فصل ششم

تحلیل پاسخ فرکانسی

دکتر سعید عبادالهی
دانشگاه علم و صنعت ایران

چرا پاسخ فرکانسی؟

در بررسی سیستم های کنترل خطی به روش کلاسیک، دو شیوه اساسی برای تحلیل و بهبود عملکرد سیستم وجود دارد که بدون حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم عمل می‌کنند:

- مکان-ریشه
- پاسخ فرکانسی

همان طور که در فصل قبل دیدیم طراحی سیستم کنترل در روش مکان‌ریشه، با بررسی رفتار ریشه‌های حلقه‌بسته در صفحه S در پاسخ به تغییر پارامتری در سیستم (بهره سیستم حلقه‌باز) انجام می‌پذیرد.

در تحلیل پاسخ فرکانسی بر خلاف مکان‌ریشه، بهره سیستم و سایر پارامترهای آن ثابت فرض شده تغییرات دامنه و فاز تابع تبدیل $G(s)$ در پاسخ به تغییرات قطب‌های تابع تبدیل در نظر گرفته می‌شود.

2

پلی بین معادلات دیفرانسیل و تحلیل فرکانسی

معادلات دیفرانسیل ← تبدیل لاپلاس ← تابع تبدیل

$s = \sigma + j\omega$

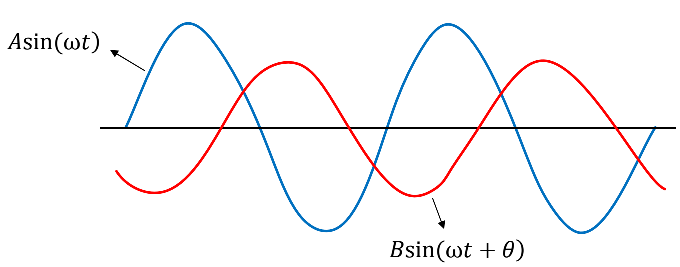
معادلات دیفرانسیل ← تبدیل فوریه ← پاسخ فرکانسی

$s = j\omega$

پاسخ فرکانسی:

پاسخ فرکانسی یک سیستم به صورت پاسخ حالت ماندگار به ورودی سینوسی تعریف می‌گردد.

$A\sin(\omega t)$ ← سیستم خطی ← $B\sin(\omega t + \theta)$



به عبارت دیگر

پاسخ یک سیستم خطی پایدار به ورودی سینوسی، خود نیز سینوسی است.

$U(s)$ → سیستم خطی → $Y(s)$

اگر ورودی به صورت روبه رو باشد: $u(t) = A\sin(\omega t)$

$$u(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \longrightarrow Y(s) = G(s) \times \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

5

حالت اول: اگر قطب‌های $y(s)$ همه پایدار و متمایز از هم باشند.

$$Y(s) = \frac{b(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \times \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \ldots + \frac{b_n}{s + p_n}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-p_1 t} + \ldots + b_n e^{-p_n t}$$

با میل کردن t به سمت بینهایت، عبارات e^{-Pi} به سمت صفر میل خواهند کرد. لذا کلیه عبارات به جز دو عبارت اول صفر خواهند شد.

6

حالت دوم: اگر y(s) قطب‌های مکرر نیز داشته باشد.

$$Y(s) = \frac{b(s)}{\left((s+p_1)\ldots(s+p_j)^{m_j}\ldots(s+p_n)\right)} \times \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

y(t) شامل عباراتی چون $t^{hj}\, e^{-Pjt}$ خواهد بود که برای یک سیستم پایدار عبارات $t^{hj}\, e^{-Pjt}$ به ازای t به سمت بی‌نهایت، به سمت صفر میل خواهند کرد.

7

در هر دو حالت مقدار نهایی *y(t)* به صورت زیر است.

$$t \to \infty \quad \Longrightarrow \quad Y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

که ضرایب a و $\bar{a}$ از روابط زیر به دست می‌آید.

$$a = G(s) \times \frac{A\omega}{S^2+\omega^2} \times (S+j\omega)\Big|_{s=-j\omega} = \frac{-AG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \times \frac{A\omega}{S^2+\omega^2} \times (S-j\omega)\Big|_{s=j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}$$

8

از آنجایی که $G(j\omega)$ یک کمیت مختلط است، می‌توان آن را به صورت قطبی زیر نوشت:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle e^{i\theta}$$

که در آن $|G(j\omega)|$ نشان‌دهنده دامنه $G(j\omega)$ و θ بیانگر فاز $G(j\omega)$ است.

به عبارت دیگر

$$\theta = \angle G(j\omega) = tan^{-1}\frac{ImG(j\omega)}{ReG(j\omega)}$$

سرانجام

$$Y_{ss}(t) = A|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t+\theta)} - e^{-(\omega t+\theta)}}{2j}$$

$$Y_{ss}(t) = A|G(j\omega)|sin(\omega t + \theta)$$

$$Y_{ss}(t) = B\,sin(\omega t + \theta)$$

9

نتیجه:

یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان پایدار با ورودی سینوسی، در حالت ماندگار نیز یک خروجی سینوسی با همان فرکانس دارد و تنها در حالت ماندگار دامنه و فاز سیگنال خروجی با دامنه و فاز سیگنال ورودی تفاوت خواهند داشت.

نسبت دامنه خروجی به ورودی برابر اندازه تابع تبدیل $|G(j\omega)|$ است و اختلاف زاویه فاز سیگنال ورودی و خروجی برابر با $\theta = \angle G(j\omega)$ می‌باشد.

به تابع تبدیل $G(j\omega)$ تابع تبدیل سینوسی می‌گویند.

نسبت دامنه خروجی به دامنه ورودی	$\lvert G(j\omega)\rvert = \frac{B}{A}$
انتقال فاز خروجی سینوسی به ورودی	$\angle G(j\omega)$

10

تحلیل فرکانسی

در پاسخ فرکانسی تغییرات اندازه و فاز سیستم را بر حسب تغییرات فرکانس بررسی می‌کنیم.

$$G(s) = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$$G(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega)$$

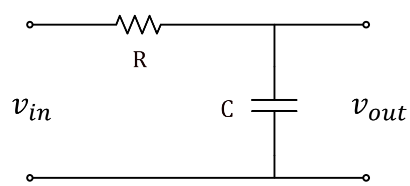
$$\begin{cases} R(w) = \mathrm{Re}(G(jw)) \\ X(w) = \mathrm{Iq}(G(jw)) \end{cases} \qquad \begin{cases} |G(j\omega)| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{X(j\omega)}{R(j\omega)} \end{cases}$$

$$|G(j\omega)| = |k| \times \frac{\prod_{i=1}^{m}|j\omega - z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|j\omega - p_j|}$$

$$\angle G(j\omega) = \sum_{i=1}^{m}\angle(j\omega - z_j) - \sum_{i=1}^{n}\angle(j\omega - p_j) + \left\{\frac{0 \rightarrow k > 0}{180 \rightarrow k < 0}\right\}$$

11

مثال: پاسخ فرکانسی یک فیلتر RC ؟



12

روش‌های تحلیل حوزه فرکانسی:

- دیاگرام بود
- نمودار نایکوییست
- چارت نیکولز

در این قسمت به تحلیل دیاگرام‌های بود خواهیم پرداخت.

13

نمودار بود

نمودار اندازه پاسخ فرکانسی برحسب لگاریتم و نمودار فاز آن را نمودار بود گویند.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{i\theta}$$

لگاریتم دامنه تابع تبدیل $G(j\omega)$ بر حسب دسی بل بیان می‌گردد و به صورت زیر است.

$$LmG(j\omega) = 20\log|G(j\omega)|$$

دو واحدی که برای بیان باندهای فرکانسی یا نسبت‌های فرکانسی استفاده می‌شوند، اکتاو (octave) و دهه (decade) هستند.

فاصله بین این دو فرکانس یک اکتاو است. ⟸ $\frac{\omega1}{\omega2} = 2$

فاصله بین این دو فرکانس یک دهه است. ⟸ $\frac{\omega1}{\omega2} = 10$

14

مزایای استفاده از لگاریتم در اندازه:

۱) تبدیل ضرب به جمع و تقسیم به تفریق

۲) نمایش گسترده‌تری از نمایش پاسخ فرکانسی

مزایای استفاده از نمایش لگاریتمی ω :

۱) رسم ساده‌تر

۲) نمایش محدوده فرکانسی گسترده‌تر

dB	nuqber
-40	.01
-20	.1
-6.02	.5
0	1
6.02	2
20	10

جدول روبرو تبدیل چند عدد به dB است.

15

تابع تبدیل یک سیستم در حالت کلی:

$$G(j\omega) = \frac{k(j\omega + z_1)(j\omega + z_r)^r \dots}{(j\omega)^m (j\omega + p_1)\left[1 + \left(\frac{j2\xi}{\omega_n}\omega\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]\dots}$$

برای تابع تبدیل بالا دو دسته معادلات برای لگاریتم دامنه و فاز خواهیم داشت:

لگاریتم دامنه:

$$\mathrm{Lm}G(j\omega) = \mathrm{Lq}(k) + \mathrm{Lq}(j\omega + z_1) + r\,\mathrm{Lq}(j\omega + z_r) + \dots$$

$$-\mathrm{q}\,\mathrm{Lq}(j\omega) - \mathrm{Lq}(j\omega + p_1) - Lm\left[1 + \left(\frac{j2\xi}{\omega_n}\omega\right) + \left(\frac{j}{\omega_n}\omega\right)^2\right]$$

16

فاز:

$$\angle G(j\omega) = \angle k + \angle(j\omega + z_1) + r\angle(j\omega + z_r) + \ldots$$
$$-m\angle(j\omega) - \angle(j\omega + p_1) - \angle\left(1 + \frac{j2\xi}{\omega_n}\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)$$

$$= \angle k + \tan^{-1}\frac{\omega}{z_1} + r\tan^{-1}\frac{\omega}{z_r} + \ldots$$
$$-m90 - \tan^{-1}\frac{\omega}{p_1} - \tan^{-1}\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} - \ldots$$

17

ترسیم نمودارهای بود:

