بسم الله الرحمن الرحیم

جبر خطی کاربردی

درس ۳: مقدمه ای بر بردارها و ماتریسها

گروه سیستم و کنترل– ۱۳۹۶

مدرس :دکتر عباداللهی

حل دستگاه معادلات جبری خطی

$$\boxed{A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}}$$

روش گوس-جردن (Gauss- Jordan)

-هنگامی که m=n باشد← به فرم قطری

-هنگامی که m≠n باشد ← به فرم سطری پلکانی کاهش یافته (Reduced Row Echelon)

- روش گوس-جردن

- هنگامی که m=n باشد← به فرم ماتریس قطری

$$[A|b]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array}\right]$$

x

$$\boxed{A\underline{x}=\underline{b} \longrightarrow [A\,|\,\underline{b}] \Longrightarrow [I\,|\,\underline{x}]}$$

الگوریتم کلی را به صورت زیر میتوان بیان کرد.

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}} r_1 + r_i \to r_i \quad , \qquad i = 2, \dots, n$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم

$$\frac{-a_{i2}}{a_{22}} r_2 + r_i \to r_i \quad , \qquad i = 1, \dots, n, \qquad i \neq 2$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام n-1 ادامه می دهیم.

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به یک،

$$\frac{1}{a_{ii}} r_i \to r_i \quad , \qquad i = 1, \dots, n$$

مثال ۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که ضریب x_1 در معادله اول برابر صفر است، با جا به جا کردن سطر اول و سوم داریم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۱)ضریب x_1 در معادله سوم صفر می‌باشد، لذا مجهول x_1 را از معادله دوم حذف می‌نماییم،

$$\frac{-1}{2}r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۲) حذف مجهول x_2 از معادلات اول و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -2r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \\ -4r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۳) حذف مجهول x_3 از معادلات اول ودوم،

$$\left.\begin{array}{l}\frac{-2}{5}r_3+r_1\rightarrow r_1\\ \frac{3}{10}r_3+r_2\rightarrow r_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&0&\frac{22}{5}\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{7}{10}\\0&0&-5&-6\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

(۴) در این مرحله که ماتریس A به صورت قطری در آمده است، با تقسیم هر سطر بر عنصر قطر اصلی آن ماتریس A را به یک ماتریس واحد تبدیل می‌نماییم،

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}r_1\rightarrow r_1\\ 2r_2\rightarrow r_2\\ \frac{-1}{5}r_3\rightarrow r_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{11}{5}\\0&1&0&\frac{7}{5}\\0&0&1&\frac{6}{5}\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

به این ترتیب مقدار مجهولات به صورت زیر به دست می‌آید،

$$x_1=\frac{11}{5},\qquad x_2=\frac{7}{5},\qquad x_3=\frac{6}{5}$$

-روش گوس- جردن

هنگامی که m≠n باشد← به فرم سطری پلکانی کاهش یافته (Reduced Row Echelon)

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix}$$

خصوصیات فرم سطری پلکانی کاهش یافته:

1-سطرهایی که تمامی عناصر آنها صفر می‌باشد، در بخش پایین ماتریس قرار دارند.

2-در سطرهایی که شامل عناصر غیر صفر هستند، اولین عنصر غیر صفر سمت چپ عدد یک می‌باشد که به آن عنصر محوری گفته می‌شود.

3-در ستون هایی که دارای عنصر محوری است، کلیه عناصر بالای عنصر محوری صفر است.

*ستون‌های دارای عناصر محوری مستقل هستند که آن‌ها را ستون پایه‌ای گویند.

*سایر ستون‌ها را که ستون‌های غیرپایه‌ای گویند، به ستون‌های پایه‌ای وابسته‌اند.

Matrix Rank (رتبه ماتریس)

$rank(A) = E_A$ تعداد عناصر محوری

فرم سطری پلکانی کاهش یافته

$$rank(A_{m\times n}) \le \min(m,n) \leftarrow \begin{cases} rank(A) \le n \\ rank(A) \le m \end{cases}$$

$rank(A) = E_A$ تعداد ستون‌های پایه‌ای

فرآیند تبدیل ماتریس ضرایب m×n به فرم سطری پلکانی کاهش یافته،

گام اول- در صورتی که ضریب x_1 در معادله اول یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{11}} r_1 \rightarrow r_1$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا m ام،

$$-a_{i1} r_1 + r_i \rightarrow r_i \quad , \qquad i = 2, \dots, m$$

گام دوم- در صورتی که ضریب x_2 در معادله دوم یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{22}} r_2 \rightarrow r_2$$

حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$-a_{i2} r_2 + r_i \rightarrow r_i \quad , \qquad i = 1, \dots, m, \qquad i \neq 2$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام m-1 ادامه می‌دهیم،

دستور rref(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

مثال۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حال می‌خواهیم آن را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته درآوریم.

