# تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

فصل سوم:

تخمین بهینه

استاد مدرس:

دکتر سعید عبداللهی

فصل سوم

# تخمین بهینه

# مقدمه

تخمین بهینه (Optimal Estimation) یکی از بهترین حدس‌های ممکن است.

در این فصل به موارد زیر خواهیم پرداخت:

- ✓ ارائه مسئله تخمین بهینه
- ✓ برخی ویژگی‌های مطلوب یک تخمین
- ✓ معرفی سه معیار رایج بهینگی، عبارت از:
  - ❖ معیار حداقل میانگین مربعات خطا: Minimum Mean-Square Error Criteria
  - ❖ بیشترین احتمال پسین: Minimum Mean-Square Error Criteria
  - ❖ بیشترین احتمال: Maximum Likelihood

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

- سیگنال $s(t)$ را در نظر بگیرید.
- فرض: $s(n)$ را به عنوان سیگنال نمونه برداری شده
- اندازه‌گیری‌های به دست آمده از سیگنال $s(n)$ به صورت زیر در اختیارست:

$$z(n) = g(s(n), v(n), n)$$

که در آن:

- $v(n)$ : سیگنال نویز
- $g$ : تابع نشان دهنده مخدوش شدن سیگنال $s(n)$ در تولید $z(n)$

هدف: محاسبه تخمینی بهینه از $s(n)$ در لحظه n براساس مشاهدات $z(n),\dots,z(2),z(1)$ :

$$\hat{s}(n) = \alpha_n(z(1), z(2), \dots, z(n))$$

- $\alpha_n$ : تابعی وابسته به n
- $\hat{s}(n)$ : تخمین بهینه

دانشگاه علم و صنعت ایران

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

به منظور توجه به عدم قطعیت موجود و ایجاد امکان برای تعریف یک معیار بهینگی مناسب:

- فرض: $s(n)$ و $v(n)$ به ترتیب به صورت سیگنال‌های تصادفی $\mathbf{s}(n)$ و $\mathbf{v}(t)$

- اندازه‌گیری $z(n)$ را نیز به صورت سیگنال تصادفی $\mathbf{z}(n)$ تعریف می‌کنیم:

$$z(n) = g(s(n), v(n), n)$$

- به علاوه $\hat{s}(n)$ نیز به صورت سیگنال تصادفی $\hat{\mathbf{s}}(n)$ تعریف می‌گردد:

$$\hat{s}(n) = \alpha_n(z(1), z(2), \ldots, z(n))$$

# مسئله تخمین بهینه

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

**با در نظر گرفتن:**

- ✓ **اندازه‌گیری‌های** $z(1), z(2), \dots, z(n)$
- ✓ **تابع** $g$
- ✓ **و یک معیار بهینگی**

**تخمینگری طراحی کنید که تخمین بهینه $\hat{\mathbf{s}}(n)$ مربوط به $\mathbf{s}(n)$ را با در نظر گرفتن تابعی مانند $\alpha_n$ ارائه دهد:**

$$\hat{s}(n) = \alpha_n(z(1), z(2), \dots, z(n))$$

# پیش‌بینی ، فیلترینگ و هموارسازی

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

**فیلترینگ (Filtering) :** در این حالت سیگنال $s(n)$ در لحظه $n$ بر اساس اندازه‌گیری‌های $z(n),\ldots,z(2),z(1)$ تخمین زده می‌شود.

**پیش‌بینی (Prediction) :** در این حالت سیگنال $s(n)$ در یک نقطه زمانی در آینده و خارج از بازه زمانی مشاهدات $z(n),\ldots,z(2),z(1)$ تخمین زده می‌شود. مثال: $s(n+1)$ یا $s(n+20)$

**هموارسازی (Smoothing) :** در این حالت سیگنال $s(n)$ در یک نقطه زمانی قبل از $n$ تخمین زده می‌شود و از مشاهدات بعدی تا لحظه $n$ برای هموار کردن خطای تخمین استفاده می‌شود. (مثال: تخمین $s(n-1)$ یا $s(n-16)$ )

# انواع مسئله تخمین

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

| t | تخمین | مسئله تخمین |
|---|---|---|
| $n$ | $\hat{s}(n)$ | فیلترینگ |
| $n+1$ | $\hat{s}(n+1)$ | پیش‌بینی یک‌گام |
| $n+m, m>0$ | $\hat{s}(n+m)$ | پیش‌بینی m گام |
| $n-1$ | $\hat{s}(n-1)$ | هموارسازی با یک گام روبه عقب |
| $n-m, m>0$ | $\hat{s}(n-m)$ | هموارسازی با m گام روبه عقب |
| $m \quad constant$ | $\hat{s}(m)$ | هموارسازی نقطه ثابت |

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

# ویژگی‌های تخمین‌ها

بیان ویژگی‌های یک تخمینگر به منظور ارزیابی تخمینگر:

میانگین $\hat{s}(n)$ = با میانگین واقعی $s(n)$

$$\boxed{E\left[\hat{s}(n)\right] = E\left[s(n)\right]}$$

که این ویژگی معادل است با:

$$E\left[\hat{s}(n)\right] = E\left[s(n)\right] \xrightarrow{\overbrace{\tilde{s}(n) = s(n) - \hat{s}(n)}^{\text{خطای تخمین}}}$$

اگر این شرط محقق شود، آنگاه:

❖ : تخمین بدون بایاس یا Unbiased Estimate

❖ $\alpha$ : تخمینگر بدون بایاس

# ویژگی‌های تخمین‌ها

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

1. Asymptotically Unbiased Estimation : اگر

شرط ضعیف‌تر

$$\lim_{n \to \infty} E\left[\hat{s}(n)\right] = E\left[s(n)\right]$$

باشد، آنگاه تخمین انجام شده در طول یک بازه زمانی را به صورت مجانبی بدون بایاس گویند.

