیستم هستند.

نمایش سیستم با معادلات فضای حالت

-سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید،



$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s+2} \quad , \quad \frac{X_2(s)}{R(s) - X_1(s)} = \frac{1}{s+1}$$

با فرض این که شرایط اولیه صفر است،

$$\begin{cases} sX_1(s) + 2X_1(s) = X_2(s) \\ sX_2(s) + X_2(s) = R(s) - X_1(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) + r(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

نمایش ماتریسی معادلات حالت به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

ارتباط بین قطب ها و مقادیر ویژه

همانطور که در نمایش تابع تبدیل سیستم ها با تعیین محل قطب ها در مورد پایداری سیستم بحث می‌شد، در نمایش فضای حالت نیز مقادیر ویژه ماتریس حالت بیانگر قطب های سیستم خواهد بود. لذا مقادیر ویژه ماتریس حالت را به دست می‌آوریم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مشخص است که مقادیر ویژه ماتریس حالت همان قطب های سیستم حلقه بسته هستند .

چندنکته :

۱-یکتا نبودن نمایش فضای حالت .

۲-در انتخاب متغیرهای حالت باید استقلال خطی آن ها نسبت به یکدیگر را رعایت کرد .

۳-اگر متغیرهای حالت مستقل خطی باشند به آن نمایش مینیمال (minimal) گفته می‌شود .

۴- اگر متغیرهای حالت وابسته خطی باشند به آن نمایش غیر مینیمال گویند .

۵- اگر تابع تبدیل سیستم حلقه بسته اکیداً سره (strictly proper) باشد ، یعنی درجه صورت از مخرج کمتر باشد $D = 0$ است.

۶-اگر تابع تبدیل سیستم حلقه بسته سره (proper) باشد ، یعنی درجه صورت با مخرج برابر باشد ، $D \neq 0$ خواهد بود .

یکتا نبودن نمایش فضای حالت یک سیستم

برخلاف تابع تبدیل که یک نمایش منحصر به فرد از یک سیستم است، نمایش های فضای حالت متعددی برای یک سیستم می‌توان به دست آورد که بستگی به انتخاب متغیرهای حالت دارد . سه دسته عمده متغیرهای حالت عبارتند از ،

۱- متغیرهای فیزیکی　　۲- متغیرهای فاز　　۳- متغیرهای کانونیکال

متغیرهای حالت می‌تواند تعبیر فیزیکی داشته باشد و قابل اندازه گیری با سنسور باشد ، مانند ولتاژ ، جریان ، دما ، فشار و جابجایی .انتخاب متغیرهای حالت در روش فیزیکی بر اساس عناصر نگهدارنده انرژی سیستم هستند ، برخی از این عناصر عبارتند از ، خازن سلف ، جرم و فنر . همچنین متغیرهای حالت می تواند کاملا ریاضی باشد و تعبیر فیزیکی نداشته باشد و علت استفاده از آن ها برای ساده سازی محاسبات ریاضی است .

مثال ۴

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید،

$$\boxed{T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^2+3s+s}}$$

$$\left\{s^2Y(s)+3sY(s)+3Y(s)=R(s)\Rightarrow\left\{\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+3\,y(t)=r(t)\right.\right.$$

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t)\rightarrow\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t)\rightarrow\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=-3x_1(t)-3x_2(t)+r(t)\end{cases}$$

نمایش ماتریسی معادلات حالت ،

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\rightarrow \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}$$

حال اگر مقادیر ویژه ماتریس حالت را به دست آوریم همانند قبل خواهد بود ، لذا این دو نمایش مساوی (equal) نیستند ولی معادل (equivalent) هستند .

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 3 & \lambda+3\end{vmatrix}=0\rightarrow\lambda^2+3\lambda+3=0\rightarrow\qquad\lambda=\frac{-3}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

هریک از این نمایش ها یک تحقق فضای حالت از تابع تبدیل T(s) می باشد ، لذا به دست آوردن نمایش فضای حالت از روی تابع تبدیل سیستم را تحقق (realization) می‌نامند .

