جبر خطی کاربردی

درس ۱۳ : تجزیه مقادیر منفرد

گروه کنترل– ۱۳۹۷

مدرس :دکتر عباداللهی

کاربردهای تجزیه مقادیر منفرد

-به‌دست آوردن چهار زیر فضای اصلی ماتریس (fundamental subspaces)

$$\boxed{R(A), N(A), R(A^T), N(A^T)}$$

-محاسبه نُرم ماتریس‌ها

- محاسبه شبکه معکوس (pseudo inverse) ← حل مسئله حداقل مربعات در حالت کلی

- -تقریب ماتریس با یک ماتریس رتبه پایین ← کاهش نویز و فشرده سازی داده‌ها

استفاده از تجزیه مقادیر منفرد در حل مسئله حداقل مربعات

دستگاه معادلات ناسازگار زیر را در نظر بگیرید ،

$$\boxed{A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}}$$

-حل مسئله حداقل مربعات و محاسبه $\hat{x}$ به طوری که $\|A\hat{x}-b\|$ حداقل گردد.

اگر رتبه ماتریس $A_{m\times n}$ کامل باشد ، $\boxed{rank(A)=n}$

حل معادلات نرمال – تجزیه QR –تجزیه چالسکی

اگر رتبه ماتریس $A_{m\times n}$ کامل نباشد ، $\boxed{rank(A)=k}$ و یا $A^T A$ ماتریس ill condition باشد ،

تجزیه مقادیر منفرد (SVD)

خواص ماتریس شبه معکوس (Pseudo-Inverse)

-ماتریس شبه معکوس $A^{\#}$ شرایط زیر را دارد ،

۱- $AA^{\#}A = A$

۲- $A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}$

۳- $(AA^{\#})^{T} = AA^{\#}$

۴- $(A^{\#}A)^{T} = A^{\#}A$

این چهار شرط را شرایط مور- پِنرُس(Moore-Penrose Conditions) می‌نامند .

-برخی از خواص ماتریس شبه معکوس به صورت زیر است ،

۱- برای ماتریس $A_{m\times n}$ شبه معکوس $A^{\#}_{n\times m}$ منحصر به‌فرد است .

۲- $(A^{T})^{\#} = (A^{\#})^{T}, (A^{\#})^{\#} = A$

۳- $A^{\#} = (A^{T}A)^{\#}A^{T} = A^{T}(AA^{T})^{\#}$

۴- ماتریس های $I - AA^{\#}$ و $I - A^{\#}A$ و $AA^{\#}$ و $A^{\#}A$ متقارن هستند .

محاسبه شبه معکوس یک ماتریس (Pseudo-inverse)

-محاسبه معکوس یک ماتریس ،

$$\text{if } A_{n\times n} \text{ ، full rank} \rightarrow A^{-1}=(U\Sigma V^T)^{-1}=V\Sigma^{-1}U^T$$

$$\Sigma^{-1}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1},\frac{1}{\sigma_2},\ldots,\frac{1}{\sigma_n}\right)$$

-محاسبه شبه معکوس یک ماتریس ،

$$A_{m\times n} \rightarrow A^{\#}_{n\times m}=V\Sigma^{\#}U^T$$

$$\Sigma^{\#}_{n\times m}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1},\frac{1}{\sigma_2},\ldots,\frac{1}{\sigma_k},0,\ldots,0\right) \quad ، \quad \sigma_1\geq\sigma_2\geq\ldots\geq\sigma_k>0$$

- در این صورت $\hat{x}=A^{\#}b$ جواب مسئله حداقل مربعات خواهد بود .
- اگر ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه کامل داشته باشد ، $A^{\#}=(A^T A)^{-1}A^T$ معکوس چپ است .
- اگر ماتریس $A_{n\times n}$ رتبه کامل داشته باشد، $A^{\#}=A^{-1}$ است .

مثال ۱

با استفاده از روش تجزیه مقادیر منفرد ، برای ماتریس A یک شبه معکوس بیابید و نشان دهید $AA^{\#}$ یک ماتریس متقارن است .

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به صورت زیر می باشد ،

$$A=\begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7071 & -0.4082 \\ -0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ -0.5774 & 0 & -0.8165 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4495 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0.5774 & 0.1066 & -0.8095 \\ -0.5774 & 0.5774 & 0.3515 & 0.4581 \\ -0.5774 & 0 & -0.8095 & -0.1066 \\ -0.5774 & -0.5774 & 0.4581 & -0.3515 \end{bmatrix}^T$$

لذا rank(A)=2 است ، بنابر این $\sum^{\#}$ و $A^{\#}$ به صورت زیر به دست می‌آیند ،

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^{T} = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.1667 & 0 \\ 0.0556 & 0.2778 & 0.1111 \\ -0.1111 & 0.1111 & 0.1111 \\ -0.2778 & -0.0556 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

حال می توان نشان داد که $AA^{\#}$ یک ماتریس متقارن است ،

$$AA^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.1667 & 0 \\ 0.0556 & 0.2778 & 0.1111 \\ -0.1111 & 0.1111 & 0.1111 \\ -0.2778 & -0.0556 & 0.1111 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8333 & 0.1667 & -0.3333 \\ 0.1667 & 0.8333 & 0.3333 \\ -0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

-دستور pinv(A) برای محاسبه شبه معکوس در نرم افزار متلب وجود دارد .

```
A =[1 0 -1 -2;1 2 1 0;0 1 1 1];
pinv(A)
ans =
    0.1667    0.1667   -0.0000
    0.0556    0.2778    0.1111
   -0.1111    0.1111    0.1111
   -0.2778   -0.0556    0.1111
```

مشخص است که پاسخ به دست آمده با جوال مسئله حل شده یکسان است .

مثال ۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید ،

$$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید ، سپس جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد به‌دست آورید و نُرم خطا را بررسی کنید.

-ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن سیستم را بررسی می‌نماییم.

از آنجاییکه rank(A)=2 و $\text{rank}(A|b) = 3$ است ، لذا سیستم ناسازگار است و باید جواب حداقل مربعات را برای آن به‌دست آورد.

-از آن جایی که ماتریس A نقص رتبه دارد نمی‌توان جواب حداقل مربعات را با استفاده از معادله نرمال به‌صورت $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ به‌دست آورد ، لذا در چنین واقعی از ماتریس شبه معکوس و تجزیه مقادیر منفرد برای حل مسئله حداقل مربعات استفاده می‌نماییم.

-تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به صورت زیر می‌باشد ، $A = U\Sigma V^T$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0849 & 0.9089 & 0.4082 \\ 0.8736 & 0.2650 & -0.4082 \\ 0.4792 & -0.3220 & 0.8165 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7651 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2852 & 0.7651 & 0.5774 \\ 0.8052 & 0.1355 & -0.5774 \\ 0.5199 & -0.6295 & 0.5774 \end{bmatrix}^T$$

حال ماتریس شبه معکوس را به‌دست می‌آوریم ، $A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} 1/2.7651 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^{\#} = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.2222 & -0.1111 \\ 0.0556 & 0.2778 & 0.1111 \\ -0.3889 & -0.6295 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات به صورت زیر به‌دست می‌آید ،

$$\hat{x} = A^{\#}b \rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 0.5556 \\ 0.4444 \\ -0.1111 \end{bmatrix}$$

حل مسئله حداقل مربعات با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد روشی با محاسبات بالا ولی پایداری بسیار خوب است و در مواقعی که ماتریس A نقص رتبه دارد یا $A^T A$ ماتریس ill condition است ، کارایی خوبی دارد .

