تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

فصل دوم:
سیگنال‌های تصادفی و
سیستم‌هایی با
ورودی‌های تصادفی

استاد مدرس:

دکتر سعید عبادالهی

فصل دوم

سیگنال‌های تصادفی و سیستم‌هایی با ورودی‌های تصادفی

مقدمه

در مسئله تخمین سیگنال $s(n)$ بر اساس اندازه‌گیری‌های $z(n) = g(s(n), v(n), nT)$ ، نویز $v(n)$ اغلب به طور تصادفی تغییر می‌کند و بنابراین مدلسازی آن مستلزم استفاده از روابط مربوط به سیگنال‌های تصادفی است.

در این فصل و به منظور مدلسازی سیگنال‌های تصادفی به موارد زیر خواهیم پرداخت:

- ✓ مفاهیم پایه مربوط به متغیرهای تصادفی
- ✓ بررسی سیگنال‌های زمان گسسته تصادفی
- ✓ بررسی سیستم‌های خطی زمان گسسته متغیر با زمان تحریک شده با ورودی‌های سیگنال تصادفی

مقدمه

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

- به‌طور کلی یک متغیر تصادفی برای آزمایشی با مجموعه نتایج ممکن S تعریف می‌شود.
- هر بار انجام آزمایش= یک آزمایه (یا یک سعی)
- در هر بار انجام آزمایش، یک نتیجه مانند α به طوریکه $\alpha \in S$
- پیشامد A : $A \subset S$
- در هر بار انجام آزمایش، پیشامد A در صورتی رخ داده است که نتیجه بدست آمده عضوی از آن باشد.
- پیشامد A را در نظر بگیرید. در هر بار انجام آزمایش یکی از دو پیشامد A یا $\overline{A}$ (یعنی متمم پیشامد A) رخ می‌دهد.
  - پیشامد قطعی=رویداد $A = S$
  - پیشامد غیرممکن= رویداد($A = \phi$) که در آن ϕ= مجموعه تهی
- متغیر تصادفی x تابعی از مجموعه S به مجموعه اعداد حقیقی است. به عبارت دیگر برای هر نتیجه $a \in S$ مقدار $x(\alpha)$ یک عدد حقیقی است.

مقدمه

$P(A)$ احتمال رخداد پیشامد A است. احتمال مربوط به وقوع پیشامدهای $A \subset S$ باید به گونه‌ای باشد که اصول زیر برآورده شوند:

$$0 \le P(A) \le 1$$
$$P(S) = 1$$
$$if \quad A \cap B = \varnothing \quad then \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad ***$$

برای هر دو زیرمجموعه از S مانند مجموعه های A و B خواهیم داشت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

زمانی که اصول ارائه شده در روابط *** برای توابع احتمالاتی برقرار باشد، مجموعه S را فضای احتمال می نامند.

مقدمه

متغیر تصادفی x تعریف شده بر فضای احتمال S برحسب تابع توزیع احتمال آن یعنی $F_x(x)$ به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$F_x(x) = P\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \leq x\} \quad , \quad F_x(x) \in [0,1]$$

بر اساس روابطی که بیان شد، در یک فضای احتمال، تابع توزیع احتمال $F_x(x)$ دارای خواص زیر است:

$$F_x(-\infty) = 0 \ , \ F_x(\infty) = 1$$

$$0 \leq F_x(x) \leq 1 \quad for \quad all \ \ x$$

$$If \quad x_1 < x_2 \quad then \quad F_x(x_1) \leq F_x(x_2) \quad **$$

لازم به ذکر است، بر اساس رابطه ** تابع $F_x(x)$ یک تابع غیرکاهشی از متغیر x است.

مقدمه

متغیر تصادفی x را می‌توان به وسیله تابع چگالی احتمال $f_x(x)$ نیز مشخص کرد که برابر با مشتق $F_x(x)$ است. به عبارت دیگر:

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$$

بنابراین می توان گفت که $F_x(x)$ برابر با انتگرال $f_x(x)$ است. به عبارت دیگر:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\, dx$$

بر اساس این رابطه، $F_x(\infty)$ برابر با یک است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

مقدمه

بنابراین سطح کل زیر منحنی تابع چگالی احتمال همواره برابر با یک است. از رابطه $F_x(x)=\int_{-\infty}^{x} f_x(x)\,dx$ و برای هر عدد حقیقی x_1 و x_2 با شرط برقراری رابطه $x_1 < x_2$ نتیجه می‌شود:

$$F_{\boldsymbol{x}}(x_2)-F_{\boldsymbol{x}}(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f_{\boldsymbol{x}}(x)\,dx$$

و با استفاده از تعریف تابع $F_x(x)$ خواهیم داشت:

$$P\{x_1 < \boldsymbol{x} \le x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} f_{\boldsymbol{x}}(x)\,dx$$

بنابراین احتمال قرار گرفتن مقدار متغیر تصادفی x بین دو مقدار x_1 و x_2 برابر با سطح زیر تابع چگالی احتمال از $x=x_1$ تا $x=x_2$ است.

مثال: متغیر تصادفی گسسته

فرض کنید آزمایش، بررسی عملکرد یک ماشین با مجموعه نتایج {عملکرد غیرعادی و عملکرد عادی} =S باشد.

احتمال وقوع این پیشامدها به صورت زیر است:

P {عملکرد غیرعادی} =۰/۱ و P {عملکرد عادی}=۰/۹

در اینجا، متغیر تصادفی x به صورت ۰= (عملکرد عادی) و ۱= (عملکرد غیرعادی) تعریف می‌شود.

$$F_x(x) = P\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \leq x\} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.9 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

و تابع چگالی احتمال آن برابر است با:

$$f_x(x) = 0.9\ \delta(x) + 0.1\ \delta(x-1)$$

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

مثال: متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

فرض کنید مجموعه نتایج S برای آزمایش اندازه‌گیری یک کمیت به صورت مجموعه اعداد بین ۱- و ۱ باشد. در این آزمایش متغیر تصادفی z به صورت $z(\alpha)=\alpha$ تعریف می‌شود.

تابع توزیع این متغیر تصادفی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$F_z(z)=\begin{cases}0 & z<-1\\ 0.5(z+1) & -1<z<1\\ 1 & z>1\end{cases}$$

و تابع چگالی احتمال آن برابر است با:

$$f_z(z)=\begin{cases}0.5 & ,-1<z<1\\ 0 & ,others\end{cases}$$

از آنجا که این تابع چگالی در طول بازه مقادیر ممکن اندازه‌گیری، ثابت است، مقادیر اندازه‌گیری شده دارای احتمال وقوع مساوی هستند. این متغیر تصادفی را متغیر تصادفی توزیع شده به صورت یکنواخت در بازه ۱- تا ۱ گویند،

متغیرهای تصادفی
سیگنال های زمان گسسته تصادفی
سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

مثال: متغیر تصادفی گوسی

مجدداً آزمایش اندازه‌گیری با مجموعه نتایج S را در نظر بگیرید که در آن هر پیامد می‌تواند عددی بین مقادیر ۱- و ۱ باشد. فرض کنید z یک متغیر تصادفی با مقدار z و برابر با مقدار اندازه‌گیری باشد. در مقایسه با متغیر تصادفی ارائه شده در مثال قبل، تابع چگالی احتمال به صورت زیر فرض می‌شود:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(z-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

- در این رابطه η یک عدد حقیقی و σ یک عدد مثبت است.

