جبر خطی کاربردی

درس ۲:دستگاه معادلات جبری خطی

گروه سیستم و کنترل – ۱۳۹۶

مدرس :دکتر عباداللهی

معرفی دستگاه معادلات جبری خطی

– صورت کلی یک دستگاه معادلات جبری خطی با m معادله و n مجهول،

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m$$

این دستگاه معادلات یک سیستم $m\times n$ است، که در آن a_{ij} ها و b_i ها مقادیر ثابت معین و x_j ها مجهولاتی هستند که باید تعیین گردند.

– می توان معادلات رابه شکل $A\underline{x}=\underline{b}$ نمایش داد که به آن فرم ماتریسی گویند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \underline{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

این دستگاه معادلات را می‌توان با صرف نظر کردن مجهولات و فقط با در نظر گرفتن ضرایب به صورت زیر نمایش داد،

$$[A\,|\,b]_{m\times(n+1)}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

این ماتریس را ماتریس افزوده (Augmented Matrix) سیستم می‌نامند، که هر سطر آن بیان کننده یکی از معادلات خطی می‌باشد.

فرم کلی دستگاه معادلات جبری خطی

m×n

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m$$

فرم ماتریس افزوده: $\boxed{[A\,|\,b]}$

فرم ماتریسی: $\boxed{A\underline{x}=\underline{b}}$

$$\begin{cases} m=n \rightarrow \text{(Square)} & \text{مربعی} \\ m<n \rightarrow \text{(Underdetermined)} & \text{فرومعین} \\ m>n \rightarrow \text{(Overdetermined)} & \text{فرامعین} \end{cases}$$

کاربرد دستگاه معادلات جبری خطی

- تحلیل و شبیه سازی
- تخمین و شناسایی
- کنترل و طراحی

تحلیل و شبیه سازی سیستم ها

مدل خطی یا خطی‌سازی شده یک سیستم فیزیکی $\rightarrow$ $\boxed{\underline{y} = A\underline{x}}$

کمیت هایی که عملکرد سیستم را توصیف می کنند

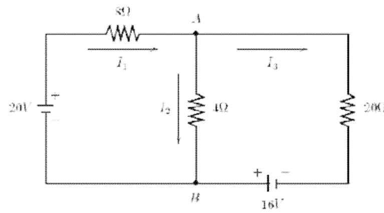
ولتاژ و جریان

نیرو و جابه جایی

y: کمیت های معلوم

x: کمیت های مجهول

مدار الکتریکی



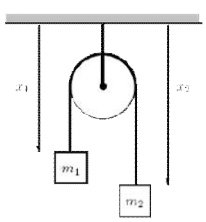
هدف یافتن مقدار جریان های I_1، I_2 و I_3 می‌باشد.

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$8I_1 + 4I_3 = 20 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ -16 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{y} = A\,\underline{x}$$

$$4I_2 - 20I_3 = -16$$

سیستم مکانیکی



هدف به‌دست آوردن نیروی کشش طناب و شتاب حرکت هر یک جرم ها می‌باشد.

$$m_1\ddot{x}_1 + T = m_1 g$$

$$m_2\ddot{x}_2 + T = m_2 g \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & m_1 & 0 \\ 1 & 0 & m_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{y} = A\,\underline{x}$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$$

کنترل و طراحی سیستم ها

$$\underline{x} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow \underline{y} = A\,\underline{x}$$

بردار ورودی یا مقادیر طراحی شده

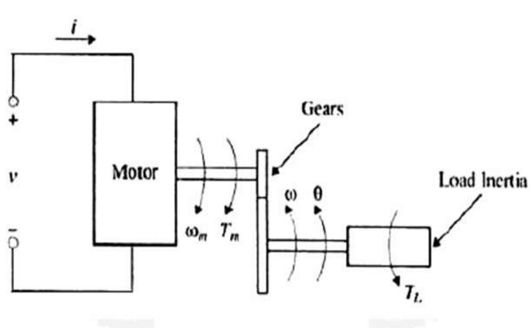
بردار خروجی یا نتایج

انتخاب ورودی‌های مختلف چگونه خروجی را تحت تأثیر می‌گذارد

مسئله : مقدار x چگونه یا چه مقادیری باشد تا $y = y_d$ گردد.

در بین x های ممکن پاسخی را بیابید که کم‌ترین هزینه کنترلی را داشته باشد.

