فصل پنجم

مکان - ریشه

سعید عبادالهی
عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

اهداف فصل:

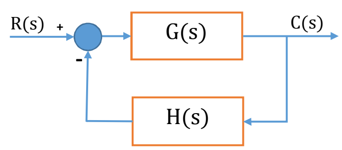
- آشنایی با ایده مکان‌ریشه
- شرایط دامنه و زاویه: دو خاصیت اساسی مکان‌ریشه
- ارائه قواعد ترسیم مکان‌ریشه برای رسم دقیق‌تر و سریع‌تر مکان‌ریشه
- آشنایی با مسیرهای ریشه و رسم آن

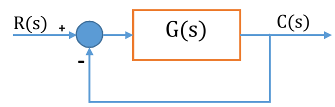
تعریف مکان-ریشه: مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه به ازای تغییر بهره

در این روش با استفاده از تابع تبدیل حلقه (یا حلقه باز با فیدبک واحد) به تعیین محل قطب‌های حلقه بسته می‌پردازیم.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \Rightarrow 1+G(s)H(s)=0$$

قطب های حلقه بسته $\Longrightarrow$ ریشه‌های معادله مشخصه





$$1+G(s)H(s) = 1+k\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} = 1+k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

صفرهای تابع تبدیل حلقه : $z_1, z_2, \ldots, z_m$

قطب‌های تابع تبدیل حلقه : $p_1, p_2, \ldots, p_m$

3

$$1+k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = 0$$

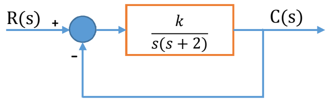
معادله مشخصه : $(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)+k(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)=0$

n مرتبه‌ی معادله مشخصه $\Rightarrow$ n ریشه دارد $\Rightarrow$ nتا قطب حلقه بسته داریم

- برای هر k، n ریشه به دست می‌آید که در صفحه s رسم می‌شود.
- می‌خواهیم با دانستن محل z_i ها و p_i ها محل این n ریشه را به ازای هر k رسم کنیم.

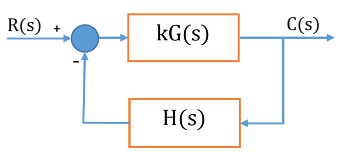
4

مثال:



5

منظور از مکان‌ریشه، مکان ریشه‌های معادله مشخصه یا قطب‌های حلقه بسته به ازای تغییرات بهره k می‌باشد:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

معادله مشخصه:

$$1 + kG(s)H(s) = 0$$

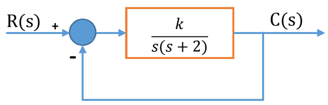
$$1 + k\frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)} = 0 \qquad n \geq m$$

$$(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n) + k(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m) = 0$$

$$s_1 = f_1(k), s_2 = f_2(k), s_3 = f_3(k), \ldots, s_n = f_n(k)$$

6

مثال:



$$1+G(s)=1+\frac{k}{s(s+2)}=0$$

$$\Rightarrow s^2+2s+k=0$$

$$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}$$

$$s_{1,2}=\begin{cases}-1\pm j\sqrt{k-1} & k>1 \quad \text{میرای شدید}\\ -1 & k=1 \quad \text{میرای بحرانی}\\ -1\pm j\sqrt{1-k} & k<1 \quad \text{میرای ضعیف}\end{cases}$$

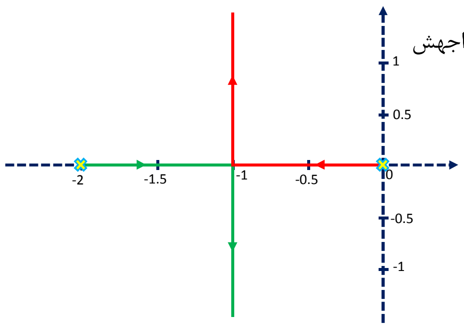
اگر k>1 در این صورت داریم :