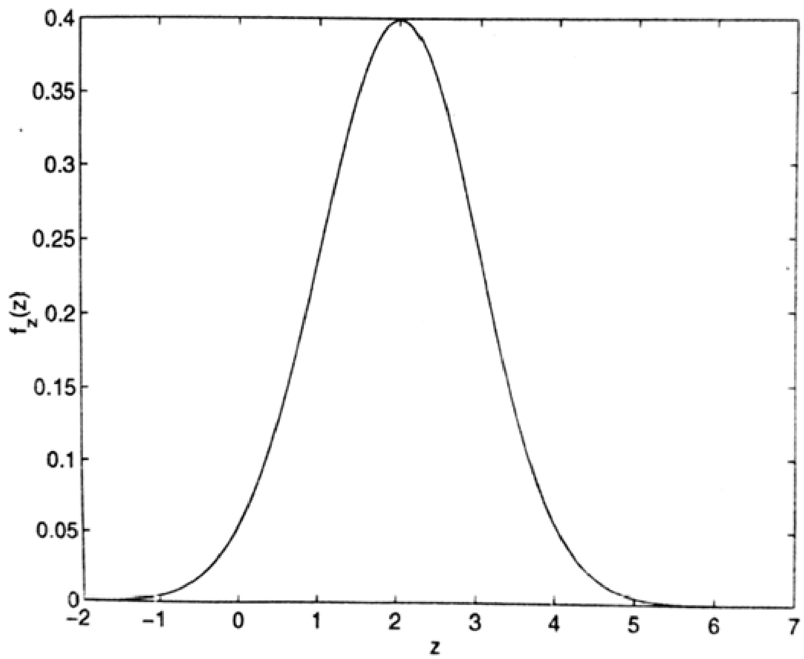
- متغیر تصادفی تعریف شده در رابطه بالا، متغیر تصادفی نرمال یا گوسی است.
- متغیر تصادفی گوسی ارائه شده با تابع چگالی احتمال بیان شده را گاهی به صورت زیر نیز نشان می دهند که N به جای کلمه نرمال قرار دارد:

$$z \approx N\left(\eta, \sigma^2\right)$$

مثال: متغیر تصادفی گوسی

در شکل زیر تابع چگالی گوسی را به ازای $\eta = 2 \; , \; \sigma = 1$ داریم:

- محتمل‌ترین مقدار z برابر با $z = 2$ است.



توابع چگالی و توزیع‌های شرطی

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

فرض کنید $\boldsymbol{x}$ یک **متغیر تصادفی** تعریف شده در فضای احتمال S و مجموعه $A \subset S$ یک **پیشامد** باشد. با در نظر گرفتن عدد x ، اشتراک $\{\boldsymbol{x} \le x\} \cap A$ پیشامدی متشکل از همه پیامدهای $\alpha \in S$ است که برای آنها روابط $\boldsymbol{x}(\alpha) \le x$ و $\alpha \in A$ نیز برقرار باشند.

تابع توزیع شرطی $F_x(x|A)$ برای متغیر تصادفی $\boldsymbol{x}$ با فرض آن که پیشامد A رخ داده باشد، به صورت احتمال شرطی رویداد $\{\alpha \in S: \boldsymbol{x}(\alpha) \le x\}$ با فرض رخداد پیشامد A تعریف می‌شود.

$$F_x(x|A) = P\left(\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \le x\} | A\right) = \frac{P\left(\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \le x\} \cap A\right)}{P(A)}$$

علاوه بر این، تابع چگالی شرطی $f_x(x|A)$ برابر با مشتق $F_x(x|A)$ نسبت به x است.

مثال: تابع توزیع شرطی

فرض کنید z یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[-1,1]$ بوده و A پیشامد نامنفی بودن اندازه گیری‌ها باشد:

$$A = \{z \in s : 0 \le z \le 1\}$$

در اینصورت داریم:

$$P(A) = 0.5$$

$$P\left(\{\alpha \cup S : \boldsymbol{x}(\alpha) \le x\} \cap A\right) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 0.5z & 0 \le z \le 1 \\ 0.5 & z > 1 \end{cases}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی

$$F_x(x|A) = P\left(\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \le x\}|A\right) = \frac{P\left(\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \le x\} \cap A\right)}{P(A)}$$

برای متغیر تصادفی z با فرض رخداد پیشامد A داریم:

$$F_z(z|A) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z & 0 \le z < 1 \\ 1 & z \ge 1 \end{cases}$$

توابعی از یک متغیر تصادفی

فرض کنید ψ یک تابع حقیقی تعریف شده بر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. یعنی:

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \psi(b) \in \mathbb{R}$$

در اینصورت داریم با در نظر گرفتن متغیر تصادفی x در فضای احتمال S ، می توان متغیر تصادفی جدید y را تعریف کرد که:

$$y = \psi(x)$$

در این رابطه تعریف می‌شود:

$$\forall \alpha \in S \quad \Rightarrow \quad y(\alpha) = \psi(x(\alpha))$$

مثال: مضرب اسکالر

عدد حقیقی a را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$a \in \mathbb{R} \quad , \quad a = const$$

فرض کنید ψ تابع تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$\psi(b) = ab$$

می توان متغیر تصادفی $y = \psi(x)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$y = ax$$

متغیر تصادفی $y =$ مضرب اسکالر متغیر تصادفی x

آنگاه برای تابع توزیع احتمال $F_y(y)$ داریم:

$$\boxed{for \quad y = ax \;\Rightarrow\; F_y(y) = F_x(y/a)}$$

مثال: انتقال

فرض کنید ψ تابعی تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$\psi(b) = a + b$$

در اینصورت متغیر تصادفی $y = \psi(x)$ ناشی از انتقال متغیر x به صورت زیر است:

$$y = x + a$$

یعنی داریم:

$$y(\alpha) = x(\alpha) + a$$

آنگاه برای تابع توزیع احتمال $F_y(y)$ داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} F_y(y) &= P\{\alpha \in S : \mathbf{y}(\alpha) \le y\} \\ &= P\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) + a \le y\} \\ &= P\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) \le y - a\} = F_x(y-a) \end{aligned}}$$

مثال: مجذور یک انتقال

فرض کنید ψ تابعی تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$\psi(b) = (b - a)^2$$

در اینصورت متغیر تصادفی $y = \psi(x)$ به صورت زیر است:

$$y = (x - a)^2$$

آنگاه برای تابع توزیع احتمال $F_y(y)$ داریم:

گشتاورهای یک متغیر تصادفی

متغیر تصادفی x را با تابع چگالی احتمال $f_x(x)$ در نظر بگیرید. آنگاه:

$$if \quad i \in \mathbb{Z} > 0$$

در اینصورت:

$E\left[x^i\right]$ = i امین گشتاور متغیر تصادفی x

که برای آن تعریف می‌شود:

$$E\left[x^i\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_x(x)\,dx$$

توجه!

گشتاورهای یک متغیر تصادفی : اعداد حقیقی هستند.

گشتاورهای یک متغیر تصادفی

اولین گشتاور متغیر تصادفی x یعنی $E\left[x\right]$ را :

<u>میانگین یا مقدار مورد انتظار (امید ریاضی)</u>

برای این متغیر نامند.

$$\boxed{if \quad i=1 \quad \Rightarrow \quad E\left[\boldsymbol{x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\boldsymbol{x}}\left(x\right) dx}$$

مرکز ثقل تابع چگالی احتمال

فرض کنید بعد از انجام N آزمایش، مقادیر زیر از متغیر x مشاهده شود:

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

x_i: مقادیر نمونه متغیر تصادفی x

$$if \quad N \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \to E\left[\boldsymbol{x}\right]$$

به عبارت دیگر:

هنگامی که تعداد نمونه‌ها به سمت بی‌نهایت میل کند، میانگین مقادیر نمونه‌ای متغیر به میانگین آن همگرا می‌شود.

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

مثال: مقدار میانگین یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت

می‌توان نشان داد که میانگین $E[x]$ برابر با نقطه میانی تابع چگالی $f_x(x)$ است.

به عبارت دیگر:

$$\boxed{E[\boldsymbol{x}] = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

مثال: مقدار میانگین یک متغیر تصادفی گوسی

یک متغیر تصادفی گوسی به صورت $x \approx N\left(\eta, \sigma^2\right)$ دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

با جایگذاری این تابع در رابطه زیر :

$$E[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\, dx$$

و انتگرال‌گیری از آن، داریم:

$$E[\mathbf{x}] = \eta$$

$$\boxed{E[\mathbf{x}] = MAX(f_x(x))}$$

بیانگر محتمل‌ترین مقدار متغیر تصادفی x

توابعی از یک متغیر تصادفی

متغیر تصادفی y به صورت $y = \psi(x)$ را فرض کنید.

