تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

استاد مدرس:

دکتر سعید عبداللهی

مقدمه

مقدمه

تخمین: تخمین فرآیند استنتاج (نتیجه گیری) مقدار یک کمیت مورد نظر از مشاهدات غیر مستقیم، کم دقت و نامطمئن است.

انواع تخمین:

۱. تخمین یک سیگنال بر اساس اندازه‌گیری‌های مرتبط با آن

۲. تخمین حالت یک سیستم بر اساس اندازه‌گیری‌های نویزی حالت

۳. خمین پارامترهای موجود در یک تابع

کابردهای تخمین:

۱. مهندسی پزشکی (تخمین سلامت قلب انسان بر اساس الکتروکاردیوگرام (ECG))

۲. ساخت و تولید (تخمین پارامترهای فرآیند در یک سیستم تولید)

۳. مخابرات و سامانه‌های هوافضایی (تخمین سرعت و موقعیت یک ماهواره یا هواپیما بر اساس اندازه‌گیری¬های رادار از موقعیت، تخمین ترافیک در یک شبکه‌ی مخابرات کامپیوتری)

مقدمه

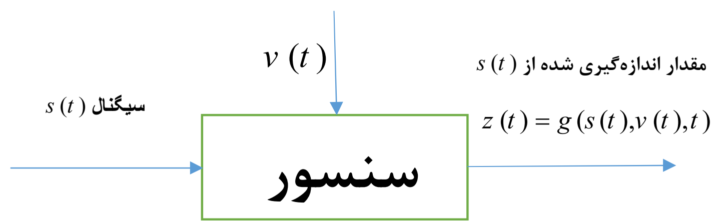
سیگنال $s(t)$ را به‌صورت یک تابع مقدار-حقیقی از متغیر زمان پیوسته t در نظر بگیرید. فرض کنید، سیگنال دیگری مانند $z(t)$ نیز وجود داشته که از $s(t)$ ناشی شده و دارای نمایش ریاضی زیر است:

$$z(t)=g(s(t),v(t),t)$$

$v(t)$: اغتشاش یا نویز

مثال ۱: در یک سیستم مخابراتی، $s(t)$ می‌تواند سیگنال ارسال شده و $z(t)$ سیگنال دریافت شده باشد که در واقع نسخه مختل شده سیگنال $s(t)$ است.

مثال ۲: $z(t)$ ممکن است یک اندازه‌گیری از سیگنال $s(t)$ باشد که به‌وسیله یک سنسور بدست آمده است.



مقدمه

در بسیاری از کاربردها، اندازه‌گیری $z(t) = g(s(t), v(t), t)$ **را می‌توان به‌صورت جمع سیگنال و نویز نمایش داد:**

$$z(t) = s(t) + v(t)$$

در برخی کاربردها، ساختار سیگنال بعلاوهٔ نویز در رابطه بالا معتبر نیست. به عنوان مثال، ممکن است برحسب نویزهای ضرب‌شونده ارائه شود:

$$z(t) = s(t)v(t)$$

در عمل اغلب از مدل نویز جمع‌شوندهٔ استفاده می‌شود. زیرا فرض ساده‌تری است که تحلیل را آسان و ممکن می‌سازد.

مقدمه

تعیین $s(t)$ بر اساس $z(t)$ یک نوع مسئله تخمین یا فیلترینگ است.

سیستمی که تخمین $\hat{s}(t)$ را برای $s(t)$ تولید می‌کند، تخمینگر یا فیلتر نامیده می‌شود.

در عمل اغلب از مدل نویز جمع‌شوندهٔ استفاده می‌شود. زیرا فرض ساده‌تری است که تحلیل را آسان و ممکن می‌سازد.

یک تخمینگر که بر پایهٔ اندازه‌گیری‌های $z(t) = g(s(t), v(t), t)$ عمل می‌کند، یک سیستم دینامیکی است. تخمین $\hat{s}(t)$ برای بازه‌ای از مقادیر متغیر τ به $z(\tau)$ وابسته است.

$$\hat{s}(t) = \alpha(\{z(\tau) : -\infty < \tau \le t\}, t)$$

تخمینگر ارائه شده در این رابطه علّی است.

