جبر خطی کاربردی

درس ۵ : فضاهای برداری و متعامدسازی

گروه سیستم و کنترل– ۱۳۹۶

مدرس : دکتر عباداللهی

مفهوم میدان و فضای برداری

-در مطالعه سیستم ها فضای برداری را به روی یک میدان تعریف می‌کند.

-میدان (field)مجموعه ای از اسکالرها است به طوری‌که همراه با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می‌سازد :

۱-بسته بودن نسبت به عمل جمع $\forall a, b \in F, \qquad \exists a + b \in F$

۲-بسته بودن نسبت به عمل ضرب $\forall a, b \in F, \qquad \exists ab \in F$

۳- برقراری قوانین زیر $\forall a, b, c \in F$

قوانین جابجایی پذیری	$a + b = b + a, ab = ba$	1.
قوانین شرکت پذیری	$(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc)$	2.
قوانین توزیع پذیری	$a(b + c) = ab + ac$	3.
عضو خنثی در عمل جمع	$\forall a \in F, \exists 0 \in F \rightarrow a + 0 = a$	4.
عضو خنثی در عمل ضرب	$\forall a \in F, \exists 1 \in F \rightarrow 1a = a$	5.
عضو قرینه در عمل جمع	$\forall a \in F, \exists b \in F \rightarrow a + b = 0$	6.
عضو معکوس در عمل ضرب	$\forall a \in F, a \neq 0, \exists b \in F \rightarrow ab = 1$	7.

مثال ۱

-مجموعه‌ی اعداد حقیقی (R)، اعداد مختلط (C)، با دو عمل جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می‌دهند.

-مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N) با قواعد جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان نمی‌دهد،

زیرا شرط ششم و هفتم را برآورده نمی‌سازد.

$$\alpha \in N \rightarrow -\alpha \notin N$$
$$\beta \in N \rightarrow \frac{1}{\beta} \notin N$$

-مجموعه اعداد صحیح (Z) با قواعد جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان نمی‌دهد،

زیرا شرط هفتم را برآورده نمی‌سازد.

$$\beta \in \mathrm{Z} \rightarrow \frac{1}{\beta} \notin \mathrm{Z}$$

فضای برداری (Vector space)

- یک فضای برداری مانند V بر روی میدان F ، مجموعه ای از بردار ها است که با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می‌سازد .

$$1.\quad \forall u,v \rightarrow u+v \in V$$

$$2.\quad \forall u \in V, \qquad \forall c \in F \rightarrow cu \in V$$

$$3.\quad \forall u,v \in V \rightarrow u+v = v+u$$

$$4.\quad \forall u,v,w \in V \rightarrow u+(v+w) = (u+v)+w$$

$$5.\quad \forall u \in V, \qquad \exists 0 \in V \rightarrow u+0 = 0+u = u$$

$$6.\quad \forall u \in V, \qquad \exists -u \in V \rightarrow u+(-u) = (-u)+u = 0$$

$$7.\ \forall u,v \in V, \forall a,b \in F \rightarrow \quad (a+b)u = au+bu, \qquad a(u+v) = au+av$$

$$8.\quad \forall u \in V, \qquad \forall a,b \in F \rightarrow a(bu) = (ab)u$$

$$9.\quad \forall u \in V, \qquad \exists 1 \in F \rightarrow 1u = u$$

مثال ۲

مثال‌هایی از فضای برداری،

-مجموعه‌ی R^n (بردار های n تایی حقیقی) به روی میدان اعداد حقیقی

-مجموعه‌ی $M_{n\times n}(R)$ (ماتریس های n*n با عناصر حقیقی) بر روی میدان اعداد حقیقی

-مجموعه ماتریس های متقارن n *n مختلط بر روی میدان اعداد مختلط

-مجموعه $P_n(R)$ چند جمله ای های مرتبه n به فرم $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x + \alpha_0$ بر روی میدان اعداد حقیقی