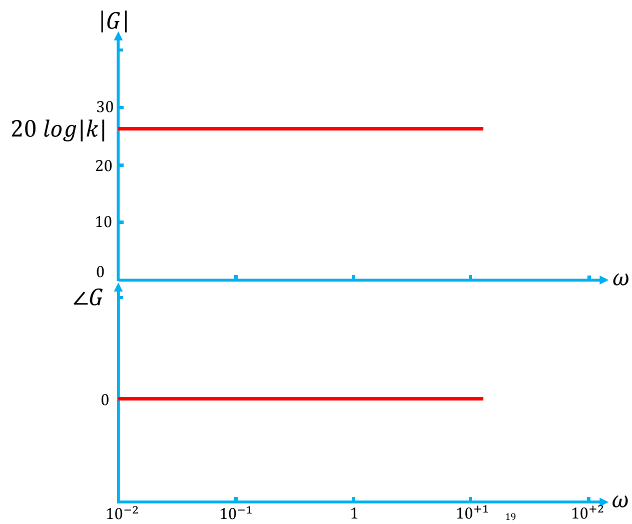
برای رسم کامل نمودار بود ابتدا چهار عبارت زیر را رسم می‌کنیم:

K	**بهره ثابت**
$(j\omega)^q$	**قطب یا صفر در مبدأ**
$(1 + j\omega\tau)^r$	**قطب یا صفر روی محور حقیقی**
$[1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{{\omega_n}^2} (j\omega)^2]^p$	**قطب یا صفر مختلط مزدوج**

18

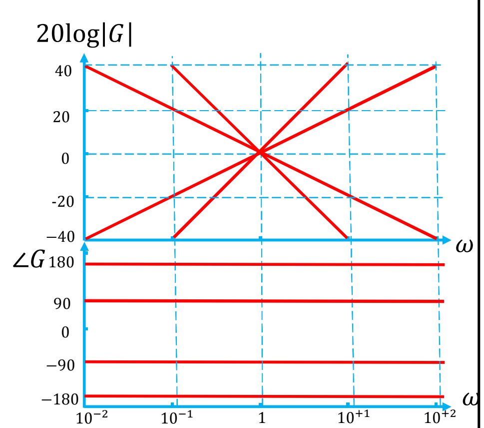
$G(s) = k$

۱) نمودار بود برای بهره ثابت



$G(s)=(s)^q$

۲) قطب یا صفر در مبدأ



۳) قطب یا صفر روی محور حقیقی

$(1 + sT)^r$

فرکانس شکست

به فرکانس $\omega_1 = \frac{1}{T} = \omega$، فرکانس شکست یا فرکانس گوشه می‌گویند. فرکانس $\omega = \frac{1}{T}$ را از آن جهت فرکانس گوشه گویند که در این فرکانس شکستی در شیب منحنی دامنه رخ می‌دهد. همچنین فرکانس $\omega = \frac{1}{T}$ را به علت اینکه نمودار مجانبی دامنه در فرکانس $\omega = \frac{1}{T}$ در گوشه دو خط راست است، فرکانس گوشه نیز می‌نامند.

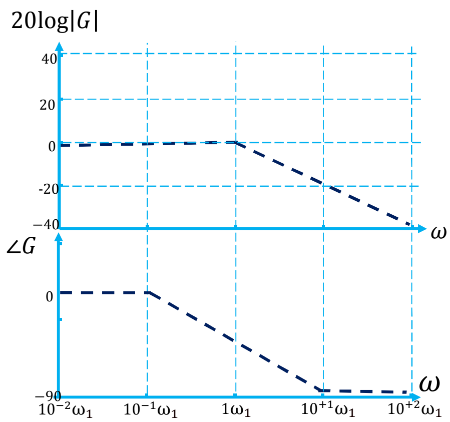
توجه:
محدوده مهم پاسخ فرکانسی (در نمودارهای لگاریتم دامنه و زاویه فاز) معمولاً ± 2 دهه از فرکانس شکست است.

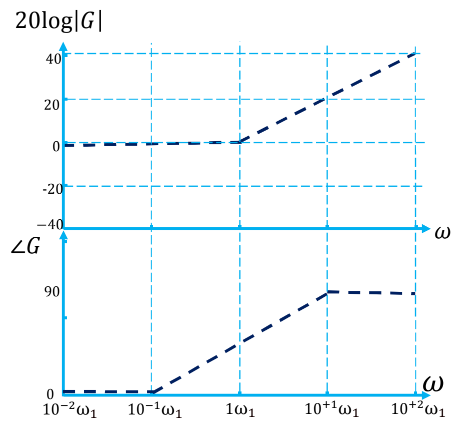
if r = -1

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

if r = +1

$$G(s) = 1 + Ts$$



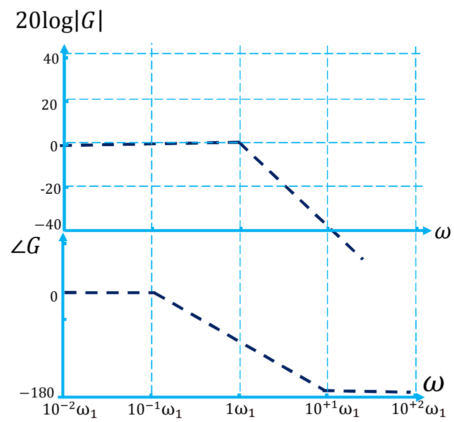


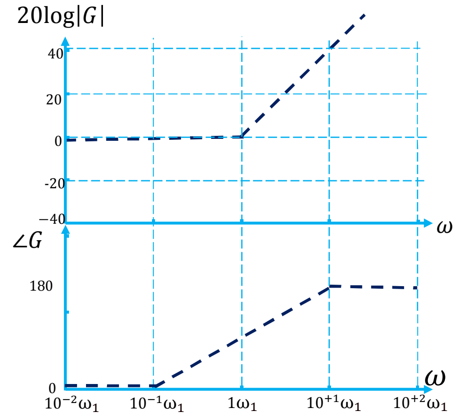
23

۴) صفر یا قطب مختلط مزدوج

$$G(s) = \left(\left(\frac{s}{\omega_1}\right)^2 + \frac{2\xi s}{\omega_1} + 1\right)^p$$

24

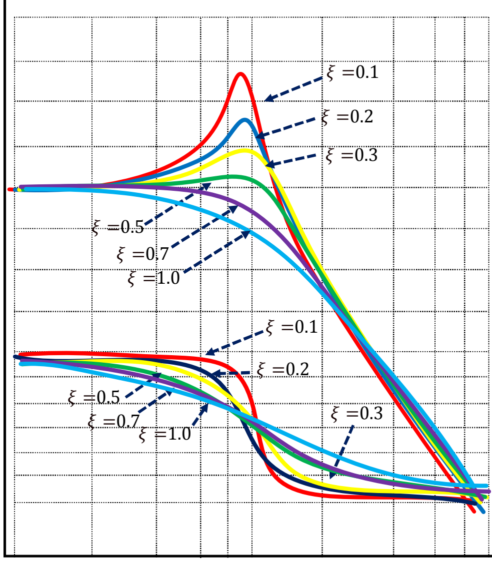




25

فرکانس تشدید

اگر ξ بین ۰ و۱ باشد ما دو قطب مختلط داریم. با تغییر مقدار آن نمودار بود ما نیز به صورت مقابل تقییر می‌کند. در واقع برآمدگی به‌وجودآمده در فرکانس خاصی رخ می‌دهد که آنرا فرکانس تشدید می‌گویند.



$$\omega_r = \omega\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$m_{p\omega} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} & \xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 > \xi > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

26

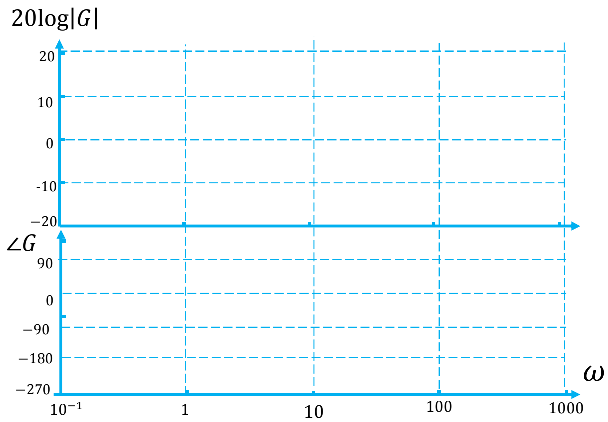
مراحل ترسیم نمودار بود

1	تجزیه تابع تبدیل به عوامل چهارگانه
2	ایجاد حالت استاندارد
3	جایگذاری $s=j\omega$
4	تعیین فرکانس شکست هر عامل
5	رسم مجانب‌های اندازه و فاز
6	جمع جبری مجانب‌های اندازه و فاز

27

مثال:

$$G(s) = \frac{2500(s+10)}{s(s+2)(s^2+30s+2500)}$$



28

سیستم غیر مینیمم فاز

سیستمی که صفر و قطب‌های تابع تبدیل آن سمت چپ محور موهومی باشد را سیستم مینیمم فاز گویند. معمولا از سیستم‌های غیر مینیمم فاز به عنوان سیستم‌های پایدار با حداقل یک صفر در سمت راست محور موهومی نام برده می‌شود.

توجه:

اگر از تابع تبدیل یک صفر را برداشته و ص... نه آن را به تابع تبدیل اضافه کنیم در نمودار اندازه تغییری رخ نمی‌دهد ولی ... است.

به عبارت دیگر

سیستم‌های مینیمم و غیر مینیمم فاز ... هم برابرند ولی فاز سیستم مینیمم فاز نسبت به غیر مینیمم فاز بیشتر است زیرا ... سیستم‌های مینیمم فاز صفرها دارای فاز + هستند.

یک سیستم مینیمم فاز را به صورت منحصر بفرد از روی نمودار اندازه آن می‌توان به دست آورد ولی برای رسم سیستم غیرمینیمم فاز حتماً فاز آن نیز مورد نیاز است.

29

با فرض تابع تبدیل زیر داریم:

$$G(s)=\frac{k(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$\omega\rightarrow\infty$

شیب اندازه $=(m-n)20\dfrac{db}{dec}$ هم برای مینیمم فاز و غیر مینیمم فاز صادق است.

$\angle G(j\omega)=(m-n)90$ فقط برای مینیمم فاز صادق است.

در پاسخ پله سیستم‌های غیرمینیمم فاز یک under shoot در ابتدای نمودار مشاهده می‌شود.

همچنین سیستم‌های غیر مینیمم فاز دارای پاسخ کند هستند.

