جبر خطی کاربردی

درس ۴ : دستگاه معادلات جبری خطی

گروه سیستم و کنترل– ۱۳۹۶

مدرس :دکتر عباداللهی

حل دستگاه معادلات جبری خطی به روش تجزیه ماتریس ها

۱- تجزیه ماتریس A

➢ $$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow \quad A = \underbrace{A_1 A_2 \ldots A_{k-1} A_k}_{\downarrow}$$

حاصل‌ضرب ماتریس‌های ساده ، قطری و مثلثی

۲- حل دستگاه معادلات $(A_1 A_2 \ldots A_k)\underline{x} = \underline{b}$ **با حل kمعادله ساده**

$$\underline{z}_1 = A_2 A_3 \ldots A_k \underline{x}$$

....

$$\underline{z}_2 = A_3 \ldots A_k \underline{x}$$

$$\underline{z}_{k-1} = A_k \underline{x}$$

$$A_1 z_1 = b, \quad A_2 z_2 = z_1, \ldots, \quad A_{k-1} z_{k-1} = z_{k-2}, \quad A_k x = z_{k-1}$$

تعداد عملیات در محاسبات جبری

معرفی روش‌های حل دستگاه معادلات جبری خطی به‌وسیله تجزیه ماتریس‌ها

$A_{n\times n}$

تجزیه LU (LU Factorization)

تجزیه چالسکی (Cholesky Factorization)

$A_{m\times n}$

تجزیه QR (QR Factorization)

تجزیه مقادیر منفرد (SVD) (Singular Value Decomposition)

حل دستگاه معادلات جبری خطی با استفاده از تجزیه LU

برای ماتریس مربعی و غیرمنفرد $A_{n\times n}$

$$\boxed{A = LU}$$

ماتریس بالا مثلثی   ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A\underline{x} = \underline{b} \xrightarrow{A=LU} LU\underline{x} = \underline{b} \xrightarrow{\underline{y}=U\underline{x}} L\underline{y} = \underline{b}}$$

$$\boxed{\begin{cases} L\underline{y} = \underline{b} \\ \underline{y} = U\underline{x} \end{cases}}$$

جواب نهایی با حل دستگاه معادلات به روش جایگزینی پیشرو و پسرو بدست می آید

مثال ۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ -4x_1 + x_2 - 10x_3 = 3 \end{cases}$$

با استفاده از روش تجزیه LU جواب دستگاه معادلات را بیابید.

فرم ماتریسی این معادلات به شکل زیر می‌باشد.

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU ماتریس A به شکل زیر می‌باشد:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

با حل معادلات ماتریسی اول به‌وسیله الگوریتم جایگزینی پیشرو جواب‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$y_1 = 0, \quad y_1 = -4, \quad y_1 = 39$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلات ماتریس دوم پاسخ نهایی با یک الگوریتم جایگزینی پسرو محاسبه می‌گردد.

$$x_1 = \frac{-119}{29}, \quad x_2 = \frac{1}{29}, \quad x_3 = \frac{-39}{29},$$

روش های تجزیه LU ماتریس ها

برای ماتریس مربعی و غیرمنفرد:

$$\boxed{A = LU}$$

ماتریس بالا مثلثی

ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد

- استفاده از روش حذفی گوسی بدون محورگیری

-استفاده از الگوریتم ماتریس‌های بلوکی

تجزیه LU با استفاده از روش حذفی گوسی بدون محورگیری

برای ماتریس مربعی و غیرمنفرد $A_{n\times n}$

$$\boxed{A = LU}$$

ماتریس بالا مثلثی

ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = U$$

ماتریس مقدماتی مربعی و معکوس‌پذیر می‌باشند.

$$\boxed{A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} U = LU}$$

که در آن $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$ یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد می‌باشد.

تجزیه LU وقتی وجود دارد که بتوان ماتریس A را بدون جابجا کردن سطرها به فرم بالامثلثی درآورد.

این تجزیه در صورت وجود یکتاست.

مثال ۲

تجزیه **LU** ماتریس مربعی **A** را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 2 & 5 & -3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix}$$

همانند آنچه که در روش حذفی گوسی انجام دادیم سعی می‌کنیم تا ماتریس مذکور را بـا انجـام یـک سـری عملیـات سطری به صورت بالا مثلثی درآوریم.

$$\frac{-2}{3}r_1+r_2\to r_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 2 & 5 & -3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix} \Rightarrow E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{-2}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{3}r_1+r_3\to r_3 \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 9 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow E_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$-9r_2+r_3\to r_3 \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix} \Rightarrow E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -9 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس بالا مثلثی U به صورت زیر بدست می‌آید.

$$U = E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

حال با محاسبه معکوس ماتریس‌های E_3, E_2, E_1 ماتریس پایین مثلثی L را بدست می‌آوریم.