به دست آوردن تابع تبدیل سیستم از روی نمایش فضای حالت آن

برای به دست آوردن تابع تبدیل لاپلاس با فرض این که شرایط اولیه صفر باشد ، استفاده می‌کنیم،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sX(s) = AX(s) + B\,U(s) \\ yY(s) = CX(s) + D\,U(s) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \left(sI - A\right)X(s) = BU(s) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$(2) \rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

تابع تبدیل سیستم به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

اگر سیستم اکیداً سره باشد D=0 خواهد بود. به دست آوردن تابع تبدیل از روی نمایش فضای حالت سیستم را بازسازی (reconstruction)گویند.

مثال ۵

تابع تبدیل سیستمی با نمایش فضای حالت زیر را به دست آورید .

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{Adj(sI - A)}{|sI - A|} = \frac{1}{s^2 + 3s + 3} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+3s+3} & \frac{1}{s^2+3s+3} \\ \frac{-1}{s^2+3s+3} & \frac{s+2}{s^2+3s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}$$

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ماتریسی

فرم کلی دستگاه معادلات به شکل زیر می‌باشد ،

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)}$$

طرفین معادله را در ضریب e^{-At} ضرب کرده و سپس معادله را حل می‌کنیم ،

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)$$

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$$

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}bu(\tau)\,d\tau$$

حال با ضرب طرفین در e^{At} مقدار $x(t)$ به دست می‌آید،

-پاسخ کلی به فرم زیر می‌باشد ،

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}\,x(t_0)}_{\substack{\text{پاسخ آزاد}\\ \text{پاسخ ورودی صفر}}} + \underbrace{e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau}_{\substack{\text{پاسخ کنترل شده}\\ \text{پاسخ حالت صفر}}}}$$

t_0 زمان اولیه $x(t_0)$ بردار اولیه حالت می‌باشد .

ماتریس انتقال حالت (State Transition Matrix)

در رابطه به‌دست آمده برای $x(t)$ تابع نمایی e^{At} را می‌توان به صورت زیر بیان کرد ،

$$\boxed{e^{At} = \exp[At] = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(At)^n + \ldots}$$

ماتریس انتقال حالت

ماتریس انتقال حالت یک ماتریس مربعی برابر با ابعاد ماتریس A خواهد بود ، که آن را با نماد $\phi(t)$ نیز نمایش می‌دهند. این ماتریس بیان کننده پاسخ طبیعی یا بدون ورودی سیستم می‌باشد . به عبارتی اگر معادلات حالت را به صورت همگن $\left(u(t)=0\right)$ در نظر بگیریم ،

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t)}$$

در این صورت جواب کلی معادله همگن به شکل زیر خواهد بود ،

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) = \phi(t-t_0)x(t_0)$$

که همان پاسخ آزاد یا بدون ورودی سیستم خواهد بود که فقط به شرایط اولیه حالت ها بستگی دارد .

خواص ماتریس انتقال حالت

۱- می‌توان نشان داد ،

$$\phi(0) = I$$

۲- برای هر مقدار t_0, t_1, t_2 می‌توان نوشت ،

$$\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$$

۳- اگر α یک عدد صحیح باشد ،

$$\phi(t)\phi(t)\ldots\phi(t) = \phi^{\alpha}(t) = \phi(\alpha t)$$

۴-ماتریس انتقال حالت $\phi(t)$ یک ماتریس غیر منفرد ، لذا معکوس پذیر است و معکوس آن به صورت زیر به دست می‌آید ،

$$\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

معادلات فضای حالت

$$\phi(t) = e^{At}$$

ماتریس انتقال حالت

-روش های محاسبه ماتریس انتقال حالت

۱- روش سری ها

۲- روش تبدیل لاپلاس

۳- روش کیلی-هامیلتون

۴- روش قطری سازی

۱- روش سری ها

در این روش از تعریف سری e^{At} برای محاسبه استفاده می‌شود ،

$$\phi(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(At)^i$$

روند روش بسیار ساده به نظر می‌رسد ، لیکن برای ماتریس انتقال حالت با ابعاد بزرگ ، محاسبات دستی بسیار سنگین است و نیاز به برنامه کامپیوتری دارد ، همچنین از آن جاییکه بسط سری بی‌نهایت است ، به منظور خاتمه محاسبات نیاز به یک دستور نگهدارنده دارد تا تعداد جملات سری محدود گردد .