الف) افزایش k ← افزایش θ ← کاهش ξ ← افزایش فراجهش

ب) افزایش k← افزایش فرکانس طبیعی میرا نشده ω_n

ج) افزایش k←افزایش فرکانس طبیعی میرا شده ω_d

د) افزایش k← ثابت ماندن زمان نشست t_s



7

ویژگی‌های نقاط روی مکان ریشه:

$$1+k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}=1+k\frac{N(s)}{D(s)}=1+kL(s)=0$$

$$\Rightarrow L(s)=-\frac{1}{k} \qquad k\in\mathbb{R} \quad ,s=\sigma+j\omega\ \in\mathbb{R}^c\rightarrow L(s)\in\mathbb{R}^c$$

با توجه به این معادله ۲ شرط زاویه و اندازه به صورت زیر بدست می‌آید

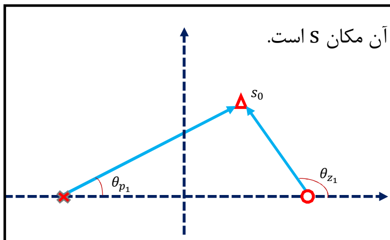
شرط اندازه یا دامنه : $|L(s)|=\left|\frac{1}{k}\right|\rightarrow\frac{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s-p_j|}=\frac{1}{k}$

شرط زاویه : $\measuredangle L(s)=\sum_{i=1}^{m}\measuredangle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\measuredangle(s-p_j)$

$$\measuredangle L(s)=\begin{cases}(2N+1)\pi & k\geq 0\\ (2N)\pi & k\leq 0\end{cases}\qquad N\in\mathbb{Z}$$

8

هر عبارت مانند (s-z) یک بردار است که ابتدای آن مکان صفر z و پایان آن مکان s است.



$$\measuredangle(s_0 - z_1) = \theta_{z_1}$$

$$\measuredangle(s_0 - p_1) = \theta_{p_1}$$

در این شکل برای k>0 بایستی

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} = 180^\circ$$

✓ در این شکل برای اینکه شرط فوق برقرار گردد بایستی s روی محور σ باشد.

شرط اندازه : $|k| = \dfrac{\text{حاصل‌ضرب اندازه بردارهای واصل از قطب‌ها به ریشه مورد نظر}}{\text{حاصل‌ضرب اندازه بردارهای واصل از صفرها به ریشه مورد نظر}}$

مجموع زوایای بردارهای واصل از صفرها به ریشه‌ی مورد نظر +

مجموع زوایای بردارهای واصل از قطب‌ها به ریشه‌ی مورد نظر −

$$= \begin{cases} (2N+1)\pi & k \geq 0 \\ (2N)\pi & k \leq 0 \end{cases}$$

✓ هر sای که در شرط زاویه صدق کند حتماً در مکان ریشه قرار دارد.

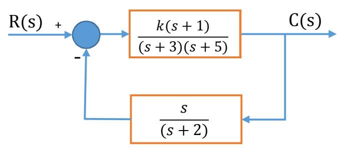
✓ شرط اندازه در بدست آوردن بهره‌ی متناظر مکان به کار می‌رود.

قواعد ترسیم مکان ریشه:

1) تعداد شاخه‌های مکان ریشه
2) مکان ریشه بر روی محور حقیقی
3) نقاط شروع و پایان مکان
4) مجانب‌های مکان ریشه
5) نقطه تلاقی مجانب‌ها با محور حقیقی
6) نقاط شکست بر روی مکان ریشه
7) زاویه‌ی خروج از قطب‌های مختلط و زاویه‌ی ورود به صفرهای مختلط
8) نقاط تلاقی مکان ریشه با محور موهومی
9) محاسبه‌ی k بر روی مکان ریشه
10) رسم مکان ریشه وقتی k به صورت یک بهره ضرب شونده در تابع تبدیل ظاهر نشود

۱- تعداد شاخه‌های مکان ریشه برابر است با تعداد ریشه‌های معادله مشخصه

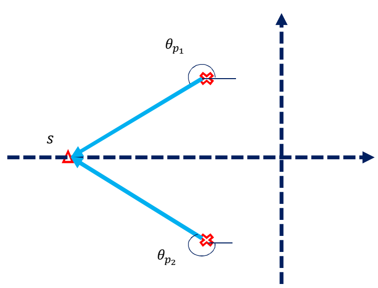
مثال:



11

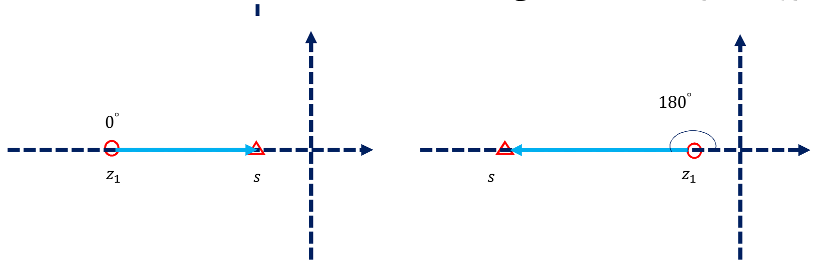
۲- مکان ریشه بر روی محور حقیقی

الف) زاویه با صفرها یا قطب‌های مختلط



$$(\theta_{p1} + \theta_{p2}) = 360^{\circ}$$

ب) زاویه با صفرها یا قطب‌های حقیقی



- به ازای هر قطب یا صفر در سمت راست $180°$ در شرط زاویه لحاظ می‌گردد.
- صفر و قطب‌های سمت چپ در شرط زاویه بی‌تاثیر خواهند بود.

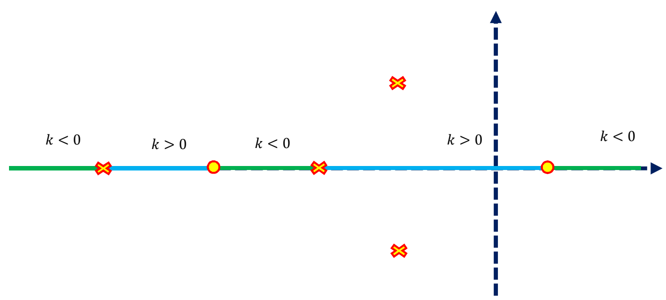
12

$$\begin{cases} k>0 & \measuredangle L(s) = (2N+1)\pi \\ k<0 & \measuredangle L(s) = 2N\pi \end{cases}$$

⟸ اگر تعداد قطب‌ها و صفرهای سمت راست فرد باشد

⟸ اگر تعداد قطب‌ها و صفرهای سمت راست زوج باشد

بنابراین همه‌ی محور حقیقی جزء مکان ریشه است (قسمتی برای k>0 و قسمتی برای k<0)



13

۳- نقاط شروع و پایان مکان

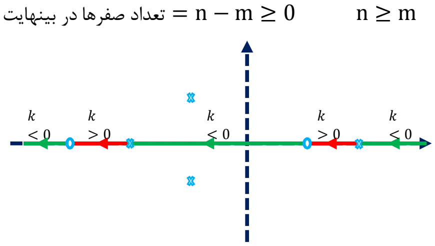
$$\begin{cases} if\ k \xrightarrow{\text{میل کند}} 0 \xRightarrow{\text{در این صورت}} s \xrightarrow{\text{میل می کند}} p_j \\ if\ k \xrightarrow{\text{میل کند}} \infty \xRightarrow{\text{در این صورت}} s \xrightarrow{\text{میل می کند}} z_i \end{cases}$$

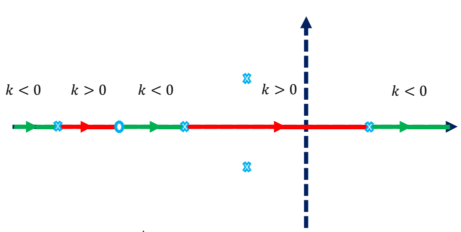
برای k>0 قطب‌ها محل شروع مکان و صفرها محل پایان آن است.