تخمینگر خطی

تخمین سیگنال

تخمین حالت

تخمین حداقل مربعات

شرط لازم و کافی برای خطی بودن تخمینگر علّی مذکور آن است که تابع α خطی باشد که در این حالت تخمین $\hat{s}(t)$ برابر می‌شود با:

$$\hat{s}(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t,\tau)z(\tau)d\tau$$

که در آن $h(t,\tau)$ تابع پاسخ ضربه تخمینگر است.

شرط لازم و کافی برای نامتغیر با زمان بودن این تخمینگر این است که $h(t,\tau)$ تابعی از تفاضل $t-\tau$ باشد که در این حالت می‌توان نوشت:

$$\hat{s}(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)z(\tau)d\tau = h(t)*z(t)$$

عبارت سمت راست کانولوشن $h(t)$ با $z(t)$ است.

تخمین بر اساس اندازه‌گیری‌های گسسته

در این درس مسئله تخمین به‌صورت یک فرمول‌بندی زمان گسسته ارائه خواهد شد. زیرا اندازه‌گیری‌های سیگنال تقریباً همیشه در نقاط گسسته‌ای از زمان بدست می‌آیند و سیگنال‌ها با استفاده از کامپیوترهای دیجیتال پردازش می‌شوند.

در عمل، اغلب در نقاط زمانی گسسته $t = t_n$ مشخص می‌شود که در آن رابطه $t_n = nT$ برقرار است.

مقادیر $z(t)$، $s(t)$ و $v(t)$ در $t = nT$ به ترتیب به‌صورت $z(n)$، $s(n)$ و $v(n)$ نشان داده می‌شوند.

در حالت علّی، فرم کلی تخمین برابر است با:

$$\hat{s}(n) = \alpha(\{z(i) : -\infty < i \le n\})$$

اگر تخمینگر علّی و خطی باشد، تخمین $\hat{s}(n)$ به صورت زیر خواهد:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} h(n,i) z(i)$$

اگر تخمینگر علّی، خطی و نامتغیر با زمان باشد،

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} h(n-i) z(i) = h(n) * z(n)$$

تخمین سیگنال

تخمین حالت

تخمین حداقل مربعات

مثال : فیلتر میانگین

فرض کنید $s(n)$ به ازای همه مقادیر n یک سیگنال ثابت $s(n)=s$ و اندازه‌گیری‌های انجام شده از آن برای ... ، ۲، ۱ $= n$ به صورت $z(n)=s+v(n)$ در دسترس باشد.

فیلتر میانگین:

$$\hat{s}(n)=\frac{1}{n}[z(1)+z(2)+z(3)+\ldots+z(n)]$$

رابطه (۱-۱۹) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=-\infty}^{n} h(n,i)z(i)$$

که در آن $h(n,i)=\frac{1}{n}$ است. بنابراین فیلتر میانگین، خطی است.

تخمین پارامترهای سیگنال

تخمین سیگنال

تخمین حالت

تخمین حداقل مربعات

در بسیاری از کاربردها، یک سیگنال زمان گسسته $s(n)$ را می‌توان به صورت رابطه زیر بیان کرد:

$$s(n)=\sum_{j=1}^{q}\theta_j \gamma_j(n)$$

در این رابطه θ_1 ، θ_2 ، ... و θ_q مقادیری ثابت بوده که به عنوان پارامترهای سیگنال محسوب می‌شوند و $\gamma_1(n)$ ، $\gamma_2(n)$، ... و $\gamma_q(n)$ توابعی معلوم از n هستند.