میانگین متغیر تصادفی را به صورت زیر داریم:

$$\boxed{E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_x(x)\, dx}$$

به عنوان مثال:

$$if \quad for \quad a \in \mathbb{R}, a = const : y = ax$$

آنگاه به صورت مستقیم از رابطه بالا داریم:

$$\boxed{E[y] = aE[x]}$$

توابعی از یک متغیر تصادفی

گشتاور مرتبه‌ی دوم متغیر تصادفی x را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\boxed{E\left[\boldsymbol{x}^2\right]} \longrightarrow \text{میانگین مربعات}$$

از روابط پیشین به دست خواهیم آورد:

$$E\left[\boldsymbol{x}^i\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_x\left(x\right) dx \quad \overset{i=2}{\Longrightarrow} \quad E\left[\boldsymbol{x}^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x\left(x\right) dx$$

با استفاده از ویژگی‌های $f_x(x)$ برای هر متغیر تصادفی x خواهیم داشت:

$$\forall x \quad \Rightarrow \quad E\left[x\right] > 0$$

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_N$ مقادیر نمونه‌ای متغیر تصادفی x باشند، داریم:

$$\boxed{E\left[\boldsymbol{x}^2\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

توابعی از یک متغیر تصادفی

واریانس را به عنوان کمیت مرتبط با میانگین مربعات تصادفی x به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Var[\mathbf{x}] = E\left[(\mathbf{x} - \eta)^2\right]$$

η : میانگین متغیر تصادفی x

انحراف معیار این متغیر تصادفی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{Var[\mathbf{x}]}$$

σ : انحراف معیار

می توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} E[\mathbf{y}] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_{\mathbf{x}}(x)\,dx \\ Var[\mathbf{x}] = E\left[(\mathbf{x} - \eta)^2\right] \end{array}\right. \Rightarrow Var[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^2 f_{\mathbf{x}}(x)\,dx$$

توابعی از یک متغیر تصادفی

برای هر عدد اسکالر a خواهیم داشت:

$$\boxed{Var[a\mathbf{x}] = a^2 Var[\mathbf{x}]}$$

<u>واریانس یا انحراف معیار متغیر تصادفی x ، معیاری از پراکندگی مقادیر این متغیر نسبت به مقدا رمیانگین است.</u>

داریم:

$$if \quad \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad Var[\mathbf{x}] = E\left[\mathbf{x}^2\right]$$

$$if \quad \eta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Var[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx - 2\eta\int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 f_x(x)\,dx$$

$$= E\left[\mathbf{x}^2\right] - 2\eta E[\mathbf{x}] + \eta^2$$

می توان نتیجه گرفت:

$$\boxed{\overset{\eta = E[x]}{\Longrightarrow} \qquad Var[\mathbf{x}] = E\left[\mathbf{x}^2\right] - \left(E[\mathbf{x}]\right)^2}$$

مثال: میانگین مربعات متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت

برای متغیر تصادفی x با توزیع یکنواخت و با شرایط زیر :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \quad x_1 < x < x_2 \, , \; x_1 < x_2$$

داریم:

$$f_x(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

می توان نشان داد:

$$\boxed{E\left[\boldsymbol{x}^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\boldsymbol{x}}(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad E\left[\boldsymbol{x}^2\right] = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}}$$

مثال: واریانس یک متغیر تصادفی گوسی

متغیر تصادفی $x \approx N\left(\eta,\sigma^2\right)$ با تابع چگالی زیر در نظر بگیرید:

$$f_x\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

می‌خواهیم واریانس متغیر تصادفی x را محاسبه کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}\,\sigma$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}\,\sigma \quad \overset{\frac{d}{d\sigma}}{\Uparrow} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\eta)^2}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

پس:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\eta)^2}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad \overset{\times\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}}{\Uparrow} \quad Var\left[\mathbf{x}\right] = \sigma^2$$

برای متغیرهای تصادفی که دارای توزیع یکنواخت و یا توزیع گوسی هستند:

آگاهی از میانگین و واریانس=دانستن تابع چگالی یا توزیع آن‌ها

اما در حالت کلی، اطلاع از واریانس و میانگین برای تعیین تابع چگالی یا توزیع کافی نیست.

دو متغیر تصادفی

متغیر های تصادفی
سیگنال های زمان گسسته تصادفی
سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

دو متغیر تصادفی x و y را به‌طور مشترک توزیع شده گویند اگر هر دو در یک فضای احتمال یکسان تعریف شده باشند.

تعریف تابع توزیع مشترک:

$$F_{x,y}(x,y) = P\left(\{\mathbf{x} \le x, \mathbf{y} \le y\}\right)$$

تابع چگالی مشترک :

$$F_{x,y}(x,y) = P\left(\{\mathbf{x} \le x, \mathbf{y} \le y\}\right) \quad \overset{\frac{\partial}{\partial x \partial y}}{\Uparrow} \quad \boxed{f_{x,y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{x,y}(x,y)}{\partial x \partial y}}$$

و نیز خواهیم داشت:

$$P\left(\{x \le x, y \le y\}\right) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x} f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy$$

حال توابع چگالی حاشیه‌ای به یکی از دو روش زیر به دست می‌آیند:

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) \quad \overset{\int dx}{\Longrightarrow} \quad f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx$$

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) \quad \overset{\int dy}{\Longrightarrow} \quad f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dy$$

دو متغیر تصادفی

متغیر های تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

دو متغیر تصادفی x و y را به‌طور مشترک توزیع شده ، را ناهمبسته گویند اگر:

$$E[\boldsymbol{xy}] = E[\boldsymbol{x}]E[\boldsymbol{y}]$$

که در آن:

$$E[\boldsymbol{xy}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{x,y}(x,y)\,dxdy$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی x و y را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\boxed{\mathrm{Cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = E\left[(\boldsymbol{x} - E[\boldsymbol{x}])(\boldsymbol{y} - E[\boldsymbol{y}])\right]}$$

داریم:

$$Cov[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = 0 \longleftarrow$$

شرط لازم و کافی برای ناهمبسته بودن x و y

متغیرهای تصادفی x و y را مستقل گویند اگر داشته باشیم:

$$\boxed{F_{x,y}(x,y) = F_{x}(x)F_{y}(y) \quad \triangleq \quad f_{x,y}(x,y) = f_{x}(x)f_{y}(y)}$$

$$\boxed{f_{x,y}(x,y) = f_{x}(x)f_{y}(y)} \longleftarrow$$

شرط لازم و کافی برای مستقل بودن x و y

دو متغیر تصادفی

متغیرهای تصادفی
سیگنال های زمان گسسته تصادفی
سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

نتیجه: اگر دو متغیر تصادفی x و y مستقل باشند، ناهمبسته نیز هستند!

متغیر تصادفی z را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{z}(\alpha)=\psi\left(\boldsymbol{x}(\alpha),\boldsymbol{y}(\alpha)\right),\quad for\ \ all\ \ \alpha\in S$$

$$\Rightarrow\quad z=\psi(x,y)$$

که در آن z به صورت تابعی از x و y است.

داریم:

$$E[\boldsymbol{z}]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y)\,f_{x,y}(x,y)\,dxdy$$

مثال: جمع دو متغیر تصادفی

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

فرض کنید داریم:

$$z = x + y$$

نتیجه می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dy \\ f_y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx \\ E[z] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,y)\, f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy \end{aligned}\right\} \Longrightarrow E[z] = E[x] + E[y]$$

اگر x و y ناهمبسته باشند:

$$\boxed{\mathrm{Var}[z] = Var[x] + Var[y]}$$

و اگر متغیرهای تصادفی x و y مستقل باشند:

$$\boxed{f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y)\, f_y(y)\,dy = f_x(z) * f_y(z)}$$

مثال: جمع دو متغیر تصادفی گوسی

فرض کنید:

$$z = x + y$$

که در آن برای x و y داریم:

$$\boldsymbol{x} \approx N\left(\eta_x, \sigma_x^2\right)$$

$$\boldsymbol{y} \approx N\left(\eta_y, \sigma_y^2\right)$$

نتایج زیر به دست می‌آید:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x, y)\, dy$$

$$f_{\boldsymbol{y}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x, y)\, dx$$

→ متغیر x گوسی است.

$$E[\boldsymbol{z}] = E[\boldsymbol{x}] + E[\boldsymbol{y}]$$

$$\operatorname{Var}[\boldsymbol{z}] = Var[\boldsymbol{x}] + Var[\boldsymbol{y}]$$

→

$$\boxed{\begin{aligned} E[\boldsymbol{z}] &= \eta_x + \eta_y \\ \operatorname{Var}[\boldsymbol{z}] &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned}}$$

توابع چگالی شرطی

دو متغیر تصادفی x و y را به‌طور مشترک توزیع شده در نظر بگیرید. روابط زیر برای آن‌ها حاصل می‌شود:

$$\boxed{\begin{aligned} f_y\left(y \mid \mathbf{x}=x\right) &= \frac{f_{x,y}\left(x,y\right)}{f_x\left(x\right)} \\ f_x\left(x \mid \mathbf{y}=y\right) &= \frac{f_{x,y}\left(x,y\right)}{f_y\left(y\right)} \end{aligned}}$$

از این روابط نتیجه می‌شود:

$$f_x\left(x \mid \mathbf{y}=y\right) = \frac{f_{x,y}\left(x,y\right)}{f_y\left(y\right)} \quad \Rightarrow \quad f_{x,y}\left(x,y\right) = f_x\left(x \mid \mathbf{y}=y\right) f_y\left(y\right)$$

$$f_y\left(y \mid \mathbf{x}=x\right) = \frac{f_{x,y}\left(x,y\right)}{f_x\left(x\right)} \quad \xRightarrow{f_{x,y}(x,y)=f_x(x|\mathbf{y}=y)f_y(y)} \quad \boxed{f_y\left(y \mid \mathbf{x}=x\right) = \frac{f_x\left(x \mid \mathbf{y}=y\right) f_y\left(y\right)}{f_x\left(x\right)}}$$

فرمول بیز

مثال: تابع چگالی شرطی

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

رابطه $z = x + y$ را در نظر بگیرید که در آن دو متغیر تصادفی x و y مستقل هستند و

$$\boldsymbol{y} \approx N\left(0, \sigma_y^2\right)$$

تابع چگالی شرطی $f_z\left(z \,|\boldsymbol{x} = x\right)$ را بدست آورید.

