جبر خطی کاربردی

درس ۱۱ : مقادیر ویژه و بردار های ویژه

گروه کنترل– ۱۳۹۷

مدرس : دکتر عباداللهی

تبدیل‌های همانندی (Similarity Transformation)

-برای قطری سازی ماتریس ماتریس حالت از تبدیل‌های همانندی استفاده می‌نماییم .

-طبق تعریف دو ماتریس $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را همانند (similar) گویند ، اگر یک ماتریس غیرمنفرد T وجود داشته باشد به طوری که رابطه زیر را برآورده سازد ،

$$\boxed{T^{-1}AT = B}$$

ماتریس غیر منفرد T را ماتریس تبدیل گویند .

خواص ماتریس‌های همانند

۱- دترمینان ماتریس‌های همانند $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ برابر است ،

$$\boxed{|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}||A||T| = \frac{1}{|T|}|A||T| = |A|}$$

۲- معادله مشخصه ماتریس‌های همانند $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ برابر است ،

$$\boxed{\begin{aligned} &A \rightarrow |\lambda I - A| = 0 \\ &B \rightarrow |\lambda I - T^{-1}AT| = |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| = |T^{-1}(\lambda I - A)T| \\ &= |T^{-1}||\lambda I - A||T| = \frac{1}{|T|}|\lambda I - A||T| = |\lambda I - A| = 0 \end{aligned}}$$

لذا با اعمال تبدیل همانندی مقادیر ویژه ماتریس تغییر نمی‌کند .

اعمال تبدیل همانندی بر معادلات حالت سیستم

-فرم کلی دستگاه معادلات حالت را در نظر بگیرید ،

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}}$$

تحت تبدیل همانندی T متغیرهای حالت x(t) را به z(t) تبدیل می‌نماییم ،

$$x(t) = Tz(t)$$

$$\boxed{\begin{cases} T\dot{z}(t) = ATz(t) + Bu(t) \\ y(t) = CTz(t) + Du(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CTz(t) + Du(t) \end{cases}}$$

لذا با این کار نمایش جدیدی از فضای حالت به دست می‌آوریم که معادل با قبلی خواهد بود .

بررسی تابع تبدیل نمایش فضای حالت جدید و قدیم

- تابع تبدیل نمایش فضای حالت قدیم به صورت زیر به دست می‌آید ،

$$\boxed{T_1(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

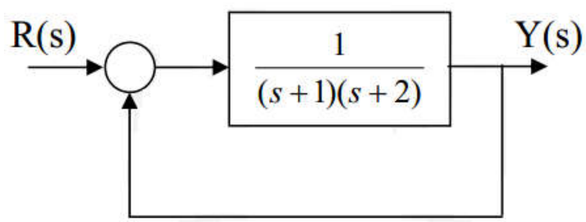
- حال تابع تبدیل نمایش فضای حالت جدید را به دست می‌آوریم ،

$$\begin{aligned}
T_2(s) &= \left(CT\right)(sI - T^{-1}AT)^{-1}\left(T^{-1}B\right) + D \\
&= \left(CT\right)(sT^{-1}T - T^{-1}AT)^{-1}\left(T^{-1}B\right) + D \\
&= \left(CT\right)(T^{-1}\left(sI - A\right)T)^{-1}\left(T^{-1}B\right) + D \\
&= \left(CT\right)T^{-1}\left(sI - A\right)^{-1}T\left(T^{-1}B\right) + D \\
&= C\left(sI - A\right)^{-1}B + D
\end{aligned}$$

لذا با تبدیل همانندی تابع تبدیل سیستم تغییر نمی‌کند .

مثال ۱

- سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید ،



- در درس‌های قبلی دو تحقق فضای حالت مختلف برای این سیستم حلقه بسته به دست آوردیم،

- تحقق اول

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r(t)\rightarrow\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

تحقق دوم

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{z}_1(t)\\ \dot{z}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r(t)\rightarrow\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

- از آنجاییکه این دو تحقق هم مرتبه و هردو متعلق به یک تابع تبدیل هستند ، می‌توان یک تبدیل همانندی بین آن‌ها به دست آورد که x=Tz باشد ،

قطری سازی معادلات حالت

-در قطری سازی معادلات حالت را با یک تبدیل همانندی به فرمی تبدیل می‌کنیم که ماتریس حالت آن قطری باشد ،

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) + Du(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z}(t) = \Lambda z(t) + B_n u(t) \\ y(t) = C_n z(t) + Du(t) \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \Lambda = T^{-1}AT \\ B_n = T^{-1}B \\ C_n = CT \end{cases}}$$

-ماتریس تبدیل T که چنین کاری را انجام می دهد ماتریس مدال (Modal Matrix) نام دارد .

