جبر خطی کاربردی

درس ۱۲ : تجزیه مقادیر منفرد

گروه کنترل– ۱۳۹۷

مدرس : دکتر عباداللهی

مقادیر منفرد

برای ماتریس $A_{m\times n}$

ماتریس مثبت معین یا نیمه معین $\rightarrow \quad A^T A \;,\; A A^T$

۱- متقارن

۲- مقادیر ویژه حقیقی و غیر منفی

۳- بردارهای ویژه متعامد

مثال ۱

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow A^T A=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix} \quad , \quad A A^T=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ و $A A^T$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = (\lambda-5)(\lambda-7) \rightarrow \lambda_1=7,\lambda_2=5 \rightarrow v_1=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A A^T\right| = \lambda(\lambda-5)(\lambda-7) \rightarrow \lambda_1=7,\lambda_2=5,\lambda_3=0$$

$$v_1=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \quad , \quad v_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 1\end{bmatrix} \quad , \quad v_2=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{-3}{5}\\ 1\end{bmatrix}$$

مقدار منفرد (Singular Value)

مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با جذر مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$

مثال ۲

مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر است،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A^T A| = (\lambda - 5)(\lambda - 7) \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 7, \qquad \lambda_2 = 5$$

$$\sigma_1 = \sqrt{7} \quad , \qquad \sigma_2 = \sqrt{5}$$

در نرم افزار MATLAB دستور svd(A) و svds(A,k) وجود دارد.

کاربردها

-به‌دست آوردن رتبه ماتریس

-محاسبه عدد حالت ماتریس (condition numver) و تشخیص سیستم‌های ill condition

بدست آوردن رتبه ماتریس بر اساس مقادیر منفرد

رتبه یک ماتریس برابر است با تعداد مقادیر منفرد غیر صفر آن ماتریس

مثال ۳

با توجه به مقادیر منفرد ماتریس A رتبه ماتریس دو و رتبه ماتریس B سه است،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{7} \quad , \quad \sigma_2 = \sqrt{5} \rightarrow \quad rank(\mathrm{A}) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{18} \quad , \quad \sigma_2 = \sqrt{8} \, , \; \sigma_3 = 1 \rightarrow \quad rank(\mathrm{B}) = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \sigma_1 = 9.903 \quad , \quad \sigma_2 = 4.993 \, , \; \sigma_3 = 0 \rightarrow \quad rank(\mathrm{C}) = 2$$

محاسبه عدد حالت یا عدد شرطی (Condition Number)

برای ماتریس $A_{m\times n}$ نسبت بزرگترین مقدار منفرد به کوچکترین مقدار منفرد را **عدد حالت** ماتریس می‌نامند.

$$\kappa = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_k} \qquad , \qquad \kappa \geq 1$$

اگر κ مقدار کوچکی باشد← خوش حالت well condition

بردارهای ستونی ماتریس بخوبی مستقل خطی هستند.

اگر κ مقدار بزرگی باشد← بد حالت ill condition

بردارهای ستونی ماتریس نزدیک به وابستگی خطی هستند و ماتریس در حال منفرد شدن است.

خطای محاسباتی در معکوس کردن ماتریس A زیاد است.

مثال ۵

فرض کنید نتایج انجام یک سری آزمایشات تجربی منجر به بدست آمدن چنین دستگاه معادلات ماتریسی گردد،

$$Ax = b \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.7177 \\ 70.9241 \\ 82.9271 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه $|A| = -0.19170$ است، می توان آن را بصورت زیر حل کرد،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 34.7177 \\ 70.9241 \\ 82.9271 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.8000 \\ 0.7000 \end{bmatrix}$$

حال اگر این نتایج حاصل از یک اندازه گیری از یک آزمایش عملی باشد، در این‌صورت این احتمال وجود دارد که برخی از ارقام را به منظور سهولت در محاسبات گرد کنیم .با این فرض نتایج را مجدداً بررسی می‌نماییم،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 34.7 \\ 70.9 \\ 82.9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.68294 \\ 8.92282 \\ -3.50254 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود ، نتایج به‌طور چشم‌گیری تغییر نموده است.

بررسی علت موضوع

ابتدا مقادیر منفرد ماتریس A را به دست می‌آوریم،

$$A = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 100.0004 \qquad \sigma_2 = 100.0000 \qquad \sigma_3 = 0.0002$$

حال عدد حالت را بدست می‌آوریم،

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{100.0004}{0.0002} = 5.2164 \times 10^5 >> 1$$

عدد حالت مقدار بسیار بزرگی است، لذا ماتریس A نزدیک به منفرد شدن است. در این صورت اعمال تغییرات بسیار کوچکی در بردار b سبب بروز خطای بزرگی در بردار x می‌شود.

