درس ۷ :جبر خطی کاربردی

فضاهای برداری و متعامدسازی

گروه کنترل – دانشگاه علم و صنعت

مدرس: دکتر عبادالهی

مثال ۱

معادله خطی را بیابید که از چهار نقطه زیر عبور کند،

(1,−1), (4,11), (−1,−9), (−2,−13)

فرم کلی معادله خط را به صورت y=mx+n در نظر می‌گیریم

برای اینکه خط مذکور از این نقاط عبور کند باید مختصات نقاط در آن صدق نماید. با قرار دادن هر یک از نقاط بالا در معادله خط، معادلات زیر بدست می‌آیند،

$$\left.\begin{aligned} m+n&=-1\\ 4m+n&=11\\ -m+n&=-9\\ -2m+n&=-13 \end{aligned}\right\}\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 4 & 1\\ -1 & 1\\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m\\ n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1\\ 11\\ -9\\ -13 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله خط مذکور بصورت $y=4x-5$ می باشد با حل معادلات بالا جواب $m=4$ و $n=-5$ به‌دست می‌آید
لازم به ذکر است که این نمونه ای از یک دستگاه معادلات سازگار است.

مثال ۲

معادله خطی را بیابید که از چهار نقطه زیر عبور کند،

(−3,70), (1,21), (−7,110), (5,−35)

همانند آنچه که در مثال قبل انجام شد، با قرار دادن هر یک از نقاط در معادله خط، معادلات زیر بدست می‌آیند،

$$\left.\begin{array}{l} -3m+n=70 \\ m+n=21 \\ -7m+n=110 \\ 5m+n=-35 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 21 \\ 110 \\ -35 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه این دستگاه معادلات ناسازگار است، لذا پاسخی برای آن وجود ندارد.

پس بر خلاف مثال قبل در این حالت نمی‌توان خطی را از این چهار نقطه عبور داد.

حل دستگاه معادلات خطی ناسازگار

دستگاه معادلات خطی ناسازگار

↓

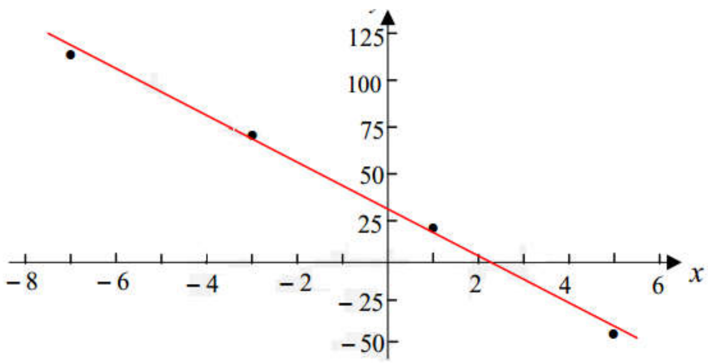
جواب ندارد

↓

چرا ما به این موضوع می‌پردازیم؟

بررسی دقیق‌تر مسئله

برای اینکه این سیستم ناسازگار را بیشتر بررسی نماییم نمودار مختصات نقاط را رسم می‌نماییم،



با توجه به شکل بالا چهار نقطه مذکور بر روی یک خط راست قرار ندارند و همانطور که گفته شد، دستگاه معادلات حاصل نیز ناسازگار می‌باشد. لیکن ممکن است این چهار نقطه از نتایج تجربی یک سری آزمایشات بدست آمده و به خاطر برخی خطاهای فیزیکی و اندازه گیری از مقدار واقعی خود منحرف شده بر راستای یک خط راست قرار نگرفته باشند. در اینجا مسئله‌ای که مطرح می‌شود آن است که آیا می‌توان معادله خطی را به‌دست آورد که این چهار نقطه بطور تقریبی بر روی آن قرار گیرد؟

مسئله حداقل مربعات(Least Square Problem)

اگر دستگاه معادلات خطی ناسازگار بصورت $A\underline{x} = \underline{b}$ باشد، آیا می توان برداری بصورت $\hat{x}$ پیدا کرد به طوری‌که $A\hat{x}$ تا حد ممکن به بردار $\underline{b}$ شبیه باشد؟