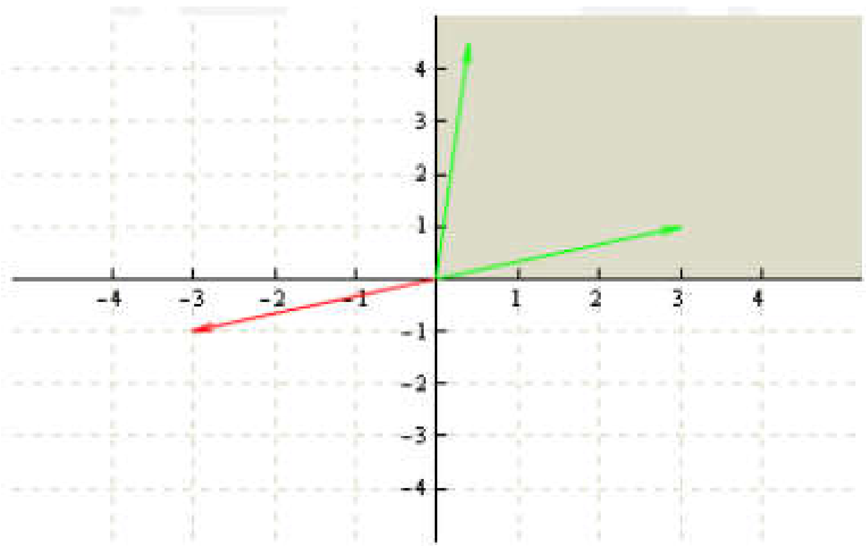
مثال ۳

مثال هایی که فضای برداری نیستند ،

مجموعه ماتریس های ۲*۲ غیر منفرد یک فضای برداری نیست زیرا جمع دو ماتریس غیر منفرد ممکن است ماتریس منفرد باشد.

$$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- مجموعه بردارهای دوتایی در ربع اول صفحه مختصات،



مفهوم زیر فضای برداری (subspace)

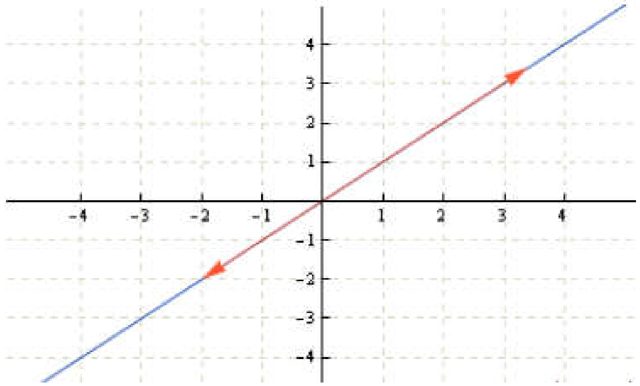
- اگر V یک فضای برداری بر روی میدان F و S یک زیر مجموعه غیر تهی از V باشد . S را یک زیر فضا از V می‌نامند .

هرگاه،

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \forall s,t \in S \quad \rightarrow \quad s+t \in S \\ 2. & \forall s \in S, \quad \forall a \in F \rightarrow \quad as \in S \end{array}}$$

مثال ۴

در فضای برداری دو بعدی R^2 هر خط راستی که از مبدا عبور کند، یک زیر فضای برداری از R^2 می‌باشد،



$$\boxed{S = \{(x, y) \in R^2 : ax + by = 0\}}$$

برای بررسی باید برقراری شرایط یک و دو را بررسی کنیم ،

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in S \rightarrow ax + by = 0 \\ (u, v) \in S \rightarrow au + bv = 0\end{array}\right\} \longrightarrow a(x + u) + b(y + v) = 0$$