به عنوان مثال برای حالتی که $\gamma_j(n)=n^{j-1}$ باشد داریم:

$$s(n)=\sum_{j=1}^{q}\theta_j n^{j-1}$$

مسئله تخمین پارامتری است با استفاده از روش حداقل مربعات حل خواهد

تخمین حالت

تخمین اغلب در قالب مدل فضای حالت انجام می‌شود که برحسب متغیرهای حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$، $x_3(t)$ ، ... و $x_N(t)$ تعریف می‌شود که در آن:

N : **تعداد متغیرهای حالت**

ساختار کلی مدل فضای حالت نامتغیر با زمان خطی:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t)+Bw(t) \\ z(t) &= Cx(t)+\upsilon(t) \end{aligned}\right\}$$

مدل فضای حالت

$w(t)$: **نویز فرآیند**

$$z(t)=Cx(t)+\upsilon(t) \quad \longrightarrow$$

مدل اندازه گیری

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}$$

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

مسئله؟

تولید تخمین $\hat{x}(t)$ مربوط به متغیر حالت $x(t)$ در زمان t و بر اساس اندازه‌گیری $z(\tau)$ برای بازه $0 \le \tau \le t$ است.

فیلتر کالمن-بُسی:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + K(t)[z(t) - C\hat{x}(t)]$$

$K(t)$: **ماتریس بهره تخمینگر**

تخمین حالت

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

تخمین بر اساس مدل فضای حالت زمان گسسته

نمایش زمان گسسته مدل فضای حالت ارائه شده در روابط زیر:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + \upsilon(t) \end{cases}$$

به صورت زیر است:

$$x(n+1) = \Phi x(n) + \Gamma w(n)$$
$$z(n) = Cx(n) + v(n)$$

در این روابط $x(n)$ و $w(n)$ و $v(n)$ مقدار نمونه‌برداری شده از حالت، نویز فرآیند و نویز اندازه‌گیری هستند.

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

تخمین پارامتر با استفاده از مدل فضای حالت

حل مسئله تخمین پارامترهای یک سیگنال را نیز می‌توان با استفاده از رویکرد مدل فضای حالت بدست آورد.

$$s(n) = \sum_{j=1}^{q} \theta_j \gamma_j(n)$$

مدل فضای حالت با استفاده از متغیرهای حالت به صورت زیر تشکیل می گردد:

$$x_i(n) = \theta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, q$$

از آنجا که متغیرهای حالت (یعنی همان پارامترهای سیگنال) ثابت هستند، خواهیم داشت:

$$x(n+1) = \Phi x(n)$$

تخمین پارامتر با استفاده از مدل فضای حالت

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

داریم:

$$s(n)=\sum_{j=1}^{q}\theta_j\gamma_j(n) \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(n)=\gamma(n)x(n)}$$

مدل فضای حالت با استفاده از متغیرهای حالت به صورت زیر تشکیل می گردد:

$$\gamma(n)=\begin{bmatrix}\gamma_1(n) & \gamma_2(n) & \cdots & \gamma_q(n)\end{bmatrix}$$

بر اساس اندازه گیری هایی به صورت زیر :

$$z(n)=s(n)+v(n)=\gamma(n)x(n)+v(n)$$

با استفاده از مدل فضای حالت زیر می‌توان به تخمین بردار حالت $x(n)$ پرداخت که منجر به تخمین پارامترهای سیگنال می‌شود.

$$\begin{cases} x(n+1)=\Phi x(n) \\ z(n)=s(n)+v(n)=\gamma(n)x(n)+v(n) \end{cases}$$

تخمین حالت

تخمین پارامتر با استفاده از مدل فضای حالت

تخمین سیگنال

تخمین حالت

تخمین حداقل مربعات

با استفاده از مدل فضای حالت زیر:

$$x(n+1) = \Phi x(n)$$

$$z(n) = s(n) + v(n) = \gamma(n) x(n) + v(n)$$

$\Rightarrow$ تخمین بردار حالت $x(n)$

$\Rightarrow$ تخمین پارامترهای سیگنال

تخمین حداقل مربعات

تخمین حداقل مربعات پارامترهای سیگنال:

- ❑ رویکرد بسیار قدرتمند برای تخمین بر اساس روش حداقل مربعات استوار است.
- ❑ روش حداقل مربعات یک رویکرد غیرتصادفی برای تخمین است.