30

مثال:

سیستم مینیمم فاز

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T_2}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T_2)^2}} \qquad \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2)$$

سیستم غیر مینیمم فاز

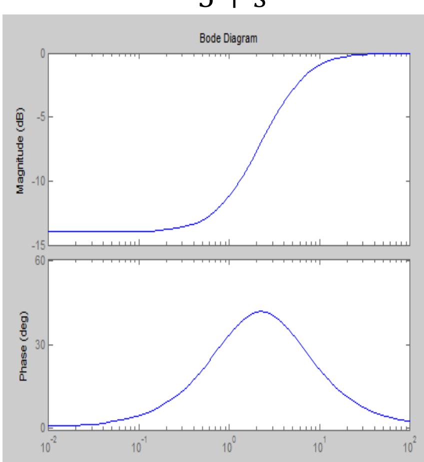
$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T_1}{1 + j\omega T_2}$$

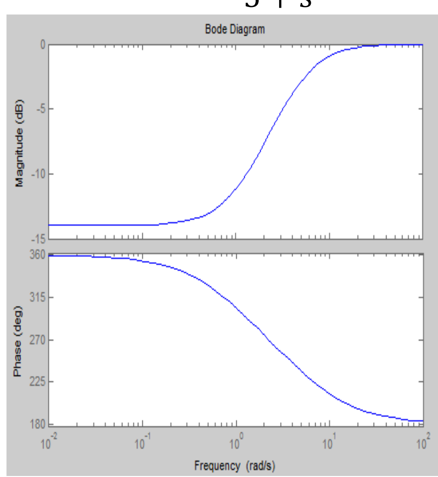
$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega T_1)^2}{1 + (\omega T_2)^2}} \qquad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2)$$

31

مثال:

$$G(s) = \frac{1+s}{5+s} \qquad G(s) = \frac{1-s}{5+s}$$





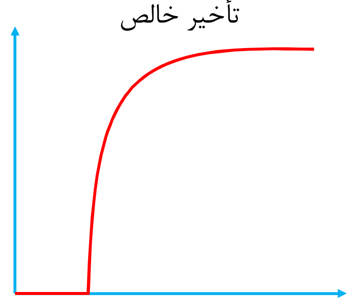
32

سیستم‌های تأخیردار

تاخیر: مدت زمانی است که باید طی شود تا خروجی به ورودی پاسخ دهد.

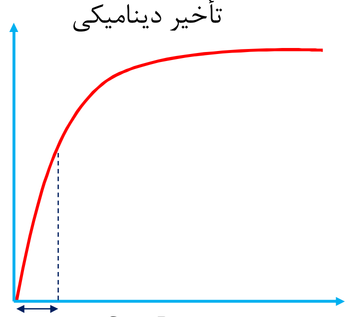
دو نوع تاخیر داریم:

تأخیر خالص



Step Response

تأخیر دینامیکی



t_d

Step Response

اگر سیستم مقابل را در نظر بگیریم.

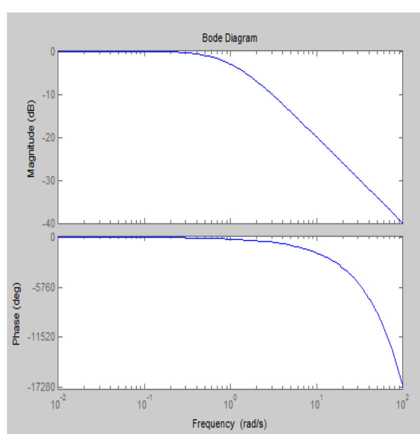
$$G(s) = e^{-T_d s} \qquad |G(j\omega)| = 1$$

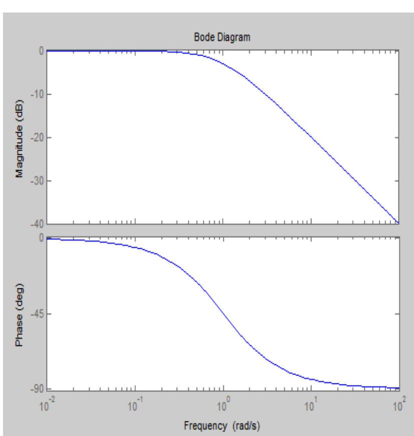
تاخیر خالص در اندازه تاثیر نمی‌گذارد بلکه فقط زاویه فاز را به طور خطی با فرکانس تغییر می‌دهد.

33

مثال:

$$G(s) = \frac{e^{-3s}}{s+1} \qquad G(s) = \frac{1}{s+1}$$





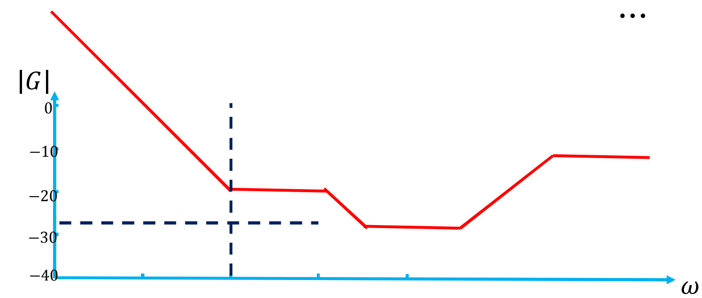
34

شناسایی تابع تبدیل از روی نمودار بود

۱) تشخیص نوع سیستم از روی شیب اندازه در فرکانس‌های پایین

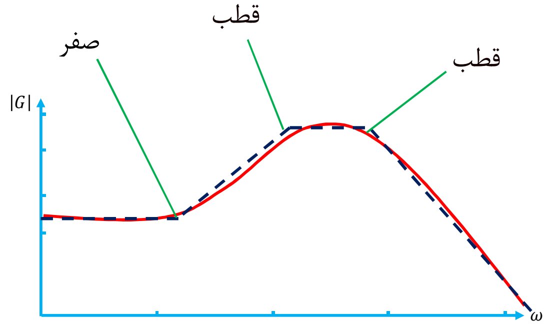
$$G(s)=\frac{s^{q}\ldots}{\ldots}$$

شیب در فرکانس کم = $20\times q$



35

۲) تشخیص عامل جدید در تغییر شیب در فرکانس خاص (یافتن نقاط شکست)



36

اگر تغییر شیب به اندازه ± 20 dB/dec باشد یک صفر یا قطب داریم.

اگر تغییر شیب به اندازه ± 40 dB/dec باشد دو صفر یا قطب داریم.

± 40 dB/dec تغییر شیب

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(1+\dfrac{s}{\omega_1}\right)^{\pm 2} \\ \left(1+\dfrac{2\xi s}{\omega_1}+\dfrac{s^2}{\omega_1^2}\right)^{\pm 1} \end{array} \right\}$$

± 20 dB/dec تغییر شیب

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(1+\dfrac{s}{\omega_1}\right)^{\pm 1} \\ \left(\dfrac{1+\dfrac{s}{\omega_1}}{1+\dfrac{2\xi s}{\omega_1}+\dfrac{s^2}{\omega_1^2}}\right)^{\pm 1} \end{array} \right\}$$

37

۳) تعیین بهره ثابت k

در فرکانس های پایین $\longrightarrow$ $G(s) \cong ks^q$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log(k) + 20 \times q\log(j\omega)$$

همانطور که مشاهده می‌کنید در فرکانس‌های پایین تابع تبدیل به صورت $G(s)$ $\cong ks^q$ درمی‌آید. حالا بهره را به روش زیر به دست می‌آوریم:

در یک ω مشخص مقدار dB اندازه را از نمودار به دست می‌آوریم سپس با استفاده از فرمول بالا مقدار k به دست می‌آید.

38

۴) تشخیص قطب‌ها و صفرهای ناپایدار

قطب و صفر پایدار و ناپایدار در اندازه برابرند، ولی تفاوت اصلی در فاز است؛ از روی اندازه می‌توان سیستم مینیمم فاز را بدست آورد، ولی برای سیستم غیر مینیمم فاز علاوه بر اندازه باید فاز را نیز داشته باشیم.

39

نمودار نایکوئیست

نمودار نایکوئیست تابع تبدیل $G(j\omega)$، رسم این تابع تبدیل در صفحه مختلط برحسب تغییرات فرکانس از صفر تا بی‌نهایت است.

رسم این نمودار به دو صورت قابل بیان است:

۱) قطبی

اندازه : $\angle G(jw)$

فاز : $|G(jw)|$

۲) دکارتی

$$R(\omega) = \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = |G(j\omega)|\cos\big(\angle G(j\omega)\big)$$

$$X(\omega) = \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = |G(j\omega)|sin\big(\angle G(j\omega)\big)$$

40

رسم نمودار نایکوئیست

نمودار نایکوئیست را می‌توان با استفاده از چهار نقطه مهم زیر رسم کرد:

در $\omega \to 0^+$	۱
در $\omega \to +\infty$	۲
تعیین نقاط احتمالی قطع محورهای حقیقی	۳
تعیین نقاط احتمالی قطع محورهای موهومی	۴

۱) $\omega \to 0^+$

تابع تبدیل کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = k \times s^q \times \prod \left(\frac{s}{\omega_i} + 1\right)^a \times \prod \left(\frac{s^2}{\omega_j^2} + \frac{2\xi s}{\omega_j} + 1\right)^b$$

۲) $\omega \to +\infty$

تابع تبدیل کلی روبرو را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

43

۳) تعیین نقاط احتمالی قطع محورهای حقیقی

برای به دست آوردن نقاط احتمالی قطع محورهای حقیقی، زاویه فاز را برابر 0 یا ± 180 درجه قرار داده یا قسمت موهومی را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

۴) تعیین نقاط احتمالی قطع محورهای موهومی

برای به دست آوردن نقاط احتمالی قطع محورهای موهومی، زاویه فاز را برابر ± 90درجه قرار داده یا قسمت حقیقی را برابر صفر قرار می‌دهیم.

