جبر خطی کاربردی

درس ۸ : فضاهای برداری و متعامدسازی

گروه کنترل– ۱۳۹۷

مدرس : دکتر عباداللهی

ادامه مبحث حل مسئله حداقل

-حل مستقیم معادلات نرمال ← $\boxed{A^T Ax = A^T b}$

-متعامد سازی با استفاده از روش گرام-اشمیت (Gram-Schmidt Process)

- استفاده از تجزیه ماتریس ها برای حل معادلات نرمال

۱- استفاده از تجزیه چالسکی(Cholesky-Factorization) ← روش سریع‌تر

۲- استفاده از تجزیه QR(QR Factorization) ← الگوریتم پایدارتر

حل معادلات نرمال با استفاده از روش تجزیه چالسکی

$$\underbrace{A^T A}_{\text{ماتریس مثبت معین}} x = \underbrace{A^T b}_{\text{بردار}} \xrightarrow[d=A^T b]{C=A^T A} Cx = d \xrightarrow{C=LL^T} LL^T x = d$$

سپس دستگاه معادلات $LL^T x = d$ را حل می‌نماییم.

$$x^T\left(A^T A\right)x = (Ax)^T(Ax) = \begin{cases} \|Ax\|^2 \rangle 0, x \neq 0 \\ \|Ax\|^2 = 0, x = 0 \end{cases}$$

مثال ۱

برای دستگاه معادلات زیر مساله حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه چالسکی حل نمایید ،

$$Ax=b \rightarrow \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 26 \\ 4 & -8 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که $\operatorname{rank}(A|b)=4, \operatorname{rank}(A)=3$ است ، لذا سیستم ناسازگار است .

ابتدا مقدارهای $C=A^T A$ و $d=A^T b$ را به دست می‌آوریم.

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 30 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad d=\begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

سپس معادله نرمال را حل می‌نماییم،

$$A^T Ax=A^T b \rightarrow Cx=d \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس C به صورت زیر می‌باشد،

$$C = LL^T \rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

حال باید دستگاه معادلات را حل نماییم.

$$Lz = d \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ -2.6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

از این معادلات مقدار $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ به دست می‌آید و سر انجام با حل دستگاه معادلات آخر پاسخ مساله حداقل مربعات محاسبه می‌گردد،

$$L^T x = z \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

و از اینجا $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{41}{25} & \frac{4}{25} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}^T$ به دست می‌آید که همان پاسخ مساله حداقل مربعات است.

حل مساله حداقل مربعات با استفاده از متعامد سازی به روش گرام- اشمیت

سیستم ناسازگار $\rightarrow$ $A\underline{x}=\underline{b}$

اگر $\longrightarrow$ $\boxed{A\underline{\hat{x}} = \text{proj}_{R(A)}\underline{b}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\|\underline{\hat{\varepsilon}}\| = \|\underline{b} - A\underline{\hat{x}}\|}$ $\longrightarrow$ کوچک‌ترین مقدار ممکن است

تصویر متعامد بردار b بر R(A)

مراحل حل :

۱- یافتن پایه‌های R(A) از روی ماتریس A

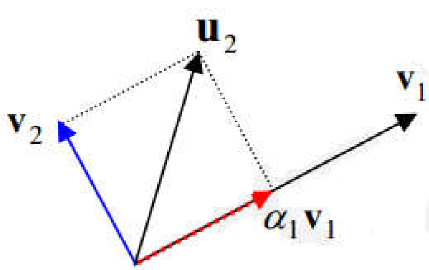
۲-تبدیل پایه‌های R(A) به پایه‌های یکا متعامد با استفاده از فرایند گرام-اشمیت

۳-محاسبه $\text{proj}_{R(A)}\underline{b}$

۴-حل معادله $A\underline{\hat{x}} = \text{proj}_{R(A)}\underline{b}$ و به دست آوردن $\underline{\hat{x}}$