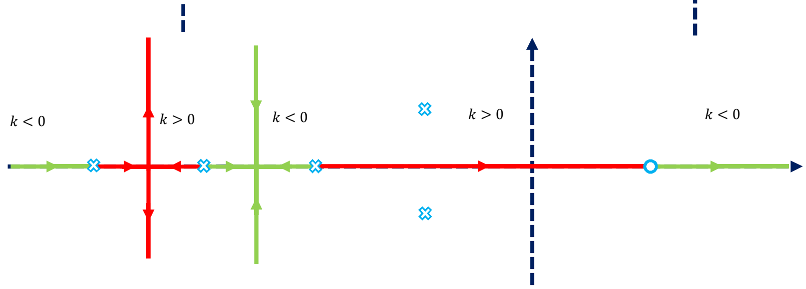
برای k<0 صفرها محل شروع مکان و قطب‌ها محل پایان آن است.

تعداد قطب‌ها و صفرها با در نظر گرفتن صفرها در بی‌نهایت برابر هستند.

$n \geq m$ تعداد صفرها در بینهایت $= n - m \geq 0$







14

۴- مجانب‌های مکان ریشه برای $s \longrightarrow \infty$

$$\lim_{s\to\infty} kL(s) = \lim_{s\to\infty} k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \longrightarrow \frac{k}{s^{n-m}} = -1$$

شرط اندازه : $|k| = |s^{n-m}| \Rightarrow \begin{cases} n > m & s\to\infty \ \Rightarrow k\to\infty \\ n = m & s\to\infty \ \Rightarrow k = 1 \end{cases}$

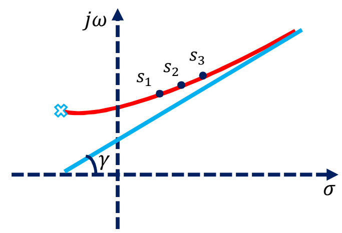
شرط زاویه : $\begin{array}{l} s^{n-m} = -k \\ \measuredangle -k = \measuredangle s^{n-m} = (n-m)\measuredangle s \end{array}$

زاویه‌ی مجانب‌های مکان (n>m):

در حالت کلی (n-m) مجانب در مکان ریشه وجود دارد (معادل با صفرهای در بینهایت.)

$$\measuredangle s = \begin{cases} \dfrac{(2N+1)\pi}{n-m} & k > 0 \\ \dfrac{2N\pi}{n-m} & k < 0 \end{cases}$$

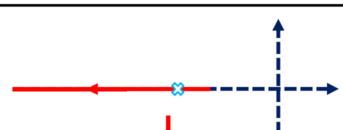
$\gamma = \measuredangle s_1 = \measuredangle s_2 = \measuredangle s_3$



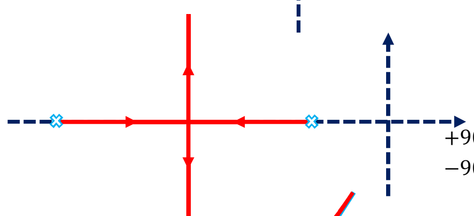
15

برای $k>0$:

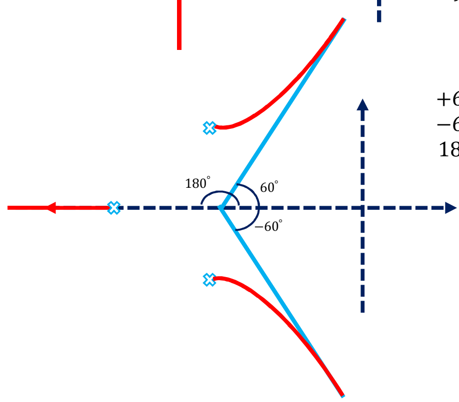
برای $n-m=1 \longrightarrow \dfrac{(2N+1)\pi}{n-m} = \dfrac{\pi}{1} = 180^\circ$



برای $n-m=2 \longrightarrow \dfrac{(2N+1)\pi}{n-m} = \dfrac{(2N+1)\pi}{2} = \left.\begin{array}{l}+90^\circ \\ -90^\circ\end{array}\right\}$