محاسبه ماتریس انتقال حالت با روش قطری سازی

- فرم قطری سازی شده ماتریس $A_{n\times n}$ با استفاده از مدال به صورت زیر به دست می‌آید ،

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

- ماتریس انتقال حالت سیستم به شکل زیر محاسبه می‌شود ،

$$e^{At} = \exp[At] = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(At)^n + ..$$

$$= I + \left(T\Lambda T^{-1}\right)t + \frac{1}{2!}\left(T\Lambda T^{-1}\right)\left(T\Lambda T^{-1}\right)t^2 + \frac{1}{3!}\left(T\Lambda T^{-1}\right)\left(T\Lambda T^{-1}\right)\left(T\Lambda T^{-1}\right)t^3 + ..$$

$$= T\left(I + \Lambda t + \Lambda^2\frac{t^2}{2!} + \Lambda^3\frac{t^3}{3!} + \ldots\right)T^{-1} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

بدست آوردن ماتریس مدال

- محاسبه ماتریس مدال بستگی به مقادیر ویژه ماتریس حالت A دارد .
- برای بدست آوردن ماتریس مدال حالت های زیر را در نظر می‌گیریم ،

۱- مقادیر ویژه متمایز ←قطری کامل (diagonal)

۲-مقادیر ویژه تکراری ← قطری بلوکی جردن

۳- مقادیر ویژه مختلط مزدوج ← قطری بلوکی (block diagonal)

قطری سازی ماتریس حالت با مقادیر ویژه متمایز و حقیقی

-اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز باشد ، آن‌گاه می‌توان آن را به یک ماتریس قطری کامل تبدیل نمود .

$$T^{-1}AT = \Lambda \rightarrow \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\}$$

ماتریس مدال (Modal Matrix)

$$Av_i = \lambda v_i \quad \text{و} \quad i = 1,\ldots,n$$

$$A\underbrace{[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]}_{T} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}AT = \Lambda$$

مثال ۲

سیستم زیر را به فرم قطری تبدیل نمایید .

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

مقادیر ویژه ماتریس A را به دست می‌آوریم ،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & -1\\ 0 & \lambda+6 & 2\\ -5 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=0\rightarrow\lambda^3+2\lambda-29\lambda-30=0$$

حل معادله مشخصه مقادیر ویژه به صورت زیر به دست می‌آیند ،

$$\lambda^3+2\lambda-29\lambda-30=(\lambda+6)(\lambda+1)(\lambda-5)=0\rightarrow\lambda_1=-6,\lambda_2=-1,\lambda_3=5$$

لذا ماتریس A سه مقدار ویژه متمایز و حقیقی دارد .

حال می‌توان سه بردار ویژه مستقل خطی متناظر با هریک از مقادیر ویژه به‌دست آورد .

$$Av_i = \lambda_1 v_i \rightarrow (\lambda I - A) v_i = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda + 6 & 2 \\ -5 & 0 & \lambda \end{vmatrix} v_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -6 \rightarrow \begin{vmatrix} -10 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -6 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -10x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \\ -5x_1 - 6x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -5x_4 - x_6 = 0 \\ x_4 - x_5 - x_6 = 0 \end{cases} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_7 - x_9 = 0 \\ x_7 + 11x_8 + x_9 = 0 \\ -5x_7 + 5x_9 = 0 \end{cases} \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-3}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس مدال T به صورت زیر به دست می آید ،

$$T=\left[v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right]\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1.8 & \frac{-3}{11}\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

می توان فرم قطری سازی شده معادلات حالت را به دست آورد .

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55}\\ \frac{1}{6} & 6 & \frac{-1}{6}\\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & \frac{9}{5} & \frac{-3}{11}\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$B_n=T^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55}\\ \frac{1}{6} & 6 & \frac{-1}{6}\\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{51}{55}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

$$C_n=CT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & \frac{9}{5} & \frac{-3}{11}\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

مثال ۳

ماتریس انتقال حالت سیستم زیر را با روش قطری سازی به‌دست آورید ،

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

با توجه به مثال ۱ ماتریس مدال T و فرم قطری سازی شده ماتریس حالت به صورت زیر به دست می‌آید ،

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & \frac{9}{5} & \frac{-3}{11}\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