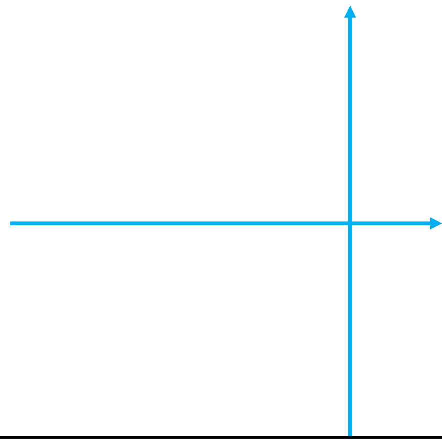
44

مثال:

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$$

$$G(j\omega) = \frac{20(j\omega+5)}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

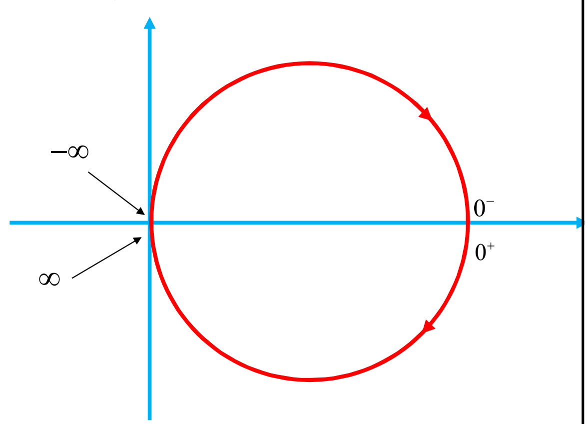
نکات رسم نمودار نایکوئیست



نمودارهای نایکوئیست سیستم های نوع صفر، یک و دو

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT}$$

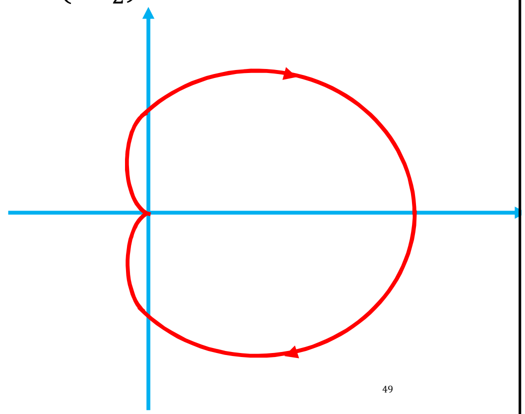
۱) نمودار نایکوئیست سیستم نوع صفر



مثال:

$$G(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\times\sqrt{1+(\omega T_2)^2}} \\ \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2) \end{cases}$$

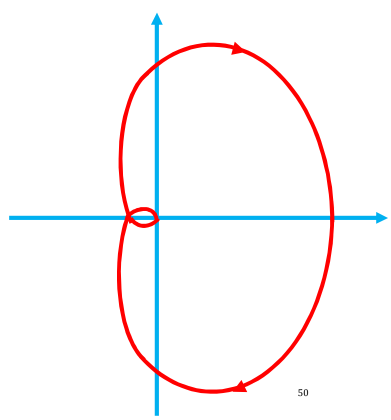


49

مثال:

$$G(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\times\sqrt{1+(\omega T_2)^2}\times\sqrt{1+(\omega T_3)^2}} \\ \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2) - tan^{-1}(\omega T_3) \end{cases}$$



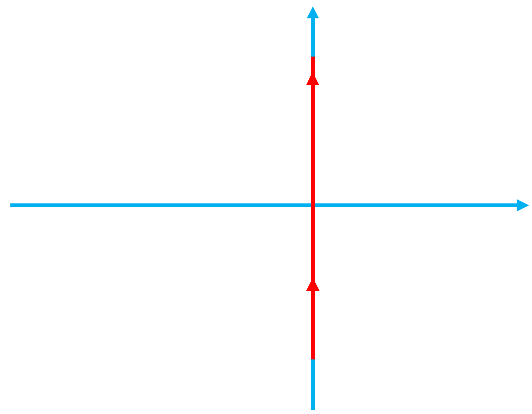
50

۲) نمودار نایکوئیست سیستم نوع یک

مثال:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{1}{\omega} \\ \angle G(j\omega) = -90 \end{cases}$$

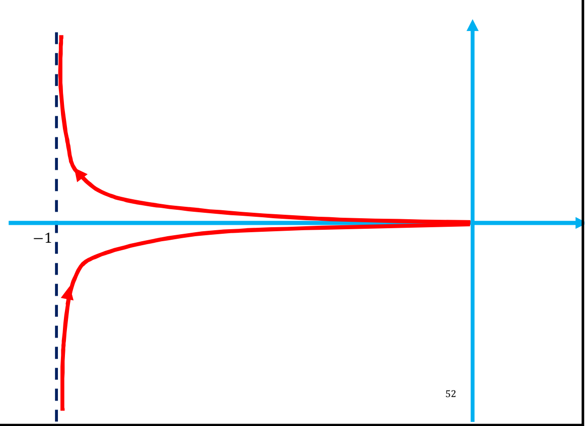


51

مثال:

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + sT_1)}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{1}{\omega\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}} \\ \angle G(j\omega) = -90 - \tan^{-1}(\omega T_1) \end{cases}$$

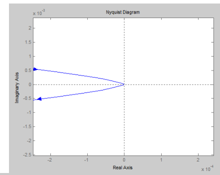


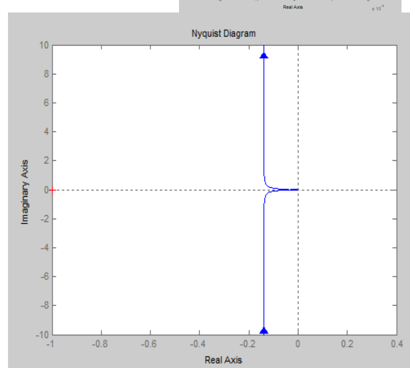
52

مثال:

$$G(s)=\frac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|=\dfrac{1}{\omega\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\times\sqrt{1+(\omega T_2)^2}} \\ \angle G(j\omega)=-90-\tan^{-1}(\omega T_1)-\tan^{-1}(\omega T_2) \end{cases}$$

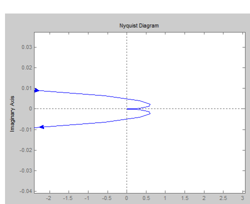


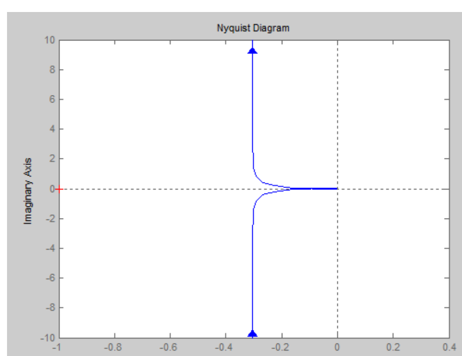


مثال:

$$G(s)=\frac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|=\dfrac{1}{\omega\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\times\sqrt{1+(\omega T_2)^2}\times\sqrt{1+(\omega T_3)^2}} \\ \angle G(j\omega)=-90-\tan^{-1}(\omega T_1)-\tan^{-1}(\omega T_2)-\tan^{-1}(\omega T_3) \end{cases}$$



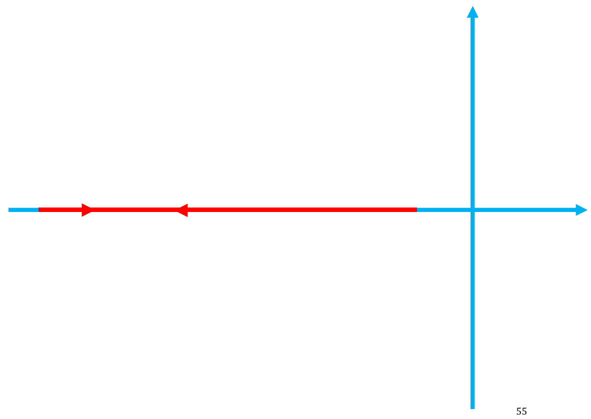


54

۳) نمودار نایکوئیست سیستم نوع دو

مثال:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} = \frac{-1}{\omega^2}$$

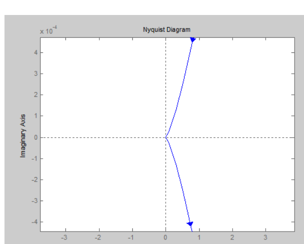


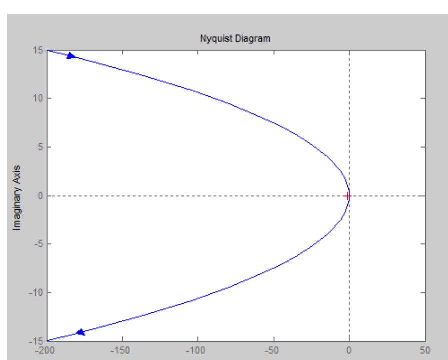
55

مثال:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{-1}{\omega^2\sqrt{1+(\omega T_1)^2} \times \sqrt{1+(\omega T_2)^2}} \\ \angle G(j\omega) = -180 - \tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2) \end{cases}$$





مثال:

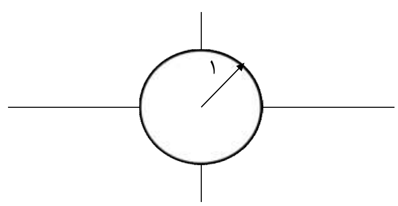
$$G(s)=\frac{(1+sT_0)}{s^2(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|=\dfrac{\sqrt{1+(\omega T_0)^2}}{\omega^2\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\times\sqrt{1+(\omega T_2)^2}\times\sqrt{1+(\omega T_3)^2}} \\ \angle G(j\omega)=\tan^{-1}(\omega T_0)-\tan^{-1}(\omega T_1)-\tan^{-1}(\omega T_2)-\tan^{-1}(\omega T_3) \end{cases}$$

57

نمودار نایکوئیست سیستم‌های تأخیری

$G(s)=e^{-sT}$



$G(j\omega)=e^{-j\omega T}=1\angle-\omega T$

توجه:

در فرکانس‌های پایین $\omega\rightarrow0$ ، عنصر تأخیر $e^{-j\omega T}$ و سیستم مرتبه یک $\frac{1}{1+j\omega T}$ مانند هم رفتار می‌کنند.

