بسم الله الرحمن الرحیم

جبر خطی کاربردی

درس ۱:مقدمه ای بر بردارها و ماتریس ها

گروه سیستم و کنترل – ۱۳۹۶

مدرس : دکتر عباداللهی

جبر خطی کاربردی

جبر خطی شاخه ای از ریاضیات است که کاربردهای وسیعی در علوم تجربی، علوم اجتماعی و مهندسی دارد و کانون توجه آن بیشتر بر موارد زیر است،

– بردارها و ماتریس ها

– دستگاه معادلات خطی

– فضاهای برداری

– مقادیر ویژه و مقادیر منفرد

برخی از زمینه‌های کاربردی جبر خطی

– تئوری کدگذاری و تشخیص خطا

– رمز نگاری

– پردازش تصویر وفشرده سازی داده های تصویری

–شبکه ترافیک

– برنامه ریزی

– مدلسازی سیستم های فیزیکی (مدارهای الکتریکی، مکانیکی، حرارتی و ...)

– چهره شناسی و تشخیص هویت

– تخمین و شناسایی داده ها

– ژنتیک، مسائل اجتماعی، اقتصادی و ...

بردارها و ماتریس ها

آرایه ای از داده های مرتب شده را بردار می‌گویند.

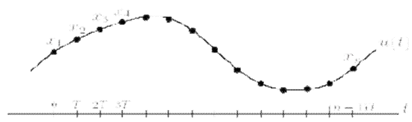
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

اگر داده های به هم مرتبط را با ابعاد $m\times n$ ذخیره نماییم ماتریس به‌دست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عناصر یک بردار یا ماتریس می‌تواند اطلاعاتی به شرح زیر باشد،

- داده های آماری یک سیستم اجتماعی
- پارامترهای توصیف کننده یک سیستم فیزیکی



داده های نمونه برداری شده یک سیگنال الکتریکی

سیگنال $u(t)$ پس از نمونه برداری با دوره تناوب T می‌توان به صورت یک بردار n تایی نمایش داد،

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(0)\\u(T)\\\vdots\\u(n-1)T\end{bmatrix}$$

قوانین و تعاریف حاکم بر بردارها و ماتریس ها

-جمع و تفریق بردار و ماتریس

-ضرب اسکالر در بردارها و ماتریس ها

-ضرب داخلی بردارها و ضرب ماتریس ها

-دترمینان ماتریس ها

-محاسبه ماتریس معکوس

-ترکیب خطی بردارها

-نُرم بردارها و ماتریس ها

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

جمع و تفریق بردار و ماتریس

$$x \pm y = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال

$$x = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2j \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ -j \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x + y = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 - j \\ 1 + 2j \end{bmatrix}$$

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

ضرب اسکالر در بردار و ماتریس

$$k\underline{x} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix} \qquad kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & 10 & 4 \\ -2 & 0 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

تعاریف حاکم بر بردارها و ماتریس ها

ترکیب خطی بردار ها (Linear Combination)

بردار u یک ترکیب خطی از بردارهای $v_1, v_2, \ldots, v_n$ می‌باشد، اگر

$$\exists c_1, c_2, \ldots, c_n \Rightarrow \boxed{u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n}$$

مثال

$$u = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow u =$$

مثال

در هر یک از سه حالت زیر بررسی نمایید، که آیا می‌توان بردار $\underline{u}$ را به صورت ترکیب خطی از بردارهای $\underline{v}_1$ و $\underline{v}_2$ نوشت. برای این منظور در هر سه حالت باید معادله $\underline{u} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2$ را نوشته و حل کرد.

$$\boxed{1.\ u = (-12,20),\ v_1 = (-1,2),\ v_2 = (4,-6)}$$

معادله $u = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2$ به صورت زیر خواهد شد:

$$(-12,20) = c_1(-1,2) + c_2\,(4,-6) \rightarrow \begin{matrix} -c_1 + 4c_2 = -12 \\ 2c_1 - 6c_2 = 20 \end{matrix} \rightarrow$$

بنابراین بردار $\underline{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\underline{v}_1$ و $\underline{v}_2$ می باشد و می‌توان آن را به صورت $\underline{u} = 4\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2$ نوشت.

$$\boxed{2.\ u = (4,20), v_1 = (2,10), v_2 = (-3,-15)}$$

معادلات به این شکل می‌باشند،

$$(4,20) = c_1(2,10) + c_2(-3,-15) \rightarrow \begin{matrix} 2c_1 - 3c_2 = 4 \\ 10c_1 - 15c_2 = 20 \end{matrix} \rightarrow c_1 = 2 + \frac{3}{2} c_2$$

در این حالت نیز بردار u یک ترکیب خطی از بردارهای v_1 و v_2 می باشد، ولی بر خلاف حالت قبل فقط یک جواب وجود ندارد و بی‌نهایت ترکیب خطی مختلف می‌توان به‌دست آورد.

