جبر خطی کاربردی

درس ۶ : فضاهای برداری و متعامدسازی

گروه کنترل– ۱۳۹۷

مدرس :دکتر عباداللهی

مروری بر مطالب :

میدان و فضای برداری (Field and Vector Space)

زیر فضای برداری (Vector Subspace)

فضای ستون های ماتریس — فضای پوچی ماتریس

Column space — Null space

مفهوم اسپن (Span)

استقلال و وابستگی خطی بردارها

مفهوم پایه و بعد در فضای برداری (Basis and Dimension)

تغییر پایه در فضای برداری

فضای گسترده ماتریس (Range space)

رتبه ماتریس(Rank)

ارتباط رتبه و پوچی ماتریس(Rank and Nullity)

تغییر پایه در فضای برداری

می‌دانیم،

-در فضای برداری n بعدی V هر مجموعه از n بردار مستقل خطی تشکیل یک پایه می‌دهد.

$$v_1\ , v_2, \ldots, v_n \qquad , \qquad e_1, e_2, \ldots, e_n$$

برای فضای برداری V بردارهای پایه منحصر به‌فرد نیستند ولی نمایش هر بردار توسط این بردارهای پایه منحصر به‌فرد است.

$$\underline{u} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \ldots + c_n\underline{v}_n \qquad \underline{u} = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + \ldots + b_n\underline{e}_n$$

نشان می‌دهیم که،

-می‌توان ارتباط بین نمایش این پایه‌ها را در قالب یک ماتریس تبدیل نمایش داد.

تغییر پایه در فضای برداری

دو دسته بردار پایه برای فضای برداری V هستند

$$\left.\begin{matrix} e_1, e_2, \ldots, e_n \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

برای $u \in V$ داریم

$$\underline{u} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \ldots + c_n\underline{v}_n = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + \ldots + b_n\underline{e}_n$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n]b = [v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n]c}$$

مثال ۱

مجموعه بردارهای e_1, e_2 , v_1, v_2 در فضای برداری تشکیل دو دسته پایه می‌دهند.

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \quad , \quad e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

لذا برای $u = \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$ داریم،

$$u = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (4)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = (4)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$$

حال می‌توان نوشت،

$$b = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} \rightarrow [e_1 \quad e_2]b = [v_1 \quad v_2]c \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

تغییر پایه در فضای برداری

از طرفی می‌توان نوشت

$$\begin{cases} e_1 = k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + \ldots + k_{1n}v_n \\ e_2 = k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + \ldots + k_{2n}v_n \\ \vdots \\ e_n = k_{n1}v_1 + k_{n2}v_2 + \ldots + k_{nn}v_n \end{cases}$$

با نمایش ماتریسی داریم ،

$$[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \ldots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix}}_{K}$$

$$\boxed{[e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n] = [v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n]K_{(n\times n)}}$$

تغییر پایه در فضای برداری

$$[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]K$$

و

$$[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n]b = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]c$$

با جایگذاری داریم،

$$[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]Kb = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]c \rightarrow Kb = c \rightarrow b = K^{-1}c$$

K ماتریس تبدیل ضرایب از پایه‌های $e_1, e_2, \dots, e_n$ به $v_1, v_2, \dots, v_n$ است.

K^{-1} ماتریس تبدیل ضرایب از پایه‌های $v_1, v_2, \dots, v_n$ به $e_1, e_2, \dots, e_n$ است.

-با استفاده از روش گوس جردن می‌توان این ماتریس را به‌دست آورد

$$[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n| \quad e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] \rightarrow [I|K]$$

مثال ۲

مجموعه بردارهای e_1, e_2, e_3 ، v_1, v_2, v_3 در فضای برداری R^3 تشکیل دو دسته پایه می‌دهند.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نمایش بردار $\underline{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ بر حسب هر یک از دسته بردارهای پایه به صورت زیر می‌باشد ،

$$\underline{u} = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + b_3 \underline{e}_3 = (10) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (5) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + c_3 \underline{v}_3 = (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (4) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف)ماتریس تبدیل متناظر برای تغییر از پایه e_1, e_2, e_3 به پایه v_1, v_2, v_3 را بیابید .

برای این منظور این بار بردارهای e_1, e_2, e_3 را به صورت ترکیب خطی از بردارهای v_1, v_2, v_3 می‌نویسیم .

$$[e_1 \quad e_2 \quad e_3] = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]K_1$$

$$[v_1 \quad v_2 \quad v_3| \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3] \to [I|K_1]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.1 & -0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & 0.2 & -0.1 \end{array}\right]$$

ماتریس تبدیل متناظر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \to \quad K_1 b = c \quad \to \begin{bmatrix} 0.1 & -0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس تبدیل متناظر برای تغییر از پایه v_1, v_2, v_3 به پایه e_1, e_2, e_3 را بیابید.