سیستم ناسازگار $\rightarrow Ax = b$ برقرار نیست

$$\boxed{\varepsilon = \underline{b} - A\underline{x}} \rightarrow \boxed{\|\varepsilon\| = \|\underline{b} - A\underline{x}\|}$$

بردار خطا

مقدار خطا

هدف:

$$\exists \hat{x} \rightarrow \|\hat{\varepsilon}\| = \|b - A\hat{x}\| \rightarrow$$ کوچکترین مقدار ممکن باشد

جواب حداقل مربعات(Least Square Solution)

تعبیر مسئله حداقل مربعات در فضای برداری

$$A_{m \times n} x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$$

اگر $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(A \mid b) \rightarrow b \notin R(A) \Rightarrow$ سیستم ناسازگار و دستگاه جواب ندارد.

اگر $b \in V_1$ باشد بهترین تقریب برای بردار $\underline{b}$ در فضای گستره ماتریس A چه خواهد بود؟

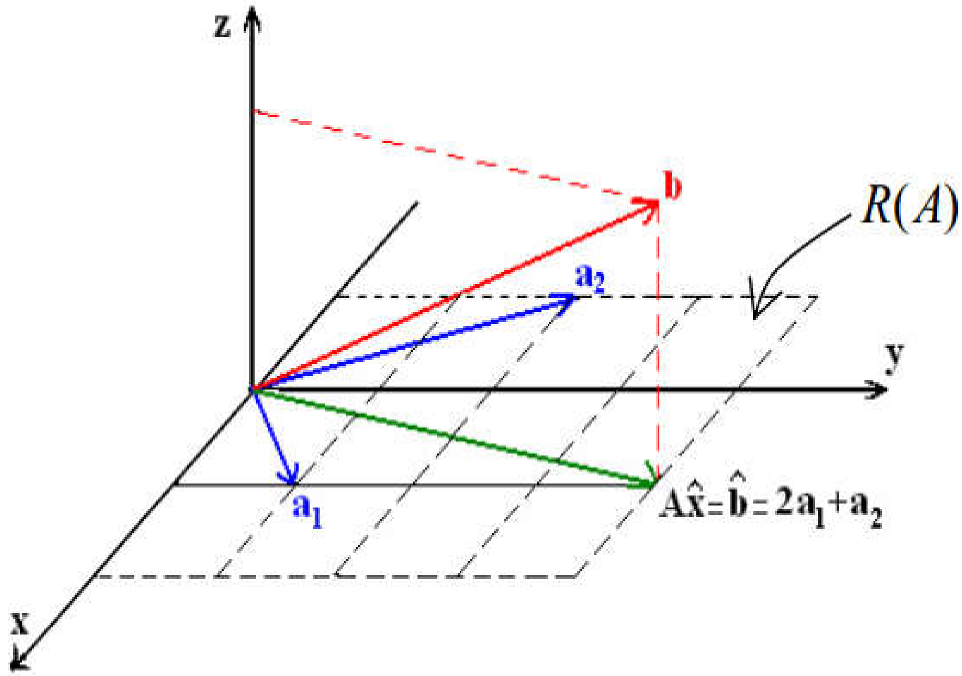
$b \notin R(A) \quad , \exists \hat{b} \in R(A) \rightarrow \|b - \hat{b}\| \rightarrow$ کوچکترین مقدار ممکن باشد

$$\boxed{A\hat{x}}$$

بهترین تقریب برای بردار b در $R(A)$ چیست؟

مثال ۳

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [a_1 \quad a_2], \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



حل مسئله حداقل مربعات با استفاده از تصاویر متعامد

اگر V_2 یک زیرفضای برداری از فضای V_1 باشد،

$$\forall\ \underline{u} \in V \Rightarrow \boxed{\underline{u} = \mathrm{proj}_{V_2}\underline{u} + \mathrm{proj}_{V_2^{\perp}}\underline{u}}$$

تصویر متعامد (Orthogonal Projection)