حل:

روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$P\left\{\boldsymbol{z} \le z, \boldsymbol{x} = x\right\} = P\left\{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \le z, \boldsymbol{x} = x\right\}$$

$$= P\left\{\boldsymbol{y} \le z - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} = x\right\}$$

چون x و y مستقل هستند، خواهیم داشت:

$$\boxed{P\left\{\boldsymbol{y} \le z - x, \boldsymbol{x} = x\right\} = P\left\{\boldsymbol{y} \le z - x\right\} P\left\{\boldsymbol{x} = x\right\} \quad \Rightarrow \quad f_z\left(z \,|\boldsymbol{x} = x\right) = f_y\left(z - x\right)}$$

و نیز:

$$\boxed{\boldsymbol{y} \approx N\left(0, \sigma_y^2\right) \quad \Rightarrow \quad f_z\left(z \,|\boldsymbol{x} = x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \exp\left[-\frac{\left(z - x\right)^2}{2\sigma_y^2}\right]}$$

مثال: استفاده از فرمول بیز

رابطه $z = x + y$ را در نظر بگیرید که در آن دو متغیر تصادفی x و y مستقل هستند و :

$$\boldsymbol{x} \approx N\left(\eta_x, \sigma_x^2\right)$$

$$\boldsymbol{y} \approx N\left(0, \sigma_y^2\right)$$

تابع چگالی شرطی $f_x\left(x \middle| \boldsymbol{z} = z\right)$ را بدست آورید.

حل:

خواهیم داشت:

$$f_y\left(y \middle| \boldsymbol{x} = x\right) = \frac{f_x\left(x \middle| \boldsymbol{y} = y\right) f_y\left(y\right)}{f_x\left(x\right)} \quad \Rightarrow \quad f_x\left(x \middle| \boldsymbol{z} = z\right) = \frac{f_z\left(z \middle| \boldsymbol{x} = x\right) f_x\left(x\right)}{f_z\left(z\right)}$$

تابع چگالی شرطی $f_x\left(x \middle| \boldsymbol{z} = z\right)$ به دست می‌آید:

$$f_x\left(x \middle| \boldsymbol{z} = z\right) = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x \sigma_y} \exp\left[-\frac{\left(z - x\right)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\left(z - \eta_x\right)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\left(z - \eta_x\right)^2}{2\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)}\right]$$

نشان داده می‌شود که این تابع چگالی با میانگین و واریانس زیر است:

$$\eta_x + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\left(z - \eta_x\right) \quad , \quad \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

متغیر های تصادفی
سیگنال های زمان گسسته تصادفی
سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

توابع چگالی شرطی

دو متغیر تصادفی x و y به‌طور مشترک توزیع شده، را با تابع چگالی شرطی $f_y\left(y\,|\,\mathbf{x}=x\right)$ در نظر بگیرید. امید شرطی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$E\left[y\,|\mathbf{x}=x\right]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_y\left(y\,|\mathbf{x}=x\right)dy$$

فرض کنید تابع مقدار حقیقی ψ را داریم به طوری‌که:

$$\Psi\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_y\left(y\,|\,\mathbf{x}=x\right)dy$$

می‌توانیم متغیر تصادفی زیر را تعریف کنیم:

$$\Psi\left(\mathbf{x}\right)=E\left[\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\right]$$

بنابراین با در نظر گرفتن این تعریف به دست می‌آید:

$$\boxed{E\left[E\left[\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}\right]\right]=E\left[\mathbf{y}\right]}$$

مثال: امید ریاضی شرطی

رابطه $z = x + y$ را در نظر بگیرید. با میانگین زیر برای تابع گوسی $f_x\left(x \middle| z = z\right)$:

$$\eta_x + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\left(z - \eta_x\right)$$

نتیجه می‌شود:

$$\boxed{E\left[\mathbf{x} \middle| \mathbf{z} = z\right] = \eta_x + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\left(z - \eta_x\right)}$$

بنابراین $E\left[\mathbf{x} \middle| \mathbf{z}\right]$ متغیر تصادفی تعریف شده به صورت زیر است:

$$E\left[\mathbf{x} \middle| \mathbf{z}\right] = \eta_x + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\left(\mathbf{z} - \eta_x\right)$$

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

متغیرهای تصادفی برداری

برای عدد صحیح و مثبت N، N متغیر تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_N$$

که به صورت مشترک توزیع شده در فضای احتمال S تعریف شده‌اند. متغیر تصادفی برداری $\underline{\boldsymbol{x}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ . \\ . \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix}$$

که برداری ستونی N بعدی با درایه‌های $\boldsymbol{x}_i$ است. داریم:

$$\forall \alpha \in S \; : \; \underline{x}(\alpha) = \begin{bmatrix} x_1(\alpha) \\ x_2(\alpha) \\ . \\ . \\ x_N(\alpha) \end{bmatrix}$$

متغیرهای تصادفی برداری

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

میانگین $E[x]$ متغیر تصادفی x عبارت است از:

$$E[\underline{x}] = \begin{bmatrix} E[\boldsymbol{x}_1] \\ E[\boldsymbol{x}_2] \\ . \\ . \\ E[\boldsymbol{x}_N] \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x}$$

و کوواریانس x به صورت یک ماتریس $N \times N$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cov[\underline{x}] = E\left[(\underline{x} - E[\underline{x}])(\underline{x} - E[\underline{x}])^T\right]$$

برای هر متغیر تصادفی برداری Nبعدی $\underline{x}$ ، ماتریس $Cov[x]$ همواره ویژگی‌های زیر را دارد:

- مثبت معین $\approx$ متقارن بوده و مقادیر ویژه آن مثبت
- همواره معکوس‌پذیر

متغیرهای تصادفی برداری

متغیر های تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

برای هر ماتریس M با بعد $N \times N$ نشان داده می‌شود که:

$$Cov\,[M\underline{\boldsymbol{x}}] = M\,(Cov\,[\underline{\boldsymbol{x}}])M^{T}$$

برای متغیر تصادفی برداری $\underline{\boldsymbol{x}}$ تعریف می‌شود:

$$\boxed{F_{x}(\underline{x}) = P\{\boldsymbol{x}_1 \le x_1, \boldsymbol{x}_2 \le x_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N \le x_N\}} \longrightarrow \text{تابع توزیع}$$

$$\boxed{f_{x}(\underline{x}) = \frac{\partial^{N}}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_N} F_{x}(\underline{x})} \longrightarrow \text{تابع چگالی}$$

مثال: ترکیب خطی متغیرهای تصادفی

N متغیر تصادفی نرمال به طور مشترک توزیع شده را در نظر بگیرید:

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

x_iها را **به طور مشترک نرمال** گویند اگر هر ترکیب خطی زیر:

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_N \boldsymbol{x}_N$$

یک <u>متغیر تصادفی نرمال</u> باشد.

برای متغیر تصادفی برداری گوسی N بعدی $\underline{\boldsymbol{x}} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T$ تابع چگالی احتمال به صورت زیر است:

$$\boxed{f_x(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |P|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x} - E[\underline{\boldsymbol{x}}])^T P^{-1} (\underline{x} - E[\underline{\boldsymbol{x}}])\right]}$$

تابع چگالی گوسی N متغیره

این رابطه گاه به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{x}} \approx N\left(E[\underline{\boldsymbol{x}}], \mathrm{P}\right)}$$

مقدمه

یک سیگنال زمان گسسته تصادفی $x(n)$ رشته‌ای به صورت:

$$\ldots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots$$

از متغیرهای تصادفی به‌طور مشترک توزیع شده است که در فضای احتمال S تعریف شده‌اند.