(۱)ضریب x_1 در معادله اول ۱ و در معادله دوم صفر می باشد، لذا باید x_1 را از سطر سوم حذف نماییم،

$$-2r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۲) ضریب x_2 در معادله دوم یک می‌باشد، لذا x_2 را از سطر اول و سوم حذف می‌نماییم،

$$\left.\begin{array}{r} -3r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \\ 2r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۳) از آنجایی که ضریب x_3 در سطر سوم صفر است سراغ x_4 می رویم، ضریب x_4 یک است، پس کافی است که x_4 را از معادلات اول و دوم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{r} r_3 + r_1 \rightarrow r_1 \\ -2r_3 + r_2 \rightarrow r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب فرم سطری پلکانی کاهش یافته معادلات به دست می‌آید، با توجه به معادلات به دست آمده نتایج زیر حاصل می‌شود،

$$x_1 = -6 + x_5 + 2x_3, \qquad x_2 = 2 + x_5 - x_3, \qquad x_4 = 1 - x_5$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که متغیرهای x_1, x_2, x_4 مربوط به ستون هایی هستند که عناصر محوری در آن قرار دارند.

کاربرد روش گوس- جردن در محاسبه ماتریس معکوس

$$AA^{-1}=I \quad \rightarrow \quad [A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}]$$

مثال۳

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{r} r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -2r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-2}{3}r_2 + r_1 \to r_1 \\ \dfrac{5}{3}r_2 + r_3 \to r_3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dfrac{7}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-4}{3} & \dfrac{-1}{3} & \dfrac{5}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{7}{4}r_3 + r_1 \to r_1 \\ \dfrac{3}{4}r_3 + r_2 \to r_2\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{4} & \dfrac{9}{4} & \dfrac{7}{4} \\ 0 & 3 & 0 & \dfrac{3}{4} & \dfrac{9}{4} & \dfrac{3}{4} \\ 0 & 0 & \dfrac{-4}{3} & \dfrac{-1}{3} & \dfrac{5}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}r_2 \rightarrow r_2\\ \frac{-3}{4}r_3 \rightarrow r_3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-5}{3} & \frac{-3}{4}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-5}{3} & \frac{-3}{4}\end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

کاربرد در تشخیص سازگار و ناسازگار بودن سیستم

دستگاه معادلات خطی هیچ جوابی نداشته باشد← ناسازگار (Inconsistent)

دستگاه معادلات خطی حداقل یک جواب داشته باشد← سازگار (Consistent)

راه تشخیص← استفاده از روش حذفی گوسی

معادلات معرفی شده با $[A|b]$ زمانی سازگار است که در فرم سطری پلکانی (کاهش یافته) آن، سطری به شکل زیر ظاهر نشده باشد،

$$\boxed{(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0|\alpha),\ \alpha\neq0}$$

در غیر این صورت معادله حاصل از سطر مذکور به صورت زیر در خواهد آمد،

$$\boxed{0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=\alpha}$$

که برای $\alpha\neq0$ این معادله جواب ندارد.

مثال۴

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$x_1+x_2+x_3 = 3$$

$$2x_1-x_2-x_3= 5$$

$$2x_1+2x_2+2x_3= 7$$

این دستگاه معادلات نمونه‌ای از یک سیستم ناسازگار است، زیرا فرم سطری پلکانی آن به شکل زیر می‌باشد،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات جبری خطی همگن

فرم کلی دستگاه معادلات جبری خطی همگن (Homogeneous) به صورت زیر می‌باشد،

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

دستگاه معادلات خطی همگن **سازگار** می‌باشد،

یک مجموعه جواب برای حل این معادلات $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ است که به آن پاسخ بدیهی (Trivial Solution) گویند.

یک دستگاه معادلات خطی همگن می‌تواند فقط یک جواب بدیهی را داشته باشد و یا اینکه علاوه بر آن بی‌شمار جواب دیگر هم داشته باشد.

مثال ۵

دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیرید،

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$
$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0$$

ماتریس افزوده و تبدیل آن با روش حذفی گوسی به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

با حل این معادلات در می‌یابیم که تنها جواب ممکن پاسخ بدیهی $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ می‌باشد.

دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ماتریس افزوده و تبدیل آن با روش سطری پلکانی به صورت زیر به‌دست می‌آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

با توجه به محل عناصر محوری x_1 و x_3 متغیرهای وابسته و x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند.

$$x_1=-2x_2-x_4, \qquad x_3= -x_4$$

همانطور که مشاهده می‌شود در این حالت دستگاه معادلات علاوه بر پاسخ بدیهی بی‌نهایت جواب دیگر هم خواهد داشت.