سوال : اگر $A^{\#}=V\sum^{\#}U^{T}$ تعریف شود ، چرا $\hat{x}=A^{\#}b$ پاسخ مسئله حداقل مربعات برای دستگاه معادلات ناسازگار $Ax=b$ خواهد بود ؟

دستگاه معادلات ناسازگار $Ax=b$ را در نظر بگیرید. به دلیل ناسازگار بودن سیستم، $b\notin R(A)$ لذا به دنبال بردار $\hat{b}\notin R(A)$ هستیم تا بهترین تخمین برای بردار b باشد ، بطوریکه $\left\|\hat{b}-b\right\|$ حداقل گردد.که در این صورت با حل دستگاه معادلات سازگار $A\hat{x}=\hat{b}$ مقدار $\hat{x}$ که همان پاسخ مسئله حداقل مربعات است به‌دست می‌آید. با توجه به درس های قبلی می‌دانیم بهترین تخمین برای بردار b تصویر متعامد آن بر فضای R(A) است . به‌طور مثال دستگاه معادلات ناسازگار $A_{4\times 3}x=b$ را در نظر بگیرید ، بردار $\hat{b}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید ،

$$proj_{R(A)}^{b}=\hat{b}=\frac{\langle w_1,b\rangle}{\|w_1\|}w_1+\frac{\langle w_2,b\rangle}{\|w_2\|}w_2+\frac{\langle w_3,b\rangle}{\|w_3\|}w_3$$

که در w_1,w_2,w_3 پایه‌های متعامد زیرفضای R(A) هستند.حال اگر تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A رابه‌دست آوریم ،

$$A=U\sum V^{T}=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1^{T}\\ V_2^{T}\\ V_3^{T}\end{bmatrix}=u_1\sigma_1v_1^{T}+u_2\sigma_2v_2^{T}+u_3\sigma_3v_3^{T}$$

بردارهای u_1,u_2,u_3 پایه‌های یکامتعامد زیر فضای R(A) هستند ، لذا بردار $\hat{b}$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد،

$$\hat{b}=\langle u_1,b\rangle u_1+\langle u_2,b\rangle u_2+\langle u_3,b\rangle u_3=(u_1^{T}b)u_1+(u_2^{T}b)u_2+(u_3^{T}b)u_3$$

از طرفی با توجه به تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A داریم ،

$$A=u_i\sigma_i v_i^T \rightarrow \frac{1}{\sigma_i}Av_i=u_i$$

حال با جایگذاری در بردار $\hat{b}$ عبارت زیر به‌دست می‌آید ،

$$\hat{b}=\frac{(u_1^Tb)}{\sigma_1}Av_1+\frac{(u_2^Tb)}{\sigma_2}Av_2+\frac{(u_3^Tb)}{\sigma_3}Av_3=A\left(\frac{(u_1^Tb)}{\sigma_1}v_1+\frac{(u_2^Tb)}{\sigma_2}v_2+\frac{(u_3^Tb)}{\sigma_3}v_3\right)=A\hat{x}$$

لذا مقدار $\hat{x}$ که همان پاسخ مسئله حداقل مربعات است به صورت زیر به‌دست می‌آید ،

$$\hat{x}=\frac{(u_1^Tb)}{\sigma_1}v_1+\frac{(u_2^Tb)}{\sigma_2}v_2+\frac{(u_3^Tb)}{\sigma_3}v_3=v_1\frac{1}{\sigma_1}u_1{}^Tb+v_2\frac{1}{\sigma_2}u_2{}^Tb+v_3\frac{1}{\sigma_3}u_3{}^Tb$$

$$=(v_1\frac{1}{\sigma_1}u_1{}^T+v_2\frac{1}{\sigma_2}u_2{}^T+v_3\frac{1}{\sigma_3}u_3{}^T)b=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^T\\ u_1^T\\ u_3^T\end{bmatrix}b=A^{\#}b$$

زیرا طبق تعریف شبه معکوس داشتیم ،

$$A^{\#} = V^T \Sigma^{\#} U = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_1^T \\ u_3^T \\ u_4^T \end{bmatrix} = v_1 \frac{1}{\sigma_1} u_1^T + v_2 \frac{1}{\sigma_2} u_2^T + v_3 \frac{1}{\sigma_3} u_3^T$$

لذا $\hat{x} = A^{\#} b$ همان پاسخ مسئله حداقل مربعات خواهد بود.

تقریب یک ماتریس با یک ماتریس رتبه پایین‌تر

<u>Low rank matrix approximation</u>

-تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به صورت زیر باشد ،

$$A = \left[U_1 \middle| U_2 \right] \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} V^T{}_1 \\ \hline V^T{}_2 \end{array} \right], \qquad \mathrm{rank}(A) = r$$

-مسئله یافتن ماتریسی مانند B با رتبه $k < r$ است ، به طوریکه $\|A - B\|$ حداقل گردد .

-کاربرد در کاهش نویز

-کاربرد در فشرده سازی داده ها (Data Compression)

-تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را به صورت زیر بیان می‌کنیم ،

$$A = U\Sigma V^T \qquad\qquad \mathrm{rank}(A) = r$$

$$A = \left[U_{1a} \middle| U_{1b} \middle| U_2\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} \sigma_1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & & & & \\ \hline & & & \sigma_{k+1} & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots & & 0 \\ & & & 0 & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & & 0 & & 0 \\ & & & & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V^T{}_{1a} \\ \hline V^T{}_{1b} \\ \hline V^T{}_2 \end{array}\right],$$

$$A = u_1\sigma_1 v^T{}_1 + \ldots + u_k\sigma_k v^T{}_k + u_{k+1}\sigma_{k+1} v^T{}_{k+1} + \ldots + u_r\sigma_r v^T{}_r$$

می‌خواهیم ماتریس A را با یک ماتریس رتبه پایین‌تر تقریب بزنیم . لذا اگر مقادیر منفرد σ_{k+1}به بعد مقدار کوچکی داشته باشند جملات $u_{k+1}\sigma_{k+1} v^T{}_{k+1} + \ldots + u_r\sigma_r v^T{}_r$ نقش چندانی در ایجاد ماتریس A ندارند و می‌توان از آن ها صرف‌نظر نمود.

-حال اگر ماتریس B را بصورت زیر انتخاب نماییم جواب مسئله خواهد بود ،

$$B = \left[U_{1a} \,\middle|\, U_{1b} \,\middle|\, U_2 \right] \left[\begin{array}{ccc|c|c} \sigma_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & & \sigma_r & & \\ \hline & 0 & & 0 & 0 \\ \hline & 0 & & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} V^T_{1a} \\ \hline V^T_{1b} \\ \hline V^T_2 \end{array} \right],$$

$$B = u_1 \sigma_1 v^T_1 + \ldots + u_k \sigma_k v^T_k \qquad \operatorname{rank}(B) = r$$

$$\boxed{A - B = U \Sigma_A V^T - U \Sigma_B V^T = U(\Sigma_A - \Sigma_B) V^T \rightarrow \|A - B\| = \sigma_{k+1}}$$

مثال ۳

رتبه ماتریس A چهار است و لیکن می‌توان آن را با دقت خوبی به صورت یک ماتریس رتبه دو تقریب زد.

$$A = \begin{bmatrix} 11.08 & 6.82 & 1.76 & -6.82 \\ 2.50 & -1.01 & -2.60 & 1.19 \\ -4.88 & -5.07 & -3.21 & 5.20 \\ -0.49 & 1.52 & 2.07 & -1.66 \\ -14.04 & -12.40 & -6.66 & 12.65 \\ 0.27 & -8.51 & -10.19 & 9.15 \\ 9.53 & -9.84 & -17.00 & 11.00 \\ -12.01 & 3.64 & 11.10 & -4.48 \end{bmatrix}$$

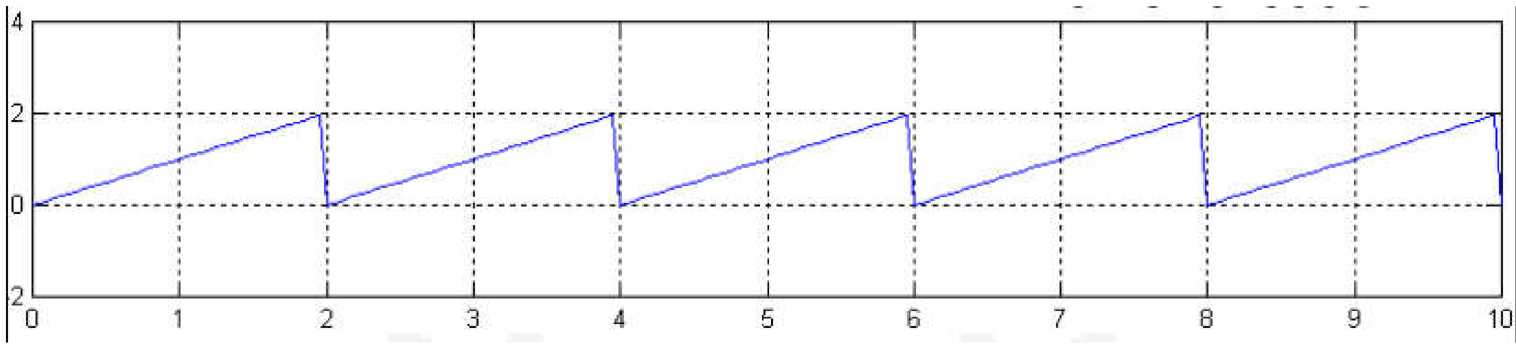
$$\approx \begin{bmatrix} -0.25 & 0.45 & 0.62 & 0.33 & 0.46 & 0.05 & -0.19 & 0.01 \\ 0.07 & 0.11 & 0.28 & -0.78 & -0.10 & 0.33 & -0.42 & 0.05 \\ 0.21 & -0.19 & 0.49 & 0.11 & -0.47 & -0.61 & -0.24 & -0.01 \\ -0.08 & -0.02 & 0.20 & 0.06 & -0.27 & 0.30 & 0.20 & -0.86 \\ 0.50 & -0.55 & 0.14 & -0.02 & 0.61 & 0.02 & -0.08 & -0.20 \\ 0.44 & 0.03 & -0.05 & 0.50 & -0.30 & 0.55 & -0.36 & 0.18 \\ 0.59 & 0.43 & 0.21 & -0.14 & -0.03 & -0.00 & 0.62 & 0.13 \\ -0.30 & -0.51 & 0.43 & 0.02 & -0.14 & 0.34 & 0.41 & 0.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36.83 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.04 & -0.54 & -0.61 & 0.58 \\ 0.92 & 0.17 & -0.33 & -0.14 \\ -0.14 & -0.49 & -0.31 & -0.80 \\ -0.36 & 0.66 & -0.65 & -0.09 \end{bmatrix}$$