سیگنال زمان گسسته $s(n)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$s(n)=\sum_{j=1}^{q}\theta_j\gamma_j(n)$$

که در آن:

θ_1، θ_2، θ_3، ... و θ_q : پارامترهای مجهول

$\gamma_1(n)$، $\gamma_2(n)$، $\gamma_3(n)$ ... و $\gamma_q(n)$: توابعی معلوم از n

تخمین حداقل مربعات

تخمین سیگنال

تخمین حالت

تخمین حداقل مربعات

اندازه‌گیری‌های $z(n)$ ارائه شده:

$$z(n) = s(n) + \upsilon(n)$$

برای θ و $\gamma(n)$ داریم:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_q \end{bmatrix}$$

$$\gamma(n) = \begin{bmatrix} \gamma_1(n) & \gamma_2(n) & \cdots & \gamma_q(n) \end{bmatrix}$$

آنگاه با توجه به مقادیر بالا می توانیم رابطه زیر را بازنویسی کنیم:

$$s(n) = \sum_{j=1}^{q} \theta_j \gamma_j(n) \quad \Longrightarrow \quad s(n) = \gamma(n)\theta$$

تخمین حداقل مربعات

هدف دستیابی به تخمین $\hat{\theta}(n)$ برای بردار θ در زمان nT با استفاده از اندازه‌گیری‌های $z(1)$،$z(2)$، ... و $z(n)$ است.

تخمین $\hat{s}(n)$ را به صورت زیر داریم:

$$\hat{s}(n) = \gamma(n)\hat{\theta}(n)$$

و نیز تخمین $s(i)$ را داریم:

$$\hat{s}(i) = \gamma(i)\hat{\theta}(n), \quad i < n$$

حال با توجه به روابط بالا، مجموع مربعات حاصل می شود:

$$[z(1) - \hat{s}(1)]^2 + [z(2) - \hat{s}(2)]^2 + \ldots + [z(n) - \hat{s}(n)]^2$$

حاصل این رابطه، عددی مثبت می شود که اندازه آن به میزان دور بودن تخمین از مقدار واقعی آن بستگی دارد.

تخمین حداقل مربعات

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

بنابراین مجموع مربعات را می‌توان به عنوان یک تابع خطا برای تخمین θ در نظر گرفت که هدف حداقل سازی آن است.

به منظور محاسبه تخمین LS، فرض کنید Z_n بردار اندازه‌گیری‌ها باشد:

$$Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}$$

فرض کنید Γ_n یک ماتریس $n \times q$ را نشان دهد که سطر i ام آن برابر با $\gamma(i)$ باشد، یعنی:

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{bmatrix}$$

با توجه به این فرضیات داریم:

$$[z(1) - \hat{s}(1)]^2 + [z(2) - \hat{s}(2)]^2 + \ldots + [z(n) - \hat{s}(n)]^2 \xRightarrow{\text{معادل برداری}} \left[Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)\right]^T \left[Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)\right]$$

تخمین حداقل مربعات

به منظور محاسبه تخمین LS، از رابطه برداری پیش نسبت به $\hat{\theta}(n)$ مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}(n)}\left[Z_n-\Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]^T\left[Z_n-\Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]$$

$$=2\left\{\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}(n)}\left[Z_n-\Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]^T\right\}\left[Z_n-\Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]=-2\Gamma_n^T\left[Z_n-\Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]$$

با مساوی صفر قرار دادن مقدار مشتق خواهیم داشت:

$$\Gamma_n^T\Gamma_n\hat{\theta}(n)=\Gamma_n^T Z_n \quad *$$

یک شرط کافی برای وجود جواب برای $\hat{\theta}(n)$ در این رابطه،آن است که رتبه Γ_n برابر با q باشد.