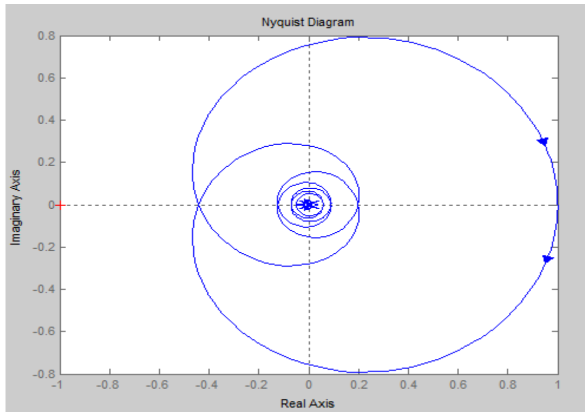
$$\text{if } \omega\rightarrow0 \Rightarrow e^{-j\omega T}\cong\frac{1}{1+j\omega T}$$

58

مثال:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T_1}}{1 + j\omega T_2}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega T_2)^2}} \\ \angle G(j\omega) = -\omega T_1 - \tan^{-1}(\omega T_2) \end{cases}$$



نمودار کامل نایکوئیست

نمودار کامل نایکوئیست با رسم نمودار برای ω از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت به دست می‌آید. برای این کار از نکات زیر بهره می‌بریم:

۱) نمودار برای ω از منفی بی‌نهایت تا صفر منفی قرینه نمودار برای ω از صفر مثبت تا مثبت بی‌نهایت است. (نسبت به محور حقیقی)

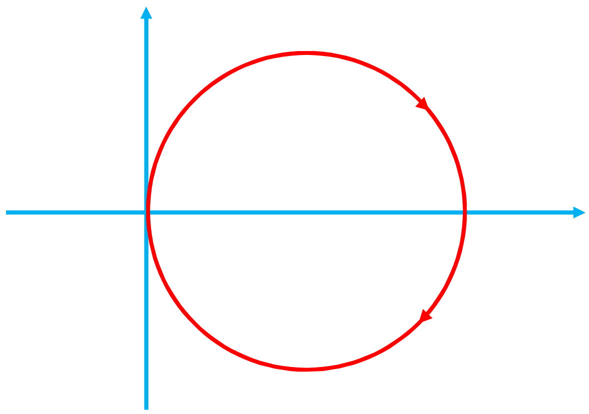
۲) به ازای هر قطب تابع تبدیل روی محور موهومی یک مسیر نیم دایره در بی‌نهایت خواهیم داشت؛ این مسیر در بی‌نهایت در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند.

60

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

مثال:

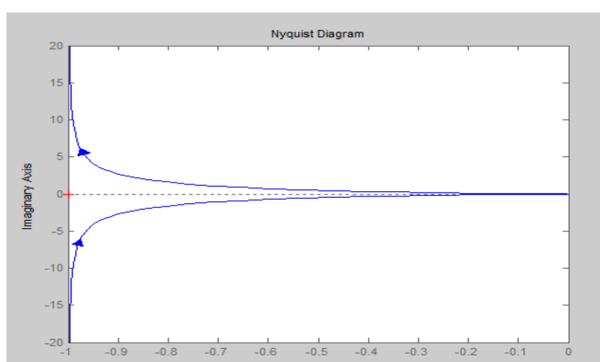
مسیر نیم دایره
نداریم.



$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

مثال:

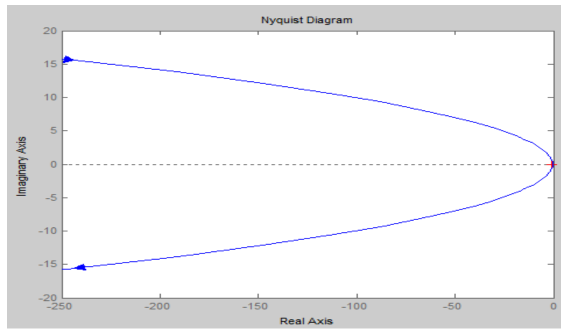
یک مسیر نیم دایره
داریم.



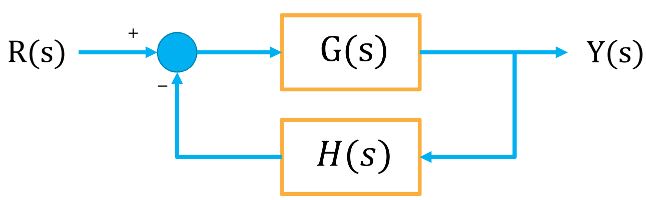
مثال:

$$G(s) = \frac{1}{s^2(1+s)}$$

دو مسیر نیم دایره داریم.



معیارپایداری نایکوئیست



تابع تبدیل $T = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$

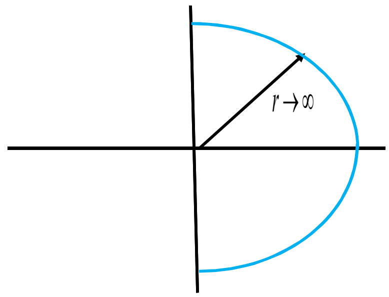
معادله مشخصه $\Delta = 1 + G(s)H(s) = \frac{k\,(s-z_1)\ldots.(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}$

ریشه‌های معادله مشخصه = قطب‌های حلقه بسته

قطب‌های $1 + G(s)H(s) =$ قطب‌های $1 + G(s)H(s) =$ قطب‌های حلقه (باز)

مسیر نایکوئیست D

مسیری است که شامل کل نیم صفحه راست صفحه s می‌شود و از محور موهومی(از -j∞ تا +j∞) و یک نیم دایره با شعاع بی‌نهایت در سمت راست صفحه تشکیل می‌گردد.

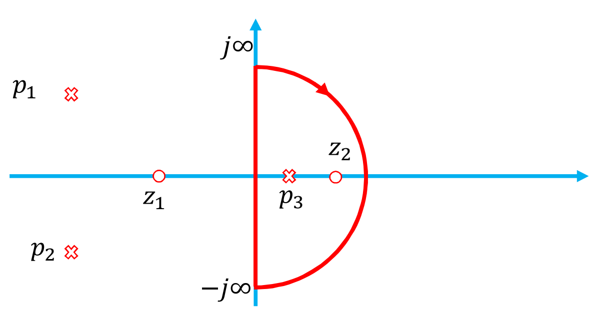


توجه:

شرط لازم وکافی پایداری سیستم حلقه‌بسته آن است که هیچکدام از صفرهای معادله مشخصه در ناحیه داخل مسیر نایکوئیست قرار نگیرند، به عبارت دیگر هیچکدام از قطب های حلقه‌بسته در محدوده ناپایداری (سمت راست محور موهومی) نباشند.

اساس تحلیل پایداری به روش نایکوئیست بر بررسی نمودار نایکوئیست $1+G(s)H(s)$ در صفحه مختلط به ازای تغییرات s هنگامی که یک بار در جهت عقربه ساعت دور مسیر D می‌چرخد، بنا نهاده شده است.

با مراجعه به شکل قبل، اگر s در جهت عقربه ساعت مسیر نایکوئیست D را یک بار دور بزند، بردارهای $(s\text{-}z_i)$ و $(s\text{-}p_i)$ برای z_iها و p_iهایی که در داخل محدوده محصور شده توسط D هستند، 360° در عقربه ساعت خواهند چرخید. بردارهای $(s\text{-}z_i)$ و $(s\text{-}p_i)$ برای z_iها و p_iهایی که خارج از ناحیه محدوده محصور شده توسط مسیر نایکوئیست D قرار گیرند (به عبارت دیگر قطب هایی که در سمت چپ محور موهومی قرار دارند) مجموع چرخشی برابر 0° خواهند داشت.



اگر s روی مسیر D در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند برای بردارهای (s-z_i) و (s-p_i) داریم که:

$s-p_i$ $s-z_i$	داخل مسیر D در نیم صفحه راست	360 درجه در جهت عقربه‌های ساعت حول مبدا می‌چرخد.
$s-p_i$ $s-z_i$	بیرون مسیر D در نیم صفحه چپ	0 درجه در جهت عقربه‌های ساعت حول مبدا می‌چرخد.

۱) به ازای صفر و قطب های سمت چپ محور موهومی نمودار نایکوئیست 1+G(jω)H(jω) حول مبدا نمی‌چرخد.

۲) به ازای صفرهای سمت راست محور موهومی نمودار نایکوئیست 1+G(jω)H(j ω) یکبارحول مبدا در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد.(Z)

۳) به ازای قطب‌های سمت راست محور موهومی نمودار نایکوئیست 1+G(jω)H(jω) یکبارحول مبدا در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد.(P)

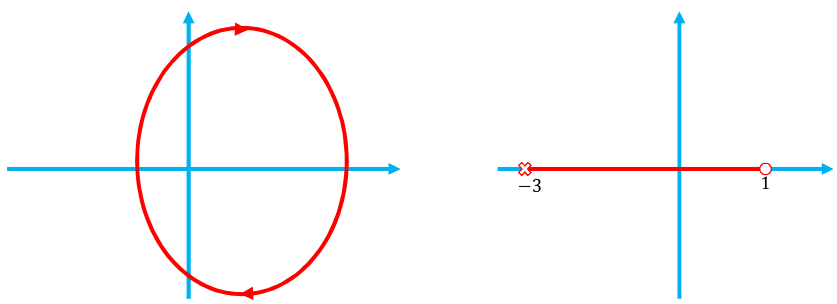
۴) در مجموع اگر تعداد کلیه چرخش‌های نمودار نایکوئیست 1+G(jω)H(jω) حول مبدا در خلاف جهت عقربه های ساعت را با N و تعداد قطب‌های سمت راست را با P و تعداد صفرهای سمت راست را با Z نشان دهیم داریم که:

$$N = P - Z$$

در N چرخش در خلاف جهت عقربه ساعت و در جهت عقربه ساعت به ترتیب مثبت و منفی در نظر گرفته می‌شود.

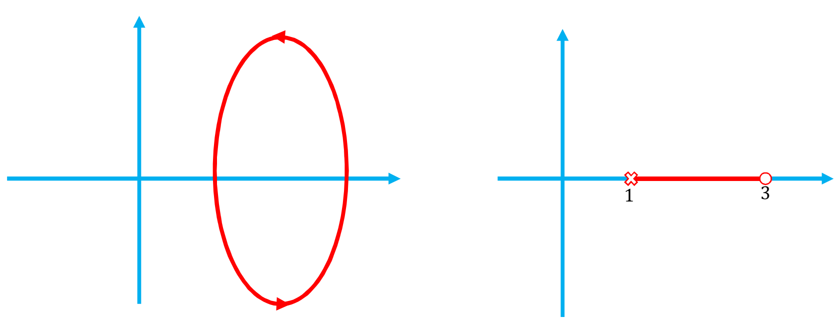
مثال:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{s-1}{s+3}$$



اگر یک قطب دیگر در مسیر نایکوئیست داشته باشیم اثر چرخش ناشی ازصفر را از بین می‌برد.

$$1 + G(s)H(s) = \frac{s-1}{s-3}$$



تفاوت نایکوئیست G(s)H(s) با 1+G(s)H(s)

نمودار نایکوئیست $1+G(j\omega)H(j\omega)$ همان نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ است،که به مقدار ۱- بر روی محور حقیقی منفی انتقال داده شده است. بنابراین تعداد دوران‌های نمودار نایکوئیست $1+G(j\omega)H(j\omega)$ حول مبدأ برابر با تعداد دوران‌های نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ حول نقطه ۱- بر روی محور حقیقی منفی می‌باشد.