2. Consistent Estimator (تخمینگر سازگار):و چنانچه

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{E\left[\tilde{s}^2(n)\right]}_{\text{میانگین مربعات خطا}} = 0$$

MSE

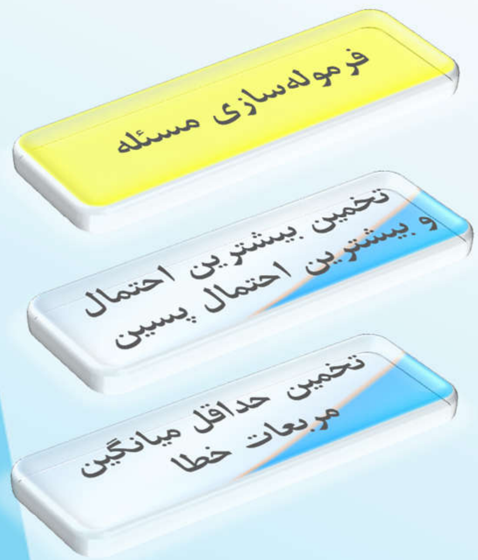
باشد، در این صورت تخمینگر تولیدکننده را سازگار گویند.

اگر هر دو شرط ۱ و ۲ در خصوص یک تخمین برقرار باشند، یعنی اگر یک تخمینگر هم (به طور مجانبی) بدون بایاس باشد و هم سازگار، در این صورت:

$$if \quad n \to \infty \quad \Rightarrow \quad E\left[\tilde{s}^2(\mathrm{n})\right] \to 0 \quad , \quad E\left[\tilde{s}(\mathrm{n})\right] \to 0$$

با همگرایی $n \to \infty$ یک تخمین درست از $s(n)$ بدست می‌آید.

# مثال: فیلتر میانگین




**فرض کنید:**

**حال فیلتر میانگین را در نظر بگیرید:**

**بدون بایاس بودن و سازگاری تخمینگر را بررسی می‌کنیم:**

# مثال: فیلتر میانگین

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

داریم:

$$
\begin{aligned}
E\left[\hat{s}(n)\right] &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[z(j)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(E\left[s\right]+E\left[v(n)\right]\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(E\left[s\right]\right) \\
&= E\left[s\right]
\end{aligned}
$$

بدون بایاس

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

# مثال: فیلتر میانگین

و اما سازگاری:

و :

$$E\left[\hat{\mathbf{s}}^2(n)\right] = \frac{1}{n^2} E\left[(z(1)+z(2)+\dots+z(n))\ \ (z(1)+z(2)+\dots+z(n))\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[(nE\left[\mathbf{s}^2\right]+\sigma_v^2)n\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{E\left[\tilde{\mathbf{s}}^2(\mathrm{n})\right] = \underbrace{E\left[\mathbf{s}^2\right]-2E\left[\mathbf{s}^2\right]+E\left[\mathbf{s}^2\right]+\frac{\sigma_v^2}{n}=\frac{\sigma_v^2}{n}}_{if\quad n\to\infty:\ \to 0}}$$

# تخمین بیشترین احتمال
## Maximum Likelihood Estimation

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

متغیر تصادفی $x$ با تابع چگالی احتمال تک مدال $f_x(x)$ را در نظر بگیرید.

مقداری از $x$ که منجر به حداکثرسازی تابع $f_x(x)$ می‌شود= محتمل‌ترین مقدار $x$

فرض کنید که یک اندازه‌گیری تک از یعنی یک تحقق نمونه از در اختیار باشد.

بنابراین طبیعی است، تخمین s از طریق محاسبه محتمل‌ترین مقدار برای تولید محاسبه می‌شود.

در این راستا تابع چگالی شرطی به عنوان تابعی از $s$ در نظر گرفته شده و تابع احتمال نامیده می‌شود. بنابراین مقدار $s$ باید به‌گونه‌ای محاسبه شود که تابع احتمال را حداکثر سازد.

این روش تخمین به عنوان تخمین حداکثر احتمال ML شناخته شده و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\hat{s}_{ML} = values\ of\ \ s\ \ that\ \text{maximizes}\ f_z(z \mid \mathbf{s} = s)$$

$$where\ \ f_z(z \mid \mathbf{s} = s) : likelihood\ \ function$$

# تخمین بیشترین احتمال



فرض کنید تابع احتمال:

- مشتق‌پذیر
- دارای یک نقطه ماکزیمم یکتا در دامنه خود

باشد. بنابراین:

$$\boxed{\hat{s}_{ML} = value\ of\ \ s\ \ for\ \text{which}\ \frac{\partial f_z(z \mid \mathbf{s} = s)}{\partial s} = 0}$$

از آنجایی که تابع لگاریتم طبیعی یک تابع یکنواخت افزایشیست، می‌توان به صورت معادل به حداکثرسازی تابع احتمال لگاریتمی $ln\left(f_z(z \mid \mathbf{s} = s)\right)$ پرداخت و آنگاه داریم:

$$\boxed{\hat{s}_{ML} = value\ of\ \ s\ \ for\ \text{which}\ \frac{\partial ln f_z(z \mid \mathbf{s} = s)}{\partial s} = 0}$$

برای هر دو حالت می توان نوشت:

$$\boxed{\hat{s}_{ML} = \alpha(\text{z})}$$

# مثال: تخمین ML

فرمول‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

فرض کنید $s$ و $z$ متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال مشترک زیر باشند:

$$f_{s,z}(s,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{12}(s+z)\,\mathrm{e}^{-z}, & 0 \le s \le 4,\ \ 0 \le z < \infty \\ 0 & \text{یراینصـــــــــــــــورت} \end{cases}$$

هدف: یافتن تخمین ML برای $s$ بر اساس $z$

$$f_z(z \mid \mathbf{s} = s) = \frac{f_{s,z}(s,z)}{f_s(s)}$$

$$f_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{s,z}(s,z)\,dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{12}(s+z)\,\mathrm{e}^{-z}\,dz$$

$$= \frac{1}{12}\left[-s\,\mathrm{e}^{-z} + (-z-1)\,\mathrm{e}^{-z}\right]_{z=0}^{\infty} = \frac{1}{12}(s+1), \qquad 0 \le s \le 4$$

$\Rightarrow$

# مثال: تخمین ML

$$\Rightarrow \underbrace{f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)=\frac{s+z}{s+1}e^{-z}}_{\text{تابع احتمال}},\quad 0\le s\le 4,\quad 0\le z\le\infty$$