اگر رتبه Γ_n برابر با q باشد به گونه ای که $\Gamma_n^T\Gamma_n$ معکوس پذیر شود، رابطه * یک جواب یکتا به صورت زیر خواهد داشت:

$$\hat{\theta}(n)=\left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1}\Gamma_n^T Z_n$$

این پاسخ، تخمین LS برای θ در لحظه nT است که در فرم بسته قرار دارد.

تخمین سیگنال

تخمین حالت

تخمین حداقل مربعات

تخمین حداقل مربعات

فرم بازگشتی تخمین LS

رابطه بازگشتی زیر از پاسخ یکتا حاصله به دست می‌آید:

$$K(n) = \frac{P_n \gamma^T(n+1)}{1+\gamma(n+1)P_n\gamma^T(n+1)}$$

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + K(n)\left[z(n+1) - \gamma(n+1)\hat{\theta}(n)\right]$$

$$P_{n+1} = \left[I - K(n)\gamma(n+1)\right]P_n$$

تعریف: $P_n = (\Gamma_n^T \Gamma_n)^{-1}$

فرم بازگشتی ارائه شده، به لحاظ محاسبات مورد نیاز برای دستیابی تخمین، بسیار موثرتر از فرم بسته ارائه شده ایست که قبلا به دست آمد:

$$\hat{\theta}(n) = \left[\Gamma_n^T \Gamma_n\right]^{-1} \Gamma_n^T Z_n$$

لیکن فرم بازگشتی نیاز دارد که تخمین اولیه $\hat{\theta}$ مشخص باشد.

تخمین حداقل مربعات

مثال ۱.۴ تخمین LS یک سیگنال ثابت

فرض کنید که $s(n)$ برای همه مقادیر n :

- سیگنال ثابت $s(n) = s$
- اندازه گیری های $s(n)$ برای $n = ۱,۲,...$ به صورت $z(n) = s + v(n)$ باشد.

حل: می توان $s(n)$ را با استفاده از پارامتر $\theta = s$ و تابع $\gamma(n) = 1$ برای همه مقادیر n، به صورت رابطه $s(n) = \gamma(n)\theta$ بیان کرد، که در آن داریم:

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \Gamma_n^T \Gamma_n = n$$

پس با استفاده از رابطه $\hat{\theta}(n) = \left[\Gamma_n^T \Gamma_n\right]^{-1} \Gamma_n^T Z_n$، فرم بسته تخمین LS را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{\hat{\theta}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z(i)}$$

در این جا $\hat{\theta}(n)$: تخمین LS = مقدار میانگین اندازه‌گیری‌ها

تخمین حداقل مربعات

مثال ۱.۴ تخمین LS یک سیگنال ثابت

و نیز فرم بازگشتی تخمین LS با استفاده از روابط:

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + K(n)\left[z(n+1) - \gamma(n+1)\hat{\theta}(n)\right]$$

$$K(n) = \frac{P_n \gamma^T(n+1)}{1 + \gamma(n+1) P_n \gamma^T(n+1)}$$

به دست می آید. ابتدا برای $K(n)$ داریم:

$$K(n) = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{-1} = \frac{1}{n+1}$$

لذا فرم بازگشتی تخمین LS برابر می شود با:

$$\boxed{\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + \frac{1}{n+1}\left[z(n+1) - \hat{\theta}(n)\right]}$$

حداقل مربعات وزن دهی شده

تابع حداقل مربعات در رابطه $\left[Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)\right]^T \left[Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)\right]$ اغلب به گونه‌ای اصلاح می‌شود که در آن یک ماتریس وزنی مثبت معین W_n در نظر گرفته شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$[Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)]^T W_n [Z_n - \Gamma_n \hat{\theta}(n)] \qquad **$$

اگر ماتریس وزنی W_n یک ماتریس قطری با درایه‌های مثبت w_1، w_2، ... و w_n واقع بر روی قطر اصلی باشد، این رابطه با معیار مجموع مربعات معادل است با:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i [z(i) - \hat{s}(i)]^2$$

به سادگی نشان داده می شود که برای تابع حداقل مربعات وزن‌دهی شده در رابطه **، فرم بسته تخمین حداقل مربعات برابرست با:

$$\hat{\theta}(n) = \left[\Gamma_n^T W_n \Gamma_n\right]^{-1} \Gamma_n^T W_n Z_n$$

تخمین LS بردار حالت

مدل فضای حالت زمان گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$x(n+1) = \Phi x(n)$$
$$z(n) = Cx(n) + v(n)$$

هدف، تخمین حالت $x(n)$ بر اساس اندازه‌گیری‌های $z(1)$،$z(2)$ ... و$z(n)$ است.