ایده اساسی فرایند متعامد سازی

- دو بردار مستقل خطی و غیر متعامد u_2, v_1 را در فضای برداری V_1 در نظر بگیرید،



هدف:

$$v_2 = u_2 - \alpha_1 v_1 \Rightarrow v_1 \perp v_2$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, u_2 - \alpha_1 v_1 \rangle = 0 \longrightarrow \alpha_1 \in R \text{ به دست آوردن}$$

بنابراین ،

$$\langle v_1, u_2 \rangle - \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \rightarrow \alpha_1 = \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \Rightarrow v_1 \perp v_2$$

تعمیم فرایند متعامد سازی برای چند بردار

بردارهای متعامد $v_1, v_2, \ldots, v_m$ و بردار غیر صفر و مستقل u_{m+1} را در فضای برداری V_1 در نظر بگیرید.

هدف:
$$v_{m+1} = u_{m+1} - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_m v_m \Rightarrow v_{m+1} \perp v_1, v_2, \ldots v_m$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in R \Rightarrow \boxed{\langle v_i, v_{m+1} \rangle = \langle v_i, u_{m+1} - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_m v_m \rangle = 0}$$

$$\langle v_i, u_{m+1} \rangle - \alpha_1 \langle v_i, v_1 \rangle - \alpha_2 \langle v_i, v_2 \rangle - \ldots - \alpha_m \langle v_i, v_m \rangle = 0$$

$$\boxed{\alpha_i = \frac{\langle v_i, u_{m+1} \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle v_i, u_{m+1} \rangle}{\|v_i\|^2}}$$

$$\boxed{v_{m+1} = u_{m+1} - \frac{\langle v_1, u_{m+1} \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_{m+1} \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \ldots - \frac{\langle v_m, u_{m+1} \rangle}{\|v_m\|^2} v_m}$$

فرایند متعامد سازی گرام‌اشمیت (Gram – Schmidt Process)

اگر $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \longrightarrow$ بردارهای مستقل خطی

$$\boxed{\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&\vdots \\
v_n &= u_n - \frac{\langle v_1, u_n \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_n \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \ldots - \frac{\langle v_{n-1}, u_n \rangle}{\|v_{n-1}\|^2} v_{n-1}
\end{aligned}}$$

در نتیجه $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ بردارهای متعامد خواهند بود.

مثال ۲

بردارهای زیر را در نظر بگیرید.

$$u_1=[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]^T, u_2=[3 \quad 3 \quad 3 \quad 0]^T, u_3[2 \quad -10 \quad 0 \quad 0]^T, u_4=[-2 \quad 1 \quad -6 \quad 2]^T$$

از آنجایی که $|u_1,u_2,u_3,u_4| \neq 0$ است. این بردارها مستقل خطی می‌باشند، لذا مجموعه $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ تشکیل یک پایه برای فضای برداری R^4 می‌دهند. حال می‌خواهیم با استفاده از فرایند گرام - اشمیت این بردارهای پایه را به بردارهای یکامتعامد تبدیل نماییم.

$$v_1=u_1=[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$v_2=u_2-\frac{\langle v_1,u_2\rangle}{\|v_1\|^2}v_1=[3 \quad 3 \quad 3 \quad 0]-\frac{\langle[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0],[3 \quad 3 \quad 3 \quad 0]\rangle}{\|[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]\|^2}[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]$$

$$=[3 \quad 3 \quad 3 \quad 0]-\frac{12}{6}[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]=[3 \quad 3 \quad 3 \quad 0]+[-2 \quad -4 \quad -2 \quad 0]=[1 \quad -1 \quad 1 \quad 0]$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle v_1, u_3\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$= [2 \quad -10 \quad 0 \quad 0] - \frac{\langle [1 \quad 2 \quad 1 \quad 0], [2 \quad -10 \quad 0 \quad 0]\rangle}{\|[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]\|^2}[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0] - \frac{\langle [1 \quad -1 \quad 1 \quad 0], [2 \quad -10 \quad 0 \quad 0]\rangle}{\|[1 \quad -1 \quad 1 \quad 0]\|^2}[1 \quad -1 \quad 1 \quad 0]$$