مولفه عمودی (Orthogonal Component)

بهترین تقریب برای بردار $\underline{u}$ در زیرفضای V_2 $\Rightarrow$ $\boxed{\left\|\underline{u} - \mathrm{proj}_{V_2}\underline{u}\right\| < \left\|\underline{u} - \underline{w}\right\|}$

هر بردار دیگری در زیرفضای V_2

اثبات

$$\forall \underline{w} \in V_2 \quad \rightarrow \quad \underline{u} - \underline{w} = (\underbrace{\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u}}_{\in V_2^{\perp}} + \underbrace{\mathrm{proj}_{v_2}\underline{u} - \underline{w}}_{\in V_2})$$

لذا،

$$\boxed{(\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u}) \perp (\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u} - \underline{w})}$$

رابطه فیثاغورث،

$$\boxed{\left\|\underline{u} - \underline{w}\right\|^2 = \left\|(\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u}) + (\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u} - \underline{w})\right\|^2 = \left\|\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u}\right\|^2 + \left\|\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u} - \underline{w}\right\|^2}$$

اگر $\quad \underline{w} \neq \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u} \Rightarrow \left\|\mathrm{proj}_{v_2}\underline{u} - \underline{w}\right\|^2 > 0$

$$\boxed{\left\|\underline{u} - \underline{w}\right\|^2 > \left\|\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u}\right\|^2 \quad \rightarrow \left\|\underline{u} - \underline{w}\right\| > \left\|\underline{u} - \mathrm{proj}_{v_2}\underline{u}\right\|}$$

جواب حداقل مربعات در حل دستگاه معادلات جبری خطی ناسازگار

سیستم ناسازگار $\rightarrow \quad A\,\underline{x} = \underline{b}$

اگر $\rightarrow \quad \boxed{A\hat{x} = \mathrm{proj}_{R(A)} b} \Rightarrow \boxed{\|\hat{\varepsilon}\| = \|b - A\hat{x}\|} \rightarrow$ کوچکترین مقدار ممکن است

تصویر متعامد بردار b بر R(A)

-یافتن $\mathrm{proj}_{R(A)} b$

-حل معادله $A\hat{x} = \mathrm{proj}_{R(A)} b$

-به‌دست آوردن $\hat{x}$

قضیه

اگر بردار $\hat{x}$ جواب مسئله حداقل مربعات برای دستگاه معادلات خطی ناسازگار $A\,\underline{x} = \underline{b}$ باشد، می‌تواند جواب دستگاه معادلات خطی زیر نیز باشد،

$$\boxed{A^T A\,\underline{x} = A^T \underline{b}}$$

معادلات نرمال

جواب مسئله حداقل مربعات $\underline{\hat{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{b} \quad \Leftarrow \quad rank(A) = n$ اگر

یعنی جوابی که $\|A\,x - b\|$ را مینیمم می‌نماید.

اثبات قضیه

$\hat{x} \rightarrow$ جواب مسئله حداقل مربعات $\Rightarrow A\hat{x} = proj_{R(A)}b$

لذا،

$$b - A\hat{x} = \underbrace{proj_{R(A)}}_{\downarrow} b$$

$N(A^T)$ یا $R(A)^{\perp}$

طبق تعریف،

$$N(A^T) = \left\{ x \in \Re^m \rightarrow A^T x = 0 \right\}$$

لذا،

$$A^T(b - A\hat{x}) = A^T(b - proj_{R(A)}b) = 0 \quad \rightarrow \quad A^T b = A^T A\hat{x}$$

اگر A $\rightarrow$ رتبه کامل $\rightarrow$ A^TA غیرمنفرد $\rightarrow$ $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$ جواب منحصربفرد

بنابراین می توان گفت که $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$ مقدار $\|Ax - b\|$ را مینیمم می‌کند.