حال ماتریس انتقال حالت سیستم به شکل زیر به‌دست می‌آید ،

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{9}{5} & \frac{-3}{11} \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{5t} & 0 & \frac{-1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{5t} \\ \frac{3}{10}e^{-t} + \frac{-5}{22}e^{5t} + \frac{-4}{55}e^{-6t} & e^{-6t} & \frac{-3}{10}e^{-t} + \frac{-1}{22}e^{5t} + \frac{19}{55}e^{-6t} \\ \frac{-5}{6}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{5t} & 0 & \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{5t} \end{bmatrix}$$

حالت خاص : ماتریس حالت به صورت همبسته (companion form)

- صورت همبسته از روی متغیرهای فاز (phase variable) به دست می آید ،

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

- در این صورت ماتریس مدال به صورت وندرموند خواهد بود .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda^2{}_1 & \lambda^2{}_2 & \lambda^2{}_3 & & \lambda^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda^{n-1}{}_1 & \lambda^{n-1}{}_2 & \lambda^{n-1}{}_3 & \cdots & \lambda^{n-1}{}_n \end{bmatrix}$$

حالت خاص ماتریس حالت به صورت همبسته (companion form)

-صورت همبسته از روی متغیرهای فاز (phase variable) به دست می‌آید ،

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-در این صورت ماتریس مدال بصورت وندرموند خواهد بود .

$$T = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1}{}_1 & \lambda^{n-1}{}_2 & \lambda^{n-1}{}_3 & \cdots & \lambda^{n-1}{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda^2{}_1 & \lambda^2{}_2 & \lambda^2{}_3 & & \lambda^2{}_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۴

فرم قطری سازی شده ماتریس همبسته A_c را به‌دست آورید ،

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A_c به صورت زیر به‌دست می‌آید ،

$$|\lambda I - A_c| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

ماتریس A_c همبسته و سه مقدار ویژه متمایز دارد ، پس می‌توان برای قطری سازی آن ماتریس وندر موند را به‌دست آورد ،

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

فرم قطری ماتریس A_c به شکل زیر می‌باشد ،

$$\Lambda = T^{-1} A_c T = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

قطری سازی ماتریس حالت با مقادیر ویژه مختلط

- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مختلط ← ماتریس مدال حاصل ماتریس مختلط است .

نمایش فضای حالت مختلط خواهیم داشت؟

- باید به نحوی ماتریس تبدیل را اصلاح نماییم .

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_{m+1}}_{\text{مقادیر ویژه مختلط مزدوج}},\underbrace{\lambda_{m+2},\ldots,\lambda_n}_{\text{مقادیر ویژه متمایز}},$$

$$T=\left[\operatorname{Re}\{v_1\}\middle|\operatorname{Im}\{v_1\}\middle|\operatorname{Re}\{v_3\}\middle|\operatorname{Im}\{v_3\}\middle|\ldots\middle|\operatorname{Re}\{v_m\}\middle|\operatorname{Im}\{v_m\}\middle|v_{m+2}\middle|\ldots\middle|v_n\right|\right]$$

فرم کلی ماتریس قطری بلوکی شده

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & & & & & & & & \\ -\omega_1 & \sigma_1 & & & & & & & & \\ & & \sigma_3 & \omega_3 & & & 0 & & & \\ & & -\omega_3 & \sigma_3 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \sigma_m & \omega_m & & & \\ & & & & & -\omega_m & \sigma_m & & & \\ & & 0 & & & & & \lambda_{m+2} & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- در این حالت ماتریس قطری کامل نخواهد بود .

مثال ۵

برای ماتریس A با مقادیر ویژه داده شده فرم قطری بلوکی به شکل زیر به دست می‌آید ،

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3j \qquad \lambda_{3,4} = -2 \pm 5j \qquad \lambda_5 = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1+3j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

مثال ۶

فرم قطری سازی شده معادلات حالت و ماتریس انتقال حالت را به‌دست آورید ،

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}x(t)$$

معادله مشخصه ماتریس A به صورت زیر به‌دست می‌آید ،

$$\left|\lambda I_3 - A\right| = \begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix} = \lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=0$$

پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه به صورت زیر به‌دست می‌آیند ،

$$\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=(\lambda+2)\left(\lambda^2+3\lambda+3\right)=0 \rightarrow \lambda_1=-2, \lambda_{2,3}=\frac{-3}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد .

بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را با استفاده از تعریف بردار ویژه به دست می‌آوریم ،

$$Av_i = \lambda_1 v_i \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} v_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \rightarrow \frac{-3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{-3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس T به شکل زیر به‌دست می‌آید ،

$$T=\left[v_1 \,\middle|\, \mathrm{Re}\{v_2\} \,\middle|\, \mathrm{Im}\{v_2\}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

حال ماتریس قطری – بلوکی Λ را به‌دست می‌آوریم ،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \sigma_1 & \omega_1\\ 0 & -\omega_1 & \sigma_1\end{array}\right]$$

$$B_n=T^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \frac{5}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$C_n=CT=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

حال باید ماتریس انتقال حالت را بیابیم

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} t} \end{bmatrix}$$

برای محاسبه $e^{\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} t}$ می‌توان از روش تبدیل لاپلاس استفاده نمود ،

$$\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

حال از یک یک درایه ها معکوس لاپلاس می‌گیریم ،

$$L^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} & \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} & \frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ -e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ 0 & -e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{bmatrix}$$

نهایتاً مقدار e^{At} به دست می‌آید ،

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ 0 & -e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix} e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \frac{4}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \frac{-2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & 2e^{-2t}+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)-2e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \frac{-1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{bmatrix}$$

قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه تکراری

- ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید ،

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_1,\ldots\lambda_1}_{k\ \text{مقادیر ویژه تکراری}},\underbrace{\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}_{\text{مقادیر ویژه متمایز}}$$

- اگر $\boxed{\mathrm{rank}(\lambda_1 I - A)=n-1}$ ← یک بردار ویژه مستقل خطی ← یک بلوک جردن

- برای به دست آوردن ماتریس تبدیل T به تعداد k-1 بردار مستقل خطی دیگر نیاز داریم .

- استفاده از بردارهای ویژه تعمیم یافته (generalized eigenvactor)

- فرم کلی ماتریس تبدیل $\boxed{T=\left[v_1\,|\,\varphi_1\,|\,\varphi_2\,|\ldots|\,\varphi_{k-1}\,|\,v_{k+1}\,|\,v_{k+2}\,|\ldots|\,v_n\right]}$

فرم ماتریس بلوکی جردن (Jordan Block Form)

- با این تبدیل ماتریس به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل می‌شود .
- اگر ماتریس بلوکی فقط یک بلوک جردن داشته باشد ، فرم کلی زیر را خواهد داشت ،

بلوک جردن

$$\Lambda = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
\lambda_1 & 1 & & & 0 & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
 & & \lambda_1 & \ddots & & & 0 & \\
 & & & \ddots & 1 & & & \\
 & 0 & & & \lambda_1 & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_{k+1} & & 0 \\
 & 0 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & 0 & & \lambda_n
\end{array}\right]$$

خصوصیات بلوک جردن

- فرم کلی یک بلوک جردن ،

$$J_{P_i} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

۱- کلیه عناصر روی قطر اصلی ، مقادیر ویژه تکراری ماتریس A هستند.

۲- کلیه عناصر زیر قطر اصلی صفر هستند .

۳- عناصر بلافاصله بالای قطر اصلی یک یا صفر هستند .

۴- تعداد بلوک های جردن متناظر با یک مقدار ویژه داده شده مانند λ_i ، برابر با تعداد بردار های مستقل خطی متناظر با آن مقدار ویژه است .

مثال ۷

فرض کنید ماتریس حالت $A_{7\times7}$ دارای هفت مقدار ویژه به صورت زیر است ،

$$\underbrace{\lambda_7 ,\lambda_6}\ ,\underbrace{\lambda_1 ,\lambda_1 ,\lambda_1 ,\lambda_1 ,\lambda_1}$$

دو مقدار ویژه متمایز ← دو بردار ویژه مستقل خطی

یک مقدار ویژه تکراری با مرتبه پنج ← دو بردار ویژه مستقل خطی

$$\Lambda_{7\times7} = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c|c} J_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_7 \end{array}\right]$$

بدست آوردن بردارهای ویژه تعمیم یافته

- در تعریف بردار ویژه داشتیم،

$$A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \rightarrow (\lambda_i I - A)\underline{v}_i = 0$$

-اگر برداری مانند φ_1 باشد ، که رابطه زیر را برقرار نماید ، به آن بردار ویژه تعمیم یافته گویند ،

$$\boxed{A\underline{\varphi}_1 = \lambda_1 \underline{\varphi}_1 + \underline{v}_i \rightarrow (A - \lambda_1 I)\underline{\varphi}_1 = \underline{v}_1}$$

-برای به‌دست آوردن بردارهای ویژه تعمیم یافته دیگر به همین ترتیب عمل می‌کنیم .

