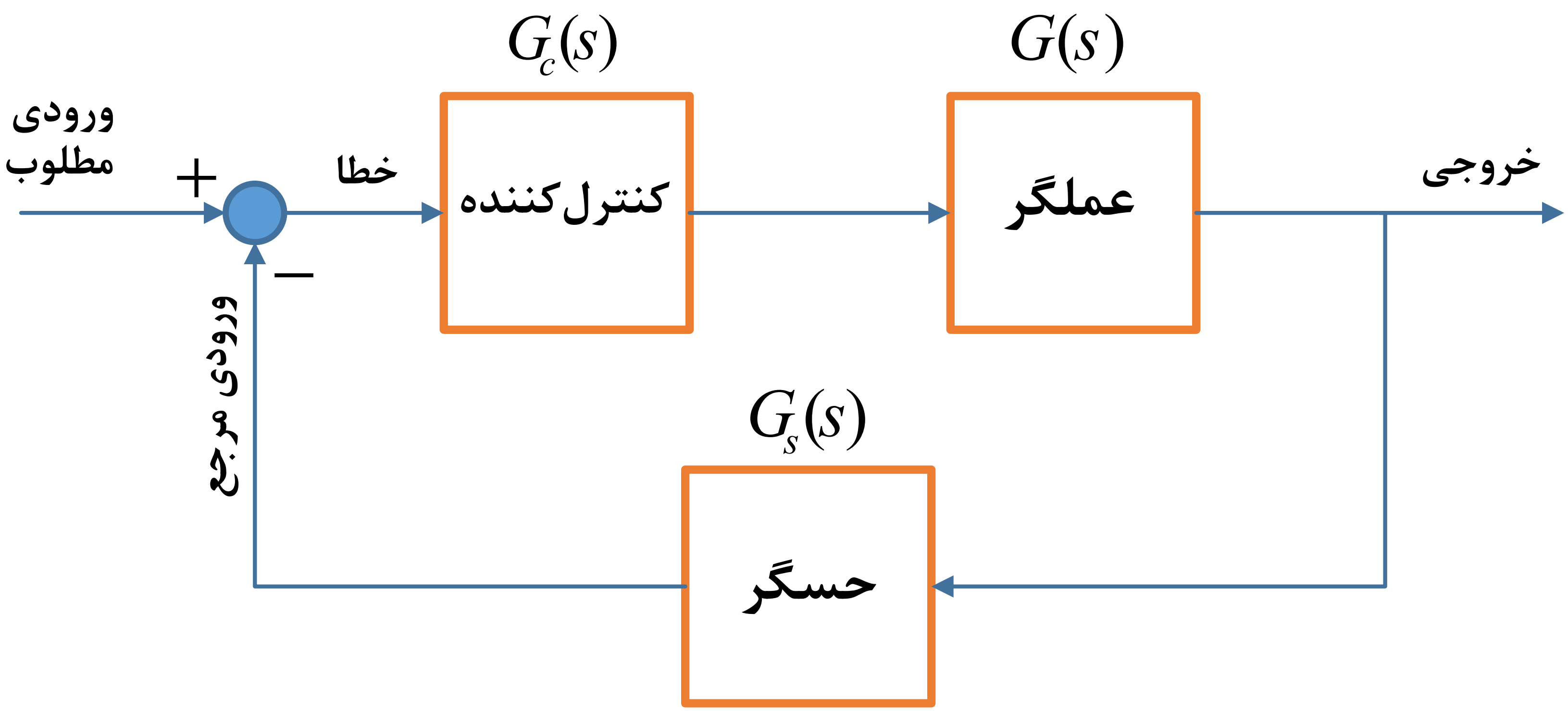
فصل سوم

تحلیل عملکرد گذرا و ماندگار سیستم‌های کنترلی

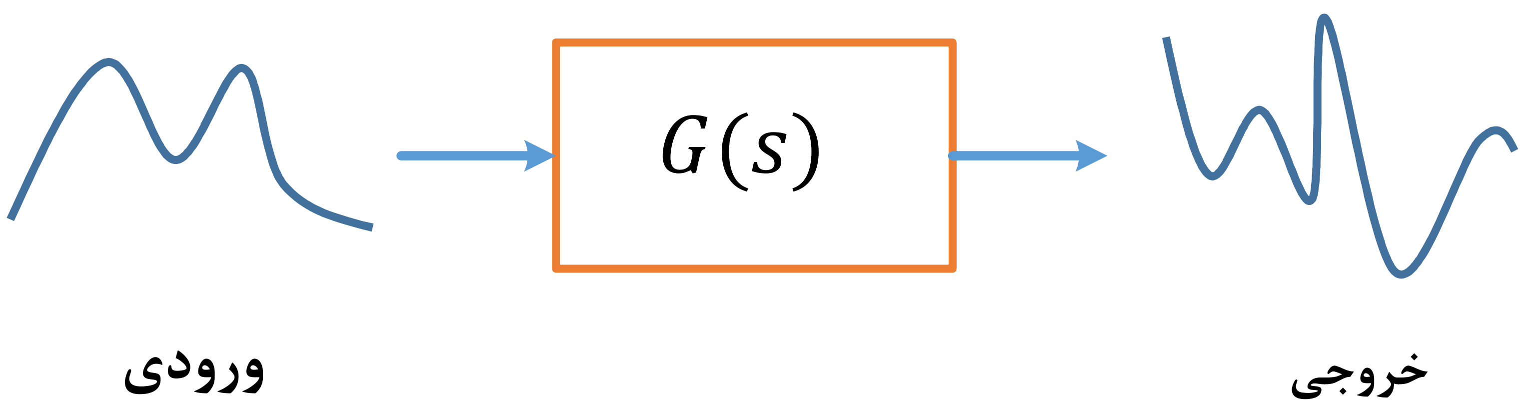
دکتر سعید عباداللهی
عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران

فهرست مطالب:

مدل حلقه‌بسته سیستم کنترلی:



جهت مدل سازی سیستم به‌شکل تابع تبدیل، به دنبال شناخت رفتارهای تابع تبدیل‌های مربوطه هستیم. این کار برای ایجاد ابزارها و معیارهای لازم جهت طراحی کنترل‌کننده انجام می‌شود.



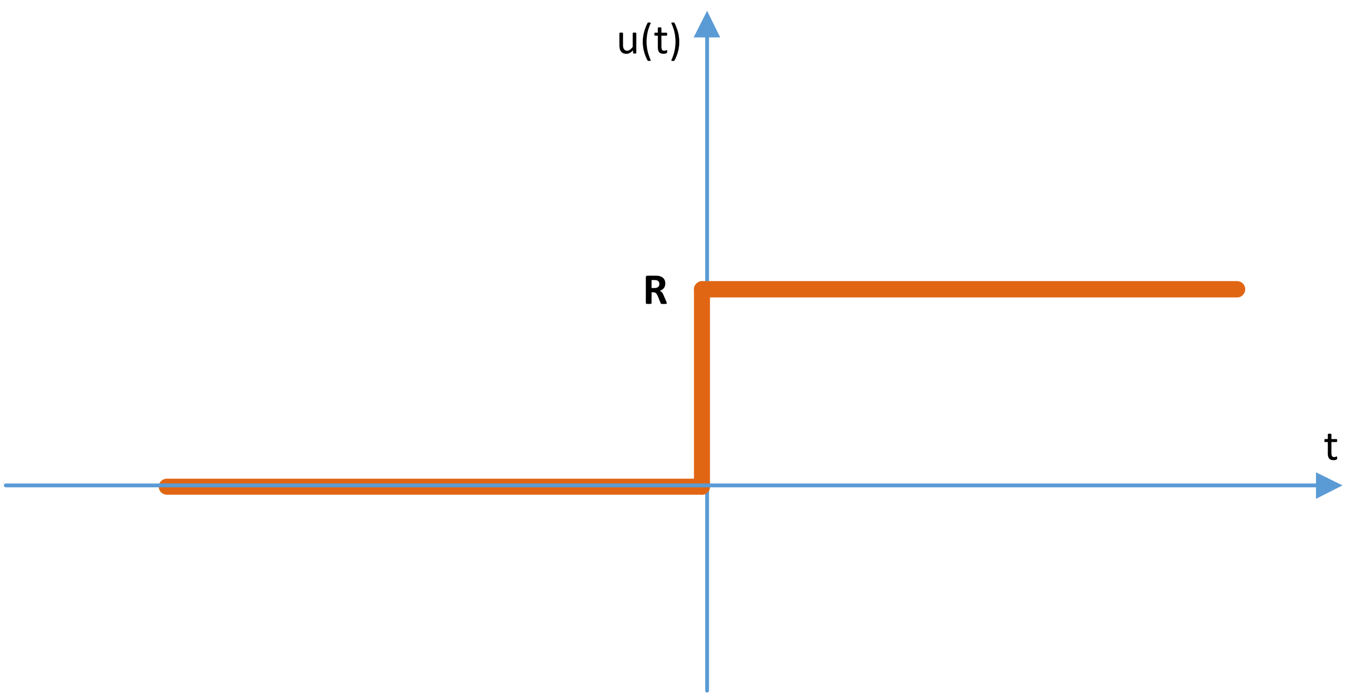
ورودی‌های استاندارد یک سیستم کنترلی:

ورودی‌های استاندارد

- پله
- ضربه
- شیب
- سهموی
- سینوسی

تابع پله:

$$u(t)=\begin{cases} R & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = Ru(t) \Longrightarrow U(s)=\frac{R}{s}$$