معکوس چپ (Left Inverse) و ماتریس تصویر R(A)

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\boxed{A^L}$$ معکوس چپ

اگر A^L را از سمت چپ ضرب نماییم،

$$A^L A = (A^T A)^{-1} A^T A = (A^T A)^{-1} (A^T A) = I_n$$

$$\hat{b} = A\hat{x} = \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T b}_{P}$$

ماتریس تصویر R(A) (projection matrix)

مثال ۴

حال می‌توانیم حل مسئله حداقل مربعات را برای مثال قبل پیدا کنیم.

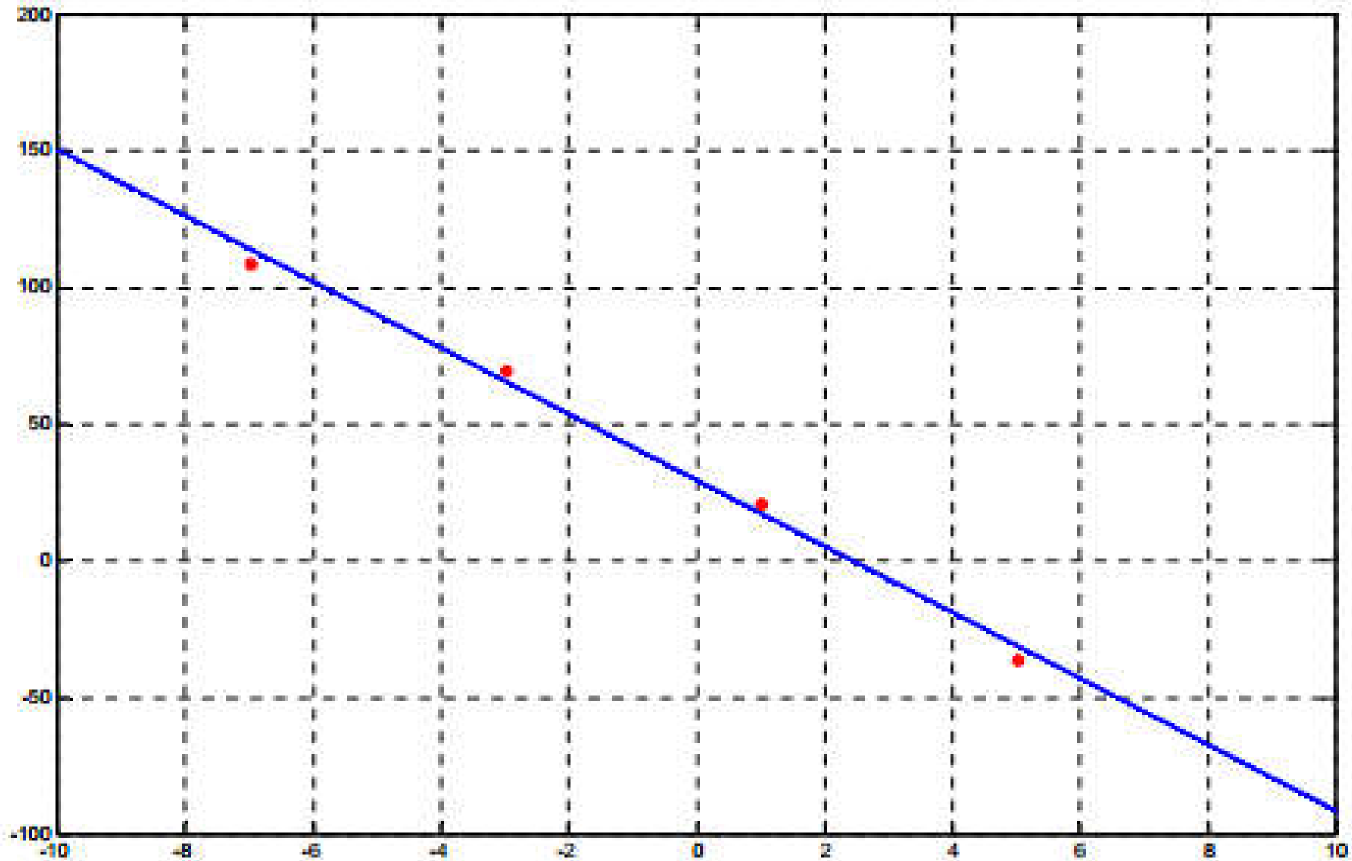
$$A\,\underline{x} = \underline{b} \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 21 \\ 110 \\ -35 \end{bmatrix}$$