بنابراین:

$$\frac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\frac{s+z}{s+1}e^{-z}=\frac{1-z}{(s+1)^2}e^{-z}$$

$$\begin{cases} z>1, \dfrac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)}{\partial s}<0 \Rightarrow \left\{s=0\rightarrow \max \partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)\right\} \\ 0\le z<1, \dfrac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)}{\partial s}>0 \Rightarrow \left\{s=4\rightarrow \max \partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)\right\} \\ z=1, \dfrac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)}{\partial s}=0 \Rightarrow \left\{s=arbitrarily\ value=\dfrac{22}{9}\right\} \end{cases}$$

$$\hat{s}_{ML}=\begin{cases} 4, & 0\le z<1 \\ 22/9, & z=1 \\ 0, & z>1 \end{cases}$$

# مثال: تخمین ML در حضور نویز گوسی

فرمول‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

فرض کنید:

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{s} + \mathbf{v} \text{ ؛ } \mathbf{s}, \mathbf{v} \ are\, indepent \\ \mathbf{v} \sim N(0, \sigma^2) \\ f_v(v) = \dfrac{1}{2\pi\sigma} e^{-v^2/2\sigma^2} \end{cases}$$

فصل قبل نشان داده شدکه:

$$f_z(z \mid \mathbf{s} = s) = f_z(v)\big|_{v=z-s} = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-(z-s)^2/2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \ \hat{s}_{ML} = z = \alpha(z)$$

# مثال: تخمین ML بر اساس چندین داده اندازه‌گیری

فرض کنید:

$$
\begin{cases}
\forall n: \quad s(n) = s \\
z(n) = s + v(n) \text{،} \; \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v} \; are\, indepent \\
v(\mathrm{n}) \sim N(0, \sigma^2)
\end{cases}
$$

و بردارهای n تایی اندازه‌گیری‌ها و نویز را نیز داریم:

$$
Z_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}(1) \\ \boldsymbol{z}(2) \\ \cdots \\ \boldsymbol{z}(n) \end{bmatrix} \quad , \quad V_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(1) \\ \boldsymbol{v}(2) \\ \cdots \\ \boldsymbol{v}(n) \end{bmatrix}
$$

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال
و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین
مربعات خطا

# مثال: تخمین ML بر اساس چندین داده اندازه‌گیری

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین ML یعنی $\hat{s}_{ML}$ برابرست با:

$$\hat{s}_{ML} = values\ of\ \ s\ \ that\ \text{maximizes}\ f_{Z_n}(Z_n \mid s = s)$$

تابع چگالی احتمال بردار نویز گوسی $V_n$ برابرست با:

$$\begin{cases} f_{V_n}(V_n) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|P_n\right|^{1/2}} \exp\left[\dfrac{-1}{2} V_n^T P_n^{-1} V_n\right], \\ P_n = Cov\left[V_n\right] \\ \left|P_n\right| : determinant\ of\ \ P_n \end{cases}$$

بردار اندازه‌گیری‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} Z_n = \beta s + V_n \\ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T \quad , \dim(\beta) = n \end{cases}$$

# مثال: تخمین ML بر اساس چندین داده اندازه‌گیری

فرمول‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

حال تابع احتمال برابرست با:

$$\mathrm{f}_{Z_n}(\mathrm{Z}_n \mid \boldsymbol{s}=\mathrm{s}) = \mathrm{f}_{V_n}(\mathrm{V}_n)\big|_{V_n = \mathrm{Z}_n - \beta s}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\mathrm{P}_n\right|^{1/2}} \exp\left[\frac{-1}{2}(\mathrm{Z}_n - \beta\,\mathrm{s})^T\, \mathrm{P}_n^{-1}(\mathrm{Z}_n - \beta\,\mathrm{s})\right]$$

و آنگاه:

$$\begin{cases} \hat{s}_{ML} = \textit{values of } s \textit{ that } \text{maximizes } f_{Z_n}(Z_n \mid s = s) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{or} \\ \hat{s}_{ML} = \textit{values of } s \textit{ that } \text{minimizes } (\mathrm{Z}_n - \beta\,\mathrm{s})^T\, \mathrm{P}_n^{-1}(\mathrm{Z}_n - \beta\,\mathrm{s}) \end{cases}$$

$$\boxed{\hat{s}_{ML} = \left[\beta^T P_n^{-1}\beta\right]^{-1} \beta^T P_n^{-1} \mathrm{Z}_n}$$

# مثال: تخمین ML بر اساس چندین داده اندازه‌گیری

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

و اگر:

$$if \quad P_n \text{ is diagonal with } P_n = \sigma^2 I \Rightarrow \beta^T P_n^{-1} \beta = n/\sigma^2$$

$$\boxed{\beta^T P_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}[1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]}$$

و تخمین ML برای مشاهدات $\{z(n),\dots,z(2),z(1)\}$ برابرست با:

$$\boxed{\hat{s}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z(j) = \alpha(z(1), z(2), \dots, z(n))}$$

تخمین ML= میانگین مشاهدات

تخمین ML را اغلب رویکرد غیربیزین ( non-Bayesian )گویند.

# حداکثرسازی تخمین پسین
# Maximum a Posteriori (MAP) Estimate

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

در نظر بگیرید که:

$$z = g(s, v)$$

با فرض مشاهده $z$ محتمل‌ترین مقدار $s$ برای وقوع، برابر با مقداریست که:

$$\hat{s}_{MAP} = \text{values of } s \text{ that maximizes } f_s(s \mid z = z)$$

این تابع احتمال به عنوان تابع چگالی احتمال پسین شناخته می‌شود زیرا پس از در اختیار داشتن اندازه‌گیری $z$ تعیین می‌شود.

$\hat{s}_{MAP}:$ → تخمین حداکثر احتمال پسین MAP نامیده می‌شود.