$$\boxed{\begin{array}{l} (A - \lambda_1 I)\underline{\varphi}_2 = \underline{\varphi}_1 \\ (A - \lambda_1 I)\underline{\varphi}_3 = \underline{\varphi}_2 \\ \vdots \\ (A - \lambda_1 I)\underline{\varphi}_{k-1} = \underline{\varphi}_{k-2} \end{array}}$$

مثال ۸

فرم جردن ماتریس حالت زیر را بیابید .

$$A_{3\times 3}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را به دست می‌آوریم ،

$$|\lambda I-A|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0\rightarrow\lambda_{1,2,3}=1$$

ماتریس A یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سه دارد (k=3). حال تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناسب با این مقدار ویژه را تعیین

می‌نماییم ، برای این منظور داریم ،

$$\text{rank}(\lambda_1 I-A)=2=n-1$$

لذا تنها یک بردار ویژه مستقل خطی v_1 متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1=1$ وجود دارد . پس فقط یک بلوک جردن وجود دارد .

برای بدست آوردن بردارهای ویژه همانطور که قبلاً بیان شد دو روش را می‌توان پیش گرفت ،

روش اول : استفاده از تعریف بردار ویژه ،

ابتدا بردار ویژه V_1 را بدست می آوریم ،

$$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای تشکیل ماتریس تبدیل باید دو بردار ویژه تعمیم یافته دیگر نیز بیابیم . برای این منظور از تعریف بردار های تعمیم یافته استفاده می‌کنیم ،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = v_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_2=\varphi_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_7+x_8=0 \\ x_9=0 \end{cases} \rightarrow \varphi_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

روش دوم : استفاده از ماتریس الحاقی ،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda-1 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda^2-\lambda & 0 \\ \lambda-2 & 1 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \mathrm{Adj}(1I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای به‌دست آوردن دو بردار ویژه تعمیم یافته دیگر از مشتقات اول و دوم ماتریس الحاقی استفاده می‌کنیم ،

$$\frac{d}{d\lambda}[\mathrm{Adj}(\lambda I - A)] = \begin{bmatrix} 2\lambda-3 & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \to \frac{d}{d\lambda}\left[\operatorname{Adj}(1I - A)\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\operatorname{Adj}(\lambda I - A)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به صورت زیر به دست می‌آید ،

$$T = \left[v_1 \mid \varphi_1 \mid \varphi_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال فرم کانونیکال جردن ماتریس A را به دست می‌آوریم ،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد فرم کانونیکال جردن فقط یک بلوک جردن با مرتبه سه دارد .

به‌دست آوردن ماتریس تبدیل برای فرم جردن

- ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید ،

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_1,\ldots\lambda_1}_{k}\ ,\underbrace{\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}$$

k مقادیر ویژه تکراری

مقادیر ویژه متمایز

- اگر $\boxed{\operatorname{rank}(\lambda_1 I - A) = n - \alpha}$ ← α بردار ویژه مستقل خطی ← α بلوک جردن

- برای به دست آوردن ماتریس تبدیل T به تعداد $k-\alpha$ بردار مستقل خطی دیگر نیاز داریم .

- استفاده از بردارهای ویژه تعمیم یافته (generalized eigenvactor)

- فرم کلی ماتریس تبدیل

$$\boxed{T = \left[v_1 \mid \varphi_1 \mid \varphi_2 \mid \ldots \mid \varphi_{P_1-1} \mid v_2 \mid \xi_1 \mid \xi_2 \mid \ldots \mid \xi_{P_2-1} \mid \ldots \mid v_\alpha \mid \eta_1 \mid \eta_2 \mid \ldots \mid \eta_{P_\alpha-1} \mid v_{k+1} \mid v_{k+2} \mid \ldots \mid v_n \right]}$$

مثال ۷

فرم قطری بلوکی جردن ماتریس A را بیابید.

$$A_{4\times4}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A به صورت زیر قابل محاسبه است ،

$$|\lambda I_4-A|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & -3\\ 0 & \lambda+1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^3=0\rightarrow\lambda_{1,2,3}=-1,\lambda_4=0$$

لذا ماتریسA یک مقدار ویژه متمایز و یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سه دارد .

برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1 = -1$ داریم ،

$$\mathrm{rank}(\lambda_1 I_4 - A) = 2 = n - 2 \rightarrow \alpha = 2$$

لذا $\alpha = 2$ است ، پس دو بلوک جردن برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1 = -1$ وجود دارد و دو بردار ویژه مستقل خطی v_1 و v_2 متناظر آن داریم .

