مدارهای منطقی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی کامپیوتر

اساتید: دکتر مهدی صدیقی، دکتر مرتضی صاحب‌الزمانی

تدریس‌یاران: رضا آدینه‌پور، مرتضی عادل‌خانی

تمرین سوم — **پاسخنامه: مدار های ترکیبی و حسابی**

سوالات اصلی:

۱) برای توابع زیر، ساده ترین فرم SOP را با استفاده از روش McCluskey Quine به دست آورید.

پاسخ

$$(a)\ f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,5,6,8,9,11,13) + \sum d(7,10,12)$$

minterm	A	B	C	D	Check
0	0	0	0	0	✓
1	0	0	0	1	✓
8	1	0	0	0	✓
5	0	1	0	1	✓
6	0	1	1	0	✓
9	1	0	0	1	✓
10	1	0	1	0	✓
12	1	1	0	0	✓
7	0	1	1	1	✓
11	1	0	1	1	✓
13	1	1	0	1	✓

minterm	A	B	C	D	Check
0,1	0	0	0	-	✓
0,8	-	0	0	0	✓
1,5	0	-	0	1	✓
1,9	-	0	0	1	✓
8,9	1	0	0	-	✓
8,10	1	0	-	0	
8,12	1	-	0	0	✓
5,7	0	1	-	1	
5,13	-	1	0	1	✓
9,13	1	-	0	1	✓
6,7	0	1	1	-	
10,11	1	0	1	-	✓
12,13	1	1	0	-	✓

minterm	A	B	C	D	Check
0,1,8,9	-	0	0	-	
0,1,8,9	-	0	0	-	
1,5,9,13	-	-	0	1	
1,5,9,13	-	-	0	1	
8,9,10,11	1	0	-	-	
8,9,12,13	1	-	0	-	
8,9,12,13	1	-	0	-	

minterm	$AB'D'$	$A'BD$	$A'BC$	$B'C'$	$C'D$	AB'	AC'
0				✓			
1				✓	✓		
5		✓			✓		
6			✓				
8	✓			✓		✓	✓
9				✓	✓	✓	✓
11						✓	
13					✓		✓

$$f(a,b,c,d) = A'BC + B'C' + AB' + C'D$$

$$(b)\ f(a,b,c,d) = \sum m(3,4,6,7,8,9,11,13,14) + \sum d(2,5,15)$$

minterm	A	B	C	D	Check
2	0	0	1	0	✓
4	0	1	0	0	✓
8	1	0	0	0	✓
3	0	0	1	1	✓
5	0	1	0	1	✓
6	0	1	1	0	✓
9	1	0	0	1	✓
7	0	1	1	1	✓
11	1	0	1	1	✓
13	1	1	0	1	✓
14	1	1	1	0	✓
15	1	1	1	1	✓

minterm	A	B	C	D	Check
2,3	0	0	1	-	✓
2,6	0	-	1	0	✓
4,5	0	1	0	-	✓
4,6	0	1	-	0	✓
8,9	1	0	0	-	
3,7	0	-	1	1	✓
3,11	-	0	1	1	✓
5,7	0	1	-	1	✓
5,13	-	1	0	1	✓
6,7	0	1	1	-	✓
6,14	-	1	1	0	✓
9,11	1	0	-	1	✓
9,13	1	-	0	1	✓
7,15	-	1	1	1	✓
11,15	1	-	1	1	✓
13,15	1	1	-	1	✓
14,15	1	1	1	-	✓

minterm	A	B	C	D	Check
2,3,6,7	0	-	1	-	
2,3,6,7	0	-	1	-	
4,5,6,7	0	1	-	-	
4,5,6,7	0	1	-	-	
3,7,11,15	-	-	1	1	
3,7,11,15	-	-	1	1	
5,7,13,15	-	1	-	1	
5,7,13,15	-	1	-	1	
6,7,14,15	-	1	1	-	
6,7,14,15	-	1	1	-	
9,11,13,15	1	-	-	1	
9,11,13,15	1	-	-	1	

minterm	$AB'C'$	$A'C$	$A'B$	CD	BD	BC	AD
3		✓		✓			
4			✓				
6		✓	✓			✓	
7		✓	✓	✓	✓	✓	
8	✓						
9	✓						✓
11				✓			✓
13					✓		✓
14						✓	

$$f(a,b,c,d) = AB'C' + A'B + BC + AD + CD$$

۲) برای نمایش هر یک از اعداد مبنای ۱۰ زیر در مبنای ۲ و BCD چند بیت نیاز است؟ دلیل خود را بنویسید.