برای $n-m=3 \longrightarrow \dfrac{(2N+1)\pi}{n-m} = \dfrac{(2N+1)\pi}{3} = \left.\begin{array}{l}+60^\circ \\ -60^\circ \\ 180^\circ\end{array}\right\}$



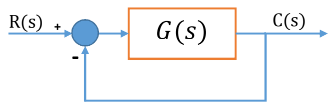
16

۵- نقطه تلاقی مجانب‌ها با محور حقیقی

$$\sigma_0 = \frac{\sum (L(s)\text{قطب های}) - \sum (L(s)\text{صفر های})}{n - m}$$

ثابت می‌شود محل تلاقی مجانب‌ها همواره روی محور حقیقی است.

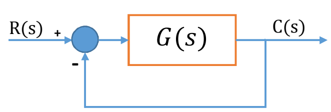
در رابطه ی فوق قسمت موهومی قطب‌ها یا صفرهای مختلط مزدوج با هم ساده می‌شوند



مثال: $G(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s^2+4s+8)} \quad , \quad k > 0$

17

مثال:

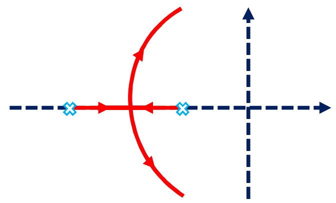


$$1 + kG(s) = 1 + \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2} \quad , k \geq 0$$

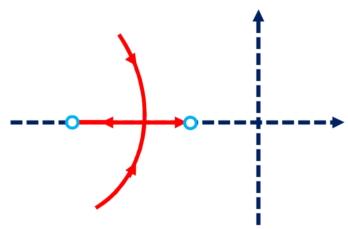
18

نقاط شکست شامل یکی از سه مورد زیر است:

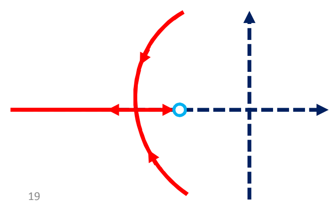
1) در شاخه بین دو قطب



2) در شاخه بین دو صفر



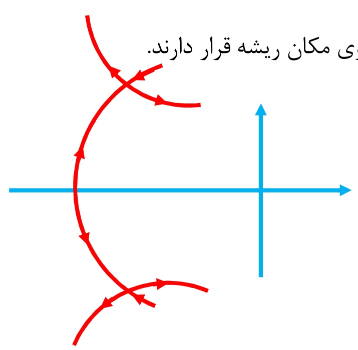
3) در شاخه بین یک صفر محدود و یک صفر در ∞



19

چند نکته:

- نقاط شکست لزوماً روی محور حقیقی نیستند ولی همواره بر روی مکان ریشه قرار دارند.
- مکان ریشه همواره نسبت به محور حقیقی متقارن است.
- در نقطه‌ی شکست زاویه ی بین دو منحنی:
- دو مسیر در نقطه شکست $\longleftarrow$ زاویه تلاقی 90°
- سه مسیر در نقطه شکست $\longleftarrow$ زاویه تلاقی 60°
- چهار مسیر در نقطه شکست $\longleftarrow$ زاویه تلاقی 45°



بدست آوردن نقاط شکست:

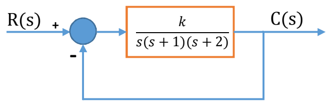
$$1 + k_1 L(s) = (s - s_1)^2 p(s) \Rightarrow$$

$$k_1 \frac{dL(s)}{ds} = 2(s - s_1)p(s) + (s - s_1)^2 \frac{dp(s)}{ds}$$

$$= (s - s_1)\left[2p(s) + (s - s_1)\frac{dp(s)}{ds}\right] \qquad \frac{dL(s)}{ds} = 0 \longrightarrow (n-1) \text{ ریشه دارد}$$

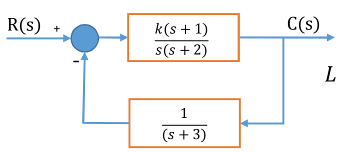
- اما تمامی این (n-1) ریشه جزء نقاط شکست نیستند. بایستی توجه کرد که نقاط شکست خود جزء مکان ریشه هستند.