لذا داریم،

$$A^T A\hat{x} = A^T b \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 21 \\ 110 \\ -35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 84 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1134 \\ 166 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{m} = \frac{-121}{10} = -12.1\,, \quad \hat{n} = \frac{147}{5} = 29.4 \rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.1 \\ 29.4 \end{bmatrix}$$

بنابراین بهترین تقریب برای خطی که از چهار نقطه (5,-35), (-7,110), (1,21), (-3,70) بگذرد بصورت زیر می‌باشد،



200
150
100
50
0
-50
-100
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

حال می‌توانیم خطای تقریب را نیز محاسبه کنیم،

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 21 \\ 110 \\ -35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70-(-3m+n) \\ 21-(m+n) \\ 110-(-7m+n) \\ -35-(5m+n) \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن مقدار تقریب $\hat{x}$ می‌توان نوشت،

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.1 \\ 29.4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \hat{\varepsilon}_1 = 70-(-12.1(-3)+29.4) = 4.3 \\ \hat{\varepsilon}_2 = 21-(-12.1(-1)+29.4) = 3.7 \\ \hat{\varepsilon}_3 = 110-(-12.1(-7)+29.4) = 4.1 \\ \hat{\varepsilon}_4 = 35-(-12.1(-5)+29.4) = 3.9 \end{cases}$$

بنابراین بردار خطا به‌صورت زیر بدست می‌آید،

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3 \\ 3.7 \\ -4.1 \\ -3.9 \end{bmatrix}$$

مقدار خطا را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد،

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = (4.3)^2 + (3.7)^2 + (4.1)^2 + (3.9)^2 = 64.2 \quad , \quad \|\varepsilon\| = \sqrt{64.2} = 8.0125$$

در واقع هر مقدار دیگری برای m و n انتخاب گردد خطا بزرگتر از 8.0125 خواهد شد.