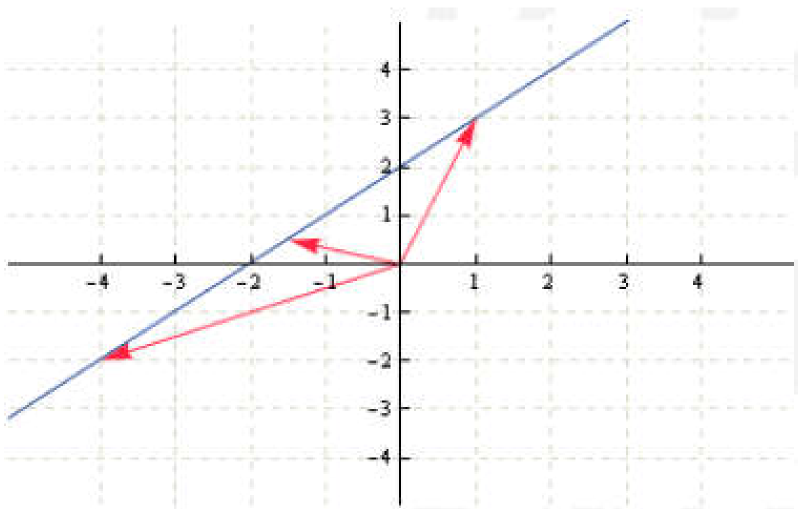
بنابراین نتیجه می‌گیریم که $(x + u, y + v) \in S$ می‌باشد و شرط اول برقرار است.

$$(x, y) \in S \rightarrow ax + by = 0 \rightarrow a(cx) + b(cy) = 0$$

از این رو $c(x, y) = (cx, cy) \in S$ می باشد و شرط دوم نیز برقرار است.

مثال ۵

آیا در فضای برداری دو بعدی R^2 هر خط راستی که از مبدا عبور نکند، یک زیر فضای برداری از R^2 است؟



$$\boxed{S = \{(x, y) \in R^2 : ax + by = k\}}$$

شرایط زیر فضا بودن را بررسی کنیم ،

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in S \rightarrow ax + by = k \\ (u, v) \in S \rightarrow au + bv = k\end{array}\right\} \longrightarrow a(x+u) + b(y+v) = 2\mathrm{k}$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $(x+u, y+v) \notin S$ و نیازی به بررسی شرط دوم نیست. لذا هر خط راستی که از مبدا عبور نکند، یک زیر فضای برداری از R^2 نمی‌باشد.

مثال ۶

آیا مجموعه ماتریس‌های به فرم $\begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ یک زیر فضا از $M_{2\times2}(R)$ می‌باشد؟

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{تمامی ماتریس‌ها به فرم} \right\}$$

برای زیر فضا بودن باید شرایط زیر را داشته باشد،

$$1. \forall A, B \in S \rightarrow A + B \in S$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \notin S$$

از آن جایی که شرط اول را بر آورده نمی‌کند، لذا نیازی به بررسی شرط دوم نیست و این مجموعه زیرفضا برای $M_{2\times2}(R)$ نمی‌باشد.

معرفی فضای ستون های یک ماتریس (Column Space)

مثال ۷

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

C(A) شامل تمامی ترکیب‌های خطی ستون‌های ماتریس A است.

$$C(A) = \{\alpha[1 \quad 2 \quad 4]^T + \beta[3 \quad 3 \quad 1]^T\} \longrightarrow$$ (Column space) فضای ستون های ماتریس A

می‌توان نشان داد که C(A) یک زیر فضا از فضای برداری R^3 است.

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 3\beta \\ 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \in C(A) \quad , \quad \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma + 3\varphi \\ 2\gamma + 3\varphi \\ 4\gamma + \varphi \end{bmatrix} \in C(A)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 3\beta \\ 4\alpha + \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma + 3\varphi \\ 2\gamma + 3\varphi \\ 4\gamma + \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha + \gamma) + 3(\varphi + \beta) \\ 2(\alpha + \gamma) + 3(\varphi + \beta) \\ 4(\alpha + \gamma) + (\varphi + \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m + 3n \\ 2m + 3n \\ 4m + n \end{bmatrix} \in C(A)$$

$$c\begin{bmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 3\beta \\ 4\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c\alpha) + 3(c\beta) \\ 2(c\alpha) + 3(c\beta) \\ 4(c\alpha) + (c\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k + 3l \\ 2k + 3l \\ 4k + l \end{bmatrix} \in C(A)$$

کاربرد فضای ستون‌ها در حل دستگاه معادلات

مثال ۸

به ازای چه مقادیری از بردار b دستگاه معادلات $Ax = b$ جواب دارد؟

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

لذا دستگاه معادلات $Ax = b$ زمانی جواب دارد که بردار b را بتوان به صورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس A نمایش داد.