فرض کنید:

$$f_s(s \mid z = z): \begin{cases} \text{is differentiable} \\ \textbf{and} \\ \text{has unique maximum in interior of this domain} \end{cases}$$

# حداکثرسازی تخمین پسین

فرمول‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

آنگاه:

$$\hat{s}_{MAP} = values\ of\ \ s\ \ which\ \frac{\partial f_s(s \mid z = z)}{\partial s} = 0$$

با استفاده از فرمول بیز داریم:

$$f_y(y \mid \mathbf{x} = x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f_s(s \mid \mathbf{z} = z) = \frac{f_s(z \mid \mathbf{s} = s) f_s(s)}{f_z(z)}$$

از آنجایی‌که اندازه‌گیری z را داریم و :

$$f_z(z): \begin{cases} is\ const \\ independent\ of\ \ s \end{cases}$$

$$\hat{s}_{MAP} = values\ of\ \ s\ \ that\ \text{maximizes}\ f_z(z \mid \mathbf{s} = s) f_s(s)$$

*تخمین MAP شکلی از تخمین بیزین*

# مثال: تخمین MAP در حضور نویز گوسی

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

داریم:

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{s} + \mathbf{v} \\ s \sim N(\eta_s, \sigma_s^2) \\ v \sim N(0, \sigma_v^2) \end{cases}$$

در این صورت:

$$f_s(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-(s-\eta_s)^2/2\sigma_s^2}$$

از مثال تابع چگالی شرطی درس دو داریم:

$$f_z(z \mid \mathbf{s} = s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-(z-s)^2/2\sigma_v^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad f_z(z \mid \mathbf{s} = s)\, f_s(s) = \frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_v} \exp\left[-\frac{(z-s)^2}{2\sigma_v^2} - \frac{(s-\eta_s)^2}{2\sigma_s^2}\right]}$$

# مثال: تخمین MAP در حضور نویز گوسی

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MAP عبارت فوق را حداکثر می‌سازد که معادل با حداقل‌سازی عبارت

$$\left[(z-s)^2/2\sigma_v^2+(s-\eta_s)^2/2\sigma_s^2\right]$$

است. بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{\partial f_z(\mathbf{s}\mid \mathbf{s}=s)\,f_s(s)}{\partial s}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{1}{2\sigma_v^2}\left[2(z-s)(-1)\right]+\frac{1}{2\sigma_s^2}\left[2(s-\eta_s)(1)\right]=0}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \hat{s}_{MAP}=\frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2+\sigma_s^2}\eta_s+\frac{\sigma_s^2}{\sigma_v^2+\sigma_s^2}z}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \hat{s}_{MAP}=\eta_s+\frac{\sigma_s^2}{\sigma_v^2+\sigma_s^2}(z-\eta_s)}$$

$$\boxed{if\;\; \sigma_v^2 \ll \sigma_s^2 \;\Rightarrow\; \hat{s}_{MAP}=\eta_s+\frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2}(z-\eta_s)=z=\hat{s}_{ML}}$$

# MSE

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

در نظر بگیرید که:

$$z = g(s, v)$$

با فرض مشاهده $z$ ، خطای تخمین را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\underbrace{\tilde{s}}_{\text{خطای تخمین}} = s - \hat{s}$$

در این‌صورت MSE (میانگین مربعات خطا) برابر است با:

$$\boxed{MSE = E\left[E\left[\tilde{s}^2 \mid z\right]\right] = E\left[E\left[(s-\hat{s})^2 \mid z\right]\right] = E\left[(s-\hat{s})^2\right]}$$

معیار MSE، توان متوسط خطا را ارائه می‌دهد. تخمین MMSE عبارت است از تخمین سیگنال $s$ با استفاده از مینیمم نمودن میانگین مربعات خطای تخمین یعنی همان $\hat{s}_{MMSE}$ .

# تخمین MMSE

قضیه. با در نظر داشتن متغیر تصادفی $z$ ، تخمین MMSE (یعنی $\hat{s}_{MMSE}$ ) برای سیگنال $s$ برابر است با:

$$\boxed{\hat{s}_{MMSE} = E[s \mid z]}$$

نتایج قضیه و ویژگی‌های تخمین MMSE:

- تخمین MMSE ( $\hat{s}_{MMSE}$ ) یکتاست.
- تخمین MMSEنیز مشابه رویکرد MAPبه اطلاعاتی در مورد $s$ نیاز دارد.

بنابراین تخمین MMSE نوع دیگری از تخمین بیزین است.

- $z$ یک متغیر تصادفی است:

تخمین $\hat{s}_{MMSE}$ نیز به نوبه خود یک متغیر تصادفی خواهد بود.

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

# تخمین MMSE

- تخمین MMSE ($\hat{s}_{MMSE}$) بدون بایاس است. فرض کنید برای متغیر تصادفی $z$ تحقق به صورت $z$ داریم:

$$\begin{cases} \hat{s}_{MMSE} = \alpha(z) = E[s \mid z = z] = \int_{-\infty}^{\infty} s f_s(s \mid z = z) ds \\ \alpha(z) = \int_{-\infty}^{\infty} s f_s(s \mid z = z) ds \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E[\tilde{s}] = E[s - \hat{s}_{MMSE}] = E\left[s - E[s \mid z]\right]$$

$$= E[s] - E\left[E[s \mid z]\right] = E[s] - E[s]$$

$$= 0$$

تخمین MMSE بدون بایاس است.

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

# مثال: تخمین MMSE در حضور نویز گوسی



اندازه‌گیری در حضور نویز جمع‌شونده را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} z = s + v \\ v \sim N(0, \sigma_v^2) \\ \textit{we require knowledge } s, \textit{ assume } s \sim N(\bar{s}, \sigma_s^2) \\ s, v : \textit{are uncorrelated} \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} E[s] = E[z] = \bar{s} \\ Var[z] = Var[s] + Var[v] = \sigma_s^2 + \sigma_v^2 \end{cases}$$

همچنین:

$$\left.\begin{aligned} z &= s + v \\ v &\sim N(0, \sigma_v^2) \\ s &\sim N(\bar{s}, \sigma_s^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow z \sim N(\bar{s}, \sigma_s^2 + \sigma_v^2)$$

# مثال: تخمین MMSE در حضور نویز گوسی

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

بنابراین برای تابع PDF داریم:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_v^2}} exp\left[-\frac{(z-\overline{s})^2}{2(\sigma_s^2+\sigma_v^2)}\right]$$