$\boxed{3.\, u = (1,-4), v_1 = (2,10), v_2 = (-3,-15)}$

در این حالت معادلات به شکل زیر خواهند بود،

$$(1,-4) = c_1(2,10) + c_2(-3,-15) \rightarrow$$

همانطور که از معادلات بالا مشاهده می شود، جوابی برای c_1 و c_2 وجود ندارد. بنابراین بردار u را نمی‌توان به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای v_1 و v_2 نوشت.

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

ضرب داخلی بردارها

ضرب داخلی یک بردار، قاعده ای است که به دو بردار u و v یک کمیت اسکالر را نسبت می‌دهد،

ضرب داخلی دو بردار $\boxed{\langle u,v\rangle}$ ← برای بردار v و u

شرایط زیر را دارا باشد،

$$1.\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

$$2.\langle cu,v\rangle = \bar{c}\langle u,v\rangle = \langle u,\bar{c}v\rangle$$

$$3.\langle u+v,w+s\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle + \langle u,s\rangle + \langle v,s\rangle$$

$$4.\forall u \neq 0 \rightarrow \langle u,u\rangle > 0$$

تعریف ضرب داخلی

ضرب داخلی دو بردار مختلط u و v به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$< u,v >= \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \cdots + \bar{u}_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i$$

مثال

ضرب داخلی بردارهای u و v را به‌دست آورید.

$u = [2 + j3, 3 + j, 4], v = [4 - j6, 3, 3 + j2]$

$< u,v > = (\overline{2 + j3})(4 - j6) + (\overline{3 + j})(3) + (\bar{4})(3 + j2)$

$= (2 - j3)(4 - j6) + (3 - j)(3) + (4)(3 + j2)$

$= (-10 - j24) + (9 - j3) + (12 + j8)$

$= 11 - j19$

محاسبه در نرم افزار MATLAB برای دو بردار ستونی : u' *v

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

ضرب ماتریس ها:

فرض کنید $B_{m\times r} = [b_{jk}]$ و $A = [a_{ij}]$ باشد،

$$A_{m\times n} \times B_{m\times r} = C_{n\times r} = [c_{ik}] \rightarrow \boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (2\times1)+(4\times2)+(3\times0)+(-1\times3) & (2\times4)+(4\times3)+(3\times2)+(-1\times1) \\ (3\times1)+(1\times2)+(5\times0)+(2\times3) & (3\times4)+(1\times3)+(5\times-2)+(2\times1) \\ (-1\times1)+(0\times2)+(7\times0)+(6\times3) & (-1\times4)+(0\times3)+(7-2)+(6\times1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 11 & 7 \\ 17 & -12 \end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب BA امکان پذیر نیست.

قوانین حاکم بر بردارها و ماتریس ها

نُرم یک بردار (vector Norm):

نرم یک بردار به تعبیری اندازه یا طول آن بردار می‌باشد،

نرم بردار: $\boxed{||u||}$ ←برای هر بردار u

شرایط زیر را دارا باشد،

1. $\|u\| = 0, if\ u = 0$

2. $\|ku\| = |k|\|u\|$

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \rightarrow$ نامساوی مثلثاتی

یک نرم کاربردی ← نرم اقلیدسی بردار

نرم اقلیدسی یک بردار به صورت ریشه دوم منفی <u,u> تعریف می‌شود،

$$\boxed{\|u\| = < u, u >^{1/2} = (u * u)^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2}}$$

مثال

نرم بردارهای u و v را به‌دست آورید.

$$u = [j2, -1, 3 + j], \qquad v = [4, -1, 2, 0]$$

با توجه به رابطه بالا داریم،

$$\|u\| = \sqrt{|j2|^2 + |-1|^2 + |3 + j|^2} = \sqrt{4 + 1 + 10} = \sqrt{15}$$

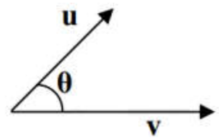
$$\|v\| = \sqrt{|4|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |0|^2} = \sqrt{16 + 1 + 4 + 0} = \sqrt{21}$$