$$= [2 \quad -10 \quad 0 \quad 0] - [3 \quad 6 \quad 3 \quad 0] + [4 \quad -4 \quad -4 \quad 0] = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]$$

$$v_4 = u_4 - \frac{\langle v_1, u_4\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_4\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle v_3, u_4\rangle}{\|v_3\|^2} v_3$$

$$= [-2 \quad 1 \quad -6 \quad 2] - \frac{\langle [1 \quad 2 \quad 1 \quad 0], [-2 \quad 1 \quad -6 \quad 2]\rangle}{\|[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0]\|^2}[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0] - \frac{\langle [1 \quad -1 \quad 1 \quad 0], [-2 \quad 1 \quad -6 \quad 2]\rangle}{\|[1 \quad -1 \quad 1 \quad 0]\|^2}[1 \quad -1 \quad 1 \quad 0]$$

$$- \frac{\langle [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0], [-2 \quad 1 \quad -6 \quad 2]\rangle}{\|[1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]\|^2}[1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]$$

$$= [-2 \quad 1 \quad -6 \quad 2] - \frac{6}{6}[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0] - \frac{9}{3}[1 \quad -1 \quad 1 \quad 0] - \frac{4}{2}[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$= [-2 \quad 1 \quad -6 \quad 2] + [1 \quad 2 \quad 1 \quad 0] + [3 \quad -3 \quad 3 \quad 0] + [-2 \quad 0 \quad 2 \quad 0] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 2]$$

به این ترتیب بردارهای به دست آمده به صورت زیر دو به دو متعامد هستند.

$$V_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}, V_2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}, V_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}, V_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

لذا مجموعه $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ بردارهای پایه متعامد برای فضای برداری R^4 می‌باشد.

با نرمالیزه کردن این بردارها می توان بردارهای پایه یکا متعامد را نیز به دست آورد ،

$$W_1=\frac{1}{\|V_1\|}V_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$$

$$W_2=\frac{1}{\|V_2\|}V_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$$

$$W_3=\frac{1}{\|V_3\|}V_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$$

$$W_4=\frac{1}{\|V_4\|}V_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

بنابراین ، مجموعه $\{W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad W_4\}$ بردارهای پایه یکا متعامد برای فضای برداری R^4 هستند.

مثال ۳ :

برای دستگاه معادلات زیر مساله حداقل مربعات را با استفاده از روش متعامد سازی گرام-اشمیت حل نمایید.

$$Ax=b \rightarrow \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 26 \\ 4 & -8 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که $\operatorname{rank}(A|b)=4, \operatorname{rank}(A)=3$ است ، لذا سیستم نا سازگار است.

- ابتدا پایه‌های R(A) را به دست می‌آوریم،

$$R(A)=\operatorname{sp}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}=\operatorname{sp}\{a_1 \quad a_2 \quad a_3\}$$

حال بردارهای پایه a_1, a_2, a_3 را با روش گرام-اشمیت به پایه‌های یکامتعامد تبدیل می‌کنیم،

$$v_1 = a_1 \qquad v_2 = a_2 - \frac{\langle v_1, a_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = a_3 - \frac{\langle v_1, a_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, a_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 = \|5\|, v_2 = \|5\|, v_3 = \|25\|$$

پس از یکامتعامد سازی داریم،

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

محاسبه تصویر بردار b بر روی فضای گستره ماتریس A یعنی ، $\mathrm{proj}_{R(A)}b$

$$\mathrm{proj}_{R(A)}b=\langle w_1,b\rangle w_1+\langle w_2,b\rangle w_2+\langle w_3,b\rangle w_3+=\begin{bmatrix}\frac{21}{25}\\ \frac{28}{25}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{4}{25}\\ \frac{-3}{25}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{4}{25}\\ \frac{-3}{25}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \frac{4}{25}\\ \frac{-3}{25}\end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات سازگار $A\hat{x}=\mathrm{proj}_{R(A)}b$ و به دست آوردن $\hat{x}$

$$A\hat{x}=\hat{b}\longrightarrow\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -6 & 26\\ 4 & -8 & -7\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \frac{4}{25}\\ \frac{-3}{25}\end{bmatrix}\rightarrow\hat{x}=\begin{bmatrix}\frac{41}{25}\\ \frac{4}{25}\\ \frac{1}{25}\end{bmatrix}$$