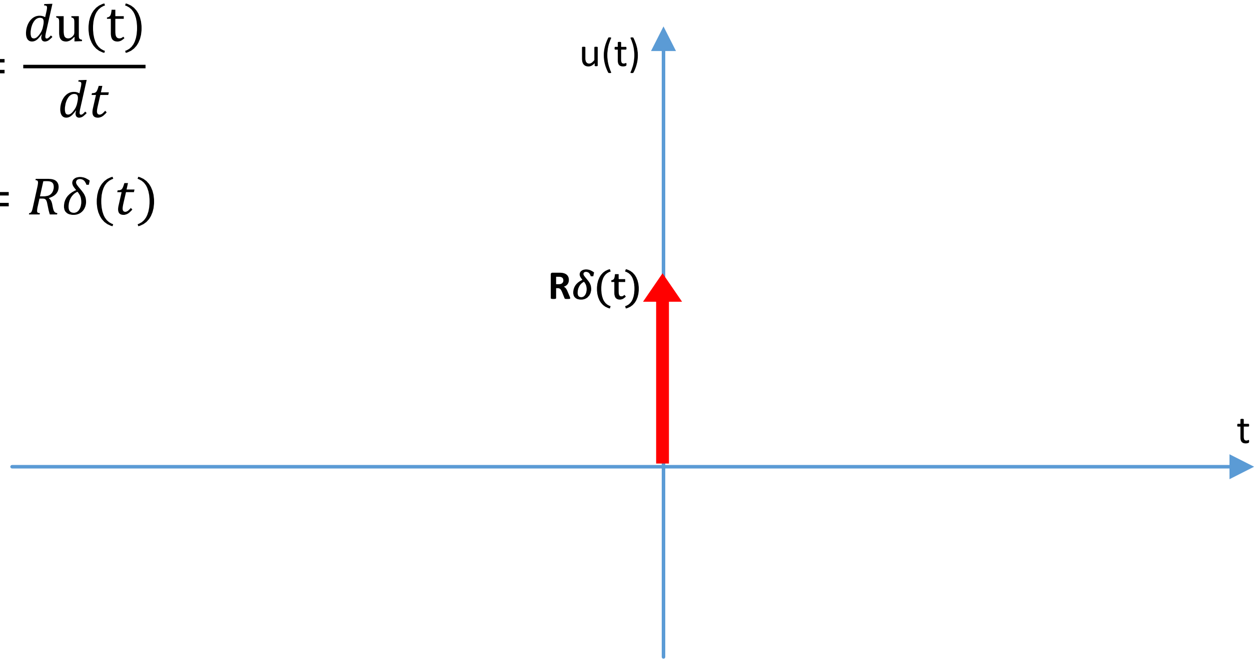


تابع ضربه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1 \qquad \delta(t) = 0 \quad if \quad t \neq 0 \Longrightarrow U(s) = 1$$

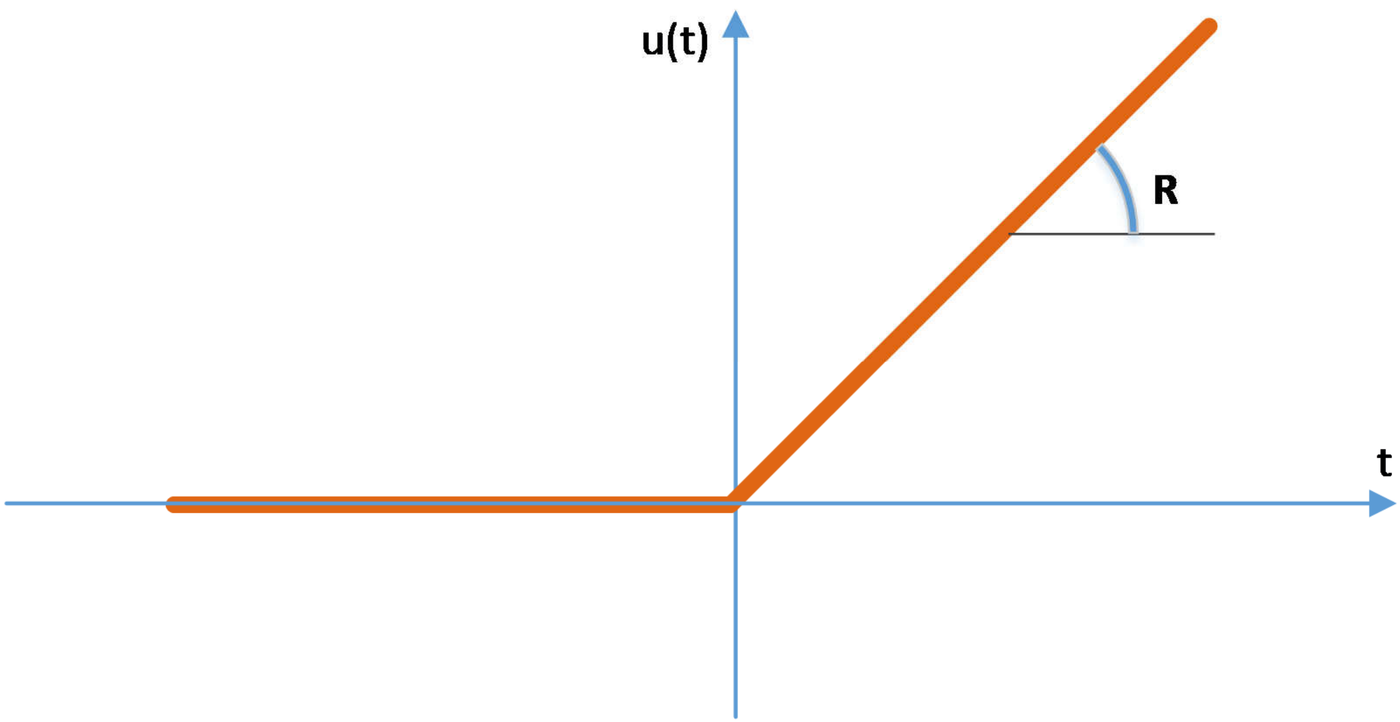
$$\delta(t) = \frac{d\mathrm{u(t)}}{dt}$$

$$u(t) = R\delta(t)$$



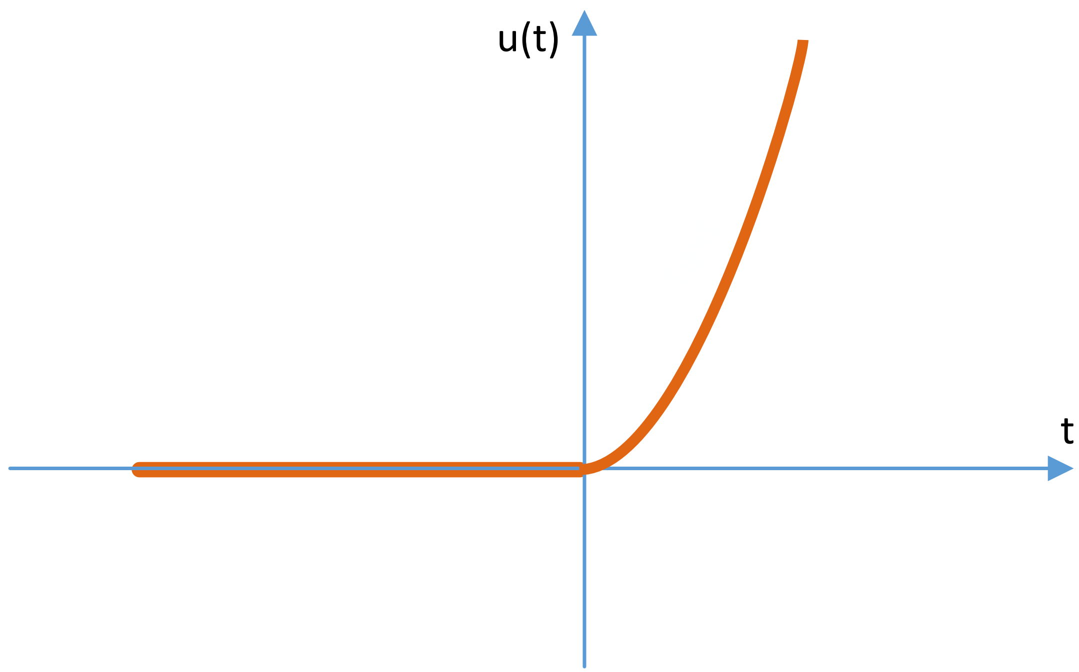
تابع شیب (ورودی سرعت):

$$u(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = Rtu(t) = Rr(t) \Rightarrow U(s) = \frac{R}{S^2}$$

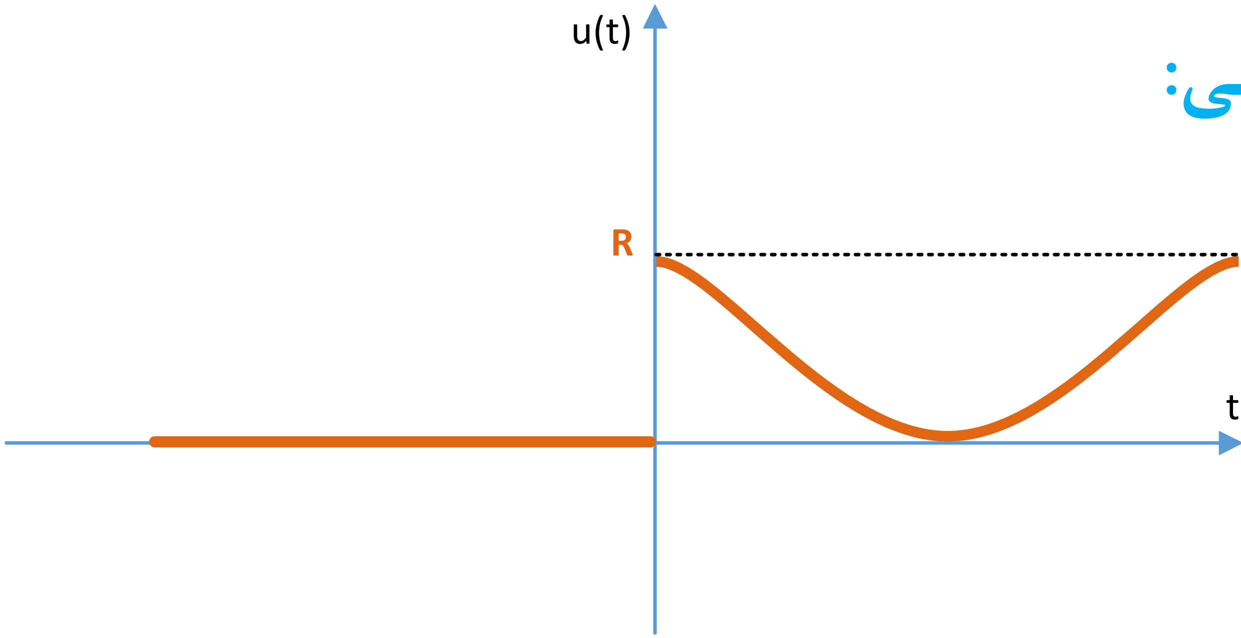


تابع سهموی (ورودی شتاب):

$$u(t)=\begin{cases} \dfrac{Rt^2}{2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = \frac{Rt^2}{2}\,u(t) \;\Longrightarrow\; U(s) = \frac{R}{S^3}$$