استفاده از روش سری ها

مثال ۶

معادلات فضای حالت سیستمی به صورت زیر می‌باشد ،

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)\end{cases}$$

اگر $u(t)$ پله واحد و $x(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ باشند ، پاسخ سیستم را پیدا کنید .

ابتدا با استفاده از روش سری ها ماتریس انتقال حالت سیستم را پیدا می‌کنیم ،

$$\boxed{e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 12 & 13\end{bmatrix}t^2+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}12 & 13\\ -39 & -40\end{bmatrix}t^3+\dots}$$

لذا ،

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1-\frac{3}{2}t^2+2t^3+\dots & t-2t^2+\frac{13}{6}t^3+\dots\\ -3t+6t^2-\frac{13}{2}t^3+\dots & 1-4t+\frac{13}{2}t^2-\frac{20}{3}t^3+\dots\end{bmatrix}$$

حال $e^{A(t-t_0)}x(t_0)$ را به‌دست می‌آوریم ،

$$e^{A(t-t_0)}x(t_0) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1+t-\frac{7}{2}t^2+\frac{25}{6}t^3+\dots \\ 1-7t+\frac{25}{6}t^2-\frac{79}{6}t^3+\dots \end{bmatrix}$$

سپس $\int_0^t e^{-At}Bu(\tau)d\tau$ را محاسبه می‌کنیم ،

$$\int_0^t e^{-At}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} -\tau-2\tau^2+\frac{13}{6}\tau^3+\dots \\ 1+4\tau+\frac{13}{2}\tau^2-\frac{20}{3}\tau^3+\dots \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+\dots \\ t+2t^2+\frac{13}{6}t^3-\frac{20}{12}t^4+\dots \end{bmatrix}$$

حال می‌توان $x(t)$ را به‌دست آورد ،

$$x(t) = e^{At}x(0)+\int_0^t e^{-At}Bu(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} 1+t-\frac{1}{12}t^2-\frac{9}{4}t^3+\dots \\ 1-6t+\frac{21}{2}t^2-11t^3+\dots \end{bmatrix}$$

لذا پاسخ سیستم به صورت $y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)$ به‌دست می‌آید ،

$$y(t) = 1+t-\frac{1}{12}t^2-\frac{9}{4}t^3+\dots$$

۲-روش تبدیل لاپلاس

ابتدا تبدیل لاپلاس معادلات حالت را به دست می‌آوریم ،

$$\dot{x}_1(t) = Ax(t) + Bu(t) \rightarrow \; sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

حال $X(s)$ را به دست می‌آوریم ،

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

یا به صورت زیر

$$X(s) = \phi(s)x(0) + \phi(s)BU(s)$$

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} \rightarrow \phi(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

-ماتریس $\phi(s)$ یک ماتریس n*n است که عناصر آن توابعی از اپراتور لاپلاس s می باشند و ماتریس انتقال حالت در حوزه s می باشد .

استفاده از روش تبدیل لاپلاس

مثال ۷

معادلات فضای حالت سیستمی به صورت زیر می‌باشد ،

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

اگر $u(t)$ پله واحد و $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشند ، پاسخ سیستم را پیدا کنید .

ابتدا با استفاده از روش تبدیل لاپلاس ماتریس انتقال حالت سیستم را پیدا می‌کنیم ،

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

حال مقدار X(s) را به دست می‌آوریم ،

$$X(s)=\phi(s)x(0)+\phi(s)BU(s)=\phi(s)\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{s}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{s^{2+}+5s+1}{s(s+1)(s+3)}\\[2ex]\dfrac{s-2}{(s+1)(s+3)}\end{bmatrix}$$

لذا X(s) و نهایتاً x(t) و y(t) به شکل زیر به دست می‌آیند ،

$$X(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1/3}{s}+\dfrac{3/2}{s+1}+\dfrac{-5/6}{s+3}\\[2ex]\dfrac{-3/2}{s+1}+\dfrac{5/2}{s+3}\end{bmatrix}\rightarrow x(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{2}e^{-t}-\dfrac{5}{6}e^{-3t}\\[2ex]-\dfrac{3}{2}e^{-t}+\dfrac{5}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{5}{6}e^{-3t}$$

۳- روش کیلی – هامیلتون

در این روش از کاربرد قضیه کیلی-هامیلتون در محاسبه چند جمله ای های ماتریسی استفاده کرده و ماتریس انتقال حالت را به دست می‌آوریم.