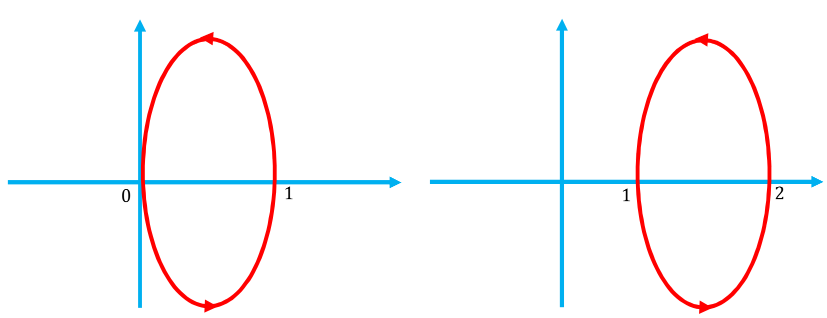
$1+G(s)H(s)$		$G(s)H(s)$
بررسی چرخش حول مبدا	$\equiv$	بررسی چرخش حول -1+0j

71

مثال:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow 1+G(s)H(s) = \frac{1}{s+1} + 1 = \frac{s+2}{s+1}$$

یک واحد انتقال به راست



72

معیار پایداری نایکوئیست

یک سیستم حلقه-بسته پایدار است اگر و فقط اگر، تعداد دوران‌های نمودار نایکوئیست G(jω)H(jω) (تابع تبدیل حلقه) در جهت خلاف عقربه ساعت حول نقطه -1+0j برابر با تعدادقطب‌های ناپایدار G(jω)H(jω) باشد.

اگر P برابر صفر باشد (یا سیستم مینیمم فاز باشد) در اینصورت شرط پایداری صفر بودن N است.

معیار ساده شده نایکوئیست

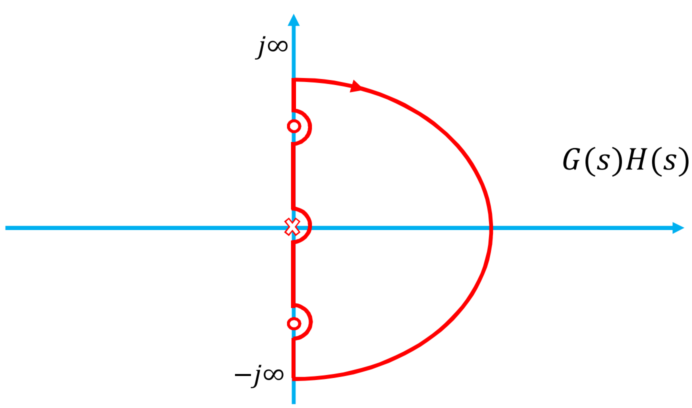
اگر G(jω)H(jω) پایدار باشد. سیستم حلقه بسته پایدار است اگر و فقط اگر هنگامی که در جهت افزایش ω بر روی نمودار نایکوئیست G(jω)H(jω) حرکت کنیم، نقطه -1 در سمت چپ نمودار قرار گیرد.

73

توجه

برای قطب یا صفر در مبدا یا روی محور jω مسیر نایکوئیست به صورت زیر تغییر می‌کند.

مثال:



$$G(s)H(s) = \frac{-s^2-5}{s}$$

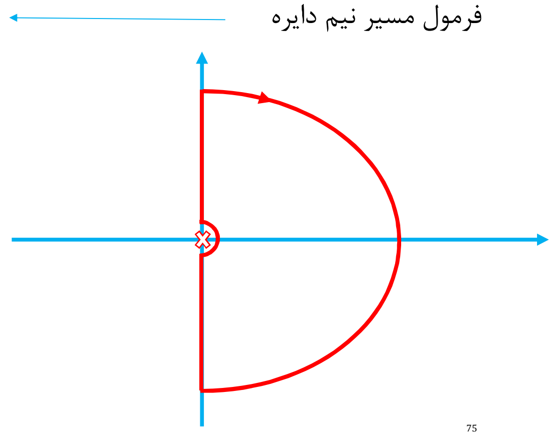
74

مثال:

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s}$$

$$G(\text{j}\omega)H(\text{j}\omega) = \frac{k}{\text{j}\omega} \qquad G(\text{j}\omega)H(\text{j}\omega) = \frac{k}{\omega}\angle -90$$

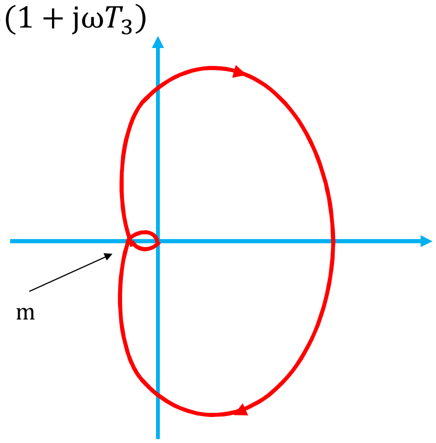
فرمول مسیر نیم دایره



75

مثال:

$$G(\text{j}\omega)H(\text{j}\omega) = \frac{k}{(1+\text{j}\omega T_1)(1+\text{j}\omega T_2)(1+\text{j}\omega T_3)}$$



76

مثال:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

77

مثال:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 - j\omega T_1)}$$

78

مثال:

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega) = \frac{k(1 + \mathrm{j}\omega T_2)}{\mathrm{j}\omega(1 - \mathrm{j}\omega T_1)}$$

79

تمرین:

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega) = \frac{k}{(\mathrm{j}\omega)^2(1 + \mathrm{j}\omega T_1)}$$

80

توجّه

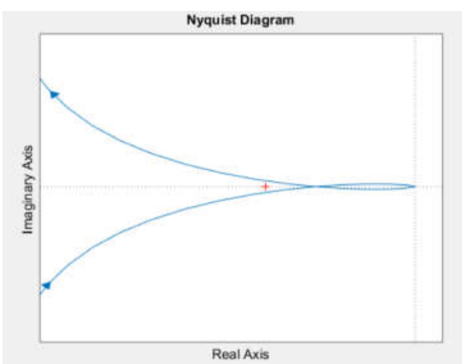
اگر نمودار نایکوئیست G(s)H(s) از نقطه 1+0j- عبور کند تعداد چرخش‌های N نامعین است. این حالت متناظر با شرایطی است که در آن 1+G(s)H(s) صفرهایی بر روی محور موهومی داشته باشد و در صورتی که این صفرها ساده باشند، پاسخ در حالت ماندگار مؤلفه‌های سینوسی غیرمیرا دارد. لذا از معیار پایداری نایکوئیست نمی‌توان استفاده کرد.

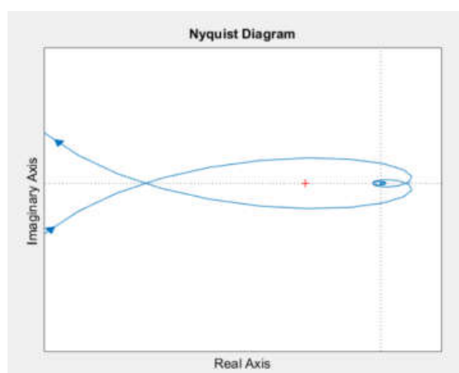
81

تأثیر تأخیر خالص در پایداری

در زیر یک سیستم بدون تأخیر و سپس همان سیستم با اضافه کردن عنصر تأخیر آمده است.

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{ke^{-j\omega T_3}}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \qquad G(j\omega)H(j\omega)=\frac{k}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$$

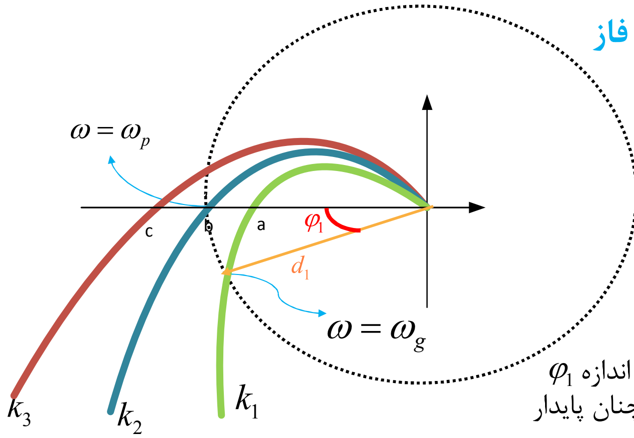




همانطور که مشاهده می‌کنید تاخیر خالص از آنجا که اندازه را تغییر نداده و فاز را جابه‌جا می‌کند باعث می‌شود که به مرز ناپایداری نزدیک شویم و باعث کاهش پایداری می‌شود.

82

حاشیه بهره و حاشیه فاز



$$GH = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

$$k_1 < k_2 < k_3$$

نمودار یک را می‌توان به اندازه φ_1 دوران داد و سیستم همچنان پایدار بماند.

نمودار یک به مرز پایداری نزدیک‌تر است. یعنی می‌توان عدد بزرگ‌تری در k_1ضرب کرد و سیستم همچنان پایدار بماند.

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$$

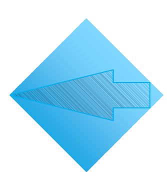
83

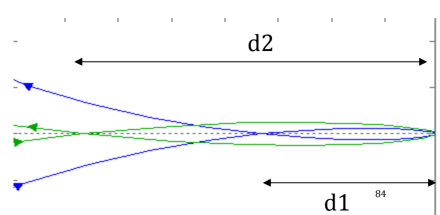
حاشیه بهره:

حاشیه بهره مقدار ثابتی است مانند a که بهره باید افزایش یابد تا سیستم ناپایدار گردد.

$\boldsymbol{\omega_p}$: فرکانس تقاطع (نمودار نایکوئیست در) فاز (-180°) : فرکانس تقاطع فاز

$$\begin{cases} G_{M_2} < G_{M_1} \\ \dfrac{1}{d_2} < \dfrac{1}{d_1} \end{cases}$$





84

حاشیه فاز :

حاشیه فاز مقدار انتقال فازی است که در فرکانس ω_g باعث ناپایداری سیستم می‌شود.