تابع سینوسی:



$$u(t) = \begin{cases} R\cos(\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$U(s) = \frac{RS}{S^2+\omega^2}$$

پاسخ حالت ماندگار:

پاسخ حالت ماندگار به ورودی‌های پله و شیب:

تابع تبدیل مرتبه اول :

$$G(s) = \frac{k}{s+k}$$

اگر ورودی را پله واحد در نظر بگیریم داریم:

قضیه مقدار نهایی:

اگر ورودی را شیب واحد در نظر بگیریم داریم:

بررسی پاسخ حالت گذرا با دو فرض ورودی پله واحد و سیستم مرتبه دوم:

پاسخ سیستم مرتبه دوم به ورودی پله به‌صورت یکی از سه حالت زیر است:

۱- پاسخ میرای شدید

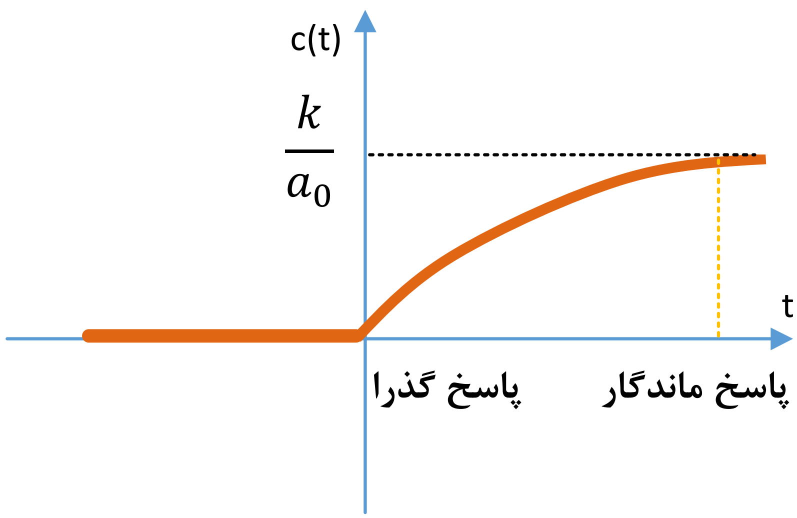
۲- پاسخ میرای بحرانی

۳- پاسخ میرای ضعیف (نوسانی)

پاسخ میرای شدید:

تابع تبدیل سیستم دو قطب حقیقی منفی متمایز دارد:

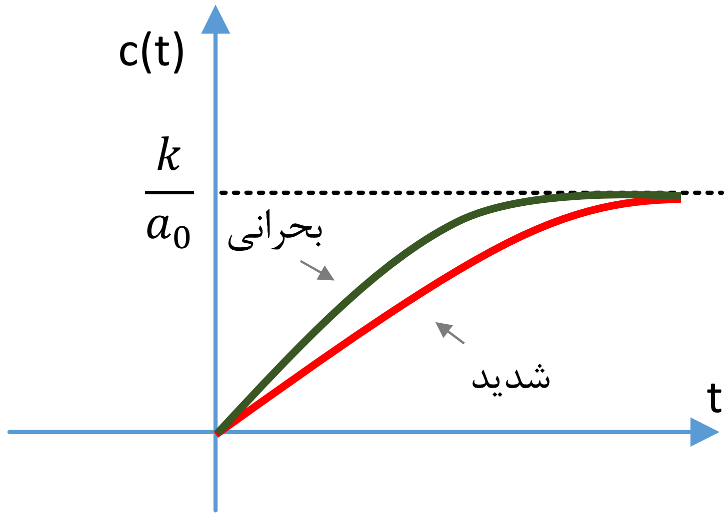
$$G(s) = \frac{k}{s^2+a_1 s+a_0} = \frac{k}{(s+\alpha)(s+\beta)} \qquad \alpha\,,\beta > 0\,,\alpha \neq \beta$$



پاسخ میرای بحرانی:

تابع تبدیل سیستم دو قطب حقیقی منفی برابر دارد.

$$G(s) = \frac{k}{s^2+a_1 s+a_0} = \frac{k}{(s+\alpha)^2}$$

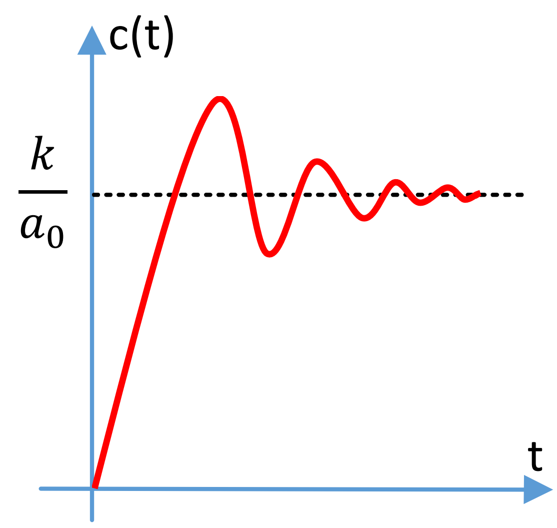


پاسخ میرای ضعیف (نوسانی):

تابع تبدیل سیستم دارای دو قطب مختلط مزدوج با مقدار حقیقی منفی می‌باشد:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)}$$

$$= \frac{k}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{k}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}$$

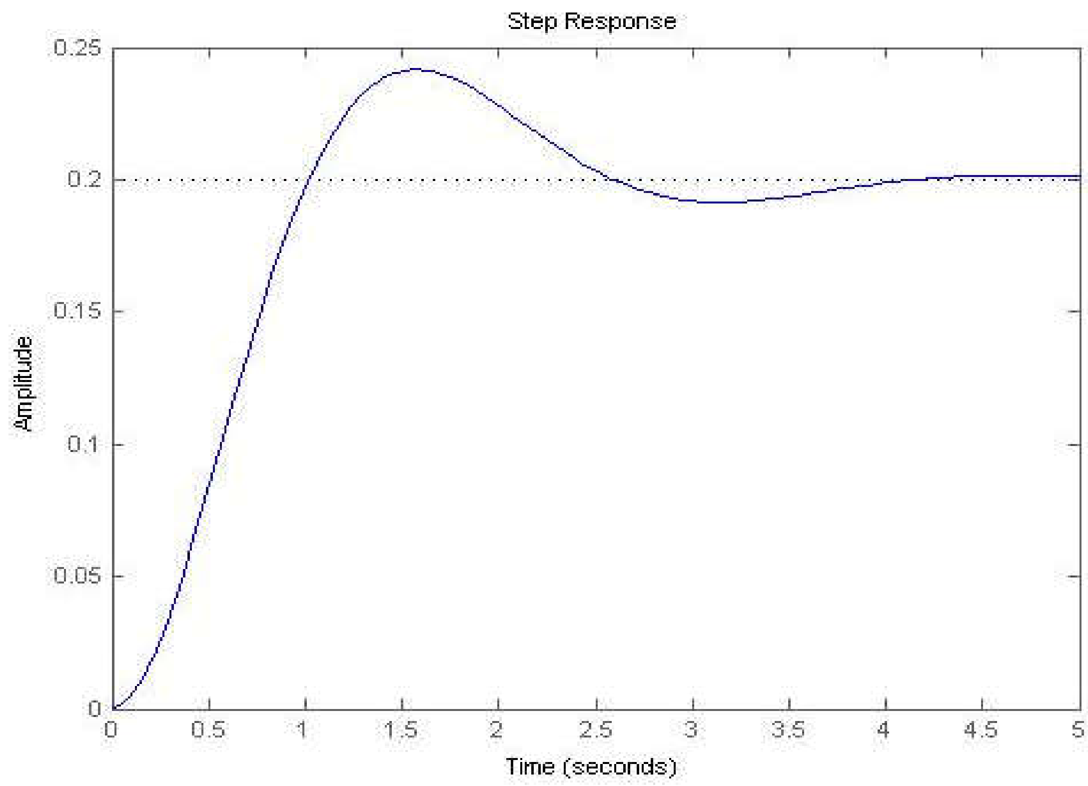


پاسخ میرای ضعیف (نوسانی)(ادامه):

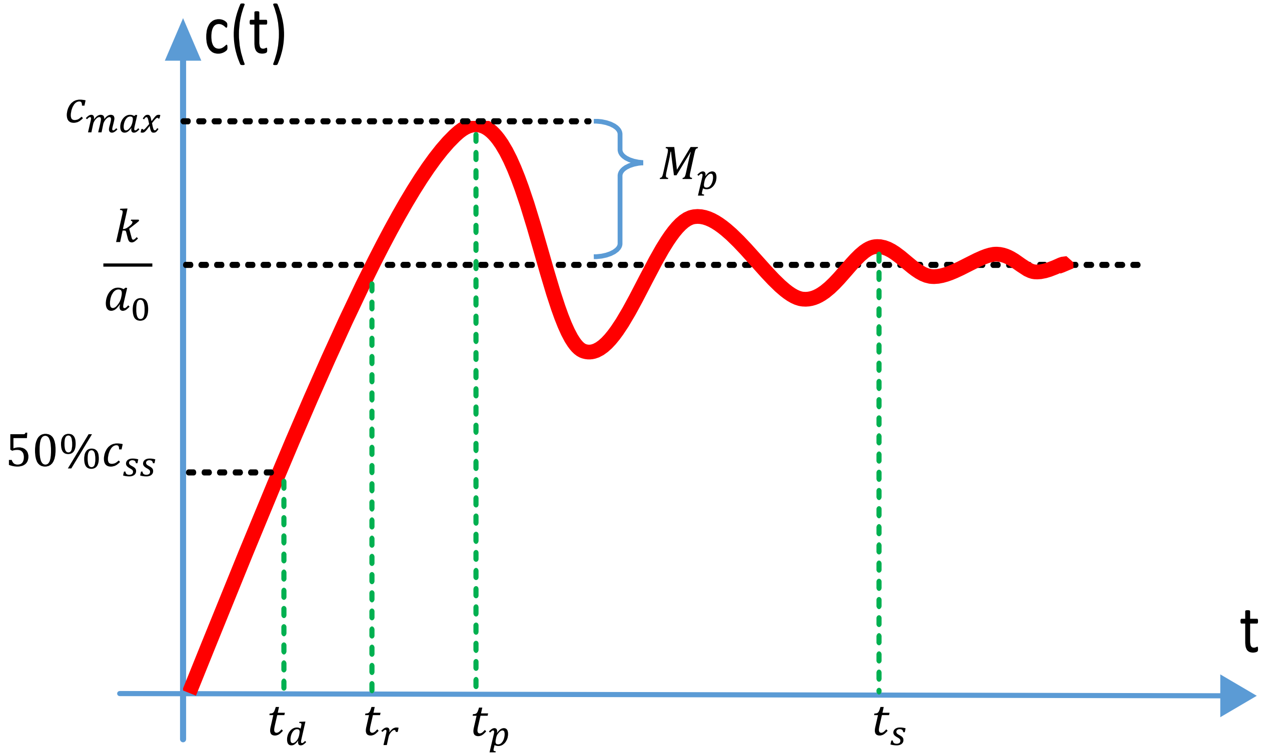
پاسخ اکثر سیستم‌های خطی در عمل به‌صورت میرای ضعیف است، لذا معیارهای عملکرد در حوزه زمان برای بررسی و تحلیل سیستم‌های کنترل خطی از این پاسخ استخراج می‌شود.