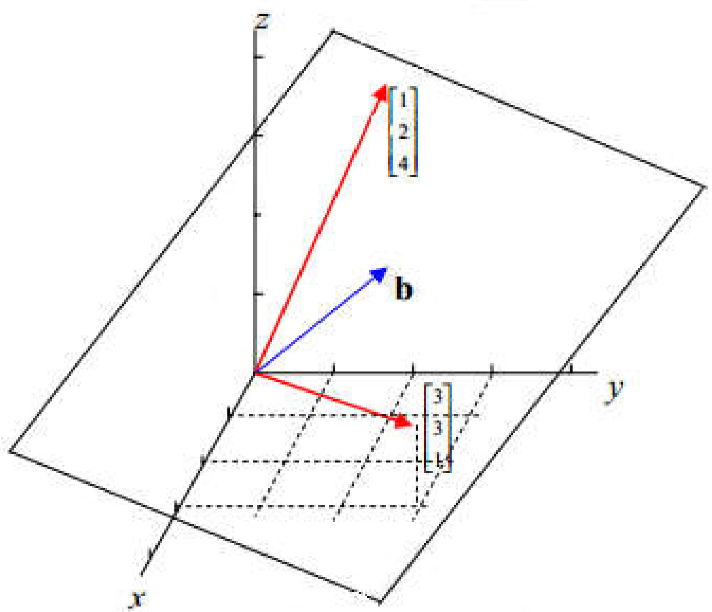
شرط لازم و کافی برای داشتن جواب آن است که $b \in C(A)$ باشد.

مثال ۹

ماتریس A در مثال ۷ را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

به لحاظ هندسی فضای ستون‌های ماتریس A صفحه‌ای در فضای برداری R^3 است که از مبدا عبور کرده و بردار ستون‌های ماتریس A را شامل گردد،



لذا تمامی بردارهایی مانند b که درون این صفحه قرار دارند جزء فضای ستون‌های ماتریس A هستند و می‌توان آن‌ها را به صورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس A نمایش داد و برای این بردارها دستگاه معادلات $Ax = b$ سازگار است و جواب دارد.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = b$$

اگر بردار b طوری انتخاب شود که خارج از این صفحه قرار گیرد، دستگاه معادلات $Ax = b$ ناسازگار بوده و جواب ندارد.

مثال ۱۰

ماتریس A در مثال ۸ و بردارهای b_1 و b_2 را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

-دستگاه معادلات $Ax = b_1$ یک دستگاه معادلات سازگار است و جواب دارد،

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -7 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \{x_1 = -2, x_2 = 1\}$$

لذا $b_1 \in C(A)$ و می‌توان بردار b_1 را به صورت ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس A نمایش داد،

$$(-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

-حال دستگاه معادلات $Ax = b_2$ را در نظر می‌گیریم، این دستگاه معادلات ناسازگار است و جواب ندارد،

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

لذا $b_2 \notin C(A)$ و نمی‌توان بردار b_2 را به صورت ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس A نمایش داد.

معرفی فضای پوچی یک ماتریس (Null Space)

مثال ۱۱

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

N(A) شامل تمامی پاسخ‌های ممکن دستگاه معادلات $Ax = 0$ است،

$$N(A) = \{x \in R^3 \to Ax = 0\} \subset R^3$$ ⟵ (Null space) فضای پوچی ماتریس A

می توان نشان داد که *N(A)* یک زیرفضا از فضای برداری R^3 است،

$$\left.\begin{array}{l} x \in N(A) \to Ax = 0 \\ y \in N(A) \to Ay = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow Ax + Ay = A(x+y) = 0 \to x + y \in N(A)$$

$$x \in N(A) \to Ax = 0, A(cx) = c(Ax) = 0 \to cx \in N(A)$$

حال فضای پوچی ماتریس A را به دست آوریم، یعنی باید تمامی جواب‌های دستگاه معادلات $Ax = b$ به دست آوریم.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boxed{1} & 0 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