استفاده از دستور pinv(A) در نرم افزار MATLAB

$$A = [-3 \quad 1 ; 1 \quad 1 ; -7 \quad 1 ; 5 \quad 1] ;$$

$$b = [70 ; 21 ; 110 ; -35] ;$$

$$x = \mathrm{pinv}(A) * b$$

$$x =$$

$$-12.1000$$

$$29.4000$$

مثال ۵

پنج نقطه زیر را در نظر بگیرید،

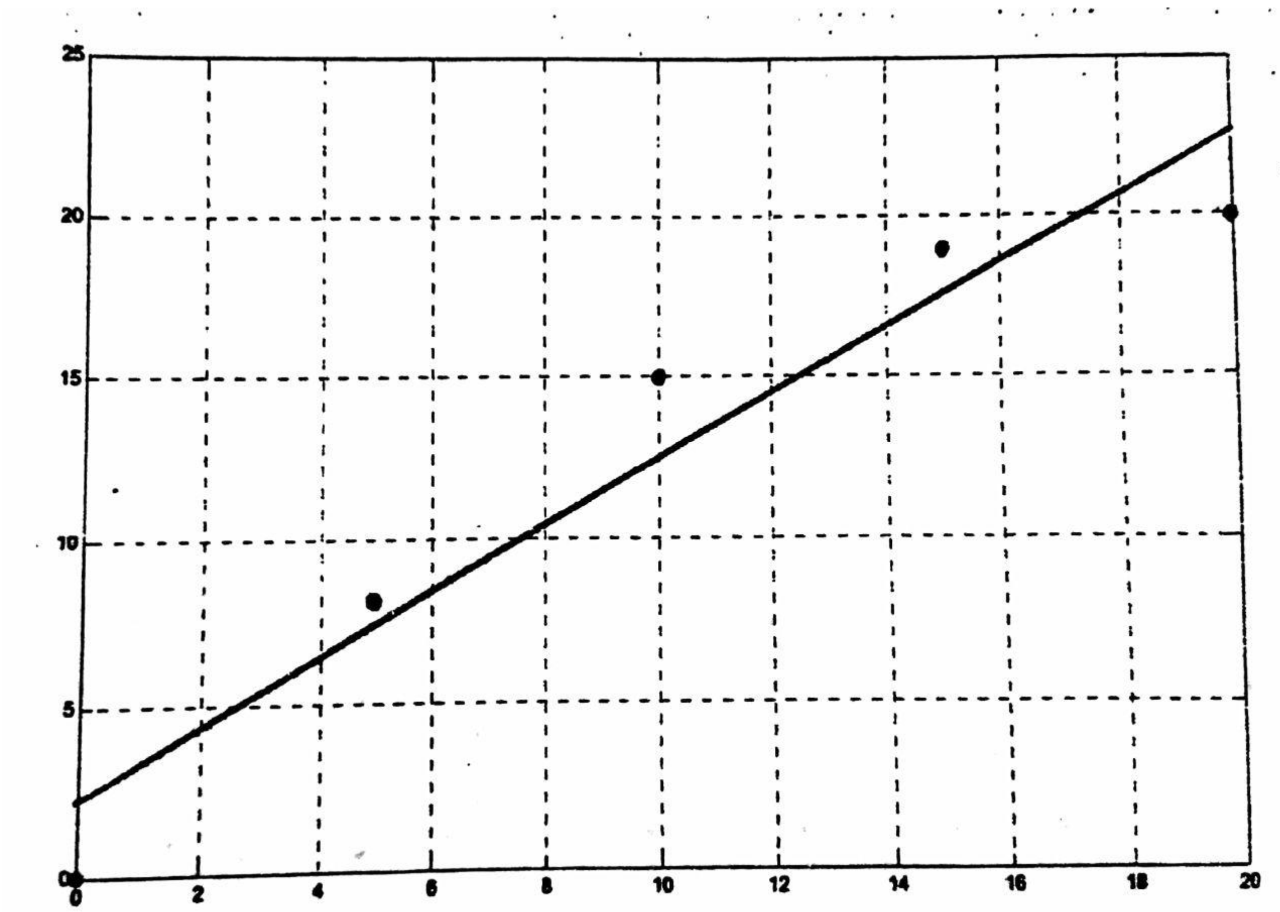
$$(0,0) \quad (5,8) \quad (10,15) \quad (15,19) \quad (20,20)$$

یک تقریب مرتبه یک y=mx+n برای این نقاط بصورت زیر بدست می آید،

$$\left.\begin{array}{l} 0m+n=0 \\ 5m+n=8 \\ 10m+n=15 \\ 15m+n=19 \\ 20m+n=20 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 10 & 1 \\ 15 & 1 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow \quad y = 1.02x + 2.2 \rightarrow \|\varepsilon\| = 4.5935$$

خطای تقریب نسبتاً زیاد است.

نقاط (20,20) (15,19) (10,15) (5,8) (0,0) و خط $y = 1.02x + 2.2$



تقریب نقاط با یک منحنی مرتبه دوم به فرم $y=\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$ بصورت زیر می باشد،

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0+0\alpha_1+0\alpha_2&=0\\
\alpha_0+5\alpha_1+25\alpha_2&=8\\
\alpha_0+10\alpha_1+100\alpha_2&=15\\
\alpha_0+15\alpha_1+225\alpha_2&=19\\
\alpha_0+20\alpha_1+400\alpha_2&=20
\end{aligned}\right\}\rightarrow
\begin{bmatrix}1&0&0\\1&5&25\\1&10&100\\1&15&225\\1&20&400\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}0\\8\\15\\19\\20\end{bmatrix}$$

$$y=-0.0486x^2+1.9914x-0.2286 \quad\rightarrow\quad \|\varepsilon\|=0.6761$$

در این حالت خطا بسیار کوچکتر است.

نقاط $(20,20)$ $(15,19)$ $(10,15)$ $(5,8)$ $(0,0)$ و خط $y = 1.02x + 2.2$

منحنی $y = -0.0486x^2 + 1.9914x - 0.2286$