فرض کنید ماتریس Φ معکوس‌پذیر باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$x(i) = \Phi^{-n+i} x(n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

با توجه به روابط، معادله برداری زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx(1) \\ Cx(2) \\ \vdots \\ Cx(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Phi^{-n+1} \\ C\Phi^{-n+2} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} \mathrm{v}(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix} \quad ***$$

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

تخمین LS بردار حالت

حال با تعریف:

$$Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}, \quad V_n = \begin{bmatrix} \mathrm{v}(1) \\ \mathrm{v}(2) \\ \vdots \\ \mathrm{v}(n) \end{bmatrix}$$

و قرار دادن ماتریس U_n بصورت زیر:

$$U_n = \begin{bmatrix} C\Phi^{-n+1} \\ C\Phi^{-n+2} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix}$$

می‌توان رابطه *** را به صورت زیر نوشت:

$$Z_n = U_n x(n) + V_n$$

بنابراین تخمین LS مقداری از $x(n)$ است که تابع اسکالر زیر را حداقل سازد:

$$\boxed{\left[Z_n - U_n x(n)\right]^T \left[Z_n - U_n x(n)\right]}$$

تخمین LS بردار حالت

به منظور محاسبه تخمین حداقل مربعات می‌توان مشتق جزئی رابطه:

$$\left[Z_n - U_n x(n)\right]^T \left[Z_n - U_n x(n)\right]$$

را نسبت به U_n محاسبه کرده و نتیجه را برابر با صفر قرار داد. بنابراین خواهیم داشت:

$$U_n^T U_n x(n) = U_n^T Z_n$$

با فرض آنکه U_n دارای رتبه N است، می‌توان رابطه بالارا به منظور محاسبه $x(n)$ حل کرد که به تخمین LS زیر منجر می‌شود:

$$\hat{x}(n) = \left[U_n^T U_n\right]^{-1} U_n^T Z_n$$

می‌توان تخمین LS در این رابطه را بر حسب ماتریس رویت‌پذیری n گام بیان کرد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$O_n = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

تخمین LS بردار حالت

می دانیم:

$$U_n = O_n \Phi^{1-n}$$

سپس خواهیم داشت:

$$U_n^T = \left(\Phi^T\right)^{1-n} O_n^T$$

آنگاه:

$$U_n^T U_n = \left(\Phi^T\right)^{1-n} O_n^T O_n \Phi^{1-n}$$

با معکوس کردن عبارت سمت راست رابطه خواهیم داشت:

$$\left[U_n^T U_n\right]^{-1} = \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} \left(\Phi^T\right)^{n-1}$$

در نهایت با جایگذاری روابط در رابطه آخر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{x}(n) &= \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} \left(\Phi^T\right)^{n-1} \left(\Phi^T\right)^{1-n} O_n^T Z_n \\ &= \Phi^{n-1} [O_n^T O_n]^{-1} O_n^T Z_n\end{aligned}$$

تخمین LS بردار حالت

با دقت در رابطه

$$\begin{aligned}\hat{x}(n) &= \Phi^{n-1}[O_n^T O_n]^{-1}\left(\Phi^T\right)^{n-1}\left(\Phi^T\right)^{1-n} O_n^T Z_n \\ &= \Phi^{n-1}[O_n^T O_n]^{-1} O_n^T Z_n\end{aligned}$$

متوجه می شویم:

❖ در تخمین LS بدست آمده معکوس ماتریس Φ ظاهر نمی‌شود.