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه LU ماتریس A به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

تجزیه LUبا استفاده از الگوریتم ماتریس‌های بلوکی

اگر صورت کلی ماتریس‌های بلوکی $A_{n\times n}$ ، U و L را به شکل زیر در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$$

در این صورت داریم:

$$A=LU \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ u_{11}L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22}U_{22} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & u_{11}=a_{11} \\ & U_{12}=A_{12} \\ & L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21} \\ & A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22} \end{aligned}$$

مثال ۳

تجزیه LU ماتریس مربعی Aرا بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 2 & 5 & -3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix}$$

اگر ماتریس A=LU را به صورت زیر بنویسیم:

$$A=\left[\begin{array}{c:cc}3 & 6 & -9\\ \hdashline 2 & 5 & -3\\ -4 & 1 & 10\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc}1 & 0 & 0\\ \hdashline l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ \hdashline 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{array}\right]$$

با توجه به روابط بالا داریم:

$$u_{11}=a_{11}\rightarrow u_{11}=3$$

$$U_{12}=A_{12}\rightarrow U_{12}=\left[6-9\right]\rightarrow u_{12}=6,\ u_{13}=-9$$

$$L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\ -4\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=\frac{2}{3},\ l_{31}=\frac{-4}{3}$$

$$A_{22} - L_{21}U_{12} = L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_{22} = 1 \\ l_{32}u_{22} = 9 \xrightarrow{u_{22}=1} l_{32} = 9 \\ u_{23} = 3 \\ l_{32}u_{23} + u_{33} = -2 \rightarrow u_{33} = -29 \end{cases}$$

به این ترتیب تجزیه LU ماتریس A به صورت زیر به دست می‌آید،

$$A = LU = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

مثال ۴

آیا برای هر ماتریس مربعی غیرمنفرد تجزیه LU وجود دارد؟

$$A=\left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ \hline 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{array}\right]$$

$$u_{11}=a_{11}\rightarrow u_{11}=1$$

$$U_{12}=A_{12}\rightarrow u_{12}=0\,,\ u_{13}=0$$

$$L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21}\rightarrow l_{21}=0,\ \ l_{31}=0$$

$$A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \to \begin{cases} u_{22} = 0 \\ l_{32}u_{22} = 1 \xrightarrow{u_{22}=0} l_{32}.0 = 1 \to ?! \\ u_{23} = 2 \\ l_{32}u_{23} + u_{33} = -1 \end{cases}$$

به تناقض برمی‌خوریم.

$$A_{22} - L_{21}U_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

عنصر (۱، ۱) صفر است، لذا نیاز به یک جایگشت داریم:

$$\tilde{A} = P_1 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حال تجزیه **LU** را برای ماتریس **A** ادامه می‌دهیم.

$$\tilde{A} = L_{22}U_{22} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_{22} = 1 \\ l_{32}u_{22} = 0 \xrightarrow{u_{22}=1} l_{32} = 0 \\ u_{23} = -1 \\ l_{32}u_{23} + u_{33} = 2 \rightarrow u_{33} = 2 \end{cases}$$

$$A = PLU \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

تجزیه PLU ماتریس ها (LU Factorization with Pivoting)

برای ماتریس مربعی و غیرمنفرد $A_{n\times n}$

$$\boxed{A = PLU}$$

ماتریس جایگشت (Permutation Matrix)

- استفاده از روش حذفی گوسی با محورگیری

- استفاده از ماتریس جایگشت در الگوریتم ماتریس‌های بلوکی

- دستور [L,U,P] = lu(A) در نرم‌افزار MATLAB

مثال ۵

با اعمال روش حذفی گوسی تجزیه A=PLU ماتریس زیر را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 3 \\ 20 & 17 & 19 \end{bmatrix}$$

ماتریس Aرا به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌نماییم و ماتریس مقدماتی هر مرحله را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} -2r_1 + r_2 \to r_2 \\ -4r_1 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & -7 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در اینجا نیاز به محورگیری داریم، زیرا عنصر (۲، ۲) صفر است،

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی **U** به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ 0 & -7 & -9\\ 0 & 0 & -11\end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی **L** نیز به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$E_3E_2E_1A=U\quad\Rightarrow\quad A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U=PLU$$

$$E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=PL$$

لذا تجزیه **A = PLU** به شکل زیر به دست می‌آید.