$x(n)$: سیگنال تصادفی دو طرفه

این سیگنال تصادفی در حالت یک طرفه، رشته‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$x(0), x(1), x(2), \ldots$$

سیگنال زمان گسسته تصادفی بر حسب تابع خودهمبستگی‌اش به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\boxed{\begin{aligned} R_x(i, j) &= E\left[x(i)\,x(j)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(i)\,x(j)\,f_{x(i),x(j)}\big(x(i), x(j)\big)\,dx(i)\,dx(j); \\ &\quad \text{for all integers } i, j \end{aligned}}$$

مثال:تابع خود همبستگی

فرض کنید:

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) = a\boldsymbol{x}(n)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{x}(n) = a^{n}\boldsymbol{x}(0) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

و تابع خودهمبستگی برابر است با:

$$\boxed{R_x(i,j) = E\left[\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}(j)\right] = E\left[a^{i}\boldsymbol{x}(0)a^{j}\boldsymbol{x}(0)\right] = a^{i+j}E\left[\boldsymbol{x}(0)^{2}\right]}$$

مثال: سیگنال تصادفی خالص

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

فرض کنید متغیرهای تصادفی مربوط به سیگنال تصادفی $x(n)$ مستقل و همگی دارای میانگین صفر باشند.

بنابراین:

$$R_x(i,j) = E\left[\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}(j)\right] = \begin{cases} E\left[\boldsymbol{x}_i^2\right] & i = j \\ E\left[\boldsymbol{x}_i\right]E\left[\boldsymbol{x}_j\right] & i \neq j \end{cases}$$

$$for \quad i \neq j \;: \qquad R_x(i,j) = 0$$

هیچ همبستگی میان نمونه‌های سیگنالی در زمان‌های مختلف وجود ندارد.

چنین سیگنال تصادفی را گاهی <u>سیگنال تصادفی خالص</u> گویند.

سیگنال‌های ایستای ضعیف

متغیر های تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

سیگنال تصادفی زمان گسسته $x(n)$ را ایستا در مفهوم عام WSS یا ایستای ضعیف گویند،

اگر دو شرط زیر محقق گردد:

$$1.\ \forall n \in \mathbb{Z}\ :\ E\left[\boldsymbol{x}(n)\right] = c\ ,\ c = const$$

$$2.\ \forall i, j, k \in \mathbb{Z}\ :\ E\left[\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}(j)\right] = E\left[\boldsymbol{x}(i+k)\boldsymbol{x}(j+k)\right]$$

بنابراین:

$$E\left[\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}(j)\right] = E\left[\boldsymbol{x}(i+k)\boldsymbol{x}(j+k)\right] \xRightarrow[\forall n\in\mathbb{Z}]{for\ i=j} E\left[\left(\boldsymbol{x}(n)\right)^2\right] = const$$

$$\xRightarrow{\forall n\in\mathbb{Z}} Var\left[\boldsymbol{x}(n)\right] = const$$

اگر میانگین و واریانس سیگنال تصادفی ثابت باشد، ممکن است این سیگنال ایستای ضعیف نباشد!

یعنی شرط کافی نیست!

سیگنال‌های ایستای ضعیف

اگر $x(n)$ یک سیگنال تصادفی ایستای ضعیف باشد، تابع خودهمبستگی $R_x(\mathrm{i},\mathrm{j}) = E\left[\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}(j)\right]$ تابعی از تفاضل $i-j$ خواهد بود.

خودهمبستگی را می‌توان به عنوان تابعی از یک متغیر صحیح k در نظر گرفت. بنابراین:

$$R_x(k) = R_x(0,k) \qquad\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

با توجه به این تابع و از شرط دوم، خواهیم داشت:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} :\ R_x(k) = E\left[x(n)x(n+k)\right]}$$

داریم:

$$\boxed{R_x(0) = E\left[\left(\boldsymbol{x}(n)\right)^2\right]}$$

پس همواره $R_x(0)$ یک عدد حقیقی اکیداً مثبت خواهد بود. ← خودهمبستگی تابع زوجی از k است.

مثال: سیگنال غیر ایستا

سیگنال تصادفی $x(n)$ را به صورت زیر فرض کنید:

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) = a\boldsymbol{x}(n)$$

$$\boxed{R_x(i,j) = E\left[\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}(j)\right] = E\left[a^i\boldsymbol{x}(0)a^j\boldsymbol{x}(0)\right] = a^{i+j}E\left[\boldsymbol{x}(0)^2\right]}$$

واضح است که $R_x(\mathrm{i},\mathrm{j})$ تابعی از $i-j$ نیست. بنابراین $x(n)$ ایستا یا WSS نخواهد بود.

مثال: نویز سفید

فرض کنید متغیرهای تصادفی مربوط به سیگنال تصادفی $x(n)$ مستقل و دارای میانگین صفر باشند. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که، یک سیگنال ایستای ضعیف باشد آن است که:

$$E\left[\left(\boldsymbol{x}(n)\right)^2\right] = Var\left[\boldsymbol{x}(n)\right] \overset{\forall n\in\mathbb{Z}}{=} const$$

$$\boxed{if \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad : \quad Var\left[\boldsymbol{x}(n)\right] = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)}$$

که در آن $\delta(k)$ تابع ضربه واحد در $k=0$ است.

<u>سیگنال تصادفی با این تابع خود همبستگی ویژه را اغلب نویز سفید می‌نامند.</u>

مثال: سیگنال ایستای ضعیف

متغیر های تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{w}(\mathrm{n}) + \boldsymbol{w}(\mathrm{n}-1)$$

که در آن داریم:

$$w(n) : \text{ is white noise}$$

$$\forall n : \begin{cases} E\left[w(n)\right] = 0 \\ E\left[\left(w(n)\right)^2\right] = \sigma^2 \end{cases}$$

با توجه به نتایج مثال پیش رابطه زیر برقرار است:

$$R_w(k) = \sigma^2 \delta(k)$$

آنگاه شرط اول محقق می‌شود:

$$\boxed{E[z] = E[x] + E[y] \quad \overset{\forall n}{\Longrightarrow} \quad E\left[\boldsymbol{x}(n)\right] = E\left[\boldsymbol{w}(n)\right] + E\left[\boldsymbol{w}(n-1)\right] = 0}$$

مثال: سیگنال ایستای ضعیف

حال داریم:

$$
\begin{aligned}
E\left[\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}(j)\right] &= E\left[\left[\boldsymbol{w}(i)+\boldsymbol{w}(i-1)\right]\left[\boldsymbol{w}(j)+\boldsymbol{w}(j-1)\right]\right] \\
&= E\left[\boldsymbol{w}(i)\boldsymbol{w}(j)+\boldsymbol{w}(i)\boldsymbol{w}(j-1)+\boldsymbol{w}(i-1)\boldsymbol{w}(j)+\boldsymbol{w}(i-1)\boldsymbol{w}(j-1)\right] \\
&= E\left[\boldsymbol{w}(i)\boldsymbol{w}(j)\right]+E\left[\boldsymbol{w}(i)w(j-1)\right] \\
&\quad +E\left[\boldsymbol{w}(i-1)\boldsymbol{w}(j)\right]+E\left[\boldsymbol{w}(i-1)\boldsymbol{w}(j-1)\right]
\end{aligned}
$$

چون:

$\boldsymbol{x}(n) \Rightarrow$ WSS

مثال: سیگنال ایستای ضعیف

خواهیم داشت:

$$R_x(k) = E\left[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}(n+k)\right] = E\left[\left[\boldsymbol{w}(n)+\boldsymbol{w}(n-1)\right]\left[\boldsymbol{w}(n+k)+\boldsymbol{w}(n+k-1)\right]\right]$$

$$= E\left[\boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{w}(n+k)\right] + E\left[\boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{w}(n+k-1)\right]$$

$$+ E\left[\boldsymbol{w}(n-1)\boldsymbol{w}(n+k)\right] + E\left[\boldsymbol{w}(n-1)\boldsymbol{w}(n+k-1)\right]$$

از سوی دیگر با توجه به:

$$\forall n \ : \quad R_w(k) = E\left[\boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{w}(n+k)\right]$$

به دست می‌آید:

$$R_x(k) = R_w(k) + R_w(k-1) + R_w(k+1) + R_w(x)$$
$$= 2R_w(k) + R_w(k-1) + R_w(k+1)$$

$$R_w(k) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$\boxed{R_x(k) = \sigma^2\left[2\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k+1)\right]}$$