تخمین ارائه شده در این رابطه به فرم بسته است. فرم بازگشتی آن به صورت زیر است:

$$\hat{x}(n+1) = \Phi\hat{x}(n) + K(n)\left[z(n+1) - C\Phi\hat{x}(n)\right]$$

که برای آن روابط زیر برقرارند:

$$K(n) = \frac{P_n C^T}{1 + C P_n C^T}$$

$$P_{n+1} = \Phi[I - K(n)C]P_n\Phi^T$$

$$P_n = \Phi^n\left[O_n^T O_n\right]^{-1}\left(\Phi^T\right)^n$$

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

مثال ۱.۵ حالت یک بعدی

فرض کنید که مدل فضای حالت به صورت:

$$x(n+1)=\phi x(n)$$
$$z(n)=cx(n)+v(n)$$

باشد. باشد که در آن ϕ و c اعداد حقیقی غیر صفر هستند. در این مورد خواهیم داشت:

$$O_n^T O_n = \sum_{i=1}^{n} c^2 \phi^{2(i-1)}$$

و با استفاده از رابطه (۱–۶۷) تخمین LS به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{x}(n) = \left[\frac{\phi^{n-1}}{\sum_{i=1}^{n} c^2 \phi^{2(i-1)}} \right] \sum_{i=1}^{n} c^2 \phi^{i-1} z(i)$$

$$if \qquad \phi \neq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} c^2 \phi^{2(i-1)} = \frac{c^2(1-\phi^{2n})}{1-\phi^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{x}(n) = \left[\frac{\phi^{n-1}(1-\phi^2)}{1-\phi^{2n}} \right] \sum_{i=1}^{n} \Phi^{i-1} z(i)$$

تخمین سیگنال
تخمین حالت
تخمین حداقل مربعات

مثال ۱.۵ حالت یک بعدی

از رابطه

$$\hat{x}(n+1)=\Phi\hat{x}(n)+K(n)\left[z(n+1)-C\Phi\hat{x}(n)\right]$$

رابطه بازگشتی تخمین به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{x}(n+1)=\phi\,\hat{x}(n)+K(n)[z(n+1)-c\phi\,\hat{x}(n)]\\&K(n)=\frac{P_n c}{1+c^2P_n}\\&P_{n+1}=\phi^2[1-K(n)c]P_n\end{aligned}}$$

فرم بازگشتی را می‌توان با شروع از $P_1=\frac{\phi^2}{c^2},\ \hat{x}(1)=0$ ارزیابی کرد.

خطای تخمین

تخمین سیگنال

تخمین حالت

تخمین حداقل مربعات

در راستای محاسبه خطای تخمین LS ارائه شده به فرم بسته در رابطه (۱-۶۷)، خطای تخمین یعنی $\tilde{x}(n)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

بنابراین داریم:

$$Z_n = U_n x(n) + V_n$$

با استفاده از رابطه $U_n = O_n \Phi^{1-n}$ و با جایگذاری آن در رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$Z_n = O_n \Phi^{1-n} x(n) + V_n$$

آنگاه:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}(n) &= \Phi^{n-1}[O_n^T O_n]^{-1} \left(\Phi^T\right)^{n-1} \left(\Phi^T\right)^{1-n} O_n^T Z_n \\ &= \Phi^{n-1}[O_n^T O_n]^{-1} O_n^T Z_n \end{aligned}}$$

$$Z_n = O_n \Phi^{1-n} x(n) + V_n \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}(n) &= \Phi^{n-1}[O_n^T O_n]^{-1} O_n^T [O_n \Phi^{1-n} x(n) + V_n] \\ &= x(n) + \Phi^{n-1}[O_n^T O_n]^{-1} O_n^T V_n \end{aligned}}$$

سپس با جایگذاری رابطه به دست آمده در رابطه $\tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\tilde{x}(n) = -\Phi^{n-1}[O_n^T O_n]^{-1} O_n^T V_n}$$