20



$$L(s) = G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} \quad k > 0$$

مثال:

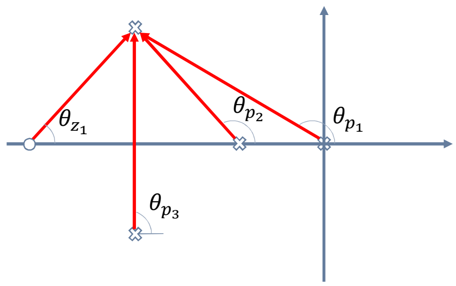


$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad k > 0$$

مثال:

۷- زاویه‌ی خروج از قطب‌های مختلط و زاویه‌ی ورود به صفرهای مختلط:

نقطه‌ای از مکان در نزدیکی صفر یا قطب مختلط در نظر گرفته و شرط زاویه را برای آن می‌نویسیم.

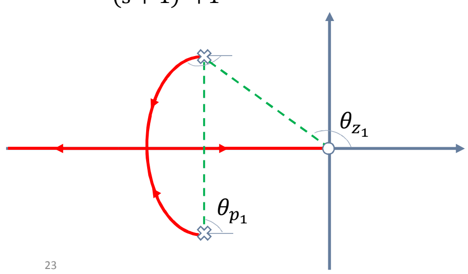


$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3} + \theta_{p_4}) = 180^\circ$$

$$\theta_{p_4} = \theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) - 180^\circ$$

مثال: G(s) را با فیدبک واحد فرض کنید:

$$G(s) = \frac{ks}{(s+1)^2+1} \quad ,k \geq 0$$



$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) = 180^\circ$$

$$\theta_{p_2} = \theta_{z_1} - \theta_{p_1} - 180^\circ =$$

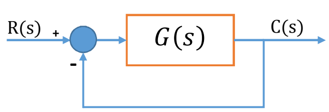
$$135 - 90 - 180 = -135^\circ = 225^\circ$$

23

۸- نقاط تلاقی مکان ریشه با محور موهومی:

این نقاط، نقاط ورود به محدوده ناپایداری است که می‌تواند توسط روش روث-هرویتز بدست آید.

مثال:



$$G(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)(s+3)} \quad ,k > 0$$

24

معیار روث-هرویتز

معادله مشخصه : $1 + G(s) = 0$

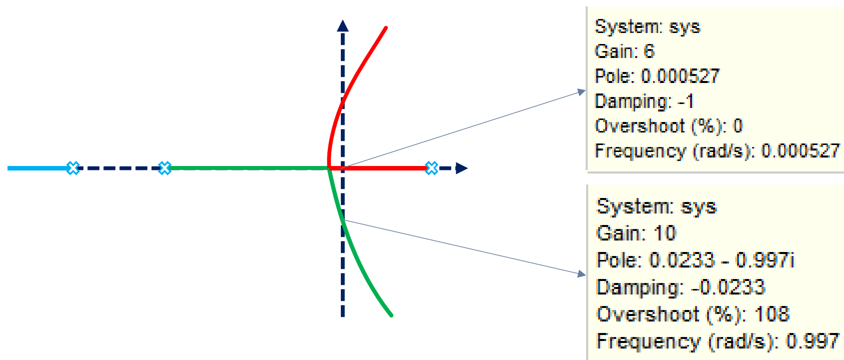
$$k + (s-1)(s+2)(s+3) = 0$$

$$\Longrightarrow s^3 + 4s^2 + s + (k-6) = 0$$

s^3	1	1
s^2	4	$k-6$
s^1	$10-k$	0
s^0	$k-6$	0

$$\begin{matrix} 10-k>0 \\ k-6>0 \end{matrix} \Rightarrow 6<k<10$$

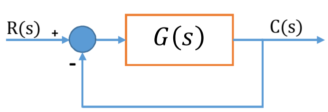
مکان به ازای k=0 از قطب شروع شده و تا ∞ ادامه می‌یابد و در k=6 برای اولین بار و در k=10 برای دومین بار محور را قطع می‌کند.