تخمین تابع خودهمبستگی

فرض کنید $x(n)$ سیگنال تصادفی باشد و

$$\begin{cases} x(n): is \quad \mathrm{WSS} \\ \mathrm{E}\left[x(n)\right] = 0 \end{cases}$$

مقادیر نمونه مشاهده شده از متغیرهای تصادفی $x(1), x(2), \ldots, x(N)$ از فرآیند تصادفی x(n) عبارتند از:

$$x(1), x(2), \ldots, x(N)$$

بنابراین:

$$\boxed{\begin{cases} \hat{R}_x(k) = \dfrac{1}{N-1} \displaystyle\sum_{i=0}^{N-k-1} x(i)x(i+k), & k = 0,1,2,\ldots,N-1 \\ \hat{R}_x(k) = \hat{R}_x(-k), & k = -1,-2,\ldots,-N+1 \end{cases}}$$

خودهمبستگی نمونه

در راستای برآورد میزان مناسب بودن تخمین $\hat{R}_x(k)$، می‌توان سیگنال تصادفی زیر را تعریف کرد:

$$\hat{\boldsymbol{R}}_x(k) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-k-1} \boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}(i+k), \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

تخمین تابع خودهمبستگی

بنابراین خواهیم داشت:

$$E\left[\hat{R}_x(k)\right]=\frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-k-1}E\left[x(i)x(i+k)\right]$$

$$\hat{R}_x(k)=\frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-k-1}x(i)x(i+k),k=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E\left[\hat{R}_x(k)\right]=\frac{N-k}{N-1}R_x(k)}$$

$\hat{R}_x(k)$ یک تخمین دارای بایاس از $R_x(k)$ است.

طیف توان

فرض کنید $x(n)$ یک سیگنال WSS با تابع خودهمبستگی $R_x(k)$ باشد. چگالی طیفی توان این سیگنال با تیدیل فوریه زمان گسسته تابع خودهمبستگی و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$S_x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k)e^{-j\omega k}$$

این تابع، توزیع توان را بر حسب فرکانس نشان می‌دهد. در خصوص چگالی طیفی توان داریم:

$$\begin{cases}
\omega : \text{frequeney variable} \\
R_x(k) : \text{even function of } k \\
S_x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k)e^{-j\omega k} \quad \Rightarrow \quad S_x(\mathrm{e}^{j\omega}) : \text{real valued} \\
\forall \omega \quad \Rightarrow \quad S_x\left(e^{j\omega}\right) \geq 0 \\
S_x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k)e^{-j\omega k} \quad \Rightarrow \quad S_x(\mathrm{e}^{j\omega}) : \text{is periodic fuction of } \omega \text{ with period } 2\pi
\end{cases}$$

مثال: طیف نویز سفید

فرض کنید سیگنال تصادفی $x(n)$ دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\begin{cases} x(n): white\ noise,\ E\left[x(n)\right]=0 \\ x(n): WSS \\ R_x(k)=\sigma^2\delta(k) \end{cases}$$

بنابراین:

$$\boxed{for\ all\ \ \omega:\ \ S_x(e^{j\omega})=\sigma^2}$$

در همه فرکانس‌ها دارای مؤلفه‌های طیفی با دامنه یکسان است که به همین دلیل به آن نویز سفید گفته می‌شود.

توان سیگنال(مقدار ثابت) $\boxed{\sigma^2\ :}$

دو سیگنال تصادفی

دو <u>سیگنال تصادفی</u>$y(n)$ و $x(n)$ را به‌طور مشترک توزیع شده گویند، اگر در یک فضای احتمالی یکسان S تعریف شده باشد.

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

$$\boxed{R_{x,y}(i,j)=E\left[x(i)y(j)\right],\ \ for\ all\ \text{integers}\ i,j}$$ $\Leftarrow$ تابع همبستگی متقابل $x(n), y(n)$

حال اگر داشته باشیم:

$$if \quad x(n), y(n): \text{WSS}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n,k \in \mathbb{Z}:\ R_{x,y}(i-j)=R_{x,y}(k)=E\left[x(n)y(n+k)\right]$$

تابع همبستگی متقابل $R_{x,y}(\mathrm{i},\mathrm{j})$ تابعی از $i-j$ است.

تابع خودهمبستگی خروجی

به دنبال دستیابی رابطه‌ای برای محاسبه تابع خودهمبستگی خروجی $y(n)$ بر حسب تابع خودهمبستگی ورودی $w(n)$ که یک سیگنال WSS است، برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان هستیم:

$$\begin{cases} w(n): & Input\ signal, WSS \\ y(n): & Ouput\ signal \end{cases}$$

$y(n)$ در فضای احتمال S به صورت زیر تعریف شده است:

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\,w(i)$$

فرضیات زیر را در نظر بگیرید:

- $h(n)$ مطلقا جمع‌پذیر و بنابراین سیستم پایدار ورودی-خروجی BIBO
- $w(n)$ سیگنال تصادفی ورودی و یک سیگنال ایستا

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم‌های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

تابع خودهمبستگی خروجی

داریم:

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\,w(i)$$

$$\rightarrow \quad E\left[y(n)\right]=E\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\,w(i)\right] \overset{\eta = E[w(n)]}{=} E\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\right]\eta$$

از طرفی خواهیم داشت:

$h(n)$ مطلقا جمع پذیر است.

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)=A$$

$h(n)$ is BIBO stable

$$\Rightarrow \qquad A: const$$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} E\left[y(n)\right]=E\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\,w(i)\right]=E\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\right]\eta \\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)=A \end{array}\right\} \overset{\forall n \in Z}{\Rightarrow} E\left[y(n)\right]=A\eta$$

میانگین خروجی ثابت است.

تابع خودهمبستگی خروجی

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم‌های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

داریم:

$$E\left[\boldsymbol{y}(i)\boldsymbol{y}(i)\right]=E\left[\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty}h(i-r)\boldsymbol{w}(r)\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(j-r)\boldsymbol{w}(l)\right)\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(i-r)h(j-l)E\left[\boldsymbol{w}(r)\boldsymbol{w}(l)\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(i-r)h(j-l)E\left[\boldsymbol{w}(r+k)\boldsymbol{w}(l+k)\right]\ ,\quad \textit{for all } k$$

با تغییر اندیس‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\bar{r}=r+k\\ \bar{l}=l+k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad E\left[\boldsymbol{y}(i)\boldsymbol{y}(i)\right]=\sum_{\bar{r}=-\infty}^{\infty}\sum_{\bar{l}=-\infty}^{\infty}h(i-\bar{r}+k)h(j-\bar{l}+k)E\left[\boldsymbol{w}(\bar{r})\boldsymbol{w}(\bar{l})\right]$$

$$=E\left[\boldsymbol{y}(i+k)\boldsymbol{y}(j+k)\right]$$

<u>بنابراین شرط دوم در تعریف ایستای ضعیف نیز محقق شده</u>

$$\boxed{\boldsymbol{y}(n):WSS}$$

تابع خودهمبستگی خروجی

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم‌های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

تابع خودهمبستگی خروجی $y(n)$ برابرست با:

$$R_y(k)=E\left[y(n)y(n+k)\right]=E\left[y(0)y(k)\right]$$

$$=E\left[\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty}h(-r)w(r)\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(k-l)w(l)\right)\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(-r)h(k-l)E\left[w(r)w(l)\right]$$

بنابراین:

$$\left.\begin{aligned}&E\left[w(r)w(l)\right]=E\left[w(0)w(l-r)\right]=R_w(l-r)\\&R_y(k)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(-r)h(k-l)E\left[w(r)w(l)\right]\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\boxed{R_y(k)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(-r)h(k-l)R_w(l-r)}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{R_y(k)=h(k)*h(-k)*R_w(k)}$$

مثال: تابع خودهمبستگی خروجی

سیستم علی خطی نامتغیر با زمان را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} h(n) = a^n , \; n \geq 0 \\ h(n) = 0 \;\;, \; n < 0 \\ |a| < 1 \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \Rightarrow \quad E\left[\mathbf{y}(n)\right] = \left(\frac{1}{1-a}\right) E\left[\mathbf{w}(n)\right]$$

و نیز:

$$R_y(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-r) h(k-l) R_w(l-r)$$

$$\Rightarrow \quad R_y(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{k-r-l} R_w(l-r)$$