$$A_{\text{approx}} \approx \begin{bmatrix} -0.25 & 0.45 \\ 0.07 & 0.11 \\ 0.21 & -0.19 \\ -0.08 & -0.02 \\ 0.50 & -0.55 \\ 0.44 & 0.03 \\ 0.59 & 0.43 \\ -0.30 & -0.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36.83 & 0 \\ 0 & 26.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.04 & -0.54 & -0.61 & 0.58 \\ 0.92 & 0.17 & -0.33 & -0.14 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 11.08 & 6.83 & 1.77 & -6.81 \\ 2.50 & -1.00 & -2.60 & 1.19 \\ -4.88 & -5.07 & -3.21 & 5.21 \\ -0.49 & 1.52 & 2.07 & -1.66 \\ -14.04 & -12.40 & -6.66 & 12.65 \\ 0.27 & -8.51 & -10.19 & 9.15 \\ 9.53 & -9.84 & -17.00 & 11.00 \\ -12.01 & 3.64 & 11.10 & -4.47 \end{bmatrix}$$

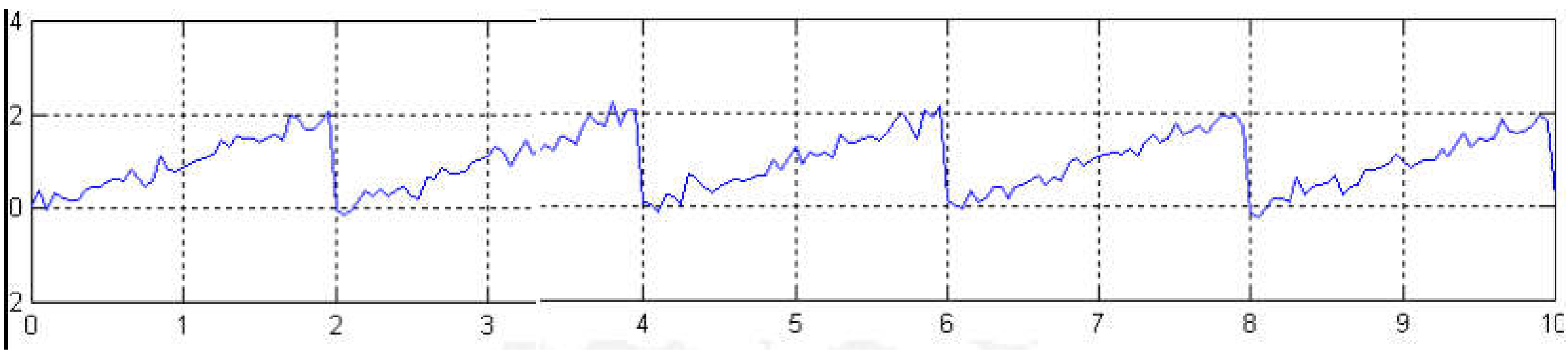
here $\|A - A_{\text{approx}}\| \leq \sigma_3 \approx 0.02$

استفاده از تقریب رتبه پایین ماتریس ها در کاهش نویز

-سیگنال زیر را در نظر بگیرید ،



-اگر سیگنال بنا به دلایلی نویزی گردد ،



-می‌توان با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد و کاهش رتبه ماتریس نویز موجود را کم کرد.

-ابتدا از سیگنال نویزی مربوطه با نرخ مناسب نمونه برداری می‌نماییم و آن را به صورت یک ماتریس بیان می‌کنیم ،

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_r\end{bmatrix} \rightarrow A_{m\times n}=\begin{bmatrix}x_1 & x_{m+1} & x_{2m+1} & \dots \\ x_2 & x_{m+1} & x_{2m+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & x_{2m} & x_{3m} & \dots\end{bmatrix}$$

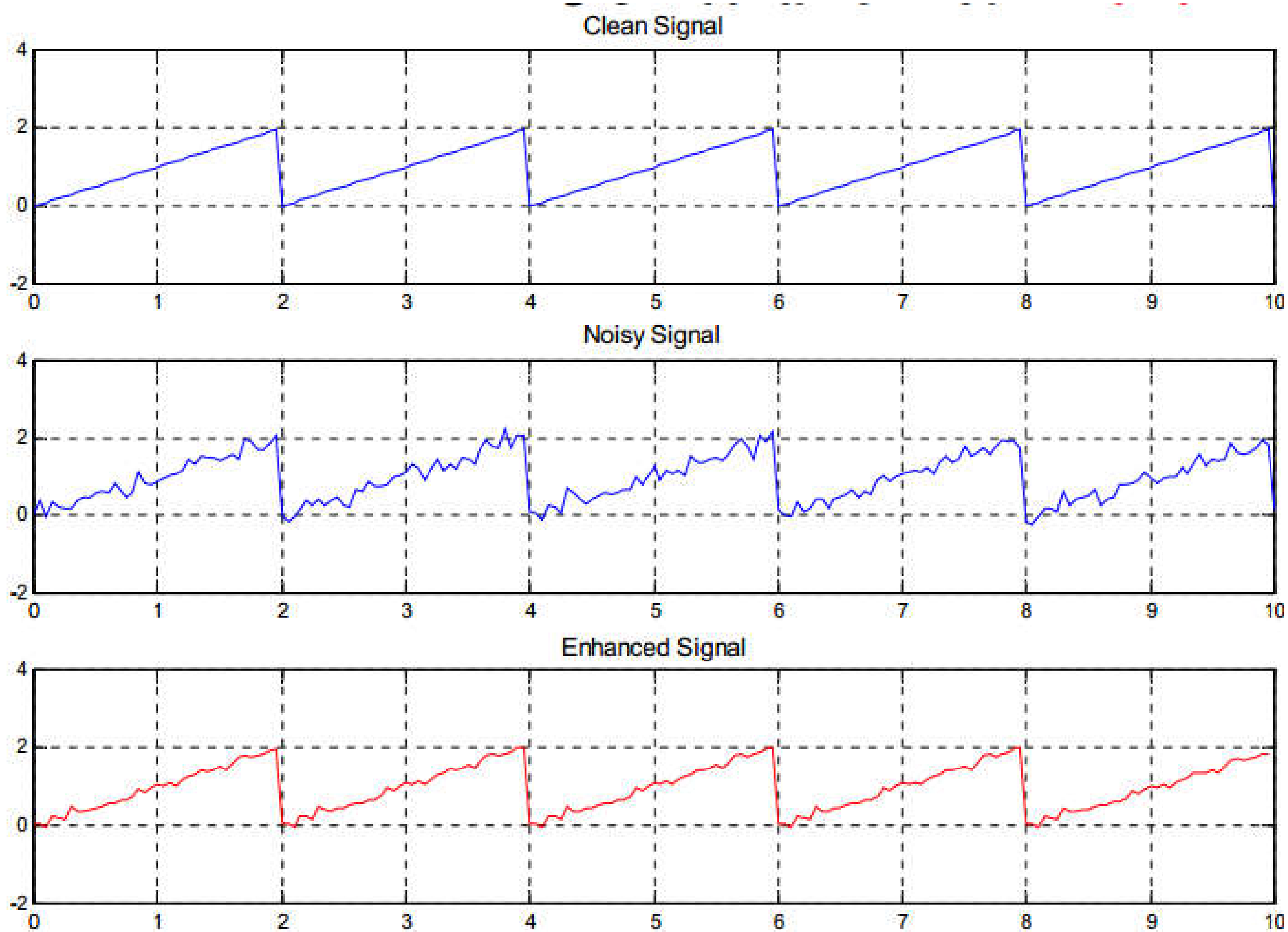
در این مسئله ۲۰۰ داده حاصل از نمونه برداری به صورت یک ماتریس ۵×۴۰ بیان شده است.