استفاده از دستور orth(A) در نرم افزار متلب

برای به دست آوردن پایه‌های یکا متعامد فضای گستره یک ماتریس

```
A =[1 3 2 -2;2 3 -10 1;1 3 0 -6;0 0 0 2];
orth(A)
ans =
     -0.1050   -0.4580    0.8253   -0.3133
      0.9937   -0.0217    0.0908   -0.0622
      0.0352   -0.8626   -0.3289    0.3828
      0.0178    0.2138    0.4500    0.8669
```

تجزیه QR ماتریس ها (QR Factorization)

- برای ماتریس رتبه کامل ستونی $A_{m\times n} = \left[a_1 \middle| a_2 \middle| a_3 \ldots . \middle| a_n \right]$

$$\boxed{A_{m\times n} = Q_{m\times n} R_{n\times n}}$$

ماتریس متعامد

$$Q^T Q = I$$

ماتریس بالا مثلثی

با $r_{ii} > 0$

حل معادلات نرمال با استفاده از تجزیه QR

- معادلات نرمال $A^T Ax = A^T b$ و تجزیه $A = QR$ را در نظر بگیرید ،

$$\boxed{\begin{aligned}
&A^T Ax = A^T b \\
&R^T Q^T QRx = R^T Q^T b \quad , \quad (Q^T Q = I) \\
&R^T Rx = R^T Q^T b \quad , \quad (R \to \text{nonsingular}) \\
&Rx = Q^T b
\end{aligned}}$$

مراحل حل :

۱- تجزیه QR ماتریس $A = QR : A$

۲- محاسبه بردار $y = Q^T b$

۳- حل دستگاه معادلات Rx=y با روش جایگزینی پسرو

مثال ۴

برای دستگاه معادلات زیر جواب مسئله حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه QR بدست آورید .

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

از آن جاییکه $\operatorname{rank}(A|b) = 3, \operatorname{rank}(A) = 2$ است . لذا سیستم ناسازگار است .

۱- تجزیه QR ماتریس A :

$$A = QR \rightarrow Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲- محاسبه بردار $y = Q^T b$

$$y = Q^T b \rightarrow y = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۳- حل دستگاه معادلات $Rx = y$ با روش جایگزینی پسرو :

$$Rx = y \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = 5, x_2 = 2$$

بدست آوردن ماتریس متعامد Q در تجزیه QR

$$A_{m\times n} = \left[a_1 \middle| a_2 \middle| a_3 \ldots\ldots \middle| a_n \right]$$

بردارهای پایه R(A) $\longrightarrow$ مستقل خطی $\longrightarrow$ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ $\longrightarrow$ $A_{m\times n}$ رتبه کامل ستونی

-این بردارهای پایه را به بردارهای پایه متعامد تبدیل می‌کنیم،

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= a_1 \\ v_2 &= a_2 - \frac{\langle v_1, a_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\ v_3 &= a_3 - \frac{\langle v_1, a_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, a_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n - \frac{\langle v_1, a_n \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, a_n \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \ldots - \frac{\langle v_{n-1}, a_n \rangle}{\|v_{n-1}\|^2} v_{n-1} \end{aligned}}$$

بردار های $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بردار های متعامدند.

- بردار های $a_1, a_2, \ldots.., a_n$ را بر حسب $v_1, v_2, \ldots, v_n$ به دست آورید .