سیستم الکترومکانیکی



$$u \rightarrow \text{DC Motor} \rightarrow y$$

ولتاژ و گشتاور ورودی

سرعت و موقعیت زاویه ای موتور

تخمین و شناسایی

$$\boxed{\underline{y} = A\,\underline{x}}$$

مقدار اندازه گیری شده

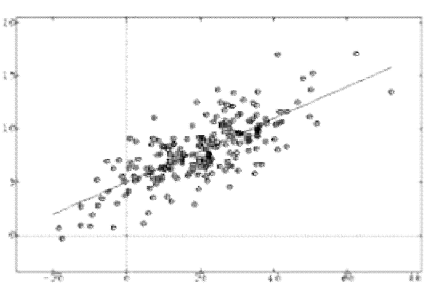
پارامتری که باید تخمین زده شود

میزان حساسیت و اثرگذاری پارامتر را بر مقدار اندازه‌گیری شده نشان می‌دهد

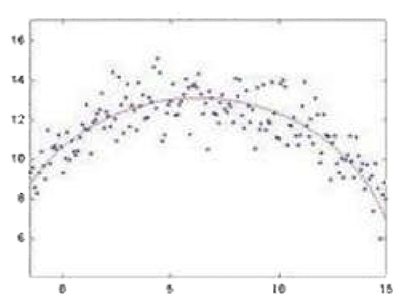
مسئله: تمامی x های متناسب با مقدار y بیابید.

اگر x وجود ندارد که $\underline{y} = A\,\underline{x}$ باشد، $\underline{x}$ را بیابید که حاصل تا حد امکان به مقدار اندازه گیری شده شبیه باشد ($\underline{y} \approx A\,\underline{x}$).

برازش داده ها



$y = \alpha x + \beta$



$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

حل دستگاه معادلات جبری خطی

روش حذفی گوسی

روش گوس – جردن

استفاده از ماتریس معکوس برای سیستم مربعی $n \times n$

$$A\underline{x} = \underline{b} \longrightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

ماتریس های منفرد، غیر منفرد و ماتریس معکوس

– برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$

$A_{n\times n}$ غیر منفرد (Nonsingular) یا ناویژه $\Rightarrow$ $\exists\ B_{n\times n} \rightarrow AB = BA = I$

$B = A^{-1}$

ماتریس معکوس (Inverse Matrix)

اگر A^{-1} وجود نداشته باشد، ماتریس A را منفرد (Singular) یا ویژه گویند.

ماتریس معکوس A^{-1} زمانی وجود دارد که $|A|\neq 0$ باشد.

مثال ۱

دستگاه معادلات زیر را در صورت امکان با استفاده از روش ماتریس معکوس حل نمایید.

$$\begin{Bmatrix} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_x = -7 \end{Bmatrix} \rightarrow \quad Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

شرط استفاده از روش ماتریس معکوس،

$$|A| = 1(3\text{-}2) \text{ -}2(\text{-}3\text{+}4) \text{ +}3(1\text{-}2) = \text{-}4 \rightarrow |A| \neq 0$$

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس معکوس

ماتریس الحاقی

$$A^{-1} = \frac{\text{adj (A)}}{|A|}$$

روش گوس جردن

$$AA^{-1} = I$$

دستور ivn(A)

ماتریس الحاقی:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 1(3-2) - 2(-3+4) + 3(1-2) = -4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 02 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 1 & -9 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

دستور inv (A):

```
A = [ 1   2   3;  -1   1   -2;  2   -1   3] ;
inv (A)
ans=
        -0.2500    2.2500    1.7500
        -0.2500    0.7500    0.2500
         0.2500   -1.2500   -0.7500
```

تحقیق اول

فرض کنید نتایج انجام یک سری آزمایشات تجربی منجر به به‌دست آمدن چنین دستگاه معادلات ماتریسی گردد،

$$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.7177 \\ 70.9241 \\ 82.9271 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که $|A| = -1.9170 \neq 0$ است می توان آن را به صورت زیر حل کرد،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.477 & 1.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 34.7177 \\ 70.9241 \\ 82.9271 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.8000 \\ 0.7000 \end{bmatrix}$$

حال اگر نتایج حاصل از یک اندازه گیری از یک آزمایش عملی باشد، در این صورت این احتمال وجود دارد که برخی از ارقام رابه منظور سهولت در محاسبات گرد کنیم. با این فرض نتایج را مجدداً بررسی می‌نماییم،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 34.7 \\ 70.9 \\ 82.9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.68294 \\ 8.92282 \\ -3.50254 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج به‌طور چشمگیری تغییر نموده است. علت چیست؟

حل دستگاه معادلات جبری خطی

$$A_{m\times n}\, X_{n\times 1} = b_{m\times 1}$$

روش حذفی گوسی (Gaussian Elimination)

هنگامی که $m=n$ باشد ← به فرم بالا مثلثی

هنگامی که $m\neq n$ باشد ← به فرم سطحی پلکانی (Row Echelon)

روش حذفی گوسی هنگامی که $m=n$ باشد ← به فرم بالا مثلثی

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_{mn} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right]$$

فرآیند تبدیل ماتریس ضرایب به فرم بالا مثلثی

گام اول: حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا n ام،

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}} r_1 + r_i \rightarrow r_i \quad , i = 2, \dots, n$$

گام دوم: حذف مجهول x_2 از معادلات سوم تا n ام،

$$\frac{-a_{i2}}{a_{22}} r_2 + r_i \quad , i = 3, . . n$$

گام سوم: به همین ترتیب تا گام n-1 ادامه می‌دهیم.