$\boldsymbol{\omega_g}$: فرکانس تقاطع (نمودار نایکوئیست در) بهره (واحد $|G(j\omega_g)|=1$) : فرکانس تقاطع بهره

هرچه حاشیه فاز و حاشیه بهره بیشتر باشد سیستم پایدارتر است.

برای سیستم مینیمم فاز، سیستم در صورتی پایدار است که حاشیه بهره بر حسب dB مثبت و حاشیه فاز نیز یک زاویه مثبت باشد.

85

مثال:

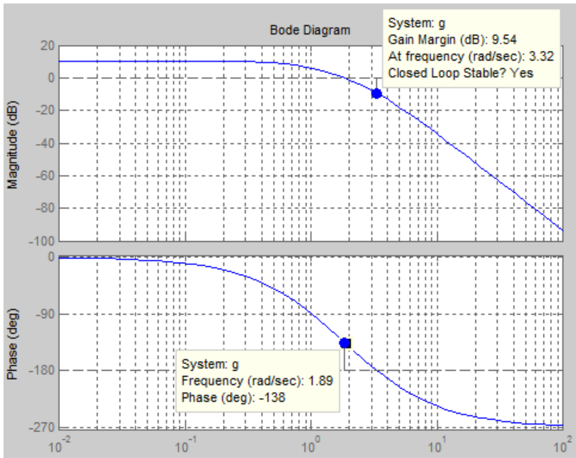
حاشیه بهره و فاز را برای k=20 و k=80 محاسبه کرده و پایداری را تعیین نمایید.

$$G(s)=\frac{\mathrm{k}}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\tan^{-1}(\omega)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)=-180\\&X(\omega)=\frac{k(\omega^2-11)\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)}=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\omega_p=\sqrt{11}\ ({}^{rad}/{}_{s})$$

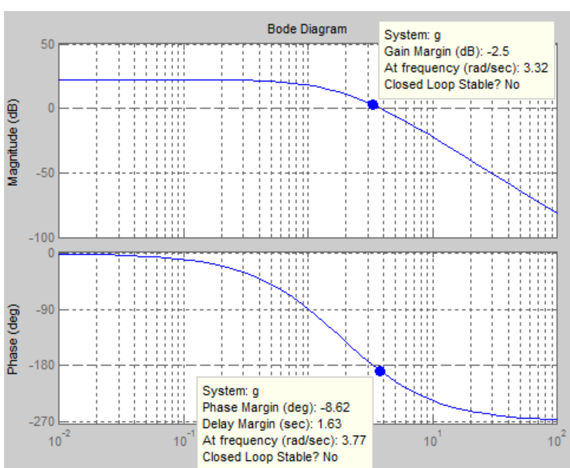
$$|G(j\omega_p)|=\frac{k}{60}$$

86


Bode Diagram
System: g
Gain Margin (dB): 9.54
At frequency (rad/sec): 3.32
Closed Loop Stable? Yes
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
Phase (deg)
0
-90
-180
-270
System: g
Frequency (rad/sec): 1.89
Phase (deg): -138
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

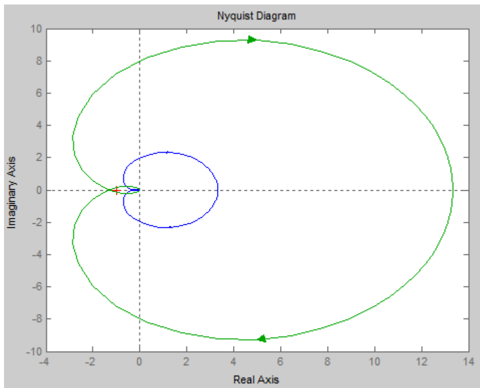
k=20

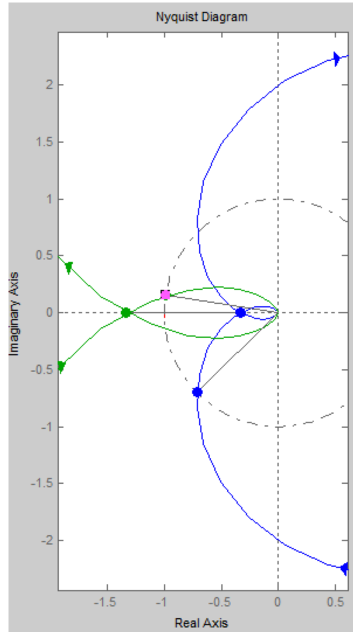
87


Bode Diagram
System: g
Gain Margin (dB): -2.5
At frequency (rad/sec): 3.32
Closed Loop Stable? No
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
Phase (deg)
0
-90
-180
-270
System: g
Phase Margin (deg): -8.62
Delay Margin (sec): 1.63
At frequency (rad/sec): 3.77
Closed Loop Stable? No
10^{-2}
10^{-1}
10^{1}
10^{2}

k=80

88





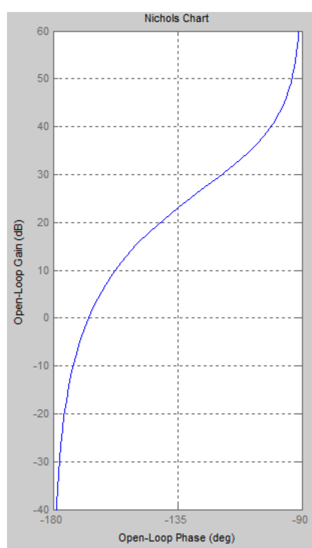
89

Nichols chart نمودار اندازه برحسب فاز

ترکیب نمودار اندازه و فاز بود با حذف محور ω در یک صفحه

مثال:

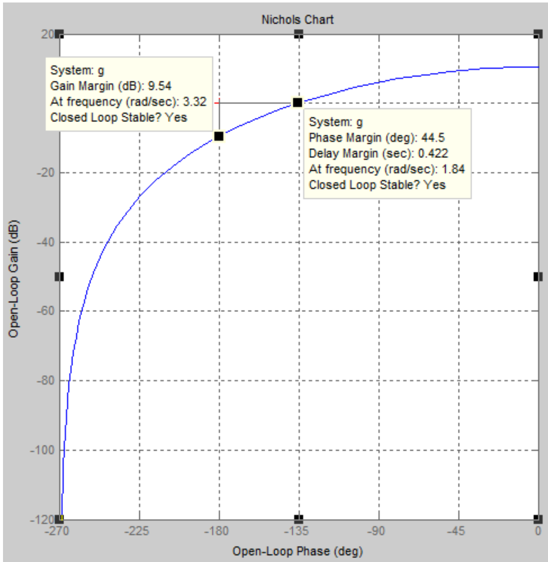
$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega) = \frac{20}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)}$$



90

مثال:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{20}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

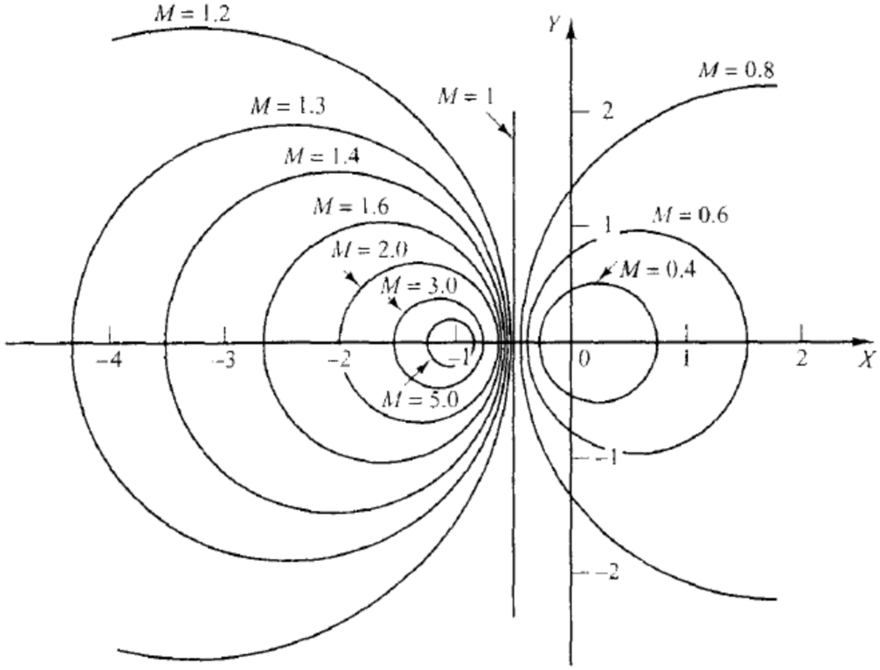


91

مکان هندسی اندازه ثابت (M-Circle):

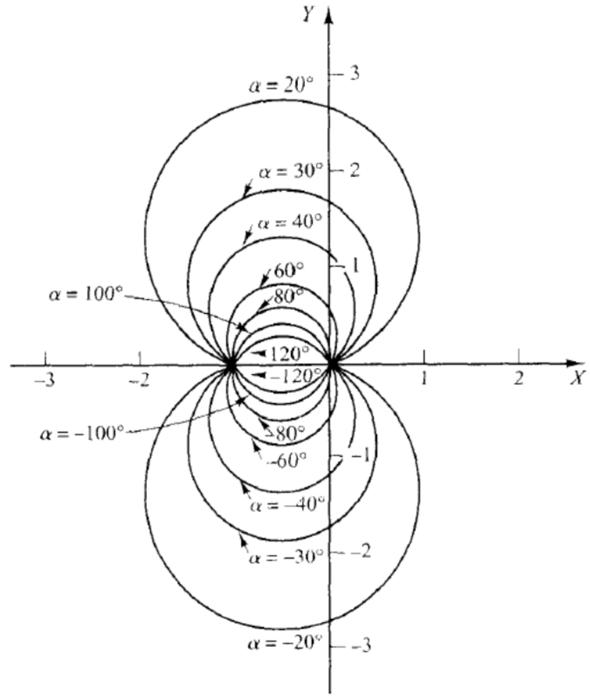
با فرض فیدبک واحد داریم،

92



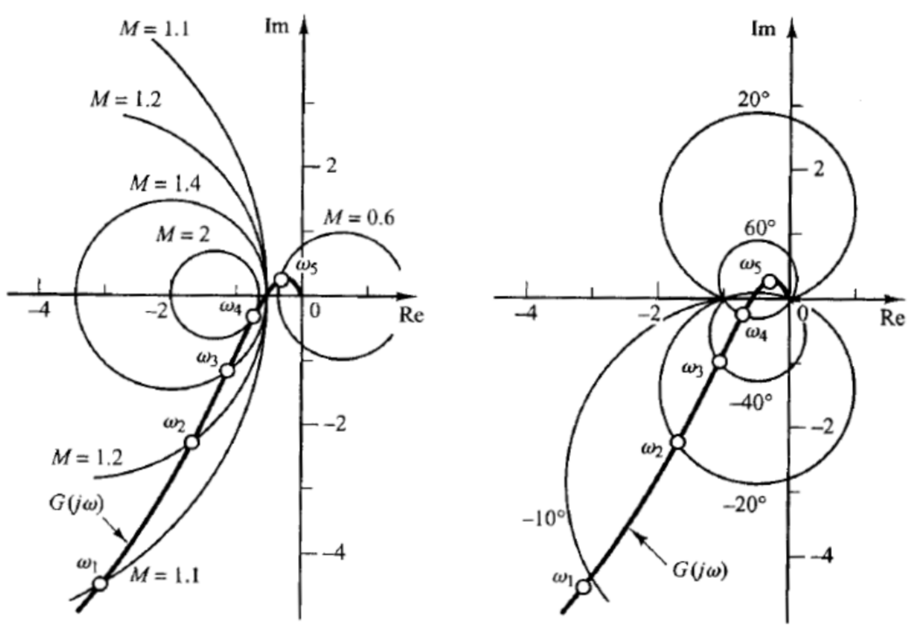
مکان هندسی فاز ثابت (N-Circle):