چندجمله ای مشخصه $$Q(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_1A^1 + c_0I = 0$$

$$P(A) = F(A)\,Q(A) + R(A) \rightarrow P(A) = R(A)$$

$$P(A) = e^{At} == I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(At)^n + \frac{1}{(n+1)!}(At)^{n+1} + \ldots$$

$$P(A) = e^{At} == I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \alpha_3(t)A^3 + \ldots + \alpha_n(t)A^n + \alpha_{n+1}(t)A^{n+1} + \ldots$$

ابتدا نشان می دهیم که تابع $P(A) = e^{At}$ را می‌توان بر حسب توان های A^0 تا A^{n-1} نمایش داد .

یعنی جملات با توان های n و بالاتر را می توان بر حسب توان های کمتر نمایش داد .

با توجه به معادله مشخصه داریم ،

$$A^n = -c_0 I - c_1 A - \ldots - c_{n-2} A^{n-2} - c_{n-1} A^{n-1} = f(A^0, \ldots, A^{n-1})$$

$$A^{n+1} = -c_0 A - \ldots - c_1 A^2 - \ldots - c_{n-2} A^{n-1} - c_{n-1} A^n = g(A^0, \ldots, A^{n-1})$$

یعنی تمام جملات مرتبه بالاتر از n را می توان بر حسب توان هایی از A^0 تا A^{n-1} نمایش داد . لذا در حالت کلی می‌توان $P(A) = e^{At}$ را به صورت زیر بیان کرد ،

$$\boxed{P(A) = e^{At} = \beta_0(t) I + \beta_1(t) A + \beta_2(t) A^2 + \beta_3(t) A^3 + \ldots + \beta_{n-1}(t) A^{n-1}}$$

به این ترتیب R(A) هم یک چند جمله ای محدود خواهد بود .

استفاده از روش کیلی – هامیلتون برای مقادیر ویژه متمایز

مثال ۸

معادلات فضای حالت سیستمی به صورت زیر می‌باشد ،

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

اگر $u(t)$ پله واحد و $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشند ، پاسخ سیستم را پیدا کنید .

ابتدا با استفاده از روش کیلی هامیلتون ماتریس انتقال حالت سیستم را پیدا می‌کنیم،

$$Q(t) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$$

بدین ترتیب چندجمله ای مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را به دست می‌آوریم ، که دو مقدار ویژه متمایر و حقیقی دارد.

با توجه به این که چندجمله ای مشخصه مرتبه دو است ، باقیمانده حاصل از تقسیم بسط $\phi(t)=e^{At}$ بر $Q(\lambda)$ مرتبه یک خواهد بود ،

$$R(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1$$

حال مقدار c_1 و c_0 را به دست می‌آوریم ،

$$\lambda_1=-1\rightarrow R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1\rightarrow e^{-t}=c_0-c_1$$

$$\lambda_2=-3\rightarrow R(\lambda_2)=P(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2\rightarrow e^{-3t}=c_0-3c_1$$

لذا با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right),\quad c_0=\frac{1}{2}\left(3e^{-t}-e^{-3t}\right)$ به دست می‌آید . با توجه قضیه کیلی-هامیلتون می‌توان نوشت ،

$$R(A)=P(A)$$

$$\phi(t)=e^{At}=c_0I+c_1A=\begin{bmatrix}c_0 & 0\\ 0 & c_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & c_1\\ 3c_1 & -4c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_0 & c_1\\ -3c_1 & c_0-4c_1\end{bmatrix}$$

$$\phi(t)=e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ -3e^{-t}+3e^{-3t} & -e^{-t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