حال:

$$if \begin{cases} \mathbf{w}(n) \text{: } white\ noise,\ E\left[\mathbf{w}(n)\right] = 0 \\ R_w(k) = \sigma^2 \delta(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R_y(k) = \sum_{r=-\infty}^{0} a^{k-2r} \sigma^2 = \sigma^2 a^k \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r} = \left(\frac{\sigma^2}{1-a^2}\right) a^k , \qquad for \;\; k \geq 0$$

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم‌های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

مثال: تابع خودهمبستگی خروجی

سیستم خطی نامتغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{y}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)w(i)$$

برای تابع همبستگی متقابل به دست می‌آوریم:

$$R_{wy}(k)=E\left[\boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{y}(n+k)\right]$$

$$\overset{if\ \ n=0}{\Longrightarrow} \qquad R_{wy}(k)=E\left[\boldsymbol{w}(0)\boldsymbol{y}(k)\right]$$

با جایگذاری داریم:

$$\overset{y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)w(i),\, n=k}{\Longrightarrow} \qquad R_{wy}(k)=E\left[\boldsymbol{w}(0)\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(k-i)\boldsymbol{w}(i)\right]$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(k-i)E\left[\boldsymbol{w}(0)\boldsymbol{w}(i)\right]=\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(j-i)R_w(i)}_{h(k)*R_w(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{wy}(k)=h(k)*R_w(k)}$$

چگالی طیفی توان خروجی

سیستم خطی نامتغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\,w(i)$$

چگالی طیف توان یا طیف توان $S_y(e^{j\omega})$ برای خروجی این سیگنال به صورت زیر خواهد بود:

$$R_y(k)=h(k)*h(-k)*R_w(k)\;\overset{\Im}{\Longrightarrow}$$

$$S_y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})S_w(e^{j\omega})$$

$H(e^{j\omega})$: تبدیل فوریه زمان گسسته تابع $h(n)$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$H(e^{-j\omega})$: مزدوج مختلط $H(e^{j\omega})$ است.

بنابراین:

$$\boxed{H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})=\left|H(e^{j\omega})\right|^2}$$

چگالی طیفی توان خروجی

لذا:

$$S_y\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{-j\omega}\right)S_w\left(e^{j\omega}\right)\quad\xRightarrow{H\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{-j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}$$

$$\boxed{S_y\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 S_w\left(e^{j\omega}\right)}$$

لازم به ذکر است:

$$\boxed{if\quad\begin{cases}w(n): white\ noise\\ E\left[w(n)\right]=0\\ \operatorname{var}\left[w(n)\right]=\sigma^2\end{cases}\quad\xRightarrow{S_w\left(e^{j\omega}\right)=\sigma^2}\quad S_w\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\sigma^2}$$

مثال: چگالی طیفی توان خروجی

فرض کنید سیستم زیر را داریم:

$$\begin{cases} h(n) = a^n \ , \ n \geq 0 \\ h(n) = 0 \ \ , \ n < 0 \\ |a| < 1 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

آنگاه:

$$H\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a\cos\omega + ja\sin\omega} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + a - 2a\cos\omega}} \\ \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \dfrac{1}{1 + a - 2a\cos\omega} \end{cases}}$$

مثال: چگالی طیفی توان خروجی

در ادامه فرض کنید که $x(n)$ را به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} x(n) : white\ noise \\ E\left[x(n)\right] = 0 \\ \mathrm{var}\left[x(\mathrm{n})\right] = \sigma^2 \end{cases} \Rightarrow S_w\left(e^{j\omega}\right) = \sigma^2$$

بنابراین داریم:

$$S_y\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 S_w\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow \boxed{s_y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sigma^2}{1 + a - 2a\cos\omega}}$$

و آنگاه تبدیل فوریه معکوس را:

$$\mathfrak{I}^{-1}\left[S_y\left(e^{j\omega}\right)\right] \Rightarrow \boxed{s_y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sigma^2}{1 + a - 2a\cos\omega}} \boxed{= R_y(\mathrm{k})}$$

$$\boxed{R_y(k) = \left(\frac{\sigma^2}{1-a^2}\right) a^k \quad , \quad k \geq 0}$$

این متناظر است با نتیجه مثال قبل

$$\Leftarrow \quad \boxed{\underbrace{R_y(k) = \left(\frac{\sigma^2}{1-a^2}\right) a^k , \quad for\ k \geq 0}}$$

تبدیل Z توابع بدست آمده

فرض کنید توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی متقابل به دست آمده را در حوزه z نمایش دهیم، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_y(z) = z\left[R_y(\mathrm{k})\right] \\ S_{wy}(z) = z\left[R_{wy}(\mathrm{k})\right] \end{cases}$$

$$z = e^{sT} = e^{j\omega T}$$

آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l} R_y(k) = h(k) * h(-k) * R_w(k) \\ R_{wy}(k) = h(k) * R_w(k) \end{array}\right\} \overset{z}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\begin{cases} S_y(z) = H(z)H(z^{-1})S_w(z) \\ S_{wy}(z) = H(z)S_w(z) \end{cases}}$$

نمایش معادله تفاضلی ورودی/خروجی

متغیر های تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

معادله تفاضلی ورودی/خروجی مشخص کننده سیستم LTI با ورودی تصادفی $w(n)$ تعریف شده در فضای احتمال S :

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)+\sum_{i=0}^{M} b_i w(n-i),\quad \begin{cases} N\in\mathbb{Z} \\ m\in\mathbb{Z}, m\geq 0 \\ a_i, b_i\in\mathbb{R} \end{cases}$$

تابع تبدیل $H(z)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_{M-1} z^{-M+1}+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots+a_{N-1} z^{-N+1}+a_N z^{-N}}$$

شرط لازم و کافی برای پایداری ورودی/خروجی (BIBO) $\Longleftarrow$ قطب های $H(z)$ درون دایره واحد صفحه مختلط باشند.

مثال: میانگین پاسخ خروجی

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان تعریف شده در رابطه بازگشتی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$y(n) = ay(n-1) + w(n)\ ,\ \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} \forall n \geq 0, h(n) = a^{n} \\ \forall n < 0, h(n) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

آنگاه با در نظر گرفتن شرط اولیه $E\left[y(-1)\right]$ داریم:

$$y(n) = ay(n-1) + w(n) \xrightarrow{E[\ ]} E\left[\boldsymbol{y}(n)\right] = aE\left[\boldsymbol{y}(n-1)\right] + E\left[\boldsymbol{w}(n)\right]$$

$$\boxed{E\left[\boldsymbol{y}(n+1)\right] = a^{n+1}E\left[\boldsymbol{y}(-1)\right] + \sum_{i=0}^{N} a^{n-1}E\left[\boldsymbol{w}(i)\right]}$$

مثال: تابع خودهمبستگی خروجی

سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان تعریف شده در رابطه بازگشتی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$y(n) = ay(n-1) + w(n)\ ,\ \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} \forall n \geq 0, h(n) = a^{n} \\ \forall n < 0, h(n) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

حال فرض کنید ورودی تصادفی $\boldsymbol{w}(n)$ در $n = -\infty$ به آن اعمال شده است. و نیز داریم:

$$E\left[\boldsymbol{w}(n)\right] = \eta, \eta : const$$

$$E\left[\boldsymbol{y}(n)\right] = E\left[\boldsymbol{y}(n-1)\right]$$

$$\boxed{y(n) = ay(n-1) + w(n) \Rightarrow (1-a)E\left[\boldsymbol{y}(n)\right] = E\left[\boldsymbol{w}(n)\right] = \eta}$$

$$\boxed{or \Rightarrow E\left[\boldsymbol{y}(n)\right] = \frac{\eta}{1-a},\quad n \geq 0}$$

مثال: محاسبه مستقیم تابع خودهمبستگی خروجی

سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان تعریف شده در رابطه بازگشتی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$y(n) = ay(n-1) + w(n) \;,\; \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} \forall n \geq 0, h(n) = a^n \\ \forall n < 0, h(n) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

حال فرض کنید ورودی تصادفی $\boldsymbol{w}(n)$، WSS و داریم:

$$R_y(k) = E\left[\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{y}(n+k)\right] = E\left[\boldsymbol{y}(n)\left(a\boldsymbol{y}(n+k-1) + \boldsymbol{w}(n+k)\right)\right]$$

و با توجه به اینکه $\boldsymbol{y}(n)$ برای مقادیر $j > n$ به $\boldsymbol{w}(j)$ وابسته نیست. بنابراین:

$$R_y(k) = E\left[\boldsymbol{y}(n)\left(a\boldsymbol{y}(n+k-1) + \boldsymbol{w}(n+k)\right)\right]$$

$$\xRightarrow{E\left[\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{w}(n+k)\right] = E\left[\boldsymbol{y}(n)\right]E\left[\boldsymbol{w}(n+k)\right],\, k\geq 1} R_y(k) = aE\left[\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{y}(n+k-1)\right], \quad k \geq 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad R_y(k) = a^k R_y(0), \quad k \geq 1}$$