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$A_{m\times n} x_{n\times 1} = b_{n\times 1} \qquad \rightarrow \quad x = A^{-1} b$$

اگر b شامل نویز یا خطای محاسباتی ناشی از گرد کردن مانند Δb باشد، در غیر این صورت این خطا بصورت زیر در پاسخ ظاهر خواهد شد،

$$x + \Delta x = A^{1}(b + \Delta b) \qquad \rightarrow \quad \Delta x = A^{-1} \Delta b$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت،

$$\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\| \; \|\Delta b\|$$

برای $\|A^{-1}\|$ های کوچک ← مقدار $\|\Delta x\|$ کوچک است، اگر $\|\Delta b\|$ مقدار کوچکی داشته باشد.

برای $\|A^{-1}\|$ های بزرگ ← مقدار $\|\Delta x\|$ بزرگ است، اگر $\|\Delta b\|$ مقدار کوچکی داشته باشد.

تجزیه ماتریس ها بر اساس مقادیر منفرد (Singular Value Decomposition)

برای ماتریس $A_{m\times n}$ با رتبه k،

$$\boxed{A = U \Sigma V^T}$$

ماتریس متعامد $n \times n$

بردار ویژه $A^T A$

ماتریس متعامد $m \times m$

بردار ویژه $A A^T$

ماتریس $m \times n$ با عناصر قطری مقادیر منفرد

$$\Sigma_{m\times n} = diag(\sigma_1, \ldots\ldots \sigma_p)$$
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0 \quad , \quad \sigma_{k+1} = \cdots = \sigma_P = 0$$

دستور [U,S,V]=svd(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

مثال ۶

ماتریس A را توسط مقادیر منفرد تجزیه نمایید.

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = U\Sigma V^T$$

باید ماتریس $A_{2\times 3}$ را بصورت $A = U\Sigma V^T$ تجزیه کنیم.

برای بدست آوردن ماتریس $U_{2\times 2}$ باید بردارهای ویژه یکامتعامد AA^T را بیابیم.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس AA^T را بدست می‌آوریم،

$$\left|\lambda I - AA^T\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 11 & -1 \\ -1 & \lambda - 11 \end{vmatrix} = (\lambda - 12)(\lambda - 10)$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس AA^T عبارتند از،

$$\lambda_1 = 12 \; , \qquad \lambda_2 = 10$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می‌آوریم،

$$(AA^T - \lambda_1 I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(AA^T - \lambda_2 I)u_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{2\times 2}$ بصورت زیر بدست می‌آید،

$$[u_1 u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس متعامد $U_{2\times 2}$ به شکل زیر بدست می‌آید،

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ماتریس $V_{3\times3}$ نیز باید از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس $A^T A$ بدست آید. مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$ بصورت زیر است،

$$\lambda_1 = 12 \qquad \lambda_2 = 10 \qquad \lambda_3 = 0$$

ماتریس $A^T A$ سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را به‌دست می‌آوریم،

$$(A^T A - \lambda_1 I)\, v_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - \lambda_2 I)\, v_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - \lambda_3 I)\, v_3 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times3}$ بصورت زیر به‌دست می‌آید،

$$[v_1 \;\; v_2 \;\; v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ماتریس متعامد $V_{3\times 3}$ بصورت زیر به‌دست می‌آید،

$$V=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

نهایتاً ماتریس $\Sigma_{2\times 3}$ با استفاده از مقادیر منفرد محاسبه شده بصورت زیر به‌دست می‌آید،

$$\Sigma_{2\times 3}=\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور $[u,s,v]=svd(A)$ در نرم افزار MATLAB داریم

```
A=[3  1  1;-1  3 1 ]
[u  ,s  ,v ]=svd(A)
u=
0.7071          0.7071
-0.7071          0.7071
s=
0               0          3.4641
0          3.1623               0
v=
0.1826          0.8944          0.4082
0.3651         -0.4472          0.8165
-0.9129         -0.0000          0.4082
```

کاربرد تجزیه مقادیر منفرد

به‌دست آوردن چهار زیر فضای اصلی ماتریس (fundamental subspaces)

$$\boxed{R(A), N(A), R(A^T), N(A^T)}$$

محاسبه نرم ماتریس ها

محاسبه شبه معکوس (pseudo inverse) ← حل مسئله حداقل مربعات در حالت کلی

تقریب ماتریس با یک ماتریس رتبه پایین ← کاهش نویز و فشرده سازی داده ها

بدست آوردن چهار زیر فضای اصلی ماتریس

$$\boxed{A = U\Sigma V^T \;\rightarrow\; AV = U\Sigma \;\rightarrow\; Av_i = \sigma_i u_i}$$

بردارهای منفرد راست

(right singular vectors)

بردارهای منفرد چپ

(left singular vectors)

هر بردار $\underline{v}_i$ به یک بردار متناظر $\underline{u}_i$ نگاشت می‌شود، که اندازه این نگاشت برابر با σ_i است.

$$\mathbf{v}_i \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow \sigma_i \mathbf{u}_i$$