خواهیم داشت:

منتج شده از نتایج پیشین

$$\begin{cases} f_s(s|z=z) = \dfrac{f_z(z|\mathbf{s}=s)}{f_z(z)} \\ f_z(z|\mathbf{s}=s) = f_z(v)|_{v=z-s} = \dfrac{1}{2\pi\sigma} e^{-(z-s)^2/2\sigma^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{f_s(s\,|\,\mathbf{z}=z) = \frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_v f_z(z)} exp\left\{-\left[\frac{(z-s)^2}{2\sigma_v^2} + \frac{(s-\overline{s})^2}{2\sigma_s^2}\right]\right\}}$$

# مثال: تخمین MMSE در حضور نویز گوسی



با جایگذاری $f_z(\mathrm{z})$ داریم:

$$\Rightarrow \quad f_s(s \mid z=z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\dfrac{\sigma_s^2\sigma_v^2}{\sigma_s^2+\sigma_v^2}}} exp\left\{-\left[-\frac{(z-\overline{s})^2}{2(\sigma_s^2+\sigma_v^2)}+\frac{(z-s)^2}{2\sigma_v^2}+\frac{(s-\overline{s})^2}{2\sigma_s^2}\right]\right\}$$

نتیجه می‌شود:

$$-\frac{(z-\overline{s})^2}{2(\sigma_s^2+\sigma_v^2)}\frac{(z-s)^2}{2\sigma_v^2}+\frac{(s-\overline{s})^2}{2\sigma_s^2}=\frac{(s-\hat{s}_{MAP})^2}{2\,\dfrac{\sigma_s^2\sigma_v^2}{\sigma_s^2+\sigma_v^2}}$$

# مثال: تخمین MMSE در حضور نویز گوسی

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

$$\Rightarrow \quad f_s(s \mid \mathbf{z} = z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\dfrac{\sigma_s^2\sigma_v^2}{\sigma_s^2+\sigma_v^2}}}\exp\left[-\frac{(s-\hat{\mathbf{s}}_{MAP})^2}{2\dfrac{\sigma_s^2\sigma_v^2}{\sigma_s^2+\sigma_v^2}}\right]$$

$$\hat{s}_{MMSE} = E\left(s \mid z = z\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mathbf{s}}_{MMSE} = E\left(\mathbf{s} \mid \mathbf{z} = z\right) = \hat{\mathbf{s}}_{\mathrm{MAP}} = \overline{s} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_v^2}(z-\overline{s})$$

# اصل تعامد

قضیه.اصل تعامد. خطای $s-E(s|z)$ بر هر تابع $\gamma(z)$ متعامد است. به عبارت دیگر:

$$\boxed{E[(s-E[s|z])\gamma(z)]=0}$$

اثبات.

$$E[(s-E[s|z])\gamma(z)] = E[E[(s-E[s|z])\gamma(z)\,|\,z]]$$
$$= E[E[(s-E[s|z])\,|\,z]\gamma(z)]$$
$$= E[(E[(s|z]-E[E[s|z]\,|\,z])\gamma(z)]$$
$$= E[(E[(s|z]-E[s|z])\gamma(z)]$$
$$= 0$$

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

# اصل تعامد

قضیه. با در نظر داشتن $z$ ، تخمین $\hat{s}=\alpha(z)$ ، تخمین MMSE سیگنال $s$ است اگر و فقط اگر خطای تخمین یعنی $s-\alpha(z)$ بر هر تابع $\gamma(z)$ متعامد باشد. به عبارت دیگر:

$$\boxed{E[(s-\alpha(z))\gamma(z)]=0}$$

فرموله‌سازی مسئله

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

# تخمین MMSE در حالت کلی

فرموله‌سازی مسئله
تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین
تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

قضیه: فرض کنید $Z$ مجموعه‌ای (احتمالاً نامتناهی) از مشاهدات به صورت

$$Z = \{z(n) : n_1 \leq n \leq n_2\}$$

باشد. همچنین با در نظر گرفتن مجموعه اندازه‌گیرهای $Z$ ، امید شرطی $s(n)$ به شکل $E[s(n)\,|\,Z]$ نشان داده می‌شود. آنگاه تخمین MMSE سیگنال برابرست با:

$$\boxed{\hat{s}(n) = E[s(n)\,|\,Z]}$$

# تخمین MMSE خطی

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

در عمل اغلب محاسبه تابع چگالی شرطی به سختی انجام می‌شود. علت موضوع آن است که یافتن رابطه $f_s(s \mid z = z)$ دشوار است.

یک دسته قدرتمند از توابع، توابع خطی هستند. در اینجا $\hat{s} = \alpha(z)$ به گونه‌ای محدود می‌شود که تخمین به صورت خطی باشد.

بنابراین به دنبال محاسبه تخمین بهینه خطی LMMSEخواهیم بود. حال تخمین برای ثابتی مانند $\lambda$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{s} = \lambda z$$

در تخمین LMMSE، هدف تعیین $\lambda$ خواهد بود. در راستای محاسبه $\lambda$ می‌توان از حداقل‌سازی مستقیم MSE استفاده نمود:

$$MSE = E\left[(s - \lambda z)^2\right] = E\left[s^2 - 2\lambda s z + \lambda^2 z^2\right]$$

$$\xRightarrow{\frac{\partial MSE}{\partial \lambda}=0} \quad -2E[sz]+2\lambda E\left[z^2\right]=0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\boxed{\lambda=\frac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}}$$

لذا تخمین LMMSE به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\hat{s}_{LMMSE}=\alpha(z)=\left(\frac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}\right)z}$$

در محاسبه تخمین LMMSE نیازی به اطلاعات مربوط به چگالی یا تابع احتمال وجود ندارد. فقط دانستن گشتاورهای مرتبه دوم $E[sz]$ و $E\left[z^2\right]$ لازم است. حال با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی داریم:

$$\boxed{E[sz]\approx\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(s_m z_m),\quad E\left[z^2\right]\approx\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}z_{\mathrm{m}}^2}$$


تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین
تخمین حداقل میانگین مربعات خطا
تخمین MMSE خطی