$$A=PLU\Rightarrow\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ 10 & 12 & 3\\ 20 & 17 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ 0 & -7 & -9\\ 0 & 0 & -11\end{bmatrix}$$

استفاده از دستور [L,U,P] = lu(A) در نرم افزار MATLAB

$$a = [5 \quad 6 \quad 7 \quad ;10 \quad 12 \quad 3 \quad ;20 \quad 17 \quad 19]$$

$$[L, U, P] = lu(A)$$

$$L = \begin{matrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0.2500 & 0.5000 & 1.0000 \end{matrix}$$

$$U = \begin{matrix} 20.0000 & 17.0000 & 19.0000 \\ 0 & 3.5000 & -6.5000 \\ 0 & 0 & 5.5000 \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس ها (Cholesky Factorization)

اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین (**Positive Definite**) باشد، می‌توان آن را به صورت زیر تجزیه نمود و برعکس.

$$\boxed{A = LL^T}$$

L: یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت

یعنی اگر بتوان ماتریس **A** را به این صورت تجزیه کرد، **A** مثبت معین است.

مثال ۶

ماتریس متقارن و مثبت معین زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات جبری خطی با استفاده از تجزیه چالسکی

برای ماتریس متقارن و مثبت معین $A_{n\times n}$

$$\boxed{A\underline{x}=\underline{b}\xrightarrow{A=LL^T}LL^T\underline{x}=\underline{b}\xrightarrow{\underline{y}=L^T\underline{x}}L\underline{y}=\underline{b}}$$

جواب نهایی با حل دستگاه معادلات به روش جایگزینی پیش‌رو و پس‌رو بدست می‌آید.

$$\boxed{\begin{cases}L\underline{y}=\underline{b}\\ \underline{y}=L^T\underline{x}\end{cases}}$$

مثال ۷

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ -16 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش تجزیه چالسکی جواب دستگاه معادلات را بیابید.
از آنجایی که ماتریس A یک ماتریس متقارن و مثبت معین است، لذا می‌توان از این روش استفاده کرد.
تجزیه چالسکی ماتریس A به شکل زیر می‌باشد:

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L\,y} = \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = L^T \underline{x} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

با حل معادلات ماتریسی اول جواب‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$y_1 = 6 \qquad y_2 = -1 \qquad y_3 = -3$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلات ماتریس دوم پاسخ نهایی محاسبه می‌گردد:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = -1$$

بدست آوردن تجزیه چالسکی ماتریس ها با استفاده از ماتریس‌های بلوکی

اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین (**Positive Definite**) باشد،

$$\boxed{A = LL^T}$$

یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت

صورت کلی ماتریس‌های بلوکی $A_{n\times n}$ را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \;,\; L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \;,\; L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{bmatrix}$$

در این صورت داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} & l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ & L_{12} = \frac{1}{l_{11}} A_{21} \\ & A_{22} - L_{21}L_{21}^T = L_{22}L_{22}^T \end{aligned}}$$

مثال ۸

تجزیه چالسکی ماتریس مثبت معین $A_{3\times3}$ را بیابید، اگر ماتریس $A=LL^T$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$A=\left[\begin{array}{c|cc}25 & 15 & 5\\ \hline 15 & 18 & 0\\ -5 & 0 & 11\end{array}\right]=\begin{bmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{11} & l_{21} & l_{31}\\ 0 & l_{22} & l_{32}\\ 0 & 0 & l_{33}\end{bmatrix}$$

با توجه به روابط گفته شده داریم:

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}\rightarrow l_{11}=5$$

$$L_{12}=\frac{1}{l_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=3,\quad l_{31}=-1$$

$$A_{22}-L_{21}L_{21}^T=L_{22}L_{22}^T$$

$$\begin{bmatrix}18 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22} & 0\\ l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{22} & l_{32}\\ 0 & l_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}9 & 3\\ 3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}^2 & l_{22}l_{32}\\ l_{22}l_{32} & l_{32}^2+l_{33}^2\end{bmatrix}\rightarrow l_{22}=3,\quad l_{32}=1,\quad l_{33}=3$$

به این ترتیب تجزیه چالسکی ماتریس A به صورت زیر بدست می‌آید،

$$A=\begin{bmatrix}25 & 15 & -5\\ 15 & 18 & 0\\ -5 & 0 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

استفاده از دستور chol (A) در نرم افزار MATLAB

$$A=[25\ 15\ -5;15\ 18\ 0;-5\ 0\ 11];$$

$$\mathrm{chol}(A)$$

$$\mathrm{ans}=$$

$$\begin{matrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}$$

در صورتی که ماتریس A مثبت معین نباشد، پیغام خطا ظاهر خواهد شد.