- سپس تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را به دست می‌آوریم و با توجه به مقادیر منفرد موجود یک تقریب با رتبه کمتر برای ماتریس A محاسبه می‌کنیم .

در این مسئله مقادیر منفرد به صورت زیر است و یک تقریب رتبه یک در نظر گرفته شده است .

$$\boxed{\sigma_1=16.0649,\sigma_2=1.0639,\sigma_3=0.9626,\sigma_4=0.7768,\sigma_5=0.7289}$$

-با تقریب رتبه یک نویز سیگنال به صورت زیر کاهش می‌یابد ،



- در واقع نویز سبب می شود تا مقادیر منفرد بسیار کوچک یا صفر یک ماتریس افزایش پیدا کنند و به نوعی غالب گردند.

در این مسئله مقادیر منفرد سیگنال بدون نویز به صورت زیر است ،

$$\boxed{\sigma_1 = 16.0649, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0, \sigma_4 = 0, \sigma_5 = 0}$$

مقادیر منفرد سیگنال نویزی را هم داریم ،

$$\boxed{\sigma_1 = 16.0649, \sigma_2 = 1.0639, \sigma_3 = 0.9626, \sigma_4 = 0.7768, \sigma_5 = 0.7289}$$

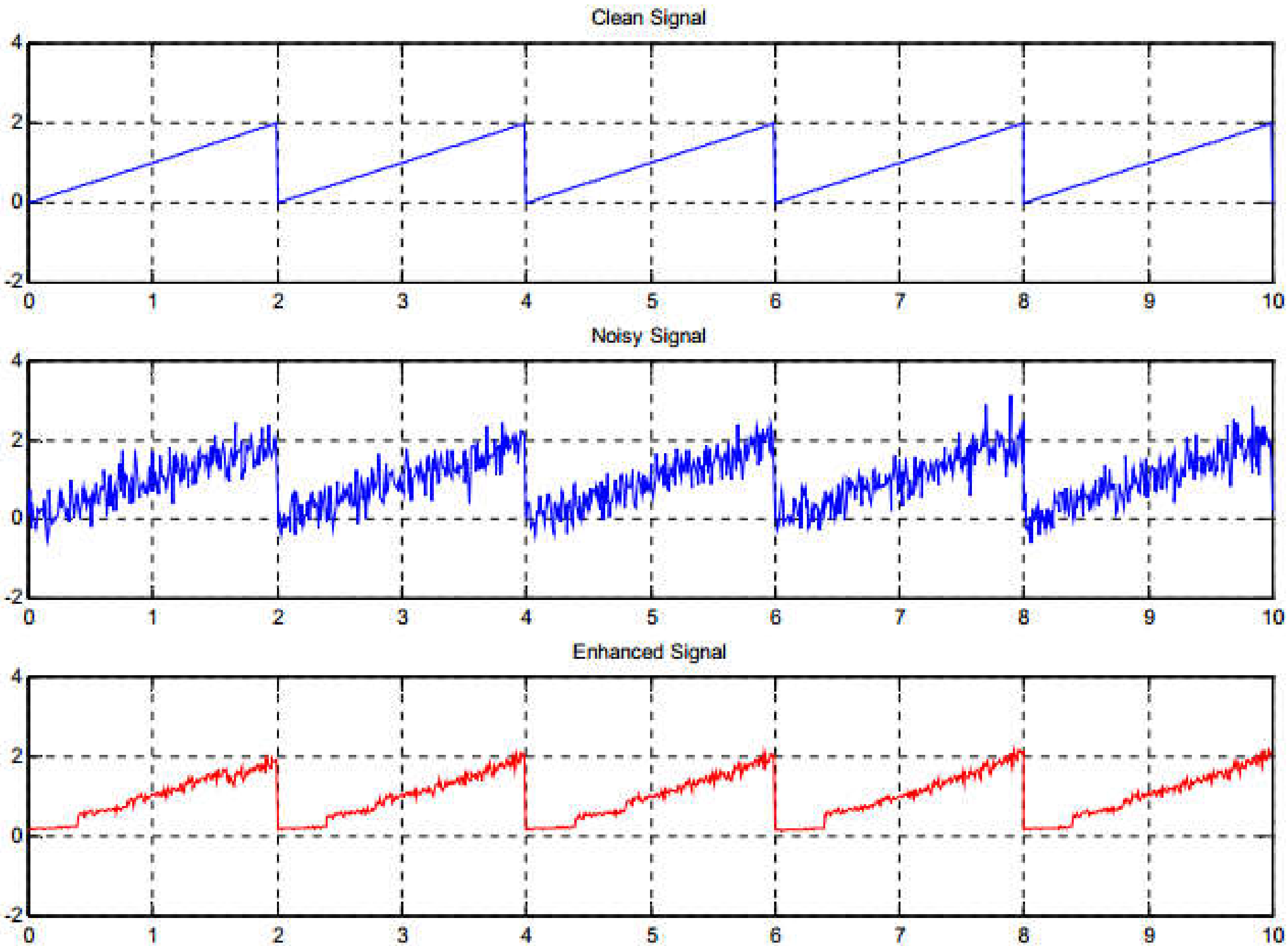
- در واقع با کاهش رتبه ماتریس اثر آن دسته از مقادیر منفرد را که توسط نویز غالب تر گشته اند را از بین می‌بریم ،

- در حالت بعدی فرکانس نویز را افزایش دادیم و دوباره نمونه برداری کرده ماتریس A را به دست آوردیم این بار نرخ نمونه برداری را بالاتر انتخاب کردیم ،

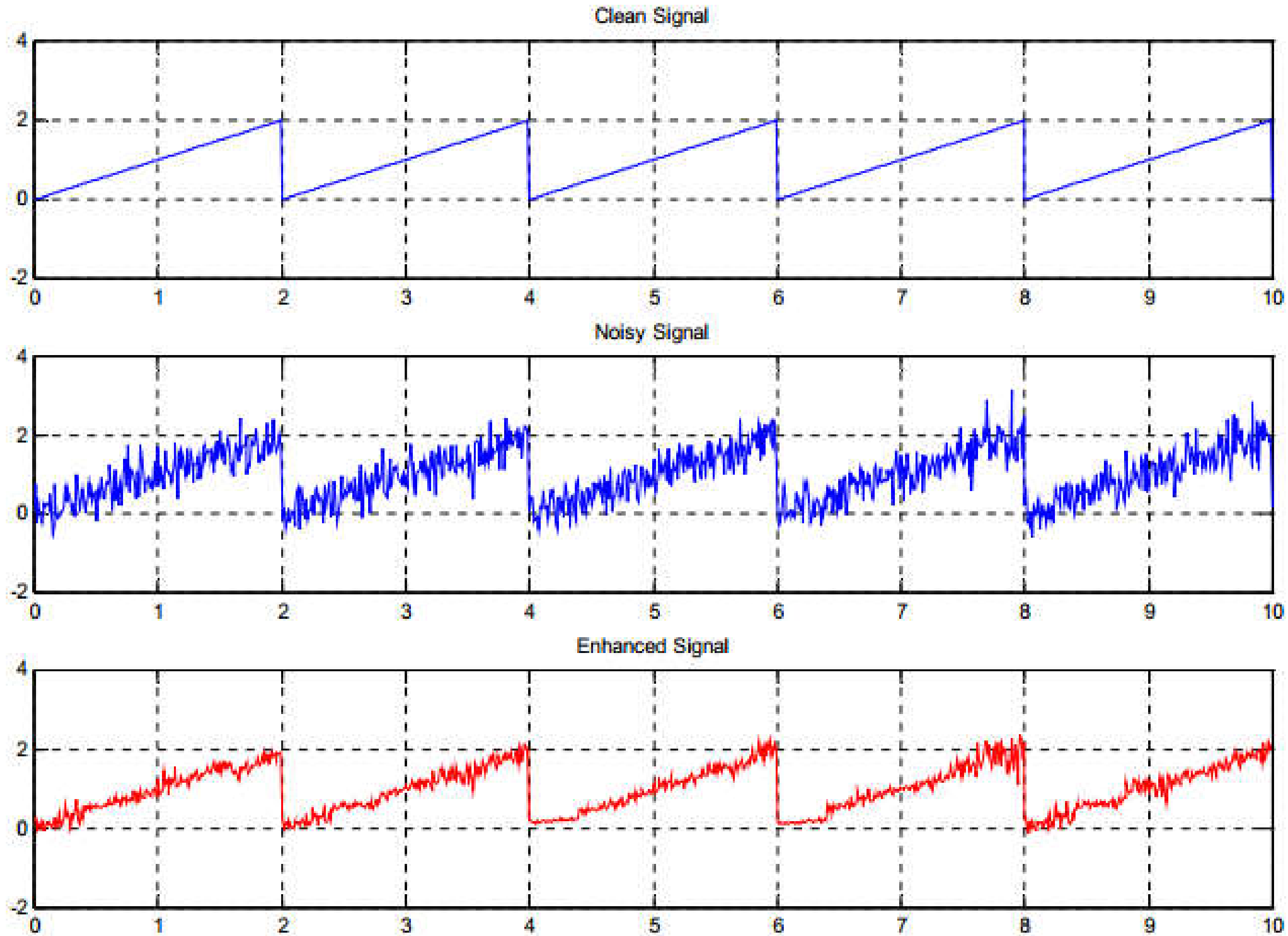
در این مسئله ۱۰۰۰ داده حاصل از نمونه برداری به صورت یک ماتریس ۲۵×۴۰ بیان شده است .
لذا ۲۵ تا مقدار منفرد داریم ،