برای رسم پاسخ پله در متلب از دستور step استفاده می‌کنیم، برای مثال پاسخ پله تابع تبدیل روبه‌رو به شکل زیر است:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}$$



پاسخ میرای ضعیف (نوسانی)(ادامه):



پاسخ میرای ضعیف (نوسانی)(ادامه):

۱- فراجهش حداکثر (M_p)

$$M_p = c_{max} - c_{ss}$$

درصد فراجهش حداکثر $= \frac{M_p}{c_{ss}} \times 100$

زمان رسیدن به فراجهش حداکثر $\rightarrow t_p$

فراجهش حداکثر یک عنصر نامطلوب است و هدف طراحی کنترل کاهش آن است.

۲- زمان تاخیر (t_d)

زمان رسیدن پاسخ پله به ۵۰ % مقدار نهایی

۳- زمان صعود (t_r)

زمان رسیدن پاسخ از $\underbrace{\text{۱۰\% به ۹۰\%}}_{\text{میرای شدید}}$ یا از ۵% به $\underbrace{\text{۹۵\% یا از}}_{\text{میرای ضعیف}}$ ۰ تا ۱۰۰% مقدار نهایی

پاسخ میرای ضعیف (نوسانی)(ادامه):

۴- زمان نشست (استقرار) t_s

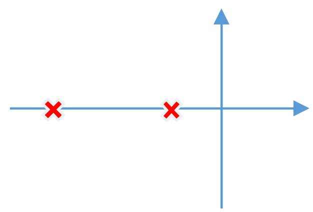
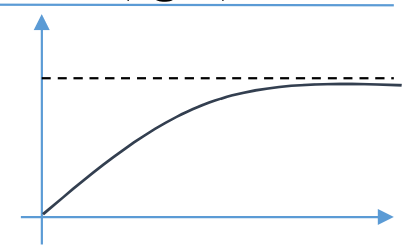
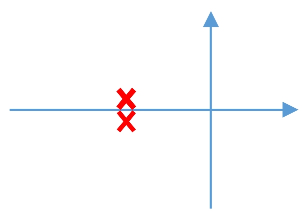
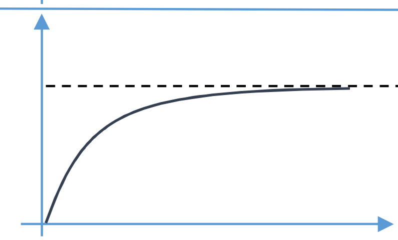
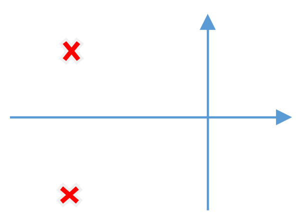
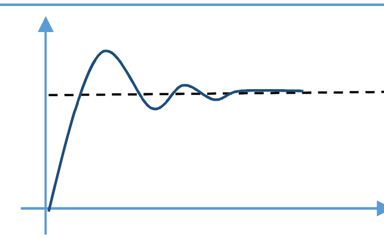
زمانی که لازم است تا پاسخ به یک محدوده مشخص حول مقدار نهایی برسد.

چهار کمیت مذکور معیارهایی برای سنجش عملکرد و مشخصه‌های یک سیستم کنترلی هستند.

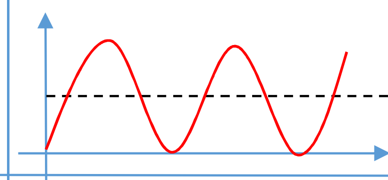
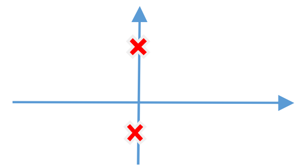
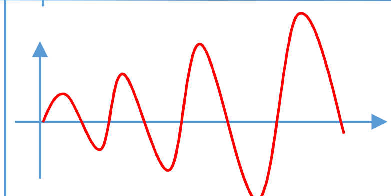
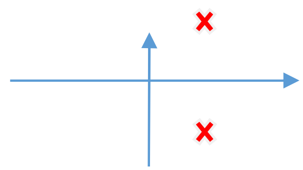
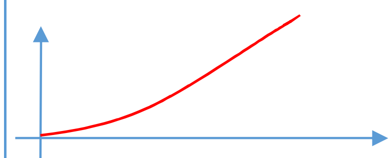
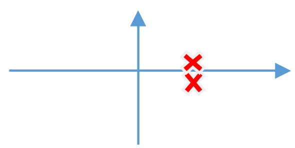
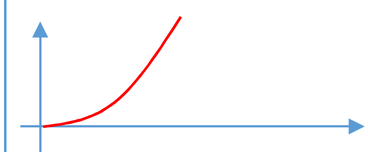
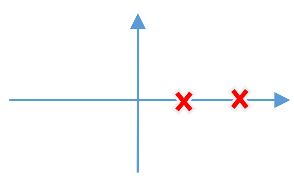
نمایش دیگر سیستم مرتبه دوم (نمونه):

$$G(s)=\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+{\omega_n}^2}$$

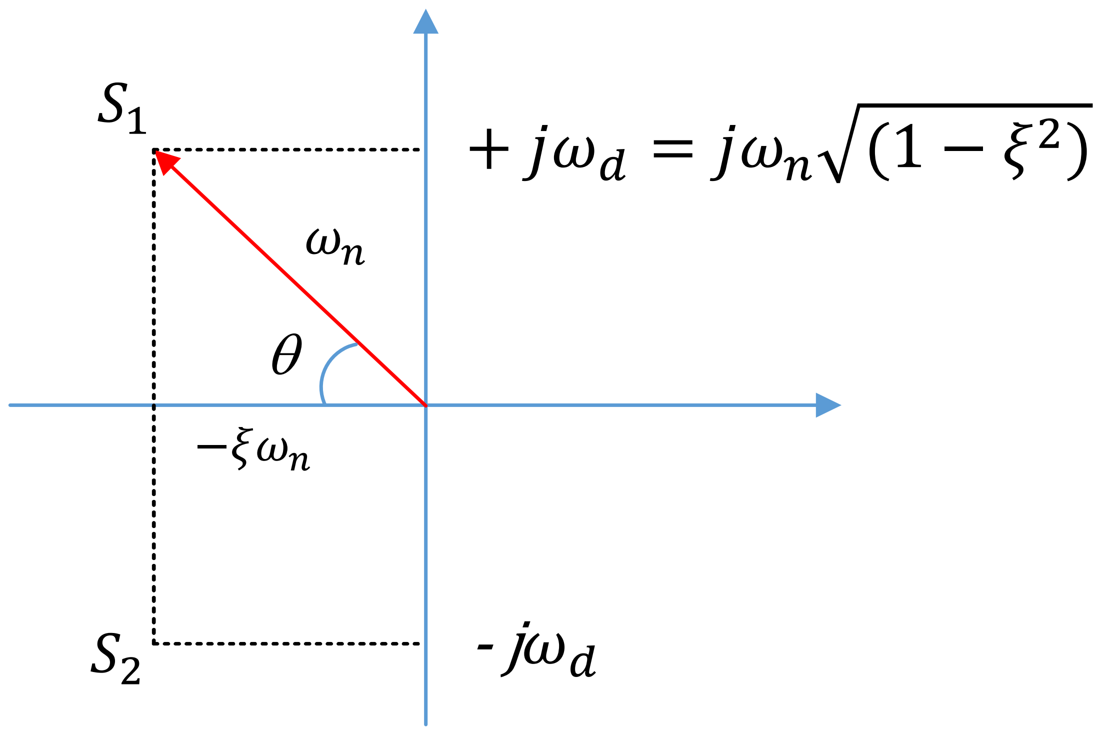
خلاصه:

ξ	$s_{1,2}$	محل قطب‌ها	انواع میرایی	پاسخ پله
$\xi > 1$			**میرای شدید**	
$\xi = 1$			**میرای بحرانی**	
$0 < \xi < 1$			**میرای نوسانی**	