متغیرهای تصادفی
سیگنال های زمان گسسته تصادفی
سیستم‌های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

مثال: محاسبه مستقیم تابع خودهمبستگی خروجی

همچنین خواهیم داشت:

$$R_y(0) = E\left[\mathbf{y}^2(n)\right] = E\left[\left(a\mathbf{y}(n-1) + \mathbf{w}(n)\right)^2\right] = a^2 R_y(0) + R_w(0)$$

$$\xRightarrow{R_y(0)} \quad \boxed{R_y(0) = \left(\frac{1}{1-a^2}\right) R_w(0)}$$

و آنگاه:

$$\xRightarrow{R_y(k) = a^k R_y(0),\quad k \geq 1} \quad \boxed{R_y(k) = \left(\frac{a^k}{1-a^2}\right) R_w(0), \quad k \geq 0}$$

مدل حالت

سیستم N بعدی را با شرایط زیر در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{r} LTI \\ w(n)\ \text{ورودی}\ m \\ y(n)\ \text{خروجی}\ p \end{array}\right\}$$

فرض کنید برای مدل فضای حالت آن داریم:

$$\begin{cases} x(n+1) = \Phi x(n) + \Gamma w(n) \\ y(n) = Cx(n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(n): \text{N-dimensional state vector} \\ \Phi: N \times N \ \text{ matrix} \\ \Gamma: \ \mathrm{N} \times \mathrm{M} \ \text{ matrix} \\ \mathrm{C}: \ \mathrm{p} \times \mathrm{N} \ \text{ matrix} \end{cases}$$

مدل حالت

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم‌های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

$$if \quad \begin{cases} w(n): \text{m-element random vector signal}, \quad \text{probability space:S} \\ \text{initial state}: x(0), \text{probability space:S} \end{cases}$$

مدل فضای حالت سیستم $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(n+1) = \Phi \mathbf{x}(n) + \Gamma \mathbf{w}(n) \\ \mathbf{y}(n) = C\mathbf{x}(n) \end{cases}$$

حال با محاسبه امید ریاضی خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \Phi \boldsymbol{x}(n) + \Gamma \boldsymbol{w}(n) \xRightarrow{E[\ ]} E\left[\boldsymbol{x}(n+1)\right] = \Phi E\left[\boldsymbol{x}(n)\right] + \Gamma E\left[\boldsymbol{w}(n)\right]$$

$$\boxed{\xRightarrow{E[\boldsymbol{x}(0)] = \boldsymbol{x}_0} \quad E\left[\boldsymbol{x}(n+1)\right] = \Phi E\left[\boldsymbol{x}(n)\right] + \Gamma E\left[\boldsymbol{w}(n)\right]}$$

مدل حالت

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم‌های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} &y(n) = Cx(n) \\ &E\left[x(n)\right] = \Phi^{n} x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^{n-i-1}\Gamma E\left[w(n)\right] \; for \quad n = 1,2,.... \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{E\left[y(n)\right] = C\Phi^{n} x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} C\Phi^{n-i-1}\Gamma E\left[w(n)\right] \quad for \quad n = 1,2,....}$$

حال:

$$\left.\begin{aligned} &E\left[x(n)\right] = \Phi^{n} x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^{n-i-1}\Gamma E\left[w(n)\right], \qquad for \quad n = 1,2,.... \\ &E\left[y(n)\right] = C\Phi^{n} x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} C\Phi^{n-i-1}\Gamma E\left[w(n)\right], for \quad n = 1,2,.... \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} if \quad \forall n : E\left[w(n)\right]=0 \\ \Longrightarrow \end{array} \begin{cases} E\left[x(n)\right] = \Phi^{n} x_0 \\ E\left[y(n)\right] = C\Phi^{n} x_0 \end{cases}}$$

مدل حالت

اکنون برای تعیین انتشار کواریانس $x(n)$ و $y(n)$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} &P(n) = Cov\left[\boldsymbol{x}(n)\right] \\ &Cov[\boldsymbol{x}] = E\left[\left(\boldsymbol{x} - E[\boldsymbol{x}]\right)\left(\boldsymbol{x} - E[\boldsymbol{x}]\right)^T\right] \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\Rightarrow P(n) = E\left[\left(\boldsymbol{x}(n) - E\left[\boldsymbol{x}(n)\right]\right)\left(\boldsymbol{x}(n) - E\left[\boldsymbol{x}(n)\right]\right)^T\right]}$$

اگر بردارهای سیگنال تصادفی برای همه مقادیر n مستقل فرض شوند، آنگاه:

$$\boxed{Cov\left[\Phi \boldsymbol{x}(n) + \Gamma \boldsymbol{w}(n)\right] = Cov\left[\Phi \boldsymbol{x}(n)\right] + Cov\left[\Gamma \boldsymbol{w}(n)\right]}$$

و نیز:

$Cov[M x] = M\left(Cov[x]\right)M^T$

$$\Rightarrow \begin{cases} Cov\left[\Phi \boldsymbol{x}(n)\right] = \Phi\, Cov\left[\boldsymbol{x}(n)\right]\Phi^T \\ Cov\left[\Gamma \boldsymbol{w}(n)\right] = \Gamma\, Cov\left[\boldsymbol{w}(n)\right]\Gamma^T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Cov\left[\boldsymbol{x}(n+1)\right] = \Phi\, Cov\left[\boldsymbol{x}(n)\right]\Phi^T + \Gamma\, Cov\left[\boldsymbol{w}(n)\right]\Gamma^T \\ or \\ P(n+1) = \Phi \underbrace{P(n)}_{\text{انتشار}} \Phi^T + \Gamma \operatorname{cov}\left[\boldsymbol{w}(n)\right]\Gamma^T \end{cases}$$

مدل حالت

متغیرهای تصادفی

سیگنال های زمان گسسته تصادفی

سیستم‌های زمان گسسته با ورودی های تصادفی

پس برای انتشار $P(n)$ داریم:

$$P(n+1)=\Phi P(n)\Phi^{T}+\Gamma \operatorname{cov}\left[\boldsymbol{w}(n)\right]\Gamma^{T} \quad \xRightarrow{P(0)=P_0}$$

$$\boxed{P(n)=\Phi^{n}P_{0}\left(\Phi^{T}\right)^{n}+\sum_{i=0}^{n-1}\Phi^{i}\Gamma \operatorname{cov}\left[w(i)\right]\Gamma^{T}\left(\Phi^{T}\right)^{i} \quad for \;\; n=1,2,\ldots}$$

و برای انتشار کواریانس $Cov\left[\boldsymbol{y}(n)\right]$ خواهیم داشت:

$$\boxed{Cov\left[\boldsymbol{y}(n)\right]=C\Phi^{n}P_{0}\left(\Phi^{T}\right)^{n}C^{T}+\sum_{i=0}^{n-1}C\Phi^{i}\Gamma \operatorname{cov}\left[\boldsymbol{w}(i)\right]\Gamma^{T}\left(\Phi^{T}\right)^{i}C^{T} \quad for \;\; n=1,2,\ldots}$$

مدل حالت

حال اگر رابطه زیر را به گونه‌ای اصلاح کنیم که نویز جمع شونده $\mathrm{v}(n)$ را نیز به آن اضافه کنیم، یعنی:

$$\boldsymbol{y}(n) = C\boldsymbol{x}(n) \xrightarrow{\mathbf{v}(n)} \boldsymbol{z}(n) = C\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{v}(n)$$

آنگاه:

$$Cov[\boldsymbol{y}(n)] = C\Phi^n P_0 \left(\Phi^T\right)^n C^T + \sum_{i=0}^{n-1} C\Phi^i \Gamma \operatorname{cov}[\boldsymbol{w}(i)]\Gamma^T \left(\Phi^T\right)^i C^T \quad for \;\; n = 1, 2, \ldots$$

$$\xRightarrow{if\ \forall n:\ \mathbf{x}(n), v(n)} \boxed{\begin{aligned} Cov[\boldsymbol{z}(n)] &= C\Phi^n P_0 \left(\Phi^T\right)^n C^T \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} C\Phi^i \Gamma Cov[\boldsymbol{w}(i)]\Gamma^T \left(\Phi^T\right)^i C^T + Cov[\boldsymbol{v}(n)] \end{aligned}}$$