یکی از جواب ها پاسخ بدیهی $x = [0,0,0]$ و با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته پاسخ های دیگری هم به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \xrightarrow{x_3 = -\alpha} x = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

لذا بردار $x = [1,1,-1]$ یکی از جواب ها است و هر ترکیب خطی از این بردار هم می‌تواند پاسخ دستگاه $Ax = 0$ باشد. بنابراین فضای پوچی ماتریس A به صورت زیر قابل نمایش است،

$$N(A) = \{x \in R^3 \rightarrow x = \alpha[1 \quad 1 \quad -1]^T\}$$

لذا فضای پوچی ماتریس A یک خط درفضای برداری R^3 است.

مفهوم اسپن (Span)

-بردارهای $v_1, v_2, \ldots, v_n$ فضای W را اسپن می‌کنند، اگر،

$$\boxed{\begin{array}{l} 1. \quad v_1, v_2, \ldots, v_n \in W \\ 2. \forall u \in W \rightarrow u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n \end{array}}$$

-فضای اسپن شده توسط بردارهای $v_1, v_2, \ldots, v_n$ را به صورت زیر نمایش می‌دهند،

$$\boxed{W = sp\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}}$$

مثال ۱۲

بررسی کنید که آیا بردارهای زیر فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند.

$$\boxed{u = [1,2,1]^T, v = [1,1,1]^T, w = [0,2,-1]^T}$$

برای اسپن کردن باید بتوان هر برداری در فضای برداری R^3 مانند $r = [r_1,r_2,r_3]^{\mathrm{T}}$ را به صورت ترکیب خطی از این سه بردار نمایش داد ،

$$r = au + bv + cw = a\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a + b = r_1 \\ 2a + b + 2c = r_2 \\ a + b - c = r_3 \end{cases}$$

فرم ماتریسی این دستگاه معادلات به صورت زیر می باشد ،

$$Ax = y \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 1 & 2\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

حال باید بررسی کنیم که این دستگاه معادلات سازگار است یا ناسازگار، یعنی حداقل یک جواب دارد یا نه.

از آن جاییکه $|A| = 1$ می باشد، بنابراین، برای هر بردار دلخواه $r = [r_1,r_2,r_3]^{\mathrm{T}}$ می‌توان یک جواب پیدا کرد.

لذا ، بردارهای $w = [0,2,-1]^{\mathrm{T}}$ و $v = [1,1,1]^{\mathrm{T}}$ و $u = [1,2,1]^{\mathrm{T}}$ فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند.

استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها

- اگر معادله‌ای به شکل زیر،

$$\boxed{c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n = 0}$$

فقط به ازای شرط $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ برقرار باشد، آن گاه بردارهای $u_1, u_2, \ldots, u_n$ را مستقل خطی (Linear Independent) گویند.

-در غیر این صورت بردارهای $u_1, u_2, \ldots, u_n$ را وابسته خطی (Linear Dependent) گویند.

مثال ۱۳

استقلال خطی یا وابستگی خطی بردارهای زیر را بررسی کنید.

$$\boxed{u_1 = [-2,1]^T, u_2 = [-1,-3]^T, u_3 = [4,-2]^T}$$

با توجه به تعریف استقلال خطی بردارها داریم،

$$c_1\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-2c_1-c_2+4c_3\\c_1-3c_2-2c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات مربوطه به شکل زیر می‌باشد ،

$$\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\1 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

از آنجائی‌که تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات است، جواب‌ها را به صورت زیر می‌توان به‌دست آورد،

$$c_1 = 2c_3 \quad , \qquad c_2 = 0$$

بنابراین بردارهای $u_3 = [4,-2]^T$, $u_2 = [-1,-3]^T$, $u_1 = [-2,1]^T$ وابسته خطی می‌باشند.

مفهوم پایه و بعد در فضای برداری

-در فضای برداری V، مجموعه بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_n$ تشکیل یک پایه (Basis) می دهند، اگر دو شرط زیر را داشته باشند،

۱-آن فضای برداری را اسپن کنند، $V = sp\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

۲-بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_n$ مستقل خطی باشند.