در این صورت دستگاه معادلات حاصل به شکل زیر خواهد بود،

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a'_{11} + a'_{12}x_2 + a'_{13} + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
a'_{22}\, x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_1 \\
a'_{33}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\
&\vdots \\
a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n &= b'_{n-1} \\
a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned}
}
$$

که با استفاده از یک الگوریتم جایگزینی پس‌رو می توان آن را حل کرد،

گام اول، $x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$

گام دوم، $x_i = \frac{1}{a'_{ii}}\left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij}\, x_j\right) \quad , \quad i = n-1, \ldots 2, 1$

گام سوم، $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

عملگرد \ در نرم افزار MATLAB وجود دارد $\leftarrow$ $Ax = b \rightarrow x = A\backslash b$

مثال ۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\
4x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 3
\end{aligned}
\rightarrow
\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\rightarrow
\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

ابتدا باید مجهول x_1 را از معادلات دوم و سوم حذف نماییم،

$$
\left.
\begin{aligned}
\boxed{\frac{-a_{21}}{a_{11}}} \leftarrow \boxed{\frac{-4}{9}}\, r_1 + r_2 &\rightarrow r_2 \\
\boxed{\frac{-a_{31}}{a_{11}}} \leftarrow \boxed{\frac{-1}{9}}\, r_1 + r_3 &\rightarrow r_3
\end{aligned}
\right\}
\Rightarrow
\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right]
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

حال باید مجهول x_2 را از معادله سوم حذف نماییم،

$$\boxed{\frac{-a'_{32}}{a'_{22}}} \leftarrow \boxed{\frac{-6}{15}} r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{9} & \frac{4}{15} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس ضرایب به فرم بالا مثلثی تبدیل می شود و دستگاه معادلات حاصل به صورت زیر خواهد بود، که جواب ها به راحتی با استفاده از الگوریتم جایگزینی پس‌رو قابل محاسبه هستند،

$$9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7$$

$$\frac{15}{9} x_2 + \frac{20}{9} x_3 = \frac{44}{9} \rightarrow x_1 = \frac{-1}{5}, x_2 = 4, x_3 = \frac{-4}{5}$$

$$\frac{-3}{9} x_3 = \frac{4}{15}$$

هر یک از مراحل بالا را می توان در قالب ضرب یک ماتریس مقدماتی $n\times n$ بیان کرد،

مرحله (۱): $\frac{-4}{9} r_1 + r_2 \rightarrow r_2$

$$E_1 [A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-4}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

مرحله (۲): $\frac{-1}{9} r_1 + r_3 \rightarrow r_3$

$$E_2 E_1 [A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right]$$

مرحله (۳): $\frac{-6}{15} r_2 + r_3 \rightarrow r_3$

$$E_3E_2E_1\,[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{15} & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{4}{15} \end{array}\right]$$

بنابراین کل این تبدیلات را می‌توان به صورت زیر بیان کرد،

$$E_3E_2E_1\,[A|b]$$

ماتریس های مقدماتی Elementary Matrix

– این ماتریس ها مربعی بوده و با انجام یک عمل مقدماتی روی ماتریس همانی I به دست می‌آیند.

۱- $r_j \leftrightarrow r_i \leftarrow$ ماتریس جایگشت $\leftarrow$ $\det(E) = -1$ و $E^{-1} = E$

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \Rightarrow EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 9 & 12 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

۲- $r_i \rightarrow kr_i$: $\leftarrow$ ماتریس قطری $\leftarrow$ $\det(E) = k$, $[E_i(k)]^{-1} = E_i\,(1/k)$

$$-4r_2 \rightarrow r_2 \Rightarrow \quad EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & -24 & -12 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

۳. $Kr_j + r_i \rightarrow r_i$ $\leftarrow$ $\det(E) = 1$ و $[E_i(k)]^{-1} = E_i(-k)$

$$-4r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \Rightarrow \qquad EA = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -29 & -8 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

تحقیق دوم

۱- دستورهای toc و tic در نرم افزار MATLAB برای چه منظوری استفاده می شوند؟

۲- یک دستگاه معادلات خطی ۵۰۰۰۰×۵۰۰۰۰ را در نظر بگیرد،

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

حجم زمان لازم برای حل این دستگاه معادلات توسط دو روش زیر را مقایسه کنید.