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

**قضیه (اصل تعامد در تخمین LMMSE): فرض کنید با در نظر داشتن $z$ تخمین LMMSE مربوط به $s$ برابر با $\alpha(z)$ باشد. در این‌صورت خطای $s-\alpha(z)$ بر هر تابع خطی $\gamma(z)$ متعامد است. به عبارت دیگر خواهیم داشت:**

$$\boxed{E[(s-\alpha(z))\gamma(z)]=0}$$

**اثبات:**

$$\begin{aligned}
E[(s-\alpha(z))\gamma(z)] &= E[(s-\left(\frac{E[sz]}{E[z^2]}\right)z)\beta z] \\
&= \beta E[sz]-E\left[\beta(E[sz]/E[z^2])z^2\right] \\
&= \beta E[sz]-\beta\frac{E[sz]}{E[z^2]}E[z^2] \\
&= \beta E[sz]-\beta E[sz] \\
&= 0
\end{aligned}$$

# اصل تعامد برای متغیرهای تصادفی برداری


تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی


فرض کنید $s$ و $z$ بردارهای تصادفی به‌طور مشترک توزیع شده و به ترتیب دارای ابعاد $m$ و $q$ باشند.

محاسبه تخمین LMMSE مربوط به $s$ به صورت $\hat{s} = Mz$ به روش زیر عمل خواهیم کرد:

$$Let \quad P = E\left[(s-\hat{s})(s-\hat{s})^T\right]$$

$$\Rightarrow \quad MSE = tr(P) = E\left[(s-\hat{s})^T(s-\hat{s})\right]$$

ماتریس $P$ را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$P = E\left[(s-\hat{s})^T(s-\hat{s})\right]$$

$$= E\left[ss^T\right] - ME\left[zs^T\right] - E\left[sz^T\right]M^T + ME\left[zz^T\right]M^T$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{tr(P) = tr(E\left[ss^T\right]) - tr(ME\left[zs^T\right]) - tr(E\left[sz^T\right]M^T) + tr(ME\left[zz^T\right]M^T)}$$

# اصل تعامد برای متغیرهای تصادفی برداری

از طرفی:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial A}\left[tr(ABA^T)\right] = 2AB}$$

اگر ماتریس $AB$ مربعی باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial}{\partial A}\left[tr(AB)\right] = \frac{\partial}{\partial A}\left[tr(B^T A^T)\right] = B^T$$

$$\frac{\partial\left(tr(P) = tr(E\left[\mathbf{s}\mathbf{s}^T\right]) - tr(ME\left[\mathbf{z}\mathbf{s}^T\right]) - tr(E\left[\mathbf{s}\mathbf{z}^T\right]M^T) + tr(ME\left[\mathbf{z}\mathbf{z}^T\right]M^T)\right)}{\partial \boldsymbol{M}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial M}\left[tr(P)\right] = -2E\left[\mathbf{s}\mathbf{z}^T\right] + 2ME\left[\mathbf{z}\mathbf{z}^T\right]}$$

# اصل تعامد برای متغیرهای تصادفی برداری

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

$$if \quad \frac{\partial}{\partial M}\left[tr(P)\right] = -2E\left[\boldsymbol{s}\boldsymbol{z}^T\right] + 2ME\left[\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{M = E\left[\boldsymbol{s}\boldsymbol{z}^T\right]\left(E\left[\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T\right]\right)^{-1}}$$

تخمین LMMSE یعنی $\hat{s}$ برابر می‌شود با:

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\boldsymbol{s}} = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{s}\boldsymbol{z}^T\right]\left(\mathrm{E}\left[\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T\right]\right)^{-1} \boldsymbol{z}}$$

# قضیه: اصل تعامد برای متغیرهای تصادفی برداری

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

فرض کنید $s$ و $z$ بردارهای تصادفی به طور مشترک توزیع شده باشند که در آن $s$ یک بردار با $m$ بُعد و $z$ برداری با بُعد $q$ است. تخمین LMMSE مربوط به $s$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{s} = \alpha(z)$$

در این‌صورت:

$$\underbrace{(s - \hat{s})}_{\text{خطای تخمین}} \perp z$$

به عبارت دیگر:

$$\boxed{\mathrm{E}\left[(s - \hat{s})z^T\right] = \mathbf{0}_{m \times q}}$$

# قضیه

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

با در نظر داشتن $z$ ، $\alpha(z)$ را تخمین خطی برای $s$ در نظر بگیرید. در اینصورت $\alpha$ ، معیار $MSE$ را حداقل می‌سازد اگر و فقط اگر:

$$\underbrace{(s-\alpha(z))}_{\text{خطای تخمین}} \perp z$$

یعنی:

$$\boxed{\mathrm{E}\left[(s-\alpha(z))z^T\right] = \mathbf{0}_{m\times q}}$$

اگر تخمین خطی $\alpha(z)$ چنان یافت شود که این رابطه صادق باشد، در این صورت $\hat{s} = \alpha(z)$ تخمین $LMMSE$ خواهد بود.

اگر $\alpha$ به حالت خطی محدود باشد، طبق قضیه فقط لازم است $\alpha$ به گونه‌ای طراحی شود که خطای تخمین بر $z$ متعامد باشد.

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

برای محاسبه مقدار $\lambda$ در رابطه $\hat{s} = \lambda z$ ، با استفاده از قضیه آخر، می دانیم که مقدار $\lambda$ مربوط به تخمین $MMSE$ باید در رابطه زیر صدق کند:

$$\mathrm{E}\left[(s-\alpha(z))z^T\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}\left[(s-\lambda z)\beta z\right] = 0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\beta\, \mathrm{E}[sz] = \beta\lambda\, \mathrm{E}\left[z^2\right] \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\lambda = \mathrm{E}[sz]/\mathrm{E}\left[z^2\right]}$$

مشابه رابطه $\lambda = \dfrac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}$ که قبلا به دست آورده بودیم.