$$\sigma_1 = 36.1256, \quad \sigma_2 = 3.3546, \quad \sigma_3 = 3.1330, \quad \sigma_4 = 2.9426, \quad \sigma_5 = 2.8992$$
$$\sigma_6 = 2.7629, \quad \sigma_7 = 2.5845, \quad \sigma_8 = 2.4875, \quad \sigma_9 = 2.3294, \quad \sigma_{10} = 2.2070$$
$$\sigma_{11} = 2.1174, \quad \sigma_{12} = 1.9658, \quad \sigma_{13} = 1.9043, \quad \sigma_{14} = 1.7803, \quad \sigma_{15} = 1.7182$$
$$\sigma_{16} = 1.5574, \quad \sigma_{17} = 1.4762, \quad \sigma_{18} = 1.2959, \quad \sigma_{19} = 1.2511, \quad \sigma_{20} = 1.1944$$
$$\sigma_{21} = 1.0308, \quad \sigma_{22} = 0.9332, \quad \sigma_{23} = 0.8637, \quad \sigma_{24} = 0.7150, \quad \sigma_{25} = 0.5875$$

-با تقریب رتبه یک نویز سیگنال کاهش می یابد ولی شکل سیگنال کمی تخریب شده است ،



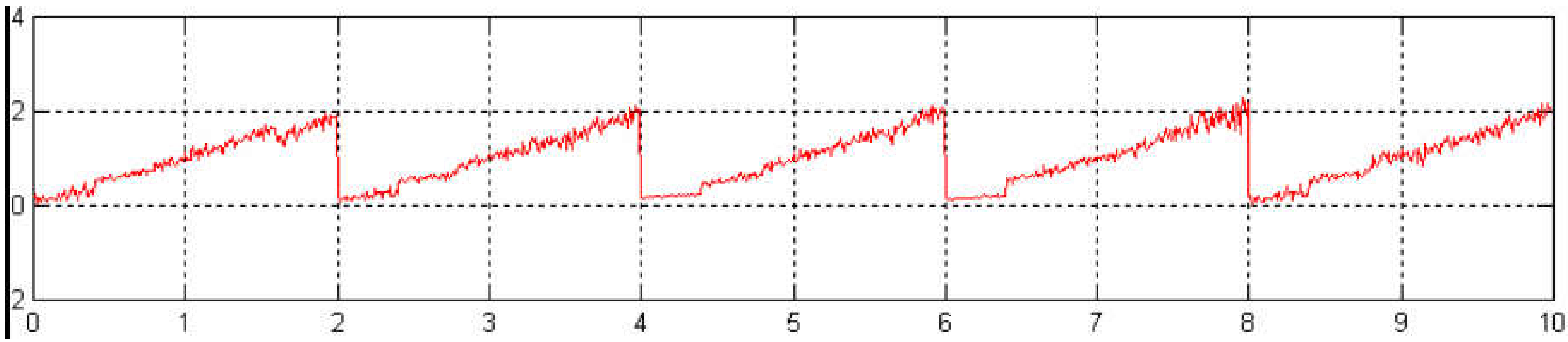
- با تقریب رتبه دو نویز سیگنال کاهش یافته و شکل سیگنال نیز بهتر است ،



- لذا اینکه رتبه ماتریس را تا چه حدی کاهش دهیم به کیفیت مورد انتظار از سیگنال هم‌بستگی دارد .

- در برخی موارد برای کاهش اثر مقادیر منفرد ناخواسته از وزن دهی (weighting) نیز استفاده می شود ،

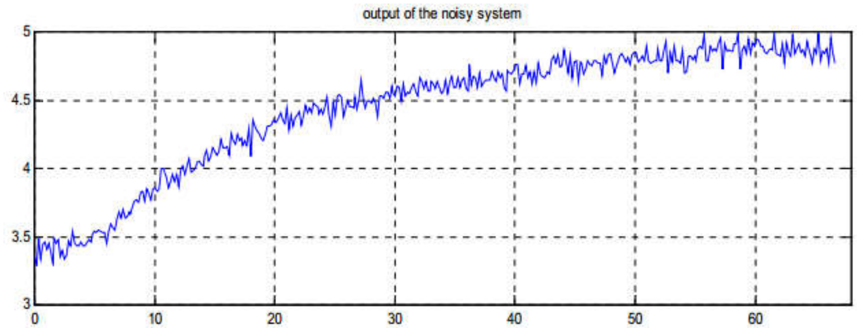
- در این مسئله یک تقریب رتبه دو از ماتریس در نظر گرفته شده است لیکن اندازه σ_2 با وزن ۰.۵ در مسئله وارد شده است . جواب به‌صورت زیر است ،

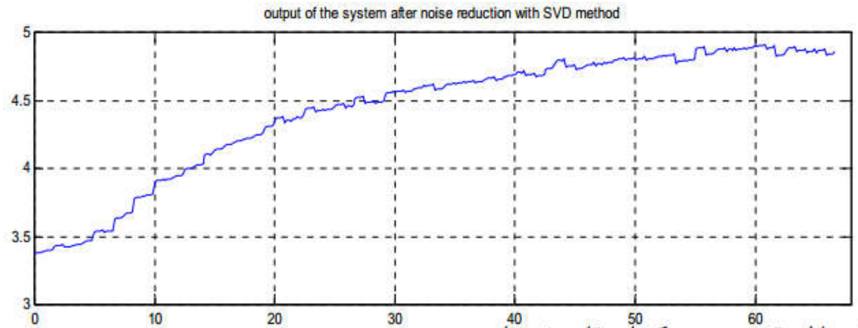


کاربرد در شناسایی یک سیستم حرارتی آزمایشگاهی

پاسخ پله سیستم حرارتی برای پله مورد نظر به صورت زیر است، داده های ورودی به صورت یک ماتریس ۸۰×۵ در نظر گرفته شده و مقادیر منفرد آن به صورت زیر است ،

$$\boxed{\sigma_1 = 89.1145, \sigma_2 = 0.5418, \sigma_3 = 0.5069, \sigma_4 = 0.4875, \sigma_5 = 0.3941}$$