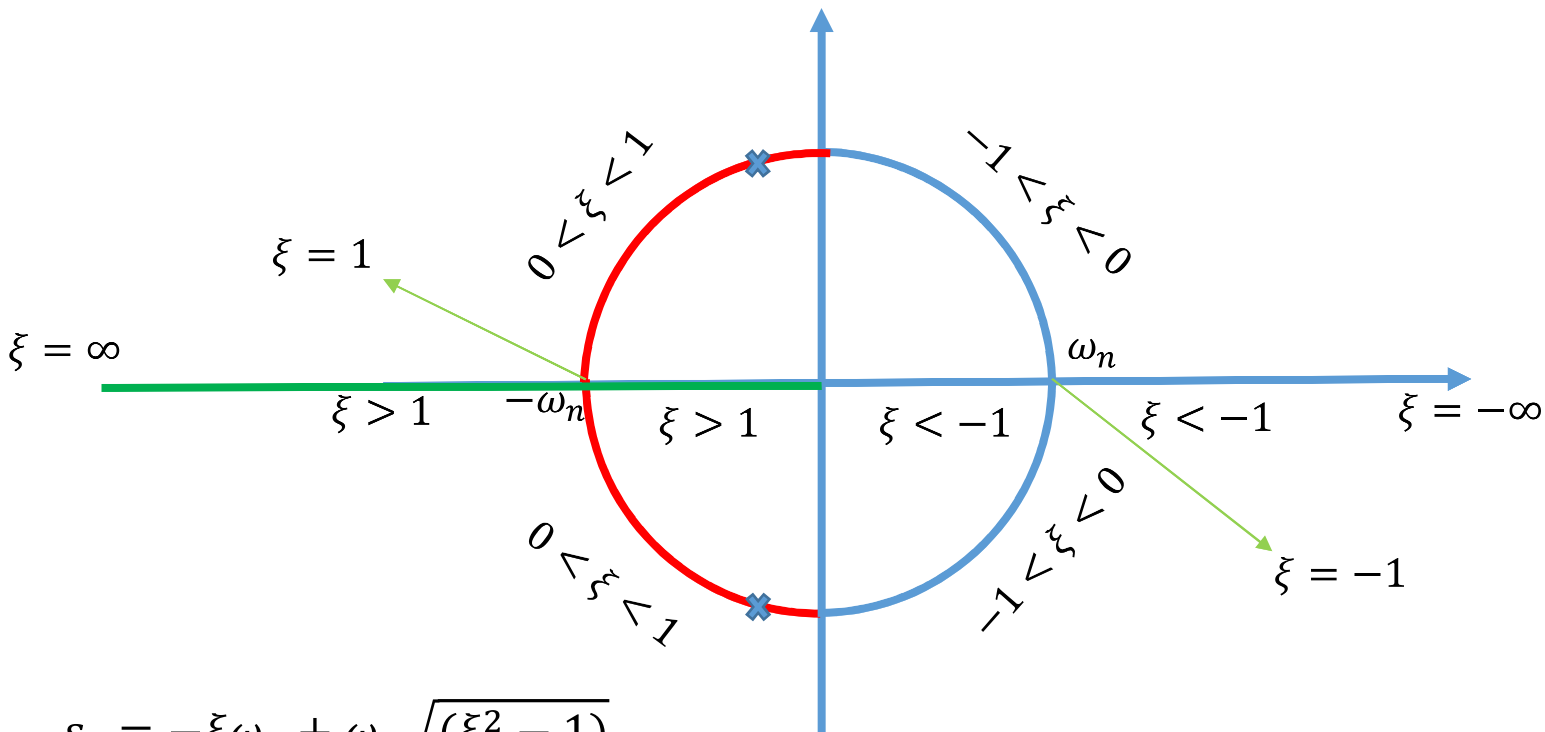
خلاصه:

پاسخ پله	انواع میرایی	محل قطب‌ها	$s_{1,2}$	ξ
	**نوسانی**			$\xi = 0$
	**نامیرای ضعیف نوسانی**			$-1 < \xi < 0$
	**نامیرای بحرانی**			$\xi = -1$
	**نامیرای شدید**			$\xi < -1$

در حالت میرای ضعیف $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ را فرکانس طبیعی میرا شده گویند.



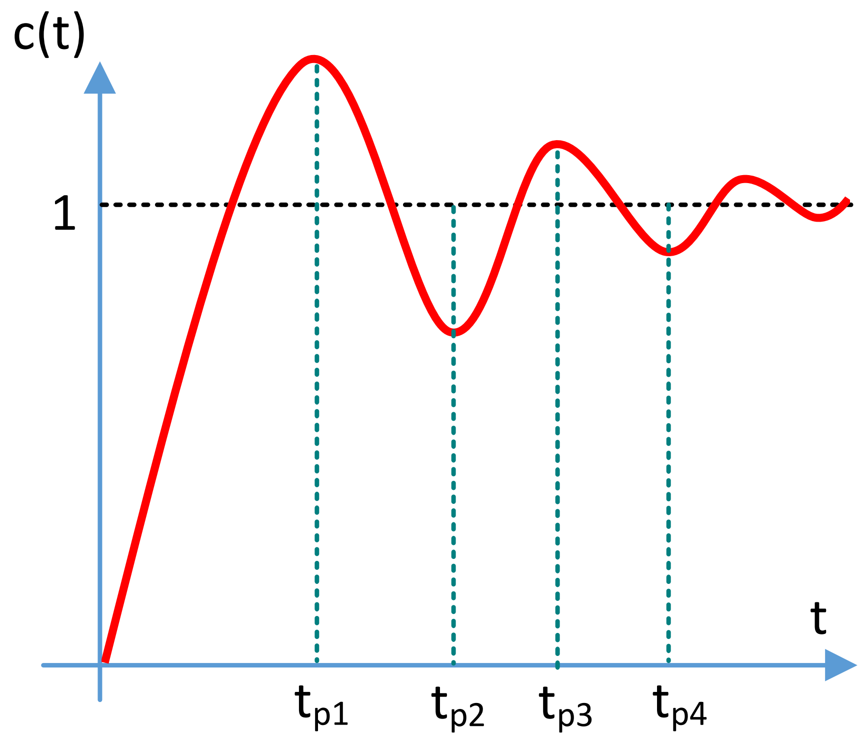
مکان هندسی $s_{1,2}$ به ازای تغییرات ξ



$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{(\xi^2-1)}$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{(\xi^2-1)}$$

پاسخ سیستم مرتبه دوم نمونه به ورودی پله:



پاسخ سیستم مرتبه دوم نمونه به ورودی پله:

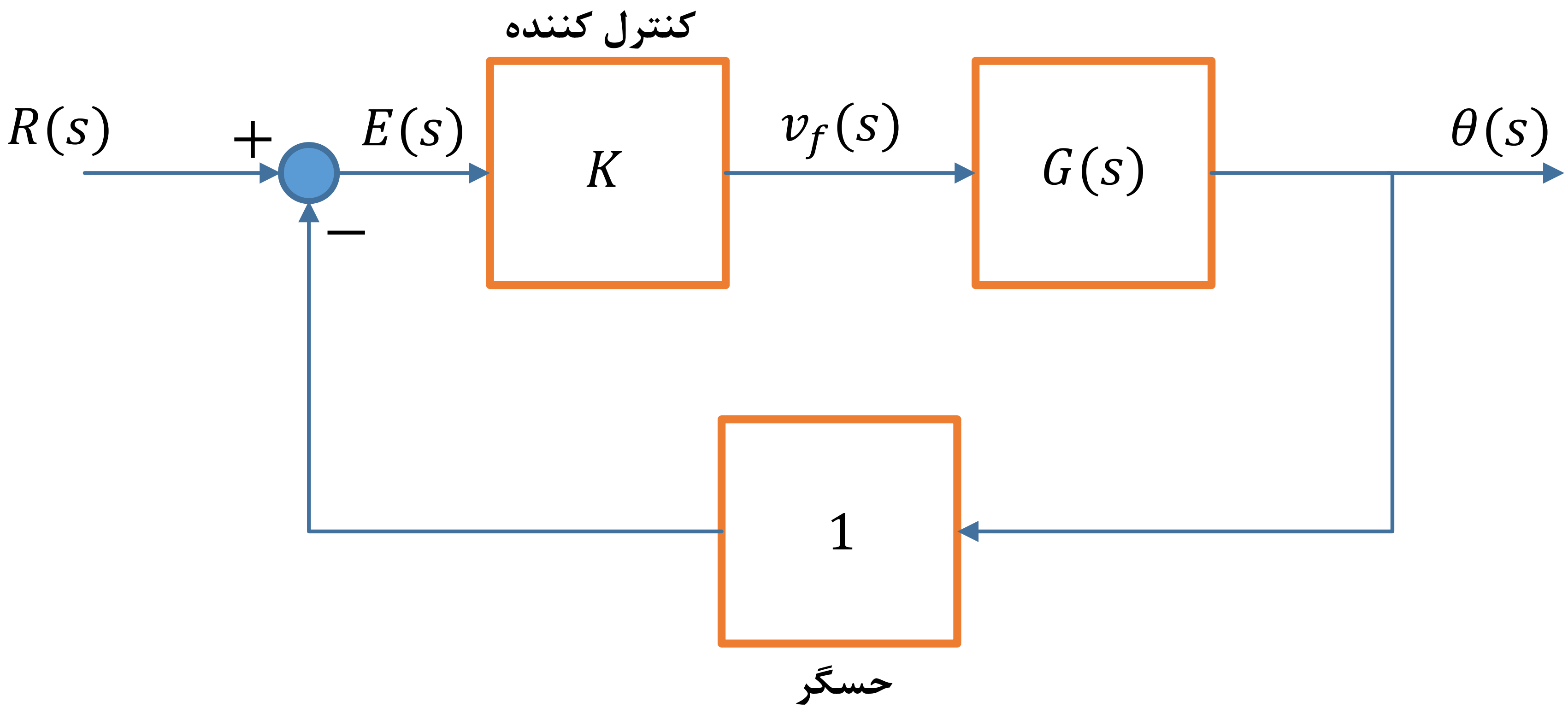
ثابت زمانی تابع نمایی $T = \dfrac{1}{\xi \omega_n}$ است. معمولا برای زمان نشست داریم:

با معیار ۲٪

با معیار ۵٪

مثال:

یک موتور DC با کنترل جریان میدان را در نظر بگیرید. از یک تقویت کننده به عنوان کنترل‌کننده آن استفاده می‌کنیم.