تعریف ماتریس مثبت معین (Positive Definite)

ماتریس A را مثبت معین گویند، اگر متقارن باشد و شرط زیر را داشته باشد:

$$\boxed{\left\{ \underline{x}^T A \underline{x} > 0, \ \forall \underline{x} \neq 0 \right.}$$

مثال ۹

ماتریس Aمثبت معین است:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$= (3x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 + 5x_2^2$$

$$= (3x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2$$

تعریف ماتریس مثبت نیمه معین (Positive Semi definite)

ماتریس A را مثبت نیمه معین گویند، اگر متقارن باشد و شرط زیر را داشته باشد.

$$\boxed{\left\{ \underline{x}^T A \underline{x} \geq 0,\ \exists \underline{x} \neq 0 \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} = 0 \right.}$$

مثال ۱۰

ماتریس A مثبت نیمه معین است، زیرا برای $\underline{x} \neq 0$ مانند $\underline{x} = (2,-3)^T$ مقدار $\underline{x}^T A \underline{x} = 0$ است.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$= (3x_1 + 2x_2)^2$$

صورت‌های درجه دوم (Quadratic Form)

تابع اسکالر $V(x)$ یک صورت درجه دوم می‌باشد.

$$\boxed{V(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = (\underline{x}, A\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}}$$

ماتریس متقارن حقیقی

$$V(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱۱

توابع زیر نمونه هایی از صورت های درجه دوم هستند.

$$V_1(\underline{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \rightarrow V_1(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &V_2(\underline{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3 \\ &V_2(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &V_3(\underline{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3 \\ &V_3(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

معیار سیلوستر برای تعیین علامت ماتریس های متقارن

۱- شرط مثبت معین:

$$a_{11} > 0 \ , \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ , \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, |A| > 0$$

باید تمامی کهادهای اصلی مقدم ماتریس A مثبت باشند.

۲- شرط مثبت نیمه معین:

$$a_{ii} \geq 0, \ \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \ \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0, \ \ldots, \ |A| = 0$$

که در آن $i<j<k$ می‌باشد. باید تمامی کهادهای اصلی ماتریس A غیرمنفی باشند.
در اینجا علامت تمامی کهادهای اصلی باید بررسی شوند نه فقط کهادهای اصلی مقدم.

مثال ۱۲

مثبت معین و مثبت نیمه معین بودن ماتریس‌ها را بررسی نمایید.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

طبق معیار سیلوستر علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی می نماییم:

ماتریس A_1 مثبت معین است:

$$4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 26 > 0 \Rightarrow$$

ماتریس A_2 مثبت معین است:

$$9 > 0, \quad \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 9 > 0 \Rightarrow$$

برای مثبت نیمه معین بودن باید $|A| = 0$ باشد.

ماتریس A_3 مثبت نیمه معین است:

$$9 > 0, \quad \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

مثال ۱۳

مثبت نیمه معین بودن ماتریس A را بررسی نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

باید علامت تمامی کهادهای اصلی بررسی نماییم و دترمینان ماتریس نیز صفر باشد.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

همانطور که پیداست $|A| = 0$ است، حال علامت کهادهای اصلی را بررسی می‌نماییم. برای یک ماتریس $A_{3\times3}$ شش کهاد اصلی به صورت زیر وجود دارد:

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

برای ماتریس داده شده داریم:

$$a_{11} = 1 > 0, \quad a_{22} = 4 > 0, \quad a_{33} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

مشخص است که دو تا از کهادهای اصلی منفی هستند. لذا ماتریس **A** مثبت نیمه معین نمی‌باشد.

مثال ۱۴

مثبت معین بودن ماتریس A را بررسی نمایید.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای این منظور می توان به دو طریق اقدام کرد:

۱- با استفاده از معیار سیلوستر:

$$2>0, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=8>0, \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=2>0$$

از آنجایی که تمامی کهادهای اصلی مقدم مثبت هستند، لذا ماتریس A مثبت معین است.

۲- می‌توان مثبت معین بودن صورت درجه دوم $x^T Ax$ را بررسی کرد.

$$\underline{x}^T A\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2^2 + x_3^3$$

$$= (x_1 - x_3)^2 + (x_1 + 2x_2)^2 + 2x_2^2$$

مشخص است که $x^T Ax$ به غیر از مبداء (**x=0**) بقیه جاها مثبت است، لـذا مـاتریس **A** مثبـت معـین می‌باشد.