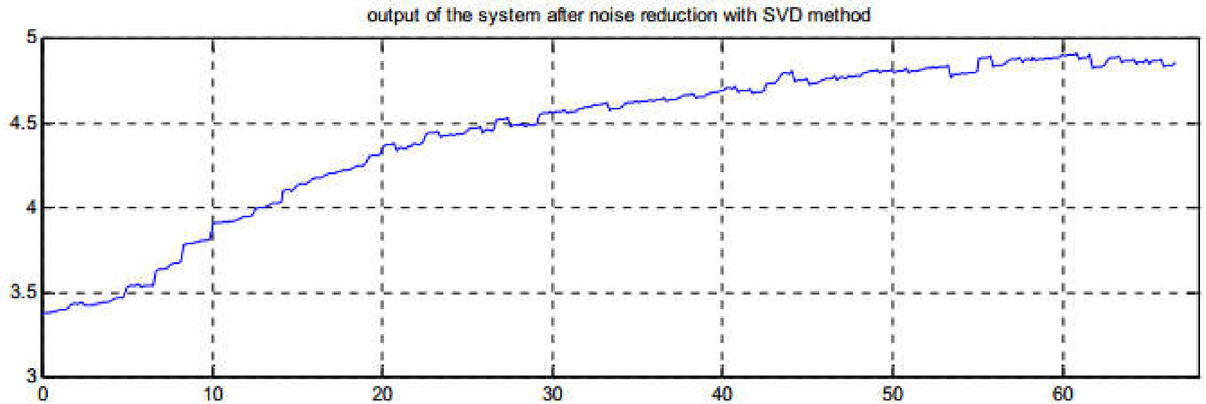


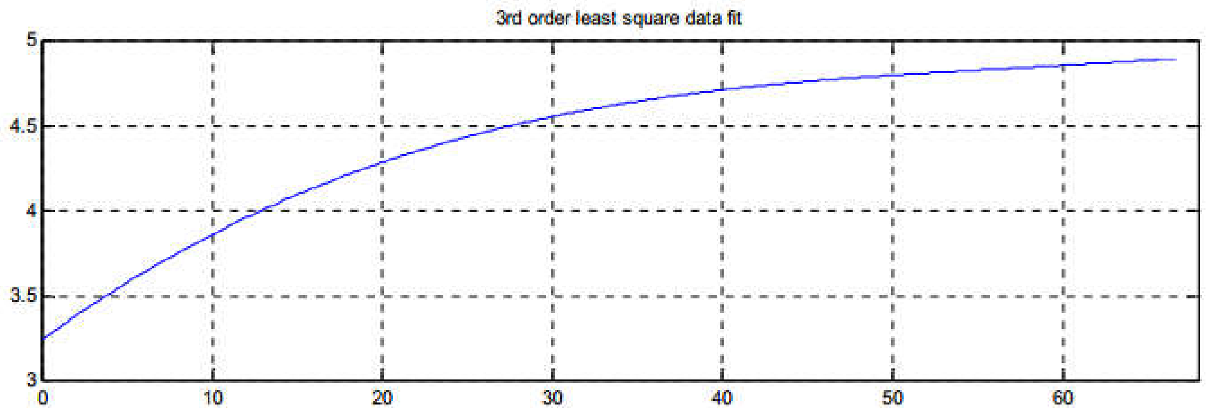


در اینجا از تقریب رتبه یک استفاده شده است .

حال می‌توان با استفاده از روش حداقل مربعات یک مدل مرتبه سوم برای این سیستم تقریب زد .

$$\boxed{y = 3.2410 + 0.0732t - 0.0012t^2 + 7\times10^{-6}t^3}$$



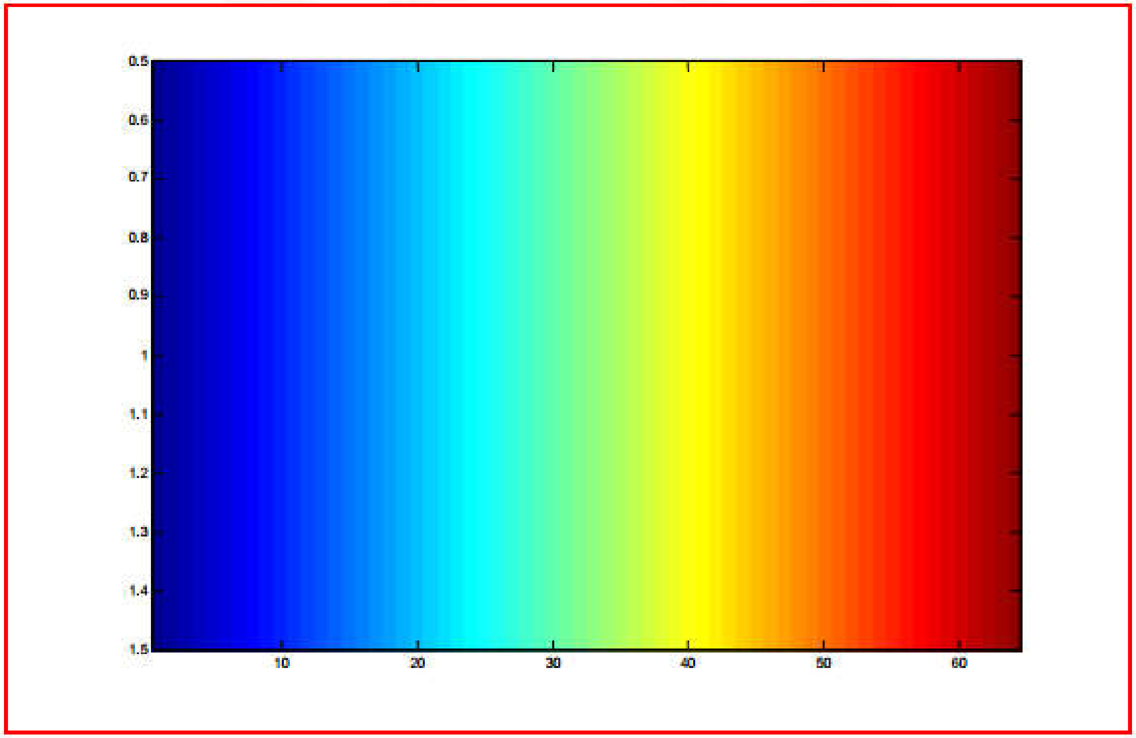


کاربرد تقریب رتبه پایین ماتریس ها در فشرده سازی داده ها (Data Compression)

-در نرم افزار متلب هر بردار یا ماتریس را می‌توان به صورت یک تصویر رنگی ذخیره نمود ،

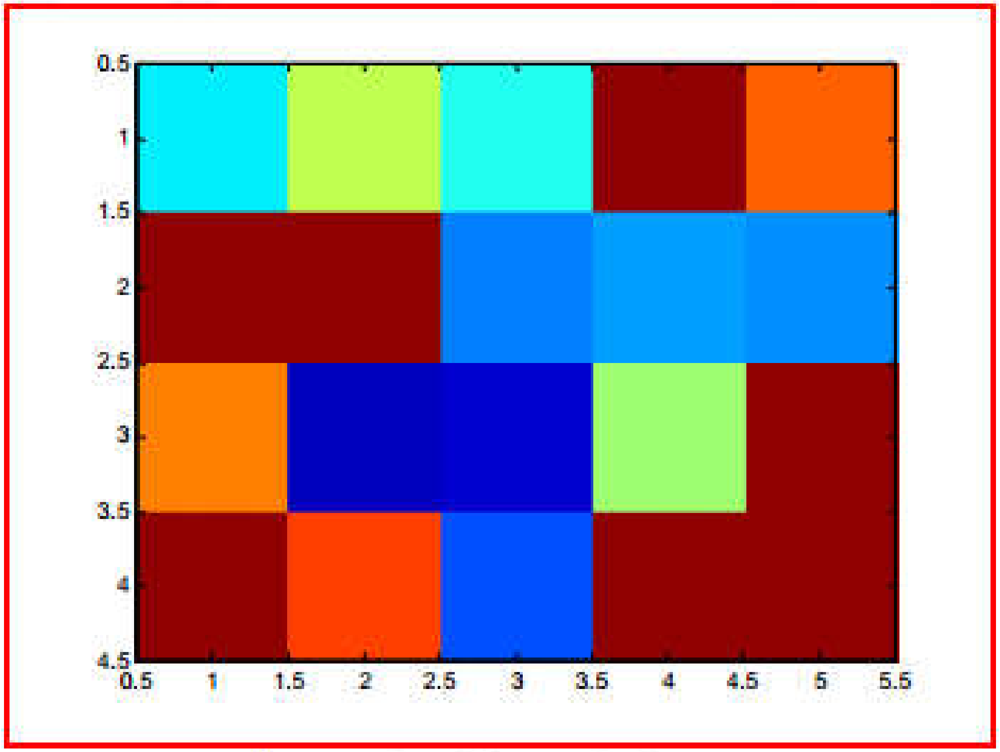
-با دستور زیر می توان یک طیف رنگی در نرم افزار متلب به‌دست آورد ،

```
a = 1 : 64;
image(a)
```



-هر تصویر در کامپیوتر به صورت یک ماتریس ذخیره می‌گردد ، که با توجه به نوع ، سیاه و سفید یا رنگی بودن تصویر ابعاد و عناصر این ماتریس متفاوت است .