با توجه به این که چند جمله ای مشخصه مرتبه سه است ، باقیمانده حاصل از تقسیم بسط $\phi(t) = e^{At}$ بر $Q(\lambda)$ مرتبه دو خواهد بود ،

$$(\lambda) = c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0$$

حال مقدار c_0, c_1, c_2 را به دست می‌آوریم ،

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow P(\lambda_1) = R(\lambda_1) = c_0 + c_1 \lambda_1 + 2 c_2 \lambda_1 \rightarrow e^{2t} = c_0 + 2c_1 + 4c_2$$

از آنجاییکه مقادیر ویژه تکراری هستند لذا برای به دست آوردن معادلات دیگر از مشتقات $R(\lambda)$ استفاده می نماییم .

$$\dot{R}(\lambda_1) = c_1 + 2 c_2 \lambda_1 \rightarrow \dot{R}(\lambda_1) = c_1 + 2 c_2 \lambda_1 \rightarrow t e^{2t} = c_1 + 4c_2$$

$$\ddot{R}(\lambda_1) = 2 c_2 \rightarrow \ddot{R}(\lambda_1) = 2 c_2 \rightarrow t^2 e^{2t} = 2c_2$$

حال مقدار x(t) و y(t) را به‌دست می‌آوریم ،

$$e^{A(t-t_0)}x(t_0)=e^{At}x(0)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4e^{-t}-2e^{-3t}\\-4e^{-t}+6e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-At}Bu(\tau)d\tau=\int_0^{t'}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-3t}\\-e^{-t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}dt=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{-2}{3}+e^{-t}\frac{-1}{3}e^{-3t}\\-e^{-t}+e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{-At}Bu(\tau)d\tau=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{-5}{6}e^{-3t}\\-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{5}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}X(t)=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{-5}{6}e^{-3t}$$

استفاده از روش کیلی-هامیلتون برای مقادیر ویژه تکراری
مثال ۹

اگر ماتریس حالت سیستمی به شکل زیر باشد ،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت آن را با روش کیلی – هامیلتون بیابید .

$$Q(t) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

بدین ترتیب چندجمله ای مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را به دست می‌آوریم ، که یک مقدار ویژه تکراری با مرتبه سه دارد.

با توجه به این‌که چند جمله ای مشخصه مرتبه سه است باقیمانده حاصل از تقسیم بسط $\phi(t) = e^{At}$ بر $Q(\lambda)$ مرتبه دو خواهد بود.

$$R(\lambda) = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

حال مقدار c_0, c_1, c_2 را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow R(\lambda_1) = P(\lambda_1) = c_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_1^2 \rightarrow e^{2t} = c_0 + 2c_1 + 4c_2$$

از آن‌جایی که مقادیر ویژه تکراری هستند باری به‌دست آوردن معادلات از مشتقات $R(\lambda)$ استفاده می‌کنیم.

$$\dot{R}(\lambda) = 2c_2\lambda + c_1 \rightarrow \dot{R}(\lambda_1) = 2c_2\lambda_1 + c_1 \rightarrow te^{2t} = 4c_2 + c_1$$

$$\ddot{R}(\lambda) = 2c_2 \rightarrow \ddot{R}(\lambda_1) = 2c_2 \rightarrow t^2e^{2t} = 2c_2$$

لذا دستگاه معادلات به صورت زیر به دست می‌آید که با حل این دستگاه معادلات مقدار c_0, c_1, c_2 به صورت زیر خواهد بود ،

$$\begin{cases} e^{2t} = c_0 + 2c_1 + 4c_2 \\ te^{2t} = c_1 + 4c_2 \\ t^2 e^{2t} = 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = e^{2t} - 2te^{2t} + 2t^2 e^{2t} \\ c_1 = te^{2t} - 2t^2 e^{2t} \\ c_2 = \dfrac{1}{2} t^2 e^{2t} \end{cases}$$

با توجه به قضیه کیلی – هامیلتون می‌توان نوشت ،

$$R(A) = P(A)$$

$$\phi(t) = e^{At} = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 2c_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 2c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4c_2 & 4c_2 & c_2 \\ 0 & 4c_2 & 4c_2 \\ 0 & 0 & 4c_2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس انتقال حالت به دست می آید ،

$$\phi(t) = e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \dfrac{t^2}{2} e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$