در یک دستگاه معادلات جبری خطی

$$A_{m\times n}x_{n\times 1}=b_{m\times 1}$$

m تعداد معادلات و n تعداد مجهولات،

$m = n$
- $|A| \neq 0$ یک جواب منحصربفرد دارد
- $|A| = 0$ بررسی سازگار یا ناسازگار بودن سیستم

$m < n$ $(Underdetermined)$ فرومعین
- اصلا جواب ندارد
- بیشمار جواب دارد $\rightarrow$ حداقل نرم $Minimum\ Norm\ Solution$

$m > n$ $\rightarrow$ $(Overdetermined)$ فرامعین
- یک جواب دارد
- اصلا جواب ندارد $\rightarrow$ حداقل مربعات $Least\ Square\ Solution$
- بیشمار جواب دارد

تعداد عملیات در محاسبات جبری

جمع دو بردار:

$\underline{u}+\underline{v} = [u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n v_n]$

$n \rightarrow$ flops

ضرب عدد اسکالر در بردار:

$a\underline{u}=[au_1, au_2, \dots, au_n]$

n=flops

ضرب داخلی دو بردار:

$$< u, v >= u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$$\left.\begin{matrix} n \rightarrow multiplication \\ n-1 \rightarrow addition \end{matrix}\right\} 2n-1 \ \rightarrow flops$$

جمع دو ماتریس:

$\boxed{C_{n\times n} = A_{n\times n} + B_{n\times n}}$ $\boxed{n^2 = flops}$

ضرب بردار در ماتریس:

$\boxed{y_{m\times 1} = A_{m\times n}X_{n\times 1}}$ $\boxed{2(n-1)m \rightarrow flops}$

$m = n \rightarrow$ قطری $A \rightarrow n = flops$

$n \rightarrow$ عدد بزرگ $\rightarrow 2nm \rightarrow flops$

ضرب ماتریس در ماتریس:

$C_{m\times p} = A_{m\times n}B_{n\times p}$ $(2n-1)mp \rightarrow flops$

$n \rightarrow$ عدد بزرگ $\rightarrow 2nmp \rightarrow flops$

پرسش:

1. مقدار عبارت $X_{n\times1}$ $y_{n\times1} = A_{n\times n}B_{n\times n}$ را به دو طریق به دست آورید، کدام روش سریع‌تر است؟

الف) $y=(AB)X$

ب) $y= A(BX)$

الگوریتم جایگزینی پسرو:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered} x_n = b_n / a_{nn} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n)/a_{n-1,n-1} \\ x_{n-2} = (b_{n-2} - a_{n-2,n-1} x_{n-1} - a_{n-2,n} x_n)/a_{n-2,n-2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_1 = (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - \cdots - a_{1n} x_n)/a_{11} \end{gathered}}$$

$$\boxed{\left. \begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow multiplication \\ 0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 &= \frac{n(n+1)}{2} - n \rightarrow addition \end{aligned} \right\} \Rightarrow n^2 \rightarrow flops}$$

الگوریتم حذفی گوسی:

$$\left.\begin{aligned}\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3} &\rightarrow multiplication\\ \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6} &\rightarrow addition\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{2n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}-\frac{7n}{6} \rightarrow flops$$

برای ($n\rightarrow\infty$) می توان هر یک را $n^3/3$ عملیات و در کل $2n^3/3$ در نظر گرفت.

مثال:

برای $n=100$ اختلاف در حجم محاسبات دو روش معادل 300000 عملیات جمع و ضرب است.

الگوریتم گوس- جردن:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{n^3}{2}+\dfrac{n^2}{2} & \rightarrow multiplication \\ \dfrac{n^3}{2}-\dfrac{n}{2} & \rightarrow addition \end{array}\right\} \Rightarrow n^3+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2} \rightarrow flops$$

برای $(n\rightarrow\infty)$ می توان هر یک را $n^3/2$ عملیات و در کل n^3 در نظر گرفت.

مثال

برای n=100 اختلاف در حجم محاسبات دو روش معادل ۳۰۰۰۰۰ عملیات جمع و ضرب است.

روش حذفی گوسی: $\dfrac{2n^3}{3}=0.67\times10^6$ روش گوس – جردن: $n^3=10^6$

تحقیق سوم

از دستور flops در نرم افزار MATLAB برای چه منظوری استفاده می‌شود؟

یک دستگاه معادلات خطی ۱۰۰۰×۱۰۰۰ را در نظر بگیرید،

$$A\underline{x}=\underline{b}$$

حجم محاسبات لازم برای حل این دستگاه معادلات توسط دو روش زیر را مقایسه کنید.

$$X=inv\,(A)^{*}b \quad \text{و} \quad x=A\backslash b$$