- تصویر زیر را در نظر بگیرید ،



تصویر اصلی به ازای ماتریس A

-این تصویر توسط ماتریس زیر ذخیره می‌گردد ،

```
A=rand(4,5)
image(100*A)
```

$$100A = \begin{bmatrix} 23.3649 & 36.3295 & 26.9719 & 72.6078 & 51.1643 \\ 93.4402 & 89.2667 & 16.7493 & 18.6431 & 17.6336 \\ 49.7758 & 4.8464 & 5.4033 & 34.5255 & 67.9415 \\ 81.9026 & 53.5329 & 13.6772 & 70.2714 & 93.0307 \end{bmatrix}$$

-رتبه این ماتریس کامل می‌باشد ، rank(A)=4

- ابتدا تجزیه مقادیر منفرد این ماتریس را به دست می‌آوریم ،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.4063 & 0.3543 & -0.7843 & -0.3070 \\ 0.4981 & -0.8393 & -0.0371 & -0.2146 \\ 0.3649 & 0.3505 & 0.5927 & -0.6267 \\ 0.6736 & 0.2171 & 0.1795 & 0.6833 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 224.7721 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 85.0690 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 44.7287 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.3295 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.5755 & -0.4105 & 0.5009 & -0.3346 & 0.3706 \\ 0.4318 & -0.5728 & -0.4321 & 0.4413 & -0.3225 \\ 0.1356 & 0.0042 & -0.3604 & -0.8071 & -0.4475 \\ 0.4392 & 0.4401 & -0.5492 & 0.0118 & 0.5583 \\ 0.5206 & 0.5565 & 0.3617 & 0.2043 & -0.4967 \end{bmatrix}$$

- حال آیا می‌توان با صرف نظر کردن از برخی مقادیر منفرد رتبه ماتریس A را کاهش داد ؟

$$\boxed{\operatorname{rank}(A_1)=1, \quad \sigma_1 = 224.7721, \quad \sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=0}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 52.5564 & 39.4285 & 12.3849 & 40.1043 & 47.5420 \\ 64.4383 & 48.3424 & 15.1849 & 49.1710 & 58.2902 \\ 47.1990 & 35.4093 & 11.1225 & 36.0162 & 42.6958 \\ 87.1385 & 65.3724 & 20.5342 & 66.4929 & 78.8247 \end{bmatrix}$$

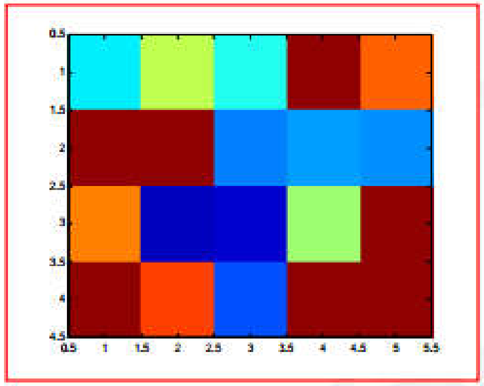
$$\boxed{\operatorname{rank}(A_2)=2, \quad \sigma_1 = 224.7721, \quad \sigma_2 = 85.0690, \quad \sigma_3=\sigma_4=0}$$

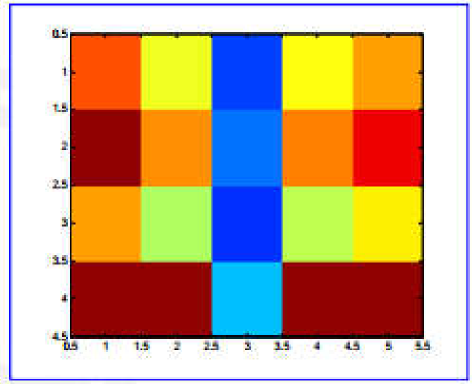
$$A_2 = \begin{bmatrix} 40.1854 & 22.1638 & 12.5130 & 53.3675 & 64.3145 \\ 93.7458 & 89.24.31 & 14.8816 & 17.7497 & 18.5555 \\ 34.9594 & 18.3280 & 11.2491 & 49.1386 & 59.2901 \\ 79.5569 & 54.7917 & 20.6127 & 74.6213 & 89.1037 \end{bmatrix}$$

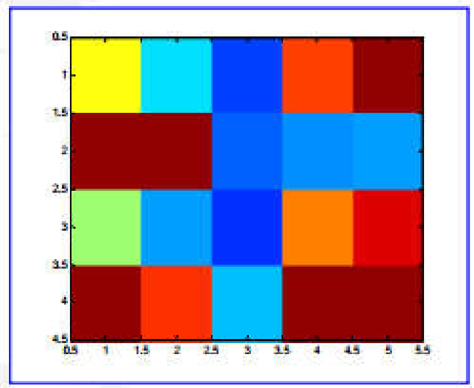
$$\boxed{\operatorname{rank}(A_3)=3, \quad \sigma_1 = 224.7721, \quad \sigma_2 = 85.0690, \quad \sigma_3 = 44.7287, \quad \sigma_4=0}$$

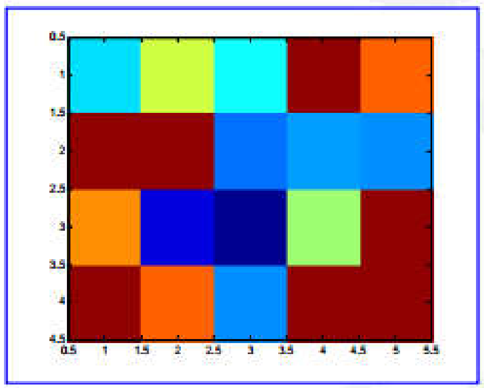
$$A_3 = \begin{bmatrix} 22.6119 & 37.3225 & 25.1555 & 72.6343 & 51.6239 \\ 92.9140 & 89.9606 & 15.4799 & 18.6616 & 17.9548 \\ 48.2388 & 48.2388 & 1.6958 & 34.5797 & 68.8797 \\ 83.5784 & 83.5784 & 17.7196 & 70.2123 & 92.0078 \end{bmatrix}$$

-تصاویر حاصل از ماتریس های A_1 , A_2 , A_3 به صورت زیر است ،


تصویر اصلی به ازای ماتریس A

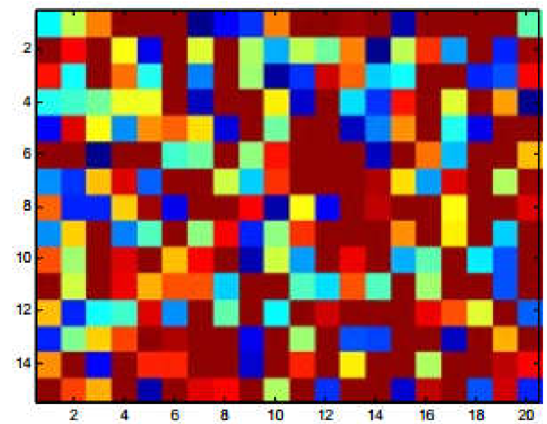

تصویر با استفاده از ماتریس A_1


تصویر با استفاده از ماتریس A_2


تصویر با استفاده از ماتریس A_3

- لذا فقط با استفاده از سه مقدار منفرد این شکل قابل بازسازی است و ماتریس A_3 بهترین تقریب با رتبه کمتر برای ماتریس A می‌باشد .

-برای یک ماتریس ۲۰ ×۱۵ به صورت زیر است ،



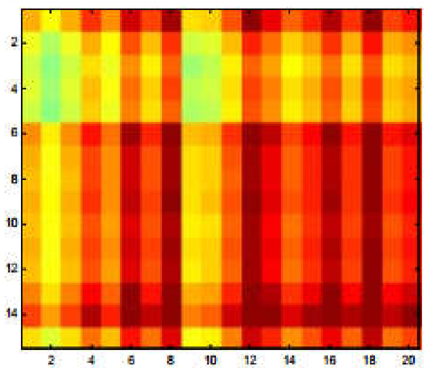
- مقادیر منفرد حاصل از این ماتریس به صورت زیر هستند ،

$$\sigma_1 = 912.0093,\quad \sigma_2 = 208.4180,\quad \sigma_3 = 193.4322,\quad \sigma_4 = 172.7841,\quad \sigma_5 = 159.7591$$

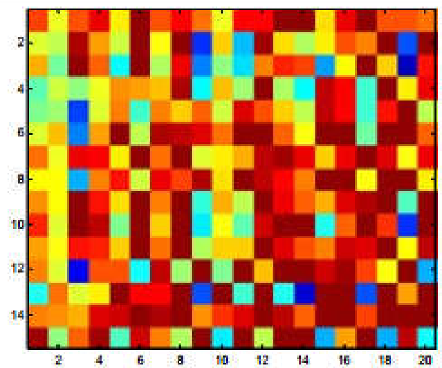
$$\sigma_6 = 148.8492,\quad \sigma_7 = 130.7079,\quad \sigma_8 = 120.6242,\quad \sigma_9 = 112.0716,\quad \sigma_{10} = 97.8217$$

$$\sigma_{11} = 72.6961,\quad \sigma_{12} = 64.4814,\quad \sigma_{13} = 50.5712,\quad \sigma_{14} = 43.4440,\quad \sigma_{15} = 40.0670$$