-تعداد بردارهای پایه در یک فضای برداری V را بُعد آن فضا می‌نامند.

چند نکته :

-برای فضای برداری V بردار های پایه منحصر به‌فرد نیستند، ولی نمایش هر بردار توسط این بردار های پایه منحصر به‌فرد است.

-بعد یک فضا برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در آن فضا است.

-در فضای برداری n بعدی مانند V هر مجموعه از n بردار مستقل خطی تشکیل یک پایه می‌دهد.

نمایش فضاهای برداری بر اساس پایه ها

-یکی از روش‌های نمایش فضاهای برداری استفاده از پایه های آن فضا است،

-فضای برداری R^3 :

$$R^3 = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \dim(R^3) = 3$$

- فضای برداری $M_{2\times2}(R)$:

$$M_{2\times2}(R) = sp\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}, \dim(M_{2\times2}) = 4$$

-فضای برداری $P_2(R)$:

$$P_2(R) = sp\{x^2, x, 1\}, \dim(P_2) = 3$$

مثال ۱۴

بررسی نمایید که آیا بردارهای زیر برای فضای برداری R^3 تشکیل یک پایه می‌دهند .

$$\boxed{u_1 = [1,-1,1]^T, u_2 = [0,1,2]^T, u_3 = [3,0,-1]^T}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می‌کنیم،

۱- برای اسپن کردن فضای برداری R^3 باید هر بردار دلخواه مانند $r = [r_1, r_2, r_3]$ را بتوان به صورت ترکیب خطی از این سه بردار نمایش داد،

$$r = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 \rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل به صورت زیر می‌باشد،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

۲- برای بررسی مستقل خطی بودن بردارهای u_1, u_2, u_3 از تعریف آن استفاده می‌کنیم،

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

معادلات ماتریسی حاصل به صورت زیر می‌باشد،

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\-1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

از آنجایی‌که دترمینان ماتریس مخالف صفر است $(|A| = -10)$، بردارهای u_1, u_2, u_3 مستقل خطی بوده و فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند. لذا تشکیل یک پایه برای فضای برداری R^3 می‌دهند.

مثال ۱۵

بررسی نمایید که آیا بردارهای زیر برای فضای برداری R^3 تشکیل یک پایه می‌دهند.

$$\boxed{u_1 = [0,1,1]^T, u_2 = [-1,1,2]^T, u_3 = [1,2,-1]^T, u_4 = [-1,0,-1]^T}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می‌کنیم،

۱- برای اسپین کردن فضای برداری R^3 باید هر بردار دلخواه $r = [r_1, r_2, r_3]$ را بتوان بصورت ترکیب خطی از این چهار بردار نمایش داد،

$$r = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 \rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل به صورت زیر می‌باشد ،

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -c_2 + c_3 - c_4 = r_1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = r_2 \\ c_1 + 2c_2 - c_3 - c_4 = r_3 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده و سطری و سطری پلکانی کاهش یافته آن به شکل زیر به دست می‌آید ،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & r_1\\ 1 & 1 & 2 & 0 & r_2\\ 1 & 2 & -1 & -1 & r_3\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2.5r_1-0.5r_2+1.5r_3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1.5r_1+0.5r_2-0.5r_3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -0.5r_1+0.5r_2-0.5r_3\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}$$

C4 متغیر آزاد است و دستگاه معادلات بی‌شمار جواب دارد . بنابراین این چهار بردار فضای برداری R^3 را اسپن می‌کنند .

۲-برای بررسی مستقل خطی بودن بردارهای u_1, u_2, u_3, u_4 از تعریف آن استفاده می‌کنیم ،

$$r = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

معادلات ماتریس افزوده و فرم سطری پلکانی کاهش یافته حاصل به صورت زیر می‌باشد،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه C_4 متغیر آزاد است و دستگاه معادلات بی‌شمار جواب دارد ، بردارهای u_1, u_2, u_3, u_4 مستقل خطی نیستند و نمی توانند برای فضای برداری R^3 تشکیل پایه بدهند.