محاسبه در نرم افزار MATLAB

norm(x) ←محاسبه نرم اقلیدسی← Sqrt(x'*x)

تعبیر هندسی ضرب داخلی و نرم بردارها

ضرب داخلی دو بردار عددی است که به اندازه بردارها و زاویه بین آنها مربوط است،

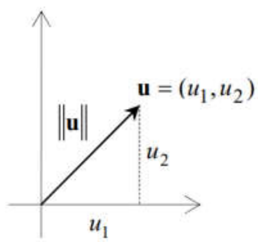


$$< u, v >= \|u\| \ \|v\| \cos\theta$$

if <u,v>=0 → متعامد (orthogonal) and if $\|u\| = \|v\| = 1$ → یکامتعامد (orthonormal)

کمیت $||u||^2$ به صورت توان دوم فاصله مبدأ تا نقطه نشان داده شده با بردار u تعبیر می‌گردد.

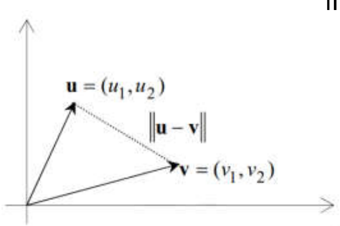
$$\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2$$



تعبیر هندسی نرم بردارها

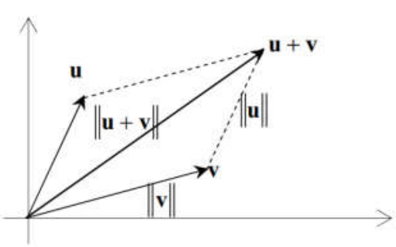
برای دو بردار حقیقی u و v فاصله بین دو بردار به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\|u - v\| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2}$$



تعبیر هندسی برای نامساوی مثلثاتی به صورت زیر می‌باشد،

$$\|u + v\| \leq \ \|u\| + \|v\|$$



مثال

بردارهای زیر را در نظر بگیرید،

$$S:\{v_1=[2,0,-1],\ v_2=[0,-1,0],\ v_3=[2,0,4]\}$$

الف) متعامد و یکامتعامد بودن بردارهای v_1, v_2, v_3 را بررسی کنید.

برای متعامد بودن ضرب داخلی دو به دوی این بردارها را محاسبه می کنیم،

$$<v_1,v_2> = (2)(0)+ (0)(-1) +(-1)(0)=0$$

$$<v_1,v_3>= (2)(2)+(0)(0)+ (-1)(4)=0$$

$$<v_2,v_3>= (0)(2)+(-1)(0)+(0)(4)$$

بنابراین مجموعه S یک مجموعه متعامد می‌باشد. برای بررسی یکامتعامد بودن، نرم بردارها را محاسبه می کنیم.

$$\|v_1\| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{(0)^2+(-1)^2+(0)^2}= 1$$

$$\|v_3\| = \sqrt{(2)^2+(0)^2+(4)^2}= 2\sqrt{5}$$

از آنجایی که نرم تمامی بردارها برابر یک نمی‌باشد، پس مجموعه S یک مجموعه یکامتعامد نیست.

ب) بردارهای v_1, v_2, v_3 را به بردارهای یکامتعامد تبدیل کنید.

برای این منظور باید بردارها را به نحوی تبدیل کنیم که نرم آنها برابر یک گردد. اگر هر یک از بردارها را به نرم خودش تقسیم کنیم چنین هدفی به دست می‌آید،

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{1}(0,-1,0) = (0,-1,0)$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(2,0,4) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

حال می‌توان به راحتی نشان داد که بردارهای جدید u_1, u_2 , u_3 یکامتعامد هستند،

$$< u_1, u_2 > = < u_1, u_3 > = < u_2, u_3 > = 0$$

$$\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$$

نرم ماتریس ها(Matrix Norm)

نرم یک ماتریس حداکثر بزرگنمایی یا بهره آن را تحت چنین تبدیلی نشان می‌دهد،

$$X \rightarrow \boxed{A} \rightarrow Ax$$

نسبت ||Ax||/||x|| را می‌توان به عنوان بهره یا بزرگنمایی اپراتور y=f(x)=Ax در جهت بردار x تعریف کرد،

$$gain(x) = \frac{||Ax||}{||x||}$$

نرم یک ماتریس به صورت بزرگترین بهره قابل دسترسی تعریف می گردد.