$\underline{x}$=A\\$\underline{b}$, $\underline{x}$= inv(A)*$\underline{b}$

مثال ۳

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$
\begin{gathered}
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -4 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5 \\
-3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 7 \\
-x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7
\end{gathered}
$$

فرم ماتریسی این معادلات به صورت زیر می‌باشد،

$$
A\underline{x} = \underline{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 8 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}
$$

می‌خواهیم این دستگاه معادلات خطی را با استفاده از روش حذفی گوسی حل کنیم.

ابتدا باید مجهول x_1 را از معادلات دوم تا چهارم حذف نماییم،

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{-1}{2}r_1 + r_2 &\rightarrow r_2 \\
\frac{3}{2}r_1 + r_3 &\rightarrow r_3 \\
\frac{1}{2}r_1 + r_4 &\rightarrow r_4
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

حال باید مجهول x_2 را از معادلات سوم و چهارم حذف نماییم، لیکن به علت صفر بودن عنصر محوری a_{22} این کار امکان پذیر نمی‌باشد. در چنین شرایطی، باید عمل محور گیری انجام دهیم، یعنی جای معادله دوم را با معادله چهارم عوض می نماییم. بنابراین ماتریس افزوده جدید به صورت زیر قابل بازنویسی خواهد بود.

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

حال می توانیم مجهول x_2 را از معادلات سوم و چهارم حذف کنیم،

$$-r_2+r_3 \to r_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 \\ 5 \\ -4 \\ 57 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۴) این بار لازم است تا مجهول x_3 را از معادله چهارم حذف نماییم، لیکن باز هم عنصر محوری a_{33} برابر با صفر است پس باز هم عمل محورگیری را انجام داده و جای معادله سوم را با معادله چهارم عوض می‌نماییم،

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ -4 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس ضرایب به فرم بالا مثلثی تبدیل می‌گردد و دستگاه معادلات حاصل به صورت زیر خواهد بود،

$$2x_1+4x_2-2x_3-2x_4=-4$$

$$3x_2+5x_3-4x_4=5$$

$$5x_3-2x_4=7$$

$$-x_4=-4$$

که جواب ها به راحتی با استفاده از الگوریتم جایگزینی پس‌رو قابل محاسبه هستند،

$x_4=4$ $\quad$ $x_3=3,$ $\quad$ $, x_2=2,$ $\quad$ $X_1=1$

ماتریس های مقدماتی برای انجام هر مرحله به صورت زیر به‌دست می‌آیند،

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-0.5&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1.5&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad E_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0.5&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$E_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad E_5=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad E_6=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

روش حذف گوسی هنگامی‌که $m\neq n$ باشد ← به فرم سطری پلکانی (Row Echelon)

$$\begin{bmatrix}1&*&*&*&*&*&*&*\\0&0&1&*&*&*&*&*\\0&0&0&1&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&1&*\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

خصوصیات فرم سطری پلکانی:

۱- سطرهایی که تمامی عناصر آنها صفر می باشد در بخش پایین ماتریس قرار می گیرند.

۲- در سطرهایی که شامل عناصر غیر صفر هستند، اولین عنصر غیر صفر سمت چپ عدد یک می باشد، که به آن عنصر محوری (Pivot Entry) گفته می‌شود.

فرآیند تبدیل ماتریس ضرایب m×n به فرم سطری پلکانی،

گام اول- در صورتی که ضریب x_1 در معادله اول یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{11}} r_1 \to r_1$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا m ام،

$$-a_{i1}r_1 + r_i \to r_i\ ,\ i=2,\dots,m$$

گام دوم-در صورتی که ضریب X_2 در معادله دوم یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{22}} r_2 \to r_2$$

حذف مجهول x_2 از معادلات سوم تا m ام،

$$-a_{i2}r_2 + r_i \to r_i\ ,\ i=3,\dots,m$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام m-1 ادامه می‌دهیم.

مثال ۴

دستگاه معادلات زیر را درنظر بگیرید،

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 &= 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که ضریب X_1 در سطر اول یک و در سطر دوم صفر می‌باشد، لذا x_1 را از سطر سوم حذف نماییم،

$$-2r_1 + r_3 \to r_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

با توجه به این که ضریب x_2 در سطر دوم یک است، لذا x_2 را از سطر سوم حذف می‌نماییم،

$$2r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که در سطر سوم، اولین عدد غیر صفر از سمت چپ یک می‌باشد، لـذا الگـوریتم پایـان یافتـه اسـت و فـرم سطری پلکانی به صورت زیر بدست می‌آید،

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه معادلات معادل به صورت زیر در خواهد آمد،

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ x_4 + x_5 = 1 \end{gathered}$$

از آنجایی که تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات می‌باشد، مـی‌تـوان برخـی از مجهـولات را بـر حسـب دیگـری به‌دست آورد،

$x_1=-6+ x_5+2x_3$, $x_2= 2+x_5-x_3$, $x_4= 1-x_5$

به x_3 و x_5 متغیرهای آزاد گفته می‌شود.