برای این منظور هر یک از v_1, v_2, v_3 را به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای e_1, e_2, e_3 می‌نویسیم،

$$[v_1 \quad v_2 \quad v_3] = [e_1 \quad e_2 \quad e_3]K_2$$

$$[e_1 \quad e_2 \quad e_3 | \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3] \rightarrow [I|K_2]$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]}$$

بنابرین ماتریس تبدیل متناظر به صورت زیر به دست می‌آید:

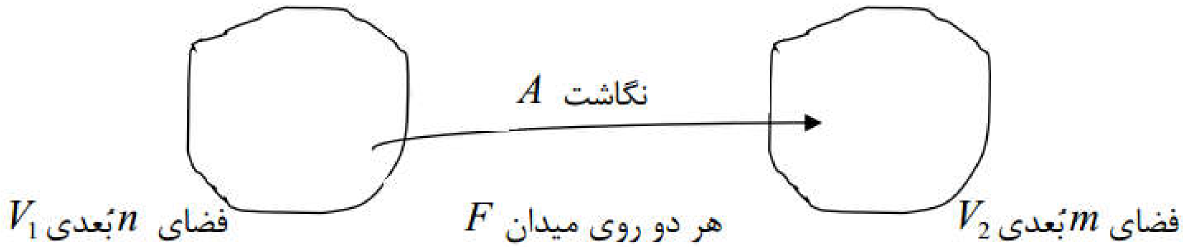
$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow K_2 c = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که بردارهای e_1, e_2, e_3 بردارهای پایه استاندارد برای پایه استاندارد برای فضای برداری R^3 می‌باشند، بنابرین ستون‌های ماتریس تبدیل در این حالت همان بردارهای v_1, v_2, v_3 می‌باشند.

همانطور که مشاهده می‌شود $K_2 = (K_1)^{-1}$ می‌باشد.

مفهوم فضای گستره در یک ماتریس (Range Space)

$$A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$$



-فضای گسترده یک نگاشت خطی مانند A ،

$$\boxed{R(A) = \{b \in V_2 | \exists x \in V_1 \to Ax = b\}}$$

- R(A) توسط ستون های ماتریس A اسپن می‌شود و یک زیر فضا از فضای m بعدی V_2 می‌باشد .

-بعد R(A) برابر با ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل خطی در R(A) می‌باشد.

مثال ۳

فضای گسترده ماتریس زیر را به‌دست آورید

$$A_{4\times5}=\begin{bmatrix}1&3&-5&1&5\\1&4&-7&3&-2\\1&5&-9&5&-9\\0&3&-6&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&1&0&1\\0&\boxed{1}&-2&0&3\\0&0&0&\boxed{1}&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

می‌دانیم فضای گسترده ماتریس A کلیه ترکیب‌های خطی ممکن کلیه ستون‌های A است. از آنجاییکه ستون‌های سوم و پنجم به ستون‌های اول و دوم و چهارم وابسته می‌باشند لذا R(A) به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\\5\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\5\\2\end{bmatrix}\right\}\rightarrow\dim[R(A)]=3$$

به عبارتی R(A) برابر است با تمامی ترکیب‌های خطی ستون‌های اول ، دوم و چهارم ماتریس A. همچنین اگر فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را به دست آوریم با توجه به محل عناصر محوری می‌توان فهمید که ستون‌های اول ، دوم و چهارم مستقل خطی هستند.

با استفاده از دستور $[R,p] = rref(A)$ در نرم افزار متلب داریم ،

```
>> A=[1 3 -5 1 5;1 4 -7 3 -2;1 5 -9 5 -9;0 3 -6 2 -1];
>> [R,p]=rref(A)

R =


     1     0     1     0     1
     0     1    -2     0     3
     0     0     0     1    -5
     0     0     0     0     0



p =


     1     2     4
```

مفهوم رتبه یک ماتریس (Rank)

-رتبه یک ماتریس A برابر با ماکزیمم تعداد ستون‌های (یا سطرهای) مستقل خطی در آن ماتریس است .

Rank(A)

رتبه کامل $A_{n\times n} \rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Rank(A) = n \rightarrow (full\ rank)$ غیرمنفرد

$$A_{m\times n} \rightarrow \begin{cases} rank(A) = \min(m,n) \rightarrow (full\ rank) & \text{رتبه کامل} \\ rank(A) < min(m,n) \rightarrow (rank\ \ deficiency) & \text{نقص رتبه} \end{cases}$$

-رتبه یک ماتریس معادل با بعد فضای گستره آن ماتریس است .

$$\boxed{\dim[R(A)] = Rank(A)}$$

-دستور Rank(A) در نرم افزار متلب وجود دارد .

مثال ۴

رتبه ماتریس های زیر را به دست آورید .

$$A_{4\times5}=\begin{bmatrix}1&3&-5&1&5\\1&4&-7&3&-2\\1&5&-9&5&-9\\0&3&-6&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-2&0&3\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری می‌فهمیم که ستون‌های اول ، دوم و چهارم مستقل خطی هستند و چون ماتریس A سه ستون مستقل خطی دارد لذا Rank(A)=3 است و ماتریس A نقص رتبه دارد.

$$B_{4\times3}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&-8\\4&-3&-7\\1&12&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0\\0&\boxed{1}&0\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری ، ستون‌های اول ، دوم و سوم مستقل خطی هستند و چون ماتریس B سه ستون مستقل خطی دارد، لذا Rank(B)=3 است و ماتریس B رتبه کامل دارد.