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&a_1 = v_1 \\
&a_2 = v_2 + \frac{\langle v_1, a_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
&a_3 = v_3 + \frac{\langle v_1, a_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v_2, a_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&\vdots \\
&a_n = v_n + \frac{\langle v_1, a_n \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v_2, a_n \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \ldots. + \frac{\langle v_{n-1}, a_n \rangle}{\|v_{n-1}\|^2} v_{n-1}
\end{aligned}
}
$$

- فرم ماتریسی روابط به شکل زیر می‌باشد ،

$$\underbrace{\left[a_1 \middle| a_2 \middle| a_3 \ldots\ldots \middle| a_n\right]}_{\text{ماتریس A}} = \underbrace{\left[v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \ldots\ldots \middle| v_n\right]}_{\text{ماتریس با ستون های متعامد}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\langle v_1, a_2\rangle}{\|v_1\|^2} & \frac{\langle v_1, a_3\rangle}{\|v_1\|^2} & \cdots & \frac{\langle v_1, a_n\rangle}{\|v_1\|^2} \\ 0 & 1 & \frac{\langle v_2, a_3\rangle}{\|v_2\|^2} & \cdots & \frac{\langle v_2, a_n\rangle}{\|v_2\|^2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\langle v_3, a_n\rangle}{\|v_3\|^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\langle v_{n-1}, a_n\rangle}{\|v_{n-1}\|^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس بالا مثلثی}}$$

- به دست آوردن ماتریس متعامد Q و ماتریس بالا مثلثی R

$$\boxed{A_{m\times n} = Q_{m\times n} R_{n\times n}}$$

$$Q_{m\times n} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n] = \begin{bmatrix} \dfrac{v_1}{\|v_1\|} & \dfrac{v_2}{\|v_2\|} & \dfrac{v_3}{\|v_3\|} & \dots & \dfrac{v_n}{\|v_n\|} \end{bmatrix}$$

$$R_{n\times n} = \begin{bmatrix} \|v_1\| & \langle q_1, a_2 \rangle & \langle q_1, a_3 \rangle & \dots & \langle q_1, a_n \rangle \\ 0 & \|v_2\| & \langle q_2, a_3 \rangle & \dots & \langle q_2, a_n \rangle \\ 0 & 0 & \|v_3\| & \dots & \langle q_3, a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \langle q_{n-1}, a_n \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|v_n\| \end{bmatrix}$$

مثال ۵

برای ماتریس A تجزیه QR را با استفاده از فرایند گرام – اشمیت بدست آورید .

$$A=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 4 & -8\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

با توجه به این که $\operatorname{rank}(A)=2$ است ، پس ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند.

اگر ماتریس a را به صورت $A=\left[a_1 \middle| a_2\right]$ در نظر بگیریم ، ستون های آن به صورت زیر بدست می آیند ،

$$a_1=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 0\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}-6\\ -8\\ 1\end{bmatrix}$$

با اعمال فرآیند گرام – اشمیت مطابق بخش بردارهای یکا متعامد زیر بدست می آیند ،

$$v_1=a_1=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$v_2 = a_2 - \frac{\langle v_1, a_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{bmatrix} -6 & -8 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\langle \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & -8 & 1 \end{bmatrix} \rangle}{\left\| \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right\|^2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -8 & 1 \end{bmatrix} - \frac{-50}{25} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -8 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|v_1\| = 5, \|v_2\| = 1$$

بنابراین ماتریس Q به صورت $Q=[q_1 \mid q_2]$ بدست می‌آید . حال ماتریس R را بدست می‌آوریم.

$$R=\begin{bmatrix} \|v_1\| & \langle q_1,a_2\rangle \\ 0 & \|v_2\| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه QR ماتریس A به صورت زیر خواهد بود ،

$$A=QR \rightarrow A=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

استفاده از دستور qr(A) در نرم افزار متلب :

```
>> A=[3 -6;4 -8;0 1];
>> [Q,R]=qr(A,0)

Q =

   -0.6000         0
   -0.8000         0
         0   -1.0000


R =

    -5    10
     0    -1
```