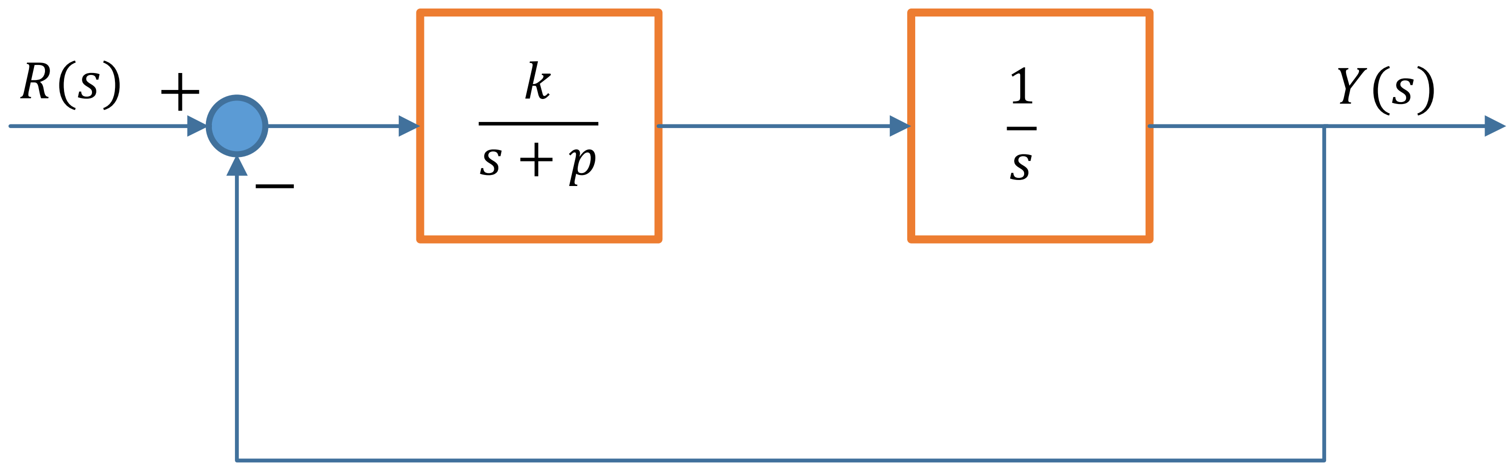


حل:

ادامه حل:

مثال:

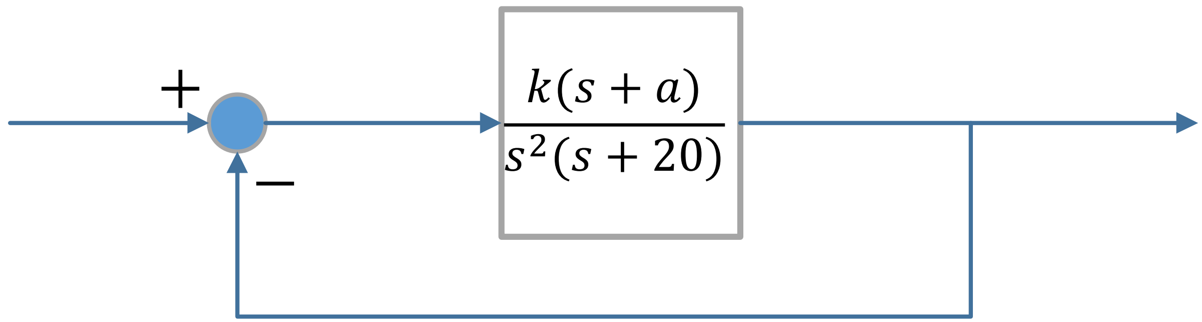
در سیستم زیر بهره k و پارامتر p را به گونه‌ای طراحی کنید که پاسخ گذرا به ورودی پله فراجهشی کمتر از ۵% و زمان نشست (با معیار ۲%) کمتر از ۴ ثانیه داشته باشیم.



حل:

ادامه :

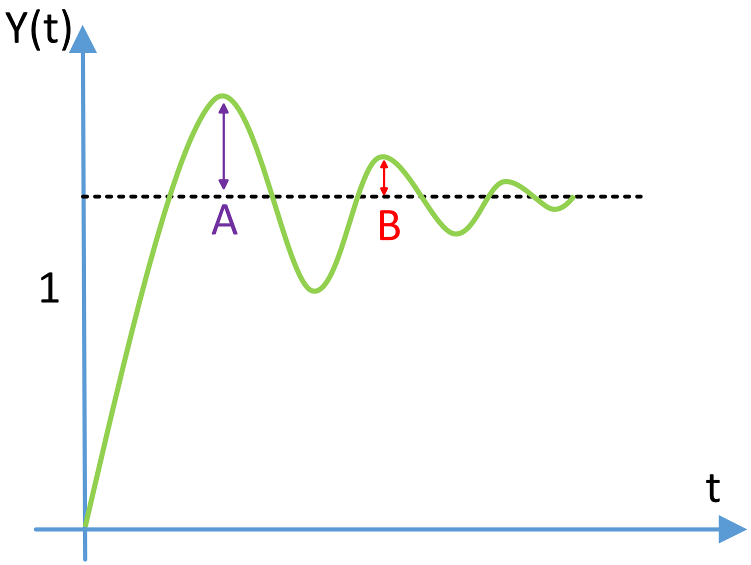
مثال: در سیستم کنترلی شکل زیر a و k را چنان انتخاب کنید که درصد فراجهش ۴/۳۲ درصد وزمان مستقر شدن ۰/۴ ثانیه باشد.



حل:

مثال: پاسخ سیستم واحد یک سیستم مرتبه دوم به شکل زیر است.با تعریف $\delta = \mathrm{Ln}\frac{A}{B}$ نسبت میرایی سیستم را بدست آورید.

حل:



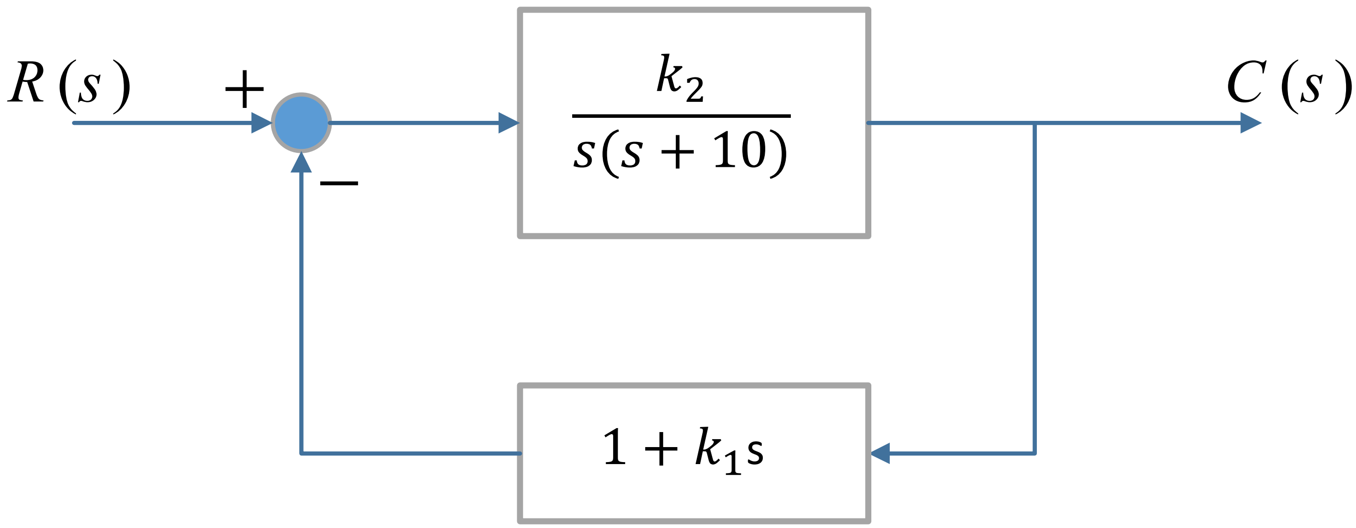
مثال: در یک سیستم کنترل با پس خور واحد منفی $G(s) = \frac{k(s+4)}{s(s+3)}$ است.

حداکثر مقدار فراجهش به ورودی پله واحد به‌ازای چه مقدار k بدست می‌آید.

حل:

معادله مشخصه سیستم حلقه‌بسته:

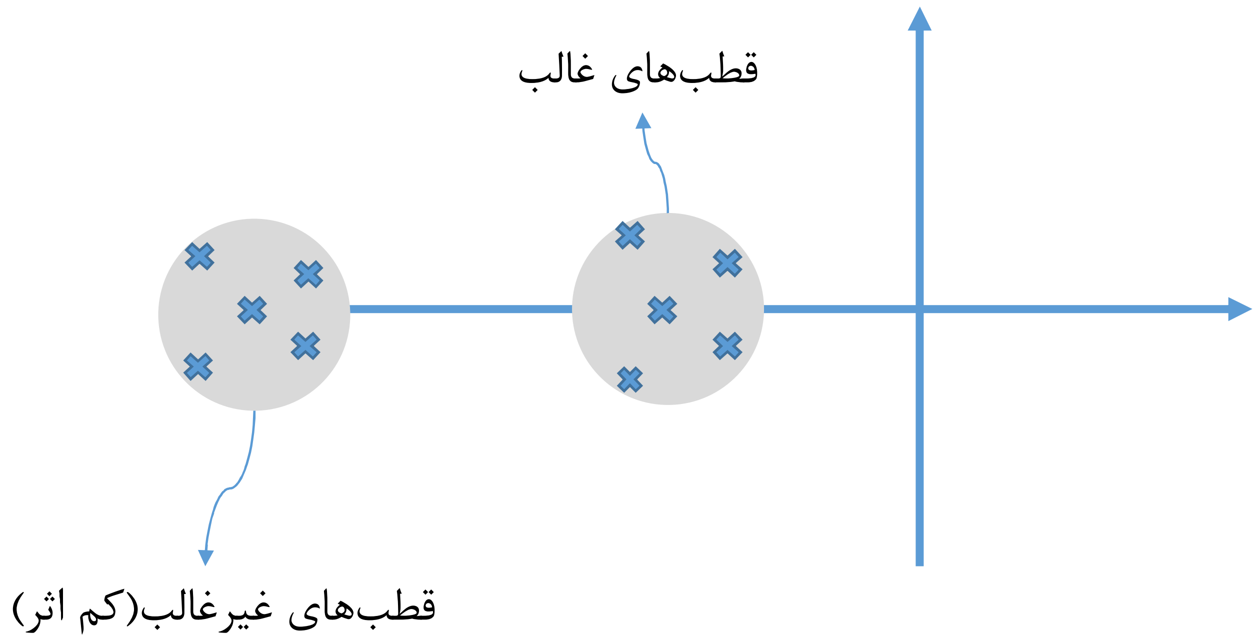
مثال: در سیستم زیر k_1 و k_2 را به گونه‌ای بیابید تا زمان نشست با تلرانس ٪۵ پاسخ پله ۰.۳ ثانیه و نسبت میرایی قطب موثر ۰.۵ باشد.



حل:

اثرات اضافه کردن صفر و قطب به تابع تبدیل حلقه‌بسته:

تعریف قطب غالب: آن دسته از قطب‌های سیستم که بیشترین اثر را بر پاسخ دارند.