مسئله وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی جبری

R(A) زیرفضایی است که توسط ستون‌های ماتریس A اسپن می‌شود.

اگر $b \in R(A)$ می‌توان b را به صورت ترکیب خطی از ستون های A نوشت،

$$Ax = b \rightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = b$$

در چنین حالتی افزودن ستون بردار b به ستون‌های ماتریس A رتبه آن را تغییر نخواهد داد.

$$Rank(A) = Rank(A|b) = n$$

مسئله وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی جبری

$$A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$$

اگر $rank(A) \neq rank(A|b) \rightarrow b \notin R(A) \Rightarrow$ سیستم ناسازگار و دستگاه جواب ندارد

اگر $\underbrace{rank(A) = rank(A|b) \rightarrow b \in R(A)}_{\text{سیستم سازگار و دستگاه جواب دارد}}$

سیستم سازگار و دستگاه جواب دارد

N(A) تهی نیست → بیشمار جواب

N(A) تهی → یک جواب منحصر به‌فرد

مثال ۵

وجود یا عدم وجود جواب را برای دستگاه معادلات زیر بررسی نمایید .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \rightarrow \quad Ax = b \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$Rank(A) = 2$, $\quad Rank(A|b) = 3 \rightarrow$ دستگاه جواب ندارد

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \quad Ax = b \quad \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$rank(A) = rank(A|b) = 3 \rightarrow$ دستگاه یک جواب منحصر به‌فرد دارد

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \rightarrow Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$rank(A) = rank(A|b) = 2 \rightarrow$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد

مفهوم فضای پوچی در یک ماتریس (Null space یا Kernel)

-فضای پوچی یک نگاشت خطی مانند A

$$\boxed{N(A) = \{x \in V_1 \to Ax = 0\}}$$

$$\boxed{\dim[N(A)] = v(A)} \to (nullity)$$

پوچی

-فضای پوچی مجموعه ی تمامی پاسخ‌های غیر صفر معادله همگن $Ax = 0$ است.

-اگر تنها پاسخ معادله‌ی $Ax = 0$ همان پاسخ بدیهی صفر باشد، رتبه ماتریس A کامل است .

-فضای پوچی ، یک زیر فضا از فضای n بعدی V_1 است.

$$\boxed{rank(A) + nullity(A) = n}$$

-دستور null(A) و null(A , ‘r’) در نرم افزار متلب وجود دارد.

مثال ۶

ماتریس A را در نظر بگیرید ، فضای پوچی و پوچی آن را به دست آورید .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همانطور که گفته شد رتبه این ماتریس برابر ۳ می‌باشد. از معادله $Ax = 0$ می‌توان نوشت ،

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{x} = x_1 \underline{u}_1 + x_2 \underline{u}_2 + x_3 \underline{u}_3 + x_4 \underline{u}_4 + x_5 \underline{u}_5$$

از آن جایی که بردارهای مربوط به ستون های سوم و پنجم وابسته خطی هستند، می‌توان آن ها را به صورت یک ترکیب خطی از سه بردار ستونی دیگر نوشت،

$$u_3 = (1)u_1 + (-2)u_2 + (0)u_4 \quad , \quad u_5 = (1)u_1 + (3)u_2 + (-5)u_4$$

با این کار معادلات به شکل زیر در می‌آیند،

$$Ax = (x_1 + x_3 + x_5)u_1 + (x_2 - 2x_3 + 3x_5)u_2 + (x_4 - 5x_5) = 0$$

چون بردار های u_1, u_2, u_4 مستقل خطی هستند، می‌توان نوشت،

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

باید توجه کرد که تعداد این معادلات برابر با رتبه ماتریس A می‌باشد . هر بردار $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ که سه معادله بالا را برآورده سازد یک بردار متعلق به فضای پوچی ماتریس A خواهد بود . تعداد بردارهایی که بدین ترتیب می توان انتخاب کرد نامحدود است، لیکن تعداد بردارهای مستقل خطی برابر با بعد فضای پوچی می‌باشد. بطور مثال دو بردار زیر مستقل خطی هستند و سه معادله بالا را برآورده می‌کنند،

$$N(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -0.4 \\ -3 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.6 \\ -2 \\ -0.4 \end{bmatrix}\right\}$$

بنابراین هر پاسخ معادله $Ax = 0$ باید به اسپن این دو بردار تعلق داشته باشد، به عبارتی ، این دو بردار یک پایه برای N(A) تشکیل می دهند و nullity(A)=2 می‌باشد .

با استفاده از دستور null(A) و null(A,’r’) در نرم افزار متلب داریم ،

```
>> A=[1 3 -5 1 5;1 4 -7 3 -2;1 5 -9 5 -9;0 3 -6 2 -1];
>> null(A)

ans =

   -0.1409   -0.5024
    0.8004    0.2862
    0.2446    0.3587
   -0.5186    0.7186
   -0.1037    0.1437

>> null(A,'r')

ans =

    -1    -1
     2    -3
     1     0
     0     5
     0     1
```