فرض کنید $s$ و $z$ هر دو دارای میانگین صفر باشند. آنگاه داریم:

$$\lambda = \frac{\mathrm{E}[sz]-\mathrm{E}[s]\mathrm{E}[z]}{\mathrm{E}\left[z^2\right]-(\mathrm{E}[z])^2} = \frac{\mathrm{Cov}[s,z]}{\sigma_z^2} \xRightarrow{\overbrace{\rho_{s,z}=Cov[s,z]/\sqrt{\sigma_s^2\sigma_z^2}}^{\text{ضریب همبستگی}}} \lambda = \frac{\sigma_s}{\sigma_z}\rho_{s,z} \xRightarrow{\text{تخمین LMMSE}} \boxed{\hat{s}_{\mathrm{LMMSE}} = \rho_{s,z}\frac{\sigma_s}{\sigma_z} z}$$

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین
تخمین حداقل میانگین مربعات خطا
تخمین MMSEخطی


فرض کنید $s$ و $z$ ناهمبسته باشند، به طوریکه:

$$\rho_{s,z} = 0$$

در این شرایط، تخمین $LMMSE$دقیقاً برابر با صفر خواهد بود که همان میانگین $s$ است. به عبارت دیگر هر چه همبستگی میان $s$ و $z$ بیشتر باشد، در این‌صورت $\left|\rho_{s,z}\right|$ با حداکثر دامنه یک نیز بزرگتر می‌شود.

متوسط خطای تخمین

$$\Rightarrow \qquad E\left[s - \hat{s}_{\text{MMSE}}\right] = E\left[s - \lambda z\right] = 0$$

پس تخمینگر بدون بایاس است.

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

میانگین مربعات خطا (MSE) نیز برابر می‌شود با:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\mathrm{LMMSE}} = \rho_{s,z} \frac{\sigma_s}{\sigma_z} z$$

$$MSE = E\left[ \left( \mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}_{\mathrm{MMSE}} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} MSE &= E\left[ \mathbf{s}^2 \right] + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_z^2} \rho_{s,z}^2 E\left[ \mathbf{z}^2 \right] - 2 \frac{\sigma_s}{\sigma_z} \rho_{s,z} E\left[ \mathbf{sz} \right] \\ &= \sigma_s^2 + \sigma_s^2 \rho_{s,z}^2 - 2 \frac{\sigma_s}{\sigma_z} \rho_{s,z} Cov\left[ \mathbf{s}, \mathbf{z} \right] \\ &= \sigma_s^2 + \sigma_s^2 \rho_{s,z}^2 - 2 \frac{\sigma_s}{\sigma_z} \rho_{s,z} \left( \rho_{s,z} \sigma_s \sigma_z \right) \\ &= \sigma_s^2 \left( 1 - \rho_{s,z}^2 \right) \end{aligned}$$

# بهینگی کلی (جامع)
# Overall Optimality

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

تخمین MMSE بهینه در مقایسه با سایر تخمینگرها به صورت یک امید ریاضی شرطی است. اما به علت دشواری و یا غیرممکن بودن محاسبه این امید ریاضی شرطی، اغلب <u>تخمین خطی LMMSE</u> محاسبه و اجرا می‌شود.

تخمین خطی LMMSE نسبت به تخمین MMSE (در مقایسه با همه تخمینگرهای ممکن)، زیربهینه است. اما اگر $s$ و $z$ به طور مشترک گوسی باشند، تخمین LMMSE نیز با تخمین MMSE بهینه برابر می‌شود .

# مثال: یک تخمین MMSE کلی


تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی


فرض کنید $s$ و $z$ دارای یک توزیع گوسی دو متغیره با ماتریس کوواریانس $P$ باشند:

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & Cov[z,s] \\ Cov[z,s] & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

حال تخمین *MMSE* مربوط به $s$ برابر است با:

$$\hat{s}_{\mathrm{MMSE}} = \mathrm{E}[s \mid z]$$

بنابراین داریم:

$$\rho = \rho_{s,z}$$

$$\Rightarrow \quad f_{s,z}(s,z) = \frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_z\sqrt{(1-\rho)^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left[\left(\frac{s}{\sigma_s}\right)^2 - \frac{2\rho sz}{\sigma_s\sigma_z} + \left(\frac{z}{\sigma_z}\right)^2\right]\right\}$$

# مثال: یک تخمین MMSE کلی

حال با در نظر گرفتن $z = \mathrm{z}$ تابع PDF شرطی مربوط به $s$ برابر می‌شود با:

$$f_{s,z}(s \mid z = \mathrm{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s\sqrt{(1-\rho)^2}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_s^2(1-\rho)^2}\left(s - \frac{\mathrm{E}[sz]}{\mathrm{E}\left[z^2\right]}z\right)^2\right\}$$

این رابطه یک تابع PDF به صورت زیر است:

$$N\left(\left(\frac{\mathrm{E}[sz]}{\mathrm{E}\left[z^2\right]}\right)z, \sigma_s^2(1-\rho)^2\right)$$

بنابراین داریم:

$$\hat{s}_{LMMSE} = \frac{\mathrm{E}[sz]}{\mathrm{E}\left[z^2\right]}z$$

$$\hat{s}_{LMMSE} = \alpha(z) = \left(\frac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}\right)z$$

$$\Rightarrow$$

$$\hat{s}_{\mathrm{MMSE}} = \mathrm{E}[s \mid z = z] = \frac{\mathrm{E}[sz]}{\mathrm{E}\left[z^2\right]}z$$

لذا برای متغیرهای تصادفی به طور مشترک گوسی با میانگین صفر، تخمین خطی MMSE بهترین تخمین MMSE کلی نیز خواهد بود.

تخمین بیشترین احتمال و بیشترین احتمال پسین

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

مقایسه روش های تخمین

در تخمین ML به جستجوی مقداری از $\mathbf{s}$ پرداخته می‌شود که تابع احتمال $f_z(z \mid \mathbf{s} = s)$ را بیشینه سازد. در حقیقت تابع احتمال $f_z(z \mid \mathbf{s} = s)$ یک تابع چگالی پیشین است و به جای $z$ تابعی از $\mathbf{s}$ می‌باشد.

در تخمین MAP به جستجوی مقداری از $\mathbf{s}$ پرداخته می‌شود که تابع احتمال پسین $f_z(\mathbf{s} \mid \mathbf{z} = z)$ را بیشینه سازد.