$$\boxed{||A|| = max_{x\neq 0}gain(x) = max_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||}}$$

خواص نرم ماتریس ها

نرم یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای خواص زیر است،

$$1.\ ||A|| = ||A^*||, \qquad ||A|| = ||A^T||$$

$$2.\ ||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$$

$$3.\ ||AB|| \leq ||A||\ ||B||$$

$$4.\ ||Ax|| \leq ||A||\ ||x||$$

$$5.\ ||kA|| = |k|\ ||A||$$

در نرم افزار MATLAB دستور norm(A) برای محاسبه نرم ماتریس وجود دارد.

به مثال های زیر توجه نمایید،

$$1. A = 0 \rightarrow Ax = 0 \rightarrow \|A\| = max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = max_{x\neq 0} \frac{0}{\|x\|} = 0$$

$$2. A = I \rightarrow Ax = x \rightarrow \|A\| = max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = max_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow Ax = [x_2, -x_3, x_1]$$

$$\|Ax\| = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2} \rightarrow \|A\| = 1$$

$$4. A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \rightarrow Ax = [a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n]$$

$$\|A\| = max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = max_{x\neq 00} \frac{\sqrt{a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + \cdots a_n^2x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_1^2 + \cdots + x_1^2}} \ \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$$

برای اثبات فرض کنید داریم،

$$a_1^2 \geq a_2^2 \geq \dots \geq a_n^2 \Rightarrow |a_1| = max_i\{|a_i|$$

از آنجایی که $x\neq 0$ است می‌توان نوشت،

$$a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + \cdots + a_n^2x_n^2 \leq a_1^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

$$\sqrt{a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + \cdots + a_n^2x_n^2} \leq |a_1|\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

$$\frac{\sqrt{a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + \cdots + a_n^2x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \leq |a_1|$$

بنابراین داریم،

$$\max_{x\neq 0}\{\frac{\sqrt{a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + \cdots + a_n^2x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}$$

دترمینان ماتریس ها

برای هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ عددی را به عنوان دترمینان (Determinant) می‌توان نسبت داد،

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

A_{ij} یک ماتریس مربعی $(n-1)\times(n-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون jام در ماتریس $A_{n\times n}$ به دست می‌آید.

دستور det(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

خواص دترمینان

۱. با تعویض جای دو سطر (یا دو ستون) دترمینان، تنها علامت دترمینان تغییر می‌کند.

۲. اگر یک سطر (یا یک ستون) دترمینان را با یک سطر (یا ستون) دیگر جمع کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

۳. اگر یک ماتریس دو سطر (دو ستون) یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است.

۴. برای دو ماتریس مربعی $B_{n\times n}$ و $A_{n\times n}$ داریم،

$$|AB| = |A||B| = |BA|$$

۵. اگر در یک ماتریس یک سطر (یا یک ستون) در یک عدد اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k ضرب می‌شود.

۶. اگر تمامی درایه های یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در عدد اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k^n ضرب خواهد شد.

$$|KA| = k^n|A|$$

ماتریس های منفرد، غیر منفرد و ماتریس معکوس

برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$:

$A_{n\times n}$ غیر منفرد (Nonsingular) یا ناویژه → $\boxed{AB = BA = I}$ → $\exists\, B_{n\times n}$

$\boxed{A^{-1}}$

ماتریس معکوس (Inverse Matrix)

اگر A^{-1} وجود نداشته باشد ماتریس A را منفرد (Singular) یا ویژه گویند.

ماتریس معکوس A^{-1} زمانی وجود دارد که $|A|\neq 0$ باشد.

دستور inv (A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

نکته ۱:

اگر $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ غیرمنفرد $\Rightarrow AB$ غیر منفرد $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

نکته۲: اگر $k\neq 0$ و $|A|\neq 0$ باشد،

$$\boxed{(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, (A^{-1})^{-1} = A}$$

نکته ۳: دترمینان ماتریس معکوس A^{-1} همان معکوس دترمینان A است،

$$\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \rightarrow \quad |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1}$$

نکته۴: اگر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ غیر منفرد باشد،

$$\boxed{Ax = b \rightarrow x = A^{-1}b}$$

نحوه محاسبه معکوس ماتریس های متداول

برای یک ماتریس منفرد ۲×۲،

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\frac{1}{|A|}=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{12}\\ (-1)^{2+1}a_{21} & (-1)^{2+2}a_{11}\end{bmatrix}$$

Adj(A) همان ماتریس الحاقی (Adjoint) است، که هر عنصر ترانهاده آن از دترمینان ماتریس متناظر با حذف سطر iام و ستون jام به دست آمده است.