چهار زیر فضای اصلی ماتریس

با در نظر گرفتن مقادیر منفرد صفر ماتریس $A_{m\times n}$

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \left[\underbrace{u_1 \; \dots \; u_k}_{\text{Basis for R(A)}} \;\middle|\; \underbrace{u_{k+1} \; \dots \; u_m}_{\text{Basis for N}(A^T)}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \\ \hline v_{k+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Basis for R}(A^T) \\ \\ \text{Basis for N(A)} \end{array}$$

$$i = 1,\dots,k \quad , \quad Av_i = u_i\sigma_i \neq 0 \quad \rightarrow \quad u_i \in R(A)$$

$$i = k+1,\dots.m \quad u_i^T A = u_i v_i^T = 0 \rightarrow A^T u_i = 0 \quad \rightarrow \quad u_i \in N(A^T)$$

$$i = 1,\dots,k \quad , \quad u_i^T A = \sigma_i v_i^T \neq 0 \rightarrow A^T u_i = \sigma_i v_i \neq 0 \quad \rightarrow \quad v_i \in R(A^T)$$

$$i = k+1,\dots.,n \quad , \quad Av_i = u_i\sigma_i = 0 \quad \rightarrow \quad v_i \in N(A)$$

ماتریس A مانند تبدیلی است که فضای سطرها یعنی $R(A^T)$ را به فضای ستون ها یعنی $R(A)$ و فضای پوچی یعنی $N(A)$ را به فضای پوچی چپ یعنی $N(A^T)$ می‌نگارد.

مثال ۷

با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد پایه‌های چهار زیر فضای اساسی ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2\\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9\\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}0.815 & -0.8445 & 0.2953\\ 0.4784 & -0.2043 & 0.2504\\ 0.7753 & 0.4359 & 0.2055\\ 0.3701 & 0.2347 & -0.8988\end{matrix}}_{basis for R(A)} \quad \underbrace{\begin{matrix}0.4082\\ -.08165\\ 0.4082\\ 0\end{matrix}}_{basis for N(A)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc}18.2244 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8.3717 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.8875 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\left[\underbrace{\begin{matrix}0.0788 & -0.0732 & 0.8463\\ 0.4085 & -0.2240 & 0.2457\\ -0.7383 & 0.3748 & 0.3548\\ 0.3421 & 0.0302 & 0.3110\\ 0.4059 & -0.8961 & 0.0283\end{matrix}}_{basis for R(A)} \quad \underbrace{\begin{matrix}0.5050 & 0.1313\\ 0.6504 & 0.5473\\ 0.4331 & 0.0307\\ 0.3596 & -0.8100\\ 0.0719 & -0.1620\end{matrix}}_{basis for N(A)}\right]^r$$

$$A=\left[\overbrace{\begin{matrix}0.815 & -0.8445 & 0.2953\\ 0.4784 & -0.2043 & 0.2504\\ 0.7753 & 0.4359 & 0.2055\\ 0.3701 & 0.2347 & -0.8988\end{matrix}} \quad \overbrace{\begin{matrix}0.4082\\ -0.8165\\ 0.4082\\ 0\end{matrix}}\right]\left[\begin{array}{ccc|cc}18.2244 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8.3717 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.8875 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{matrix}0.0788 & 0.4085 & -0.7383 & 0.3421 & -04059\\ 0.0732 & -0.2240 & 0.3748 & 0.0302 & -0.8961\\ 0.8463 & 0.2457 & 0.3548 & 0.3110 & 0.0283\\ -05050 & 0.6504 & 0.4331 & 0.3596 & 0.0719\\ 0.1313 & 0.5473 & 0.0307 & -0.8100 & -0.1620\end{matrix}\right\}$$

بدست آوردن نُرم ماتریس‌ها

نُرم یک ماتریس حداکثر بزرگنمایی یا بهره آن را تحت چنین تبدیلی نشان می‌دهد،

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow A\mathbf{x}$$

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \; gain(x) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\mathbf{v}_i \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow \sigma_i \mathbf{u}_i$$

$$\boxed{\|A\| = \max_{v_i \neq 0} \frac{\|Av_i\|}{\|v_i\|} = \max_{v_i \neq 0} \frac{\|\sigma_i u_i\|}{\|v_i\|} = \max_{v_i \neq 0} \frac{\sigma_i \|u_i\|}{\|v_i\|} = \max_{v_i \neq 0} \sigma_i}$$

$$\boxed{\|A\| = \sigma_1 \qquad , \qquad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}}$$

مثال ۸

با محاسبه مقادیر منفرد ماتریس ها نُرم ماتریس های زیر را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_1 = 9.7714, \quad \sigma_1 = 5.8467, \quad \sigma_1 = 1.1552 \rightarrow \|A\| = 9.7714$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1 \rightarrow \|B\| = 1$$ ماتریس متعامد

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_1 = 7, \quad \sigma_2 = 4, \quad \sigma_3 = 3 \rightarrow \|C\| = 7$$ ماتریس قطری