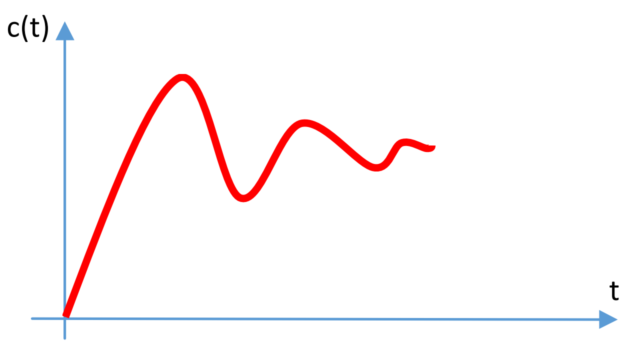
ادامه:

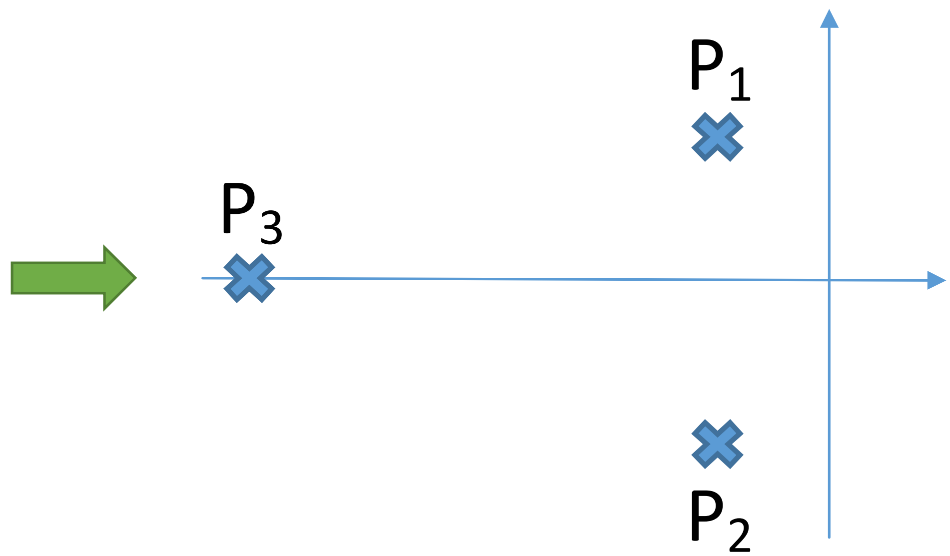
به لحاظ کاربردی قسمت حقیقی قطب‌های غیر غالب ۵ تا ۱۰ برابر قطب‌های غالب است.

مثال:

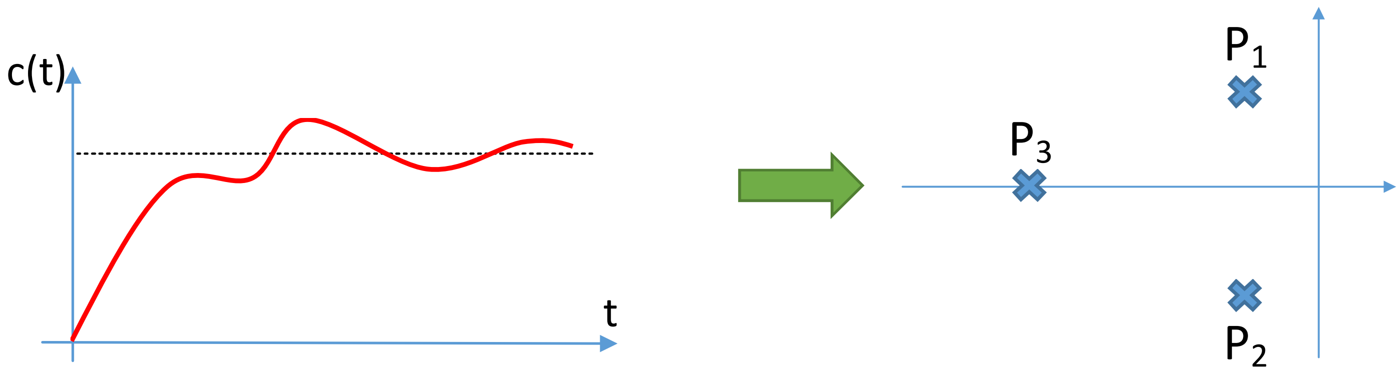
اثر قطب‌های غالب اضافی

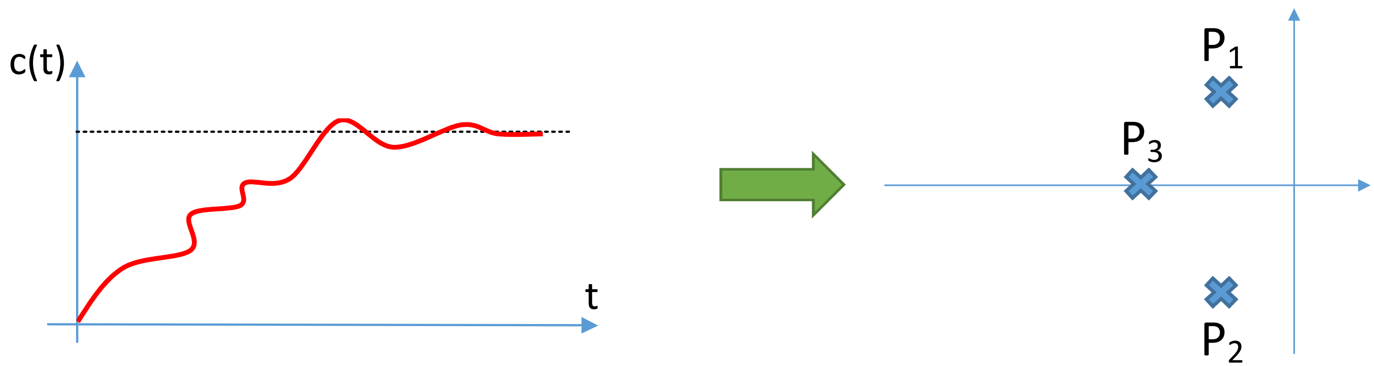
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2)(s-p_i)}$$

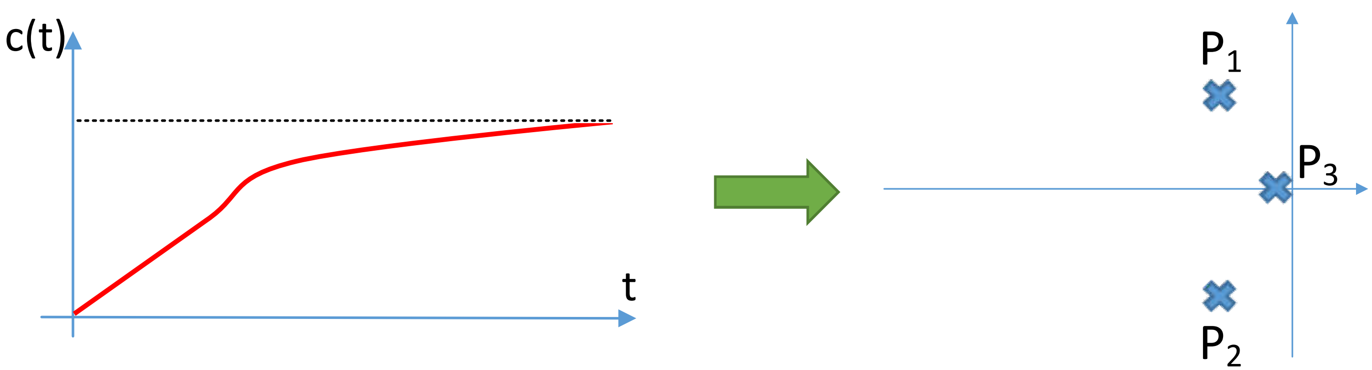




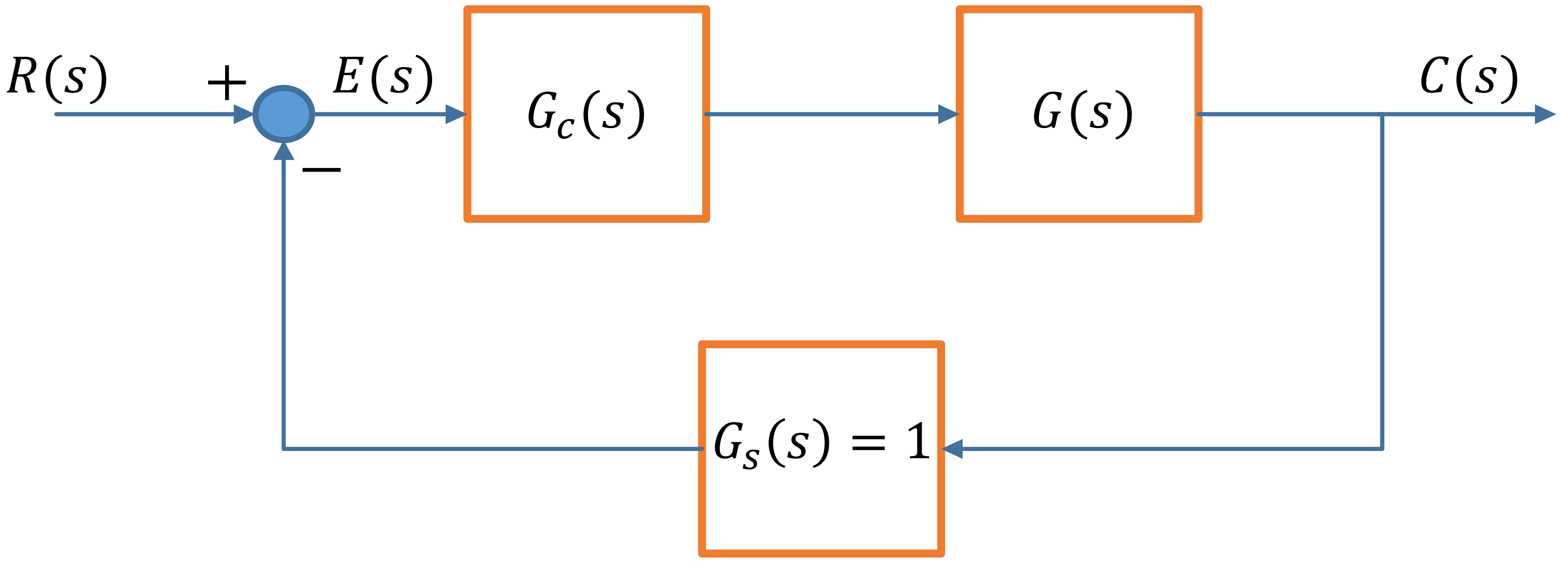
ادامه:







تحلیل خطای حالت ماندگار سیستم‌های کنترل:

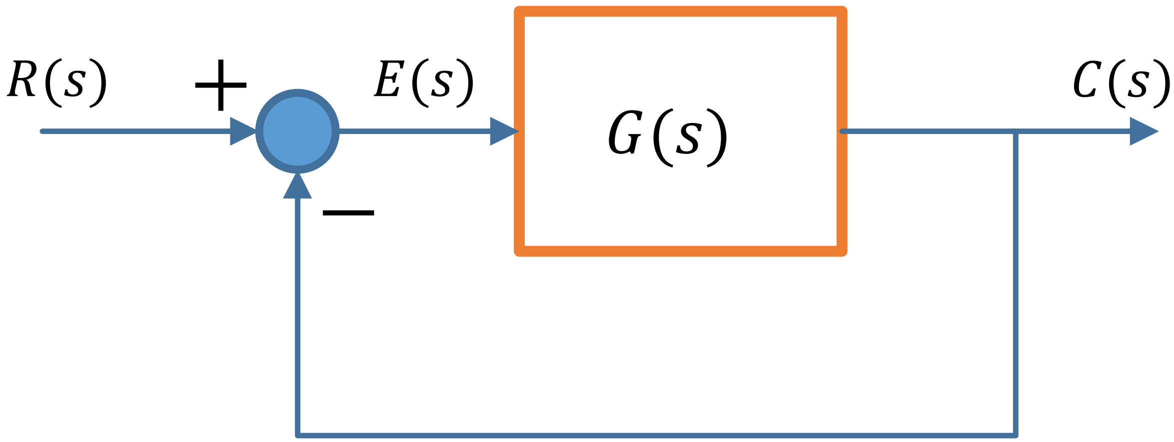


$$c(t) \rightarrow r(t) \equiv e(t) = y(t) - c(t)$$

هدف سیستم کنترلی حداقل کردن و یا نگه‌داشتن خطا در حد قابل قبول است.

$$|e(t)| < \varepsilon$$

نوع سیستم:



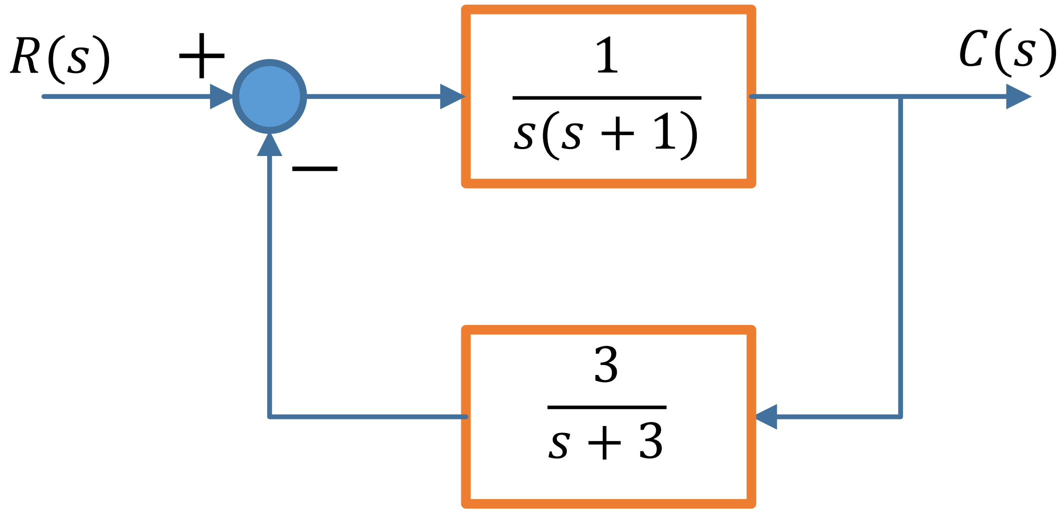
$$G(s) = \frac{K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)}{s^q(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)}$$

این سیستم مرتبه q+n است.

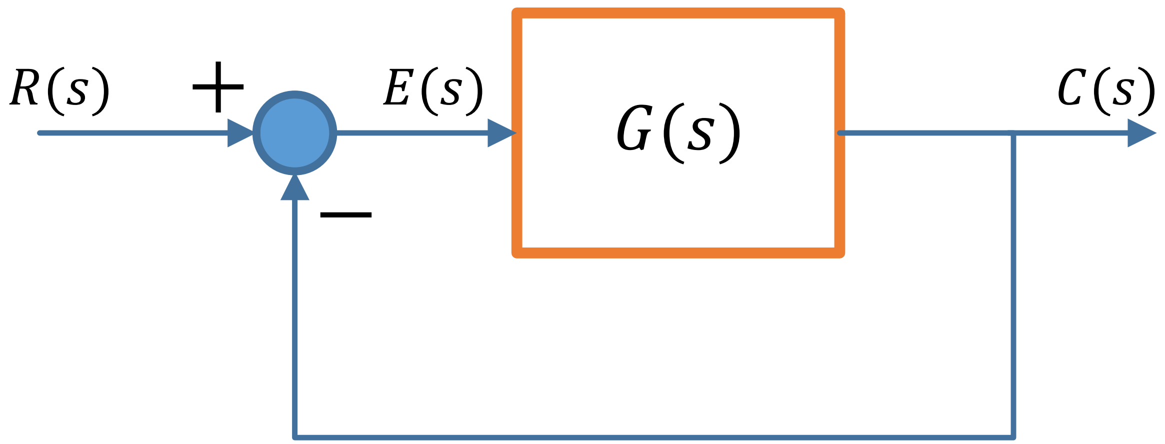
برای یک سیستم حلقه‌بسته با فیدبک واحد q که برابر تعداد قطب‌های در مبدأ تابع تبدیل حلقه‌باز است، نوع سیستم می‌باشد.

پس اگر q=0 باشد، سیستم را نوع صفر و اگر q=1 باشد سیستم را نوع یک و ... می‌نامیم.

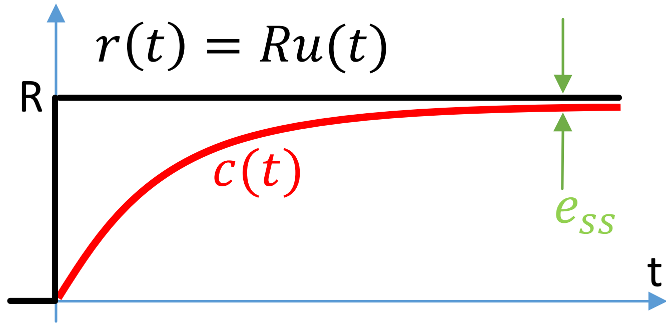
مثال: نوع سیستم زیر را بیابید.



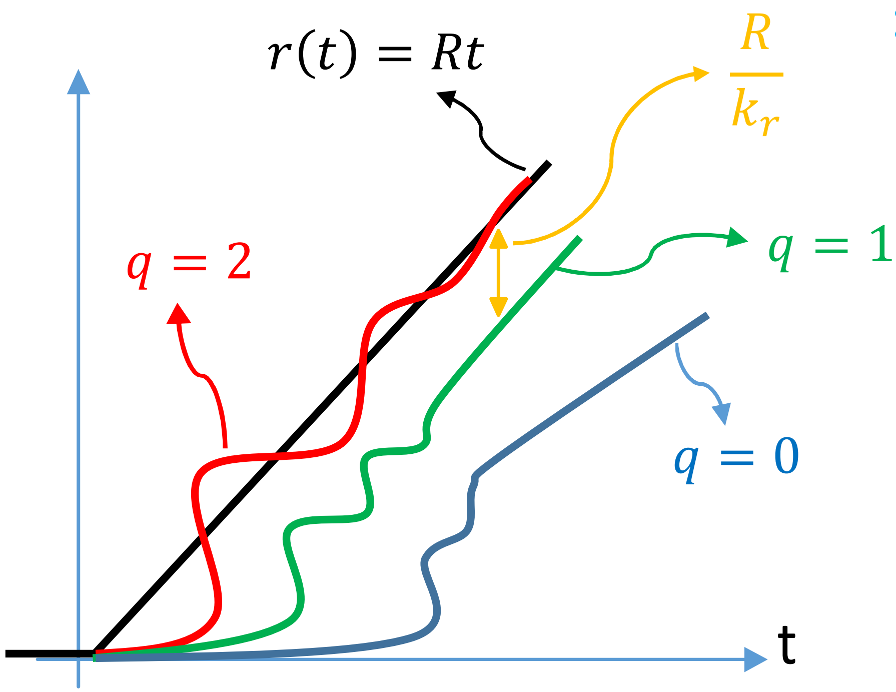
خطای حالت ماندگار:



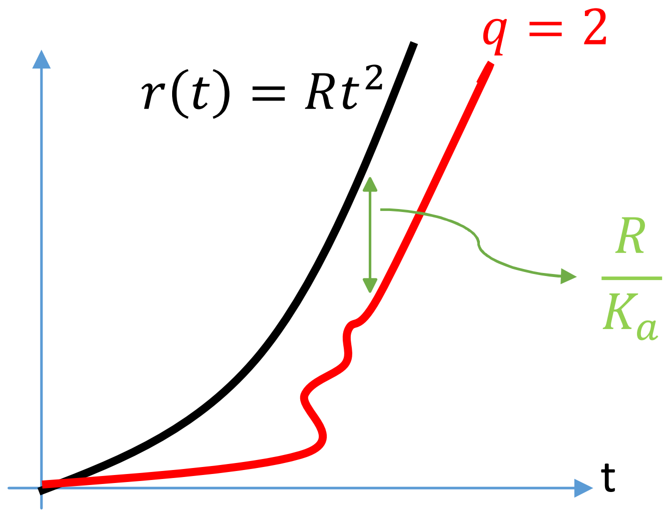
اگر ورودی سیستم پله باشد:



اگر ورودی سیستم شیب باشد:



اگر ورودی سیستم سهموی باشد:



خلاصه‌ی خطای حالت ماندگار:

نوع سیستم	ورودی پله	ورودی شیب	ورودی سهموی
0	$\frac{R}{1+K_s}$	∞	∞
1	0	$\frac{R}{K_r}$	∞
2	0	0	$\frac{R}{K_a}$
3	0	0	0