مثال

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

برای یک ماتریس غیر منفرد ۳×۳،

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{23}\\ a_{31} & a_{23}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow |A|=1(0-9)-1(0+6)+2(9-0)=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-9 & 6 & 3\\ -6 & 4 & 3\\ 9 & -5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ -2 & 4/3 & 1\\ 3 & -5/3 & -1\end{bmatrix}$$

روابط کاربردی از ماتریس های بلوکی و دترمینان ها

- برای ماتریس های $A_{n\times n}, B_{n\times m}, C_{m\times n}, D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند،

الف) اگر $|A|\neq 0$ و $|D|\neq 0$ باشند داریم،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

ب) اگر $|A|=0$ یا $|D|=0$ یا $|A|=|D|=0$ باشند، داریم،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = 0$$

ج) اگر $|A|\neq 0$ باشد آنگاه،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

د) اگر $|D|\neq 0$ باشد، آنگاه،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A - BD^{-1}C|$$

ه) اگر $|A|\neq 0$ و $|D|\neq 0$ باشند داریم،

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

روابط کاربردی از ماتریس های بلوکی و دترمینان ها

برای ماتریس $A_{n\times m}$ و $B_{m\times n}$ روابط زیر برقرار است،

الف)

$$|I_n + AB| = |I_m + BA|$$

ب) اگر $m=1$ باشد،

$$|I_n + AB| = 1 + BA$$

ج) اگر $|I_n+AB| \neq 0$ باشد،

$$(I_n + AB)^{-1} = I_n - A(I_m + BA)^{-1}B$$

د) برای ماتریس های $A_{n\times n}$, $B_{n\times m}$, 0 $C_{m\times n}$, $D_{m\times m}$ با فرض این که معکوس های نشان داده شده وجود دارند، لم معکوس سازی ماتریس (Matrix Inversion Lemma) به صورت زیر برقرار است،

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

اثبات: ابتدا طرفین معادله را در (A+BCD) ضرب می کنیم،

$$(A + BCD)(A + BCD)^{-1} = (A + BCD)[A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

در این صورت داریم،

$$\mathrm{I} = (\mathrm{A} + \mathrm{BDC})A^{-1} - (A + BDC)A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{BDC}A^{-1} - (B + BDCA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{BDC}A^{-1} - BD(D^{-1} + CA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{BDC}A^{-1} - BDCA^{-1} = \mathrm{I}$$

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس مختلط (Complex): ماتریسی است که همه یا برخی از عناصر آن اعداد مختلط باشند.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -1+j & -1 & -2+3j\\ -1+4j & 3-3j & -2\end{bmatrix}$$

ماتریس مختلط مزدوج (Complex Conjugated): درایه های آن مزدوج مختلط درایه های متناظر در ماتریس مختلط A باشند.

$$\boxed{\bar{A}=[\overline{a_{ij}}]}\rightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -1-j & -1 & -2-3j\\ -1-4j & 3+3j & -2\end{bmatrix}$$

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس ترانهاده (Transposed):

$$\boxed{A^T=[a_{ji}]}\rightarrow A^T=\begin{bmatrix}0 & -1+j & -1+4j\\ 1 & -1 & 3-3j\\ 3 & -2+3j & -2\end{bmatrix}$$

عملگر `.'` در نرم افزار MATLAB وجود دارد. `A.'` ←

ماتریس ترانهاده مزدوج (Conjugate Transposed): مزدوج ترانهاده یک ماتریس است.

$$\boxed{A^*=\bar{A}^T=[\bar{a}_{ji}]}\rightarrow A^*=\begin{bmatrix}0 & -1-j & -1-4j\\ 1 & -1 & 3+3j\\ 3 & -2-3j & -2\end{bmatrix}$$