25

۹- محاسبه‌ی k بر روی مکان ریشه:

$$1 + kL(s) = 0 \rightarrow |L(s)| = \left|-\frac{1}{k}\right| = \frac{|s-z_1||s-z_2|\ldots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\ldots|s-p_n|} = \frac{1}{|k|}$$

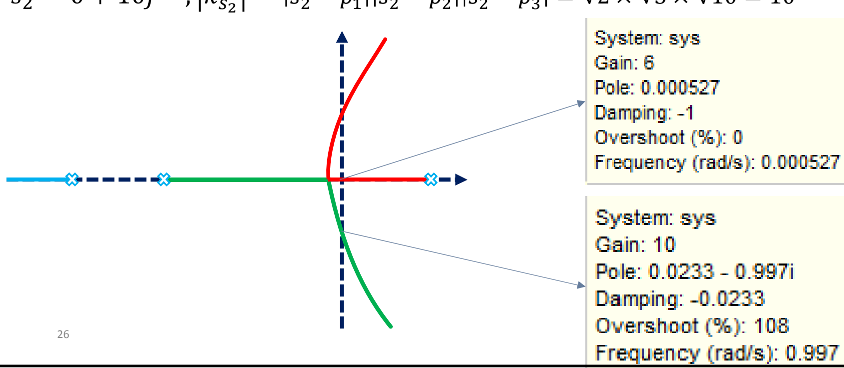


در مثال قبل برای مبداء و محل تلاقی با محور $j\omega$ می‌خواهیم k را به دست آوریم:

$$G(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)(s+3)} \quad , k>0$$

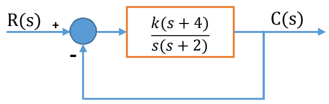
$$s_1 = 0 + j0 \quad , |k_{s_1}| = |s_1 - p_1||s_1 - p_2||s_1 - p_3| = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$s_2 = 0 + 10j \quad , |k_{s_2}| = |s_2 - p_1||s_2 - p_2||s_2 - p_3| = \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} = 10$$

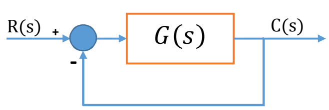


26

مثال:

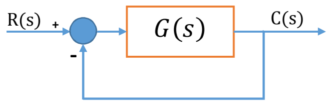


مثال:



$$G(s) = k\frac{(s+1)}{s^2(s+2)} \quad k > 0$$

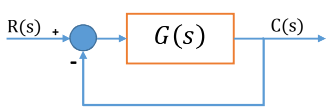
مثال:



$$G(s) = \frac{k}{s(s^2 + 12s + 45)} \qquad k > 0$$

29

مثال:

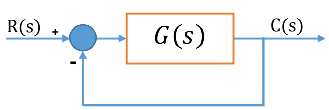


$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)} \qquad k > 0$$

30

31

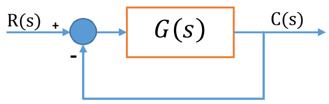
مثال:



$$G(s) = \frac{k(s+1.5)}{s(s+1)(s+10)} \qquad k > 0$$

32

مثال:



$$G(s) = \frac{k}{s(s+4)(s^2+4s+20)} \quad k > 0$$

33

معادله مشخصه :

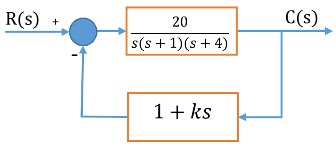
$$\Delta(s) = s(s+4)(s^2+4s+20) = s^4 + 8s^3 + 36s^2 + 80s + k = 0$$

34

۱۰- رسم مکان‌ریشه وقتی که پارامتر k به صورت یک بهره ضرب شونده در تابع تبدیل ظاهر نشده است.

در این صورت بایستی معادله مشخصه را به صورت 1+kF(s)=0 تبدیل کنیم.