- تخمین ML یک روش تخمین <u>غیربیزین</u>
- تخمین MAP یک روش تخمین <u>بیزین</u>

# مثال: تخمین MMSE و ML

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSE خطی

مقایسه روش های تخمین

فرض کنید $s$ و $z$ متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال مشترک زیر باشند:

$$f_{s,z}(s,z)=\begin{cases}\frac{1}{12}(s+z)\,\mathrm{e}^{-z}, & 0\le s\le 4,\ \ 0\le z<\infty\\ 0, & others\end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$f_s(s\mid \mathbf{z}=z)=\left(\frac{1}{4}\right)\frac{s+z}{z+2},\quad 0\le s\le 4,\quad 0\le z<\infty$$

در این‌صورت تخمین MMSE برابر می‌شود با:

$$\hat{s}_{MMSE}=E(s\mid \mathbf{z}=z)=\int_0^4 s f_s(s\mid \mathbf{z}=z)\,\mathrm{ds}=\int_0^4 s\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{s+z}{z+2}\right)ds$$

$$=\frac{1}{4(z+2)}\left[\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{2}s^2z\right]_{s=0}^{4}=\frac{6z+16}{3z+6}$$

# مثال: تخمین MMSE و ML

MSE مربوط به $\hat{s}_{ML}$ برابر است با:

$$MSE(\hat{\mathbf{s}}_{ML}) = \int_0^{\infty}\int_0^{4}(s-\hat{\mathbf{s}}_{ML})^2 f_{\mathbf{s},\mathbf{z}}(s,z)\,ds\,dz$$

$$= \int_0^{1}\int_0^{4}(s-4)^2\frac{1}{12}(s+z)\,e^{-z}\,ds\,dz$$

$$+ \int_1^{\infty}\int_0^{4}(s-0)^2\frac{1}{12}(s+z)\,e^{-z}\,ds\,dz$$

$$\approx 4.8636$$

$$\hat{s}_{ML} = \begin{cases} 4, & 0 \le z < 1 \\ 22/9, & z = 1 \\ 0, & z > 1 \end{cases}$$

- تخمین حداقل میانگین مربعات خطا
- تخمین MMSE خطی
- مقایسه روش های تخمین

MSE تخمین MMSE نیز برابر است با:

$$MSE(\hat{\mathbf{s}}_{MMSE}) = \int_0^{\infty}\int_0^{4}\left(s-\frac{6z+16}{3z+6}\right)^2\frac{1}{12}(s+z)\,e^{-z}\,ds\,dz$$

$$\approx 1.1192$$

- تخمین MMSE نسبت به تخمین ML دارای MSE کمترست.
- تخمین MMSE یعنی $\hat{s}_{MMSE}$ متفاوت از تخمین ML یعنی $\hat{s}_{ML}$ است.

# مقایسه معیارهای بهینگی

| | $(MAP)$ تخمین حداکثر احتمال پسین | $(ML)$تخمین حداکثر احتمال |
|---|---|---|
| **طرح مسئله** | با در نظر داشتن $z$ کدام مقدار $s$ بیشترین احتمال رخداد را دارد؟ | با در نظر داشتن $z$ کدام مقدار $s$ بیشترین احتمال رخداد برای تولید $z$ دارد؟ |
| **هدف** | حداکثرسازی تابع چگالی احتمال شرطی $f_s(s\|z=z)$ که بر اساس فرمول بیز معادل با حداکثرسازی $f(z\|s=s)f_s(s)$ است. | حداکثرسازی تابع احتمال $f_z(z\|s=s)$ |
| **تخمین** | $\hat{s}_{MAP}=$ مقداری از $s$ که تابع $f_s(s\|z=z)$ را حداکثر سازد. یا به عبارت دیگر برابر است با مقداری از $s$ که برای آن رابطه $\frac{\partial f_s(s\|z=z)}{\partial s}=0$ برقرار است. | $\hat{s}_{ML}=$ مقداری از $s$ که تابع احتمال $f_z(z\|s=s)$ را حداکثر سازد. یا به عبارت دیگر برابر است با مقداری از $s$ که به ازای آن رابطه $\frac{\partial f_z(z\|s=s)}{\partial s}=0$ برقرار باشد. |
| **اطلاعات مورد نیاز** | چگالی احتمال $f_s(s\|z=z)$ بر اساس فرمول بیز به آگاهی از $s$ از طریق $f_s(s)$ نیاز است. | تابع احتمال $f_z(z\|s=s)$ |

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا

تخمین MMSEخطی

مقایسه روش های تخمین

# مقایسه معیارهای بهینگی

| | تخمین $MMSE$ خطی | ( تخمین $MMSE$ ) تخمین حداقل میانگین مربعات خطا |
|---|---|---|
| **طرح مسئله** | با در نظر داشتن متغیر تصادفی $z$، کدام تابع خطی $\hat{s}=\lambda z$ به کوچکترین $MSE$ منجر خواهد شد. | با در نظر داشتن متغیر تصادفی $z$، چه تخمینی از $s$ به کوچکترین $MSE$ منجر خواهد شد. |
| **هدف** | $\lambda$ را چنان بیابید که $E\left[(s-\lambda z)^2\right]$ را حداقل سازد. | معیار $MSE$ به عبارت دیگر $E\left[(s-\hat{s})^2\right]$ را حداقل کنید. |
| **تخمین** | $\hat{s}_{LMMSE} = \lambda z,$ که در آن رابطه $\lambda = E[sz]/E\left[z^2\right]$ برقرار است. | $\hat{s}_{MMSE} = E\left[s \mid z\right] = \int_{-\infty}^{\infty} s f_s(s \mid z)\, ds$ |
| **اطلاعات مورد نیاز** | . فرمول بیز حاکی از آن $f_s(s \mid z)$ چگالی $f_s(s)$ از طریق $s$ است که به آگاهی از نیاز است. | ، $E[sz]$ یعنی $z$ و $s$ همبستگی متقابل میان $E[z^2]$ یعنی $z$ گشتاور دوم |


تخمین حداقل میانگین مربعات خطا
تخمین MMSEخطی
مقایسه روش های تخمین