عملگر `'` در نرم افزار MATLAB وجود دارد: `A'`

معرفی چند ماتریس خاص

نکته۱: اگر $A \rightarrow$ ماتریس حقیقی $A^T = A^* \Rightarrow$

نکته۲: $\forall A \rightarrow (A^*)^* = A \quad , \quad (A^T)^T = A$

نکته۳: اگر $A+B$ و AB قابل تعریف باشند،

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad , \quad (AB)^T = B^T A^T$$

$$(A+B)^* = A^* + B^* \quad , \quad (AB)^* = B^* A^*$$

نکته۴: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس مربعی $\rightarrow |A^*| = |\bar{A}|$ و $|A^T| = |A|$

نکته۵: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس غیر منفرد $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

نکته۶: اگر $c \rightarrow$ عدد مختلط $\Rightarrow (cA)^* = \bar{c}A^*$

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس متقارن (Symmetric): ماتریسی است که ترانهاده اش با خودش برابر باشد.

$$\boxed{A = A^T \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 11 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس شبه متقارن (Skew-Symmetric): ماتریسی است که با منفی ترانهاده اش برابر باشد،

$$\boxed{A = -A^T \quad , \quad a_{ij} = -a_{ji}} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

معرفی چند ماتریس خاص

نکته۱: ماتریس شبه متقارن: $A-A^T$ و ماتریس متقارن: $A+A^T$ $\Rightarrow$ ماتریس مربعی $A_{n\times n} \rightarrow$ اگر

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix} \rightarrow \quad A+A^T=\begin{bmatrix}8 & -3 & 8\\ -3 & 0 & 8\\ 8 & 8 & 14\end{bmatrix}, \quad A-A^T=\begin{bmatrix}0 & -3 & -2\\ 3 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

نکته۲: ماتریس متقارن $AA^T, A^TA \rightarrow$ $\Rightarrow$ ماتریس غیر مربعی $A \rightarrow$ اگر

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\\ 9 & 5\end{bmatrix} \rightarrow AA^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 9\\ 2 & 20 & -2\\ 9 & -2 & 106\end{bmatrix}, \qquad A^TA=\begin{bmatrix}86 & 37\\ 37 & 41\end{bmatrix}$$

نکته۳: ماتریس متقارن $\Rightarrow A^{-1} \rightarrow$ ماتریس متقارن و غیر منفرد $A_{n\times n} \rightarrow$ اگر

$$AA^{-1}=I \rightarrow (A^{-1})^T A^T = I^T \xrightarrow[I=I^T]{A=A^T} (A^{-1})^T A = I = A^{-1}A \;\; (A^{-1})^T = A^{-1}$$

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس هرمیتی (Hermitian): یک ماتریس مختلط که رابطه زیر را برآورده سازد،

$$\boxed{A^* = A \quad , \qquad a_{ij} = \overline{a_{ji}}} \qquad A=\begin{bmatrix}-1 & 1-2j & 3\\ 1+2j & 0 & -j\\ 3 & j & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس هرمیتی باید مربعی بوده و درایه های قطر اصلی آن صفر یا حقیقی باشند.

ماتریس شبه هرمیتی (Skew- Hermitian): یک ماتریس مختلط که رابطه زیر را برآورده سازد،

$$\boxed{A^* = -A \quad , \qquad a_{ij} = -\overline{a_{ji}}}$$

ماتریس شبه هرمیتی مربعی بوده و عناصر روی قطر اصلی آن موهومی یا صفر باشند.

معرفی چند ماتریس خاص

نکته۱: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس هرمیتی $\rightarrow A = C + jD \Rightarrow \boxed{C = C^T\ ,\ D = -D^T}$

ماتریس های حقیقی ‌‌ ماتریس متقارن ‌‌ ماتریس شبه متقارن

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1-2j & 3 \\ 1+2j & 0 & -j \\ 3 & j & 1 \end{bmatrix} \qquad A = C + jD = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته۲: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس شبه هرمیتی $\rightarrow A=C+jD\ \boxed{C= -C^T\ ,\ D=D^T} \Rightarrow$

ماتریس های حقیقی ‌‌ ماتریس متقارن ‌‌ ماتریس شبه متقارن

$$A = \begin{bmatrix} j & 1+j & 2j \\ -1+j & 5j & 3 \\ 2j & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = C + jD = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معرفی چند ماتریس خاص