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)v_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حال یک بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با بردار ویژه v_1 به‌دست می‌آوریم ،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1 = v_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و برای مقدار ویژه متمایز $\lambda_4 = 0$ یک بردار ویژه v_4 به صورت زیر به‌دست می‌آید ،

$$(A-\lambda_4 I)v_4 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_{10} + 3x_{12} = 0 \\ -x_{10} + x_{11} + x_{12} = 0 \\ x_{12} = 0 \\ -x_{11} + 2x_{12} = 0 \end{cases} \rightarrow v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس تبدیل T به صورت زیر به‌دست می‌آید ،

$$T = \left[v_1 \mid \varphi_1 \mid v_2 \mid v_4 \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سپس فرم قطری بلوکی جردن ماتریس A را به‌دست می‌آوریم ،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} J_{P_1}(-1) & & 0 \\ & J_{P_2}(-1) & \\ 0 & & J_1(0) \end{bmatrix}$$

مثال ۸

فرم قطری بلوی A را بیابید.

$$A_{4\times 4}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A به صورت زیر قابل محاسبه است ،

$$\left|\lambda I_4 - A\right| = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_{3,4} = -1 \pm j$$

لذا ماتریس A یک مقدار ویژه مکرر مرتبه دو و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد . برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1 = 1$ فقط یک بردار ویژه داریم ، لذا فقط یک بلوک جردن داریم ،

$$\mathrm{rank}(\lambda_1 I - A) = 3$$

$$\Lambda=\left[\begin{array}{cc|cc}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \sigma_3 & \omega_3\\ 0 & 0 & -\omega_3 & \sigma_3\end{array}\right]\rightarrow \Lambda=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{array}\right]$$

- در نرم افزار متلب از دستور $\boxed{\text{jordan}(A)}$ و $\boxed{[T,J]=\text{jordan}(A)}$ می‌توان برای به دست آوردن فرم کانونیکال جردن ماتریس A استفاده نمود .

- دستور $\boxed{\text{jordan}(A)}$ فقط ماتریس کانونیکال جردن حاصل را ارائه می‌دهد .

- دستور $\boxed{[T,J]=\text{jordan}(A)}$ ماتریس T ماتریس تبدیل و J فرم کانونیکال جردن ماتریس A است .

- این دستور برای ریشه های غیر تکراری و مختلط نیز قابل اعمال است و فرم قطری کامل را برای آن ها ارائه می‌دهد .

```
A=[0 1 0;-1 2 0;1 0 1];
[T,J]=jordan(A)
T =
     0    -1     1
     0    -1     0
    -1     1     0
J =
     1     1     0
     0     1     1
     0     0     1
```

محاسبه ماتریس انتقال حالت با روش قطری سازی ← مقادیر ویژه تکراری

-اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای k مقدار ویژه تکراری باشد ، آن گاه می توان آن را به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل نمود.

در این صورت ماتریس انتقال انتقال حالت سیستم به شکل زیر به دست می‌آید ،

$$\boxed{e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}}$$

$$\boxed{e^{\lambda t} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} e^{J_{P1}t} & & & 0 & & & \\ & e^{J_{P2}t} & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & & & e^{J_{P\alpha}t} & & & \\ \hline & & & & e^{\lambda_{k+1}t} & & 0 \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{array}\right]}$$

محاسبه ماتریس انتقال حالت با روش قطری سازی ← مقادیر ویژه تکراری

هریک از $e^{J_{Pi}t}$ ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند ،

$$\boxed{e^{J_{Pi}t} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{Pi-1}}{(P_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{Pi-2}}{(P_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}$$

مثال :

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow e^{Jt} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2!}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

مثال ۹

ماتریس حالت زیر را در نظر بگیرید،

$$A_{4\times4}=\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت آن را با استفاده از روش قطری سازی به دست آورید .

با توجه به مثال ۷ مقادیر مشخصه ماتریس A عبارتند از $\lambda_{1,2,3}=-1,\lambda_4=0$ و فرم قطری بلوکی جردن آن به‌صورت زیر است ،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&-1&1&0\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c|c}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\\hline 0&0&-1&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right]$$

حال می توان ماتریس انتقال حالت را به دست آورد ،

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} & -2+2e^{-t}+2te^{-t} & 1-e^{-t}+2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t}+te^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & -te^{-t} & e^{-t}-te^{-t} \end{bmatrix}$$