فاز حلقه بسته عبارت است از،



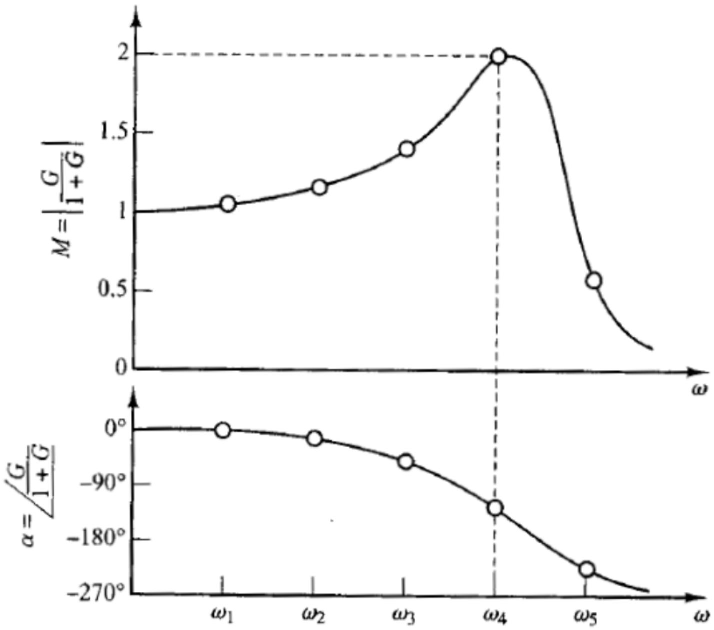
Y
X
α = 20°
α = 30°
α = 40°
60°
80°
α = 100°
120°
−120°
α = −100°
−80°
−60°
α = −40°
α = −30°
α = −20°
3
2
1
−1
−2
−3
1
2
−2
−3

95

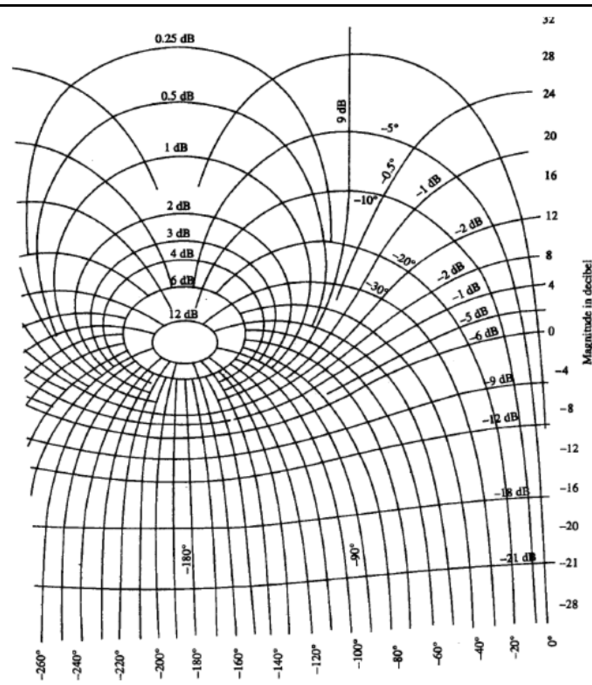


Im
Re
M = 1.1
M = 1.2
M = 1.4
M = 2
M = 0.6
M = 1.2
M = 1.1
G(jω)
ω1
ω2
ω3
ω4
ω5
20°
60°
−40°
−20°
−10°
−4
−2
0
2
−2
−4

96



97

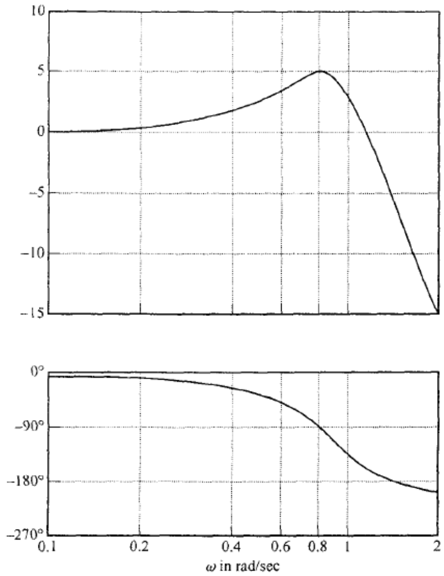


منظور از چارت نیکولز یعنی
رسم Mهای ثابت بر حسب
dB و N ثابت بر حسب درجه
در صفحه اندازه بر حسب فاز

98

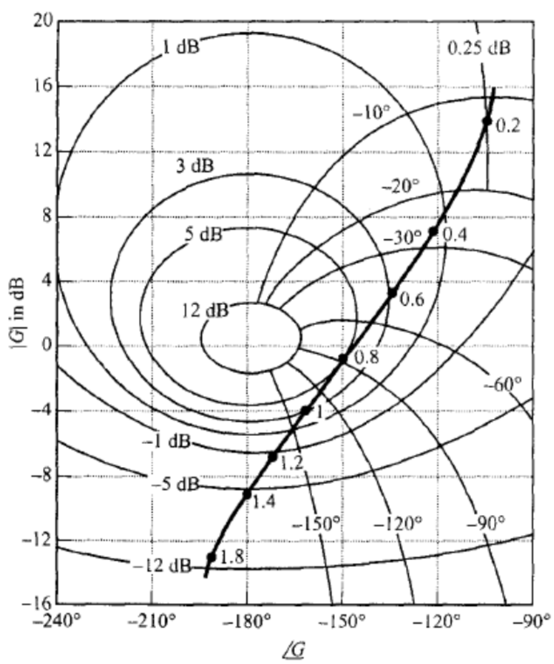
مثال:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$



99

مثال:



100

به نکات زیر در رابطه با چارت نیکولز دقت کنید:

۱) نقطه بحرانی $-1+0j$ در صفحه مختلط به نقطه 0dB و -180° بر روی چارت نیکولز نگاشت می‌شود.

۲) چارت نیکولز حول محور -180° متقارن است.

۳) تقاطع نمودار اندازه بر حسب فاز حلقه‌باز با مکان های M ثابت و N ثابت، اندازه و فاز سیستم حلقه‌بسته را در فرکانس مربوطه می‌دهد.

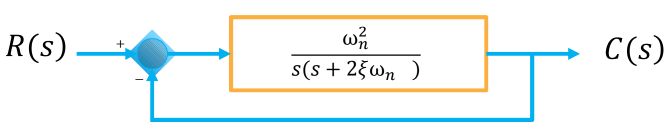
- مکان M ثابت مماس با این نمودار، حداکثر مقدار اندازه و فرکانس آن، فرکانس تشدید را می‌دهد.
- تقاطع $M=\frac{1}{\sqrt{2}}$ با نمودار حلقه‌باز، پهنای باند سیستم را مشخص می‌کند.

۴) به دست آوردن حاشیه بهره و حاشیه فاز

۵) برای سیستم حلقه‌باز مینیمم فاز، اگر نمودار سمت راست نقطه 0dB و -180° باشد، سیستم حلقه‌بسته پایدار است. (چون حاشیه فاز و حاشیه بهره هر دو مثبت هستند.)

101

مشخصه‌های عملکردی:



$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

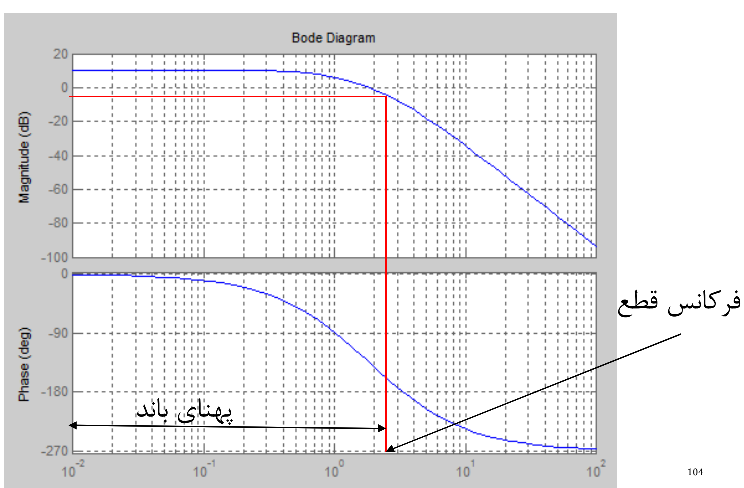
$$T(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}=\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2+2\xi w_n\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)+1}\qquad T(j\omega)=Me^{j\beta}$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}\qquad \beta=-\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2}\right)$$

102

فرکانس قطع و پهنای باند

فرکانس قطع در واقع فرکانسی است که در ان دامنه تابع تبدیل حلقه بسته 3db کمتر از فرکانس صفر باشد.



کاهش $t_r = \dfrac{\pi - \theta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ ⟷ کاهش ξ ⟷ افزایش پهنای باند

مزایای پهنای باند وسیع

- سیستم سریعتر عمل می‌کند.
- ورودی با فرکانس بالا را می‌تواند دنبال کند.

معایب پهنای باند وسیع

- عبور نویز فرکانس بالا
- هزینه بیشتر

105