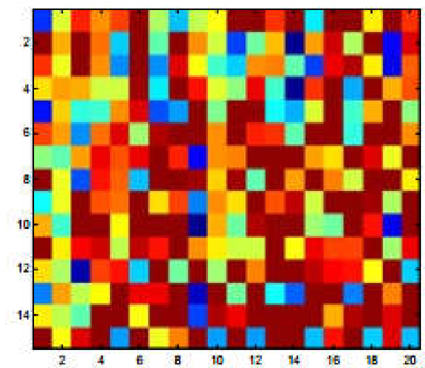
در شکل های زیر تصاویر با در نظر گرفتن مقادیر منفرد مختلف نشان داده شده است ،



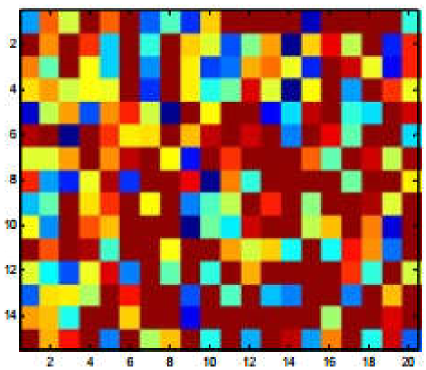
مقدار منفرد σ_1



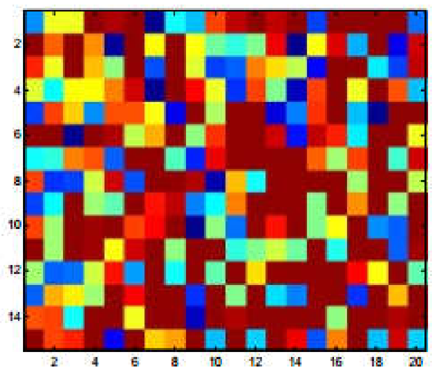
مقادیر منفرد $\sigma_1,\ldots,\sigma_3$



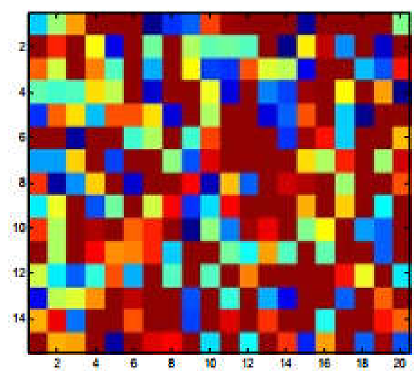
مقادیر منفرد $\sigma_1,\ldots,\sigma_5$



مقادیر منفرد $\sigma_1,\ldots,\sigma_7$

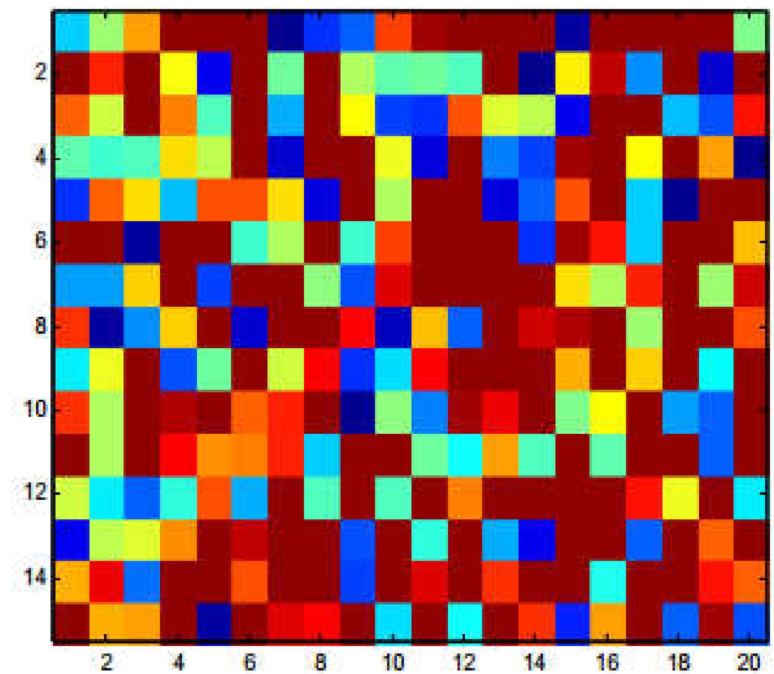


مقادیر منفرد $\sigma_1,\ldots,\sigma_9$

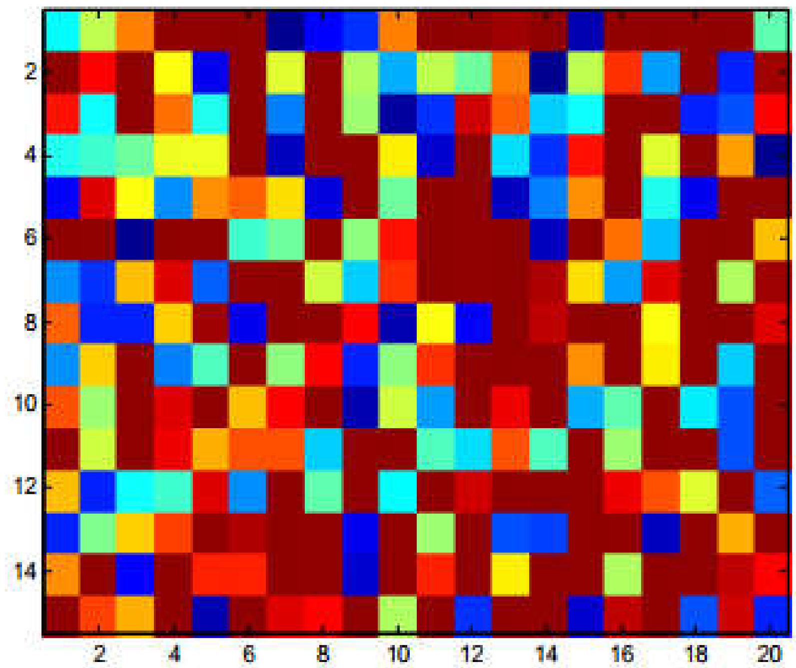


مقادیر منفرد $\sigma_1,\ldots,\sigma_{11}$

- لذا تنها با استفاده از یازده تا از مقادیر منفرد به راحتی می توان تصویر اصلی را به طرز قابل قبولی بازسازی کرد .



تصویر با مقادیر منفرد

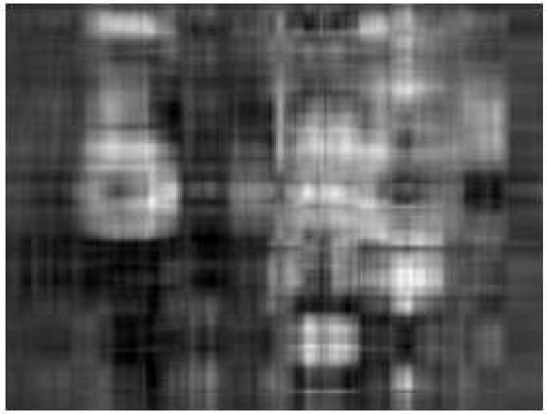


تصویر اصلی

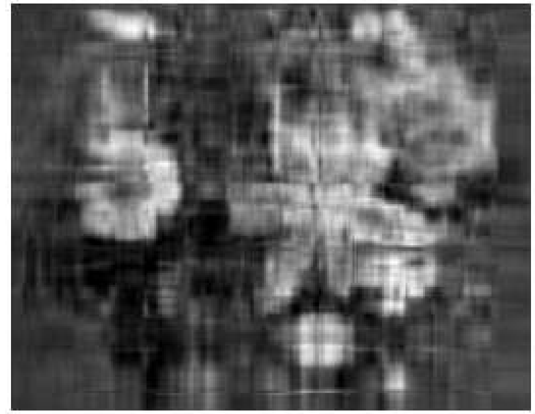
- به عنوان یک نمونه از یک تصویر واقعی به مثال زیر توجه نمایید .

- این تصویر توسط یک ماتریس ۵۰۰×۳۶۲ ذخیره می شود و لذا دارای ۳۶۲ مقدار منفرد است که بزرگترین آن $\sigma_1 = 150.2370$ و کوچکترین آن ها $\sigma_{362} = 0.1005$ می‌باشد .

- در شکل های زیر تصاویر با در نظر گرفتن مقادیر منفرد مختلف نشان داده شده است ،



$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_5 = 20.8949$



$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{10} = 11.2150$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{20} = 7.1647$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{50} = 3.2094$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{100} = 1.6042$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{150} = 1.0507$

- لذا مشاهده می شود که تنها با استفاده از ۱۵۰ تا از مقادیر منفرد به راحتی می توان تصویر اصلی را به طرز قابل قبولی بازسازی کرد، البته این بستگی به کیفیت تصویر مورد نظر دارد.