نکته۳: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس هرمیتی $\Rightarrow |A| \rightarrow$ عدد حقیقی

$$\boxed{|A| = |A^*| = |\bar{A}|}$$

نکته۴: اگر $A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس هرمیتی $\rightarrow A^{-1} \Rightarrow$ ماتریس هرمیتی

$$\boxed{A^{-1} = (A^{-1})^*}$$

نکته۵: $\forall A_{n\times n} \rightarrow$ ماتریس مربعی : $A=G+jH$

ماتریس های هرمیتی

$$\boxed{G = \frac{1}{2}(A + A^*)\ , \qquad H = \frac{1}{2j}(A - A^*)}$$

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس یکین (Unitary): ماتریس مختطی است که در آن معکوس ماتریس برابر با مزدوج ترانهاده آن است.

$$\boxed{A^{-1} = A^*} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}}(2+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(3+j) \\ \frac{1}{\sqrt{15}}(-3+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2-j) \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمال (Normal): ماتریس مربعی است که با ترانهاده مزدوج خود جابه جایی پذیر باشد،

اگر $A \rightarrow$ ماتریس حقیقی $\rightarrow \boxed{AA^T = A^T A}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 3-j5 \end{bmatrix}$

اگر $A \rightarrow$ ماتریس مختلط $\rightarrow \boxed{AA^* = A^* A}$

معرفی چند ماتریس خاص

نکته۱: اگر A $\rightarrow$ ماتریس یکین $\rightarrow \boxed{AA^*=A^*A=I}$

نکته۲: اگر A $\rightarrow$ ماتریس یکین $\rightarrow \boxed{|\det(A)|=1}$

نکته۳: اگر A $\rightarrow$ ماتریس یکین $\Rightarrow A^{-1} \rightarrow$ ماتریس یکین

$$\boxed{\begin{aligned}(A^{-1})^*(A^{-1}) &= (A^*)^*(A^{-1}) = (A)\,(A^{-1}) = I \\ (A^{-1})(A^{-1})^* &= (A^{-1})\,(A^*)^* = (A^{-1})\,(A) = I\end{aligned}}$$

نکته۴: اگر $\rightarrow A_{n\times n}, B_{n\times n}$ ماتریس های یکین $\Rightarrow AB \rightarrow$ ماتریس یکین

$$\boxed{\begin{aligned}(AB)(AB)^* &= ABB^*A^* = AA^* = I \\ (AB)^*(AB) &= B^*A^*AB = B^*B = I\end{aligned}}$$

نکته۵: یک ماتریس نرمال است اگر متقارن حقیقی یا هرمیتی یا شبه متقارن حقیقی یا شبه هرمیتی یا یکین و یا متعامد باشد.

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس قطری (Diagonal): ماتریس مربعی است که تمام درایه های آن به جز عناصر روی قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

و

$$a_{ij} = 0 \quad , i \neq j$$

ماتریس بالامثلثی (Upper Triangular): ماتریس مربعی است که تمام درایه های زیر قطر اصلی صفر هستند.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} , \qquad U_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leq j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$$

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس پایین مثلثی (Lower Triangular): ماتریس مربعی است که تمام درایه های بالای قطر اصلی صفر هستند.

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} , \qquad L_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

نکته۱: دترمینان یک ماتریس قطری و مثلثی برابر با حاصلضرب کلیه عناصر قطری می‌باشد،

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

دستور diag(A) و triu(A) و tril(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

معرفی چند ماتریس خاص

ماتریس های متعامد (Orthogonal): ماتریس متعامد هست، اگر حقیقی بوده و رابطه زیر را برآورده سازد،

$$\boxed{A^T A = AA^T = I} \qquad A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

نکته۱: اگر A $\rightarrow$ ماتریس متعامد $\Rightarrow |A| = \pm 1 \rightarrow$ غیرمنفرد

نکته۲: اگر A $\rightarrow$ ماتریس متعامد $\boxed{A^{-1} = A^T}$

نکته۳: اگر $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ $\rightarrow$ ماتریس های متعامد $\rightarrow AB, A^T, A^{-1}$ ماتریس های متعامد

نکته۴: اگر A $\rightarrow$ ماتریس متعامد $\rightarrow \boxed{AA^* = A^*A = I} \Rightarrow$ یکین

نکته۵: برای ماتریس متعامد A داریم،

$$\|Ax\| = \|x\| \quad , \qquad x \in R^n$$
$$< Ax, Ay > = < x, y > , \qquad x, y \in R^n$$