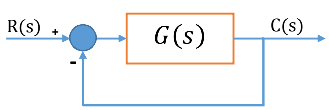
مثال:



- ✓ بایستی ضریب s در توابع تبدیلی که می‌خواهیم مکان ریشه را برای آن رسم کنیم برابر ۱ شود.
- ✓ در این مثال مکان-ریشه را برای $k' = 20k$ رسم می کنیم و اگر مقدار k را بخواهیم از رابطه‌ی مربوطه مقدار آن را حساب می‌کنیم.

35

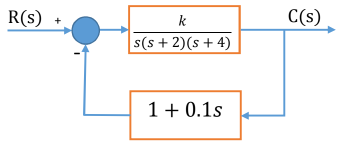
مثال:



$$G(s) = \frac{ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} \quad k > 0$$

36

مثال مهم:



$$1+G(s)H(s)=0$$

$$\Rightarrow 1+\frac{(1+0.1s)k}{s(s+2)(s+4)}=0$$

37

معادله مشخصه : $s^3+6s^2+8s+\acute{k}s+10\acute{k}=0$

38

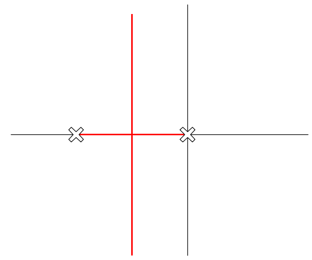
سوال ؟

مقدار k را در مثال قبل چنان به دست آورید که ریشه های غالب دارای $\xi = 0.5$ باشد.

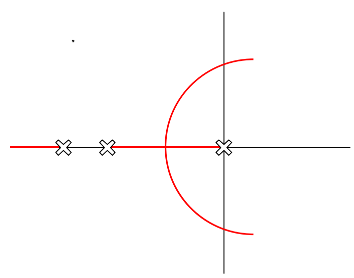
39

اثر اضافه کردن صفر و قطب به مکان ریشه

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$



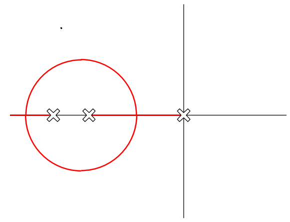
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)}$$



40

• اثر اضافه کردن قطب حلقه (باز) در شکل مکان ریشه باعث کشیده شدن مکان ریشه به سمت نیم صفحه راست و در نتیجه ناپایدار شدن سیستم می‌شود.

$$G(s)H(s) = \frac{s+b}{s(s+a)}$$



اضافه کردن صفر به تابع تبدیل حلقه، باعث کشیدن مکان به سوی نیم صفحه چپ و بنابراین پایدارتر کردن سیستم می‌شود.

41

• اثر جابه جا کردن قطب در مکان ریشه

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+a)}$$

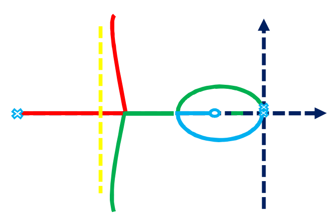
If a =10

$$\sigma_0 = \frac{-10+1}{2} = -4.5$$

$$G(s)H\dot{(s)} = 0$$

$$2s^2 + (a+3)s + 2a = 0$$

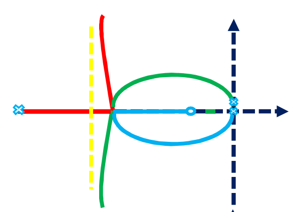
$$s_{1,2} = -2.5, -4$$



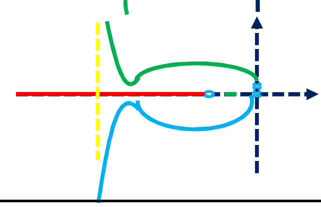
a=9

$s_{1,2}$=-3

σ_0=-4



a=8



42

مثال: k را طوری طرح کنید که خطای حالت ماندگار به ورودی شیب کمتر از ۰.۱ شود.

$G(s)=\frac{k}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$ (تابع تبدیل حلقه باز, τ_1=0.1 , τ_2=0.2)

43

پایان

44