نکته: برای تعیین تعداد بیت مورد نیاز برای نمایش اعداد دهدهی به فرمت باینری، ابتدا باید کوچکترین عدد توان ۲ بزرگتر از عدد دهدهی را پیدا کنیم. حال تعداد بیت مورد نیاز برابر با توان عدد ۲ به دست آمده است. همچنین برای محاسبه تعداد بیت مورد نیاز برای تبدیل عدد دهدهی به *BCD* تنها نیاز است تعداد اعداد را در ۴ ضرب کنیم.

a) $(832)_{10}$ Binary => $2^{10} = 1024 > 832$ => number of bit = ۱۰

BCD => $3 \times 4 = 12$

b) $(1023)_{10}$ Binary => $2^{10} = 1024 > 1023$=> number of bit = ۱۰

c) $(8192)_{10}$

BCD => $4 \times 4 = 16$

Binary => $2^{14} = 16384 > 1023$ => number of bit = ۱۴

BCD => $4 \times 4 = 16$

۳) اعداد بدون علامت زیر را به مبنای ۱۰ تبدیل کنید.

a) $(00111010110)_2$ => $(470)_{10}$
b) $(1001110.011)_2$ => $(78.375)_{10}$
c) $(355.411)_8$ => $(237.142578125)_{10}$
d) $(FAB1.CD7)_{16}$ => $(64177.802490234375)_{10}$

۴) تمام اعداد زیر، ۸ بیت و در سیستم مکمل ۲ هستند. عملیات خواسته شده را برای هریک به صورت مستقیم (بدون تبدیل مبنا) انجام دهید.

a) 00001011 + 01011110

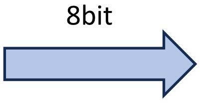
$$\begin{array}{r} 00001011 \\ +\ 01011110 \\ \hline 01101001 \end{array}$$

b) 100 - 110000

$$\begin{array}{r} 11111100 \\ +\ 00010000 \\ \hline 00001100 \end{array}$$

c) 1101100 × 10001000 = 100101100000

-20 × -120 = 2400 => 12 bit



×								1	1	1	0	1	1	0	0
								1	0	0	0	1	0	0	0
								0	0	0	0	0	0	0	0
							0	0	0	0	0	0	0	0	
						0	0	0	0	0	0	0	0		
					1	1	1	0	1	1	0	0			
+				0	0	0	0	0	0	0	0				
			0	0	0	0	0	0	0	0					
		0	0	0	0	0	0	0	0						
	1	1	1	0	1	1	0	0							
	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0

به دلیل اینکه ضرب این دو عدد دودویی در ۸ بیت جا نمی‌شود و ۱۲ بیت حداقل نیاز دارد. بنابراین باید ضرب آن‌ها را با ۱۲ بیت انجام داد تا به جواب صحیح رسید.

12bit

											1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
										×	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
											0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
										0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
									0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
								1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0			
							0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						
				1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0							
			1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0								
		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0									
	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0										
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0											
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0

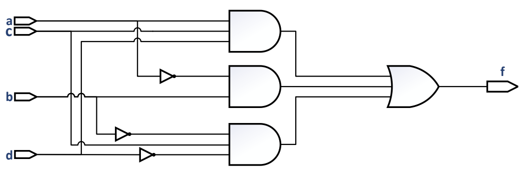
۵) موارد خواسته شده را انجام دهید:

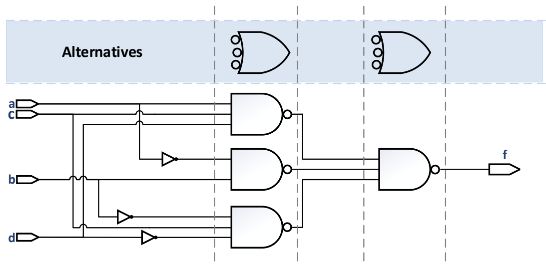
الف) با استفاده از جدول کارنو، تابع زیر را ساده کنید و سپس مدار تمام *NAND* تابع ساده شده را رسم کنید.

$f(a,b,c,d) = a'b'cd' + a'bc' + bcd + a'cd' + b'cd' + ab'c$

			A	A	
	0	1	0	0	
	0	1	0	0	D
C	0	1	1	1	D
C	1	1	0	1	
		B	B		

f(a, b, c, d) = (acd)+(b'cd')+(a'b) = ((acd)'(b'cd')'(a'b)')'





ب) با استفاده از جدول کارنو، تابع زیر را ساده کنید و سپس مدار تمام *NOR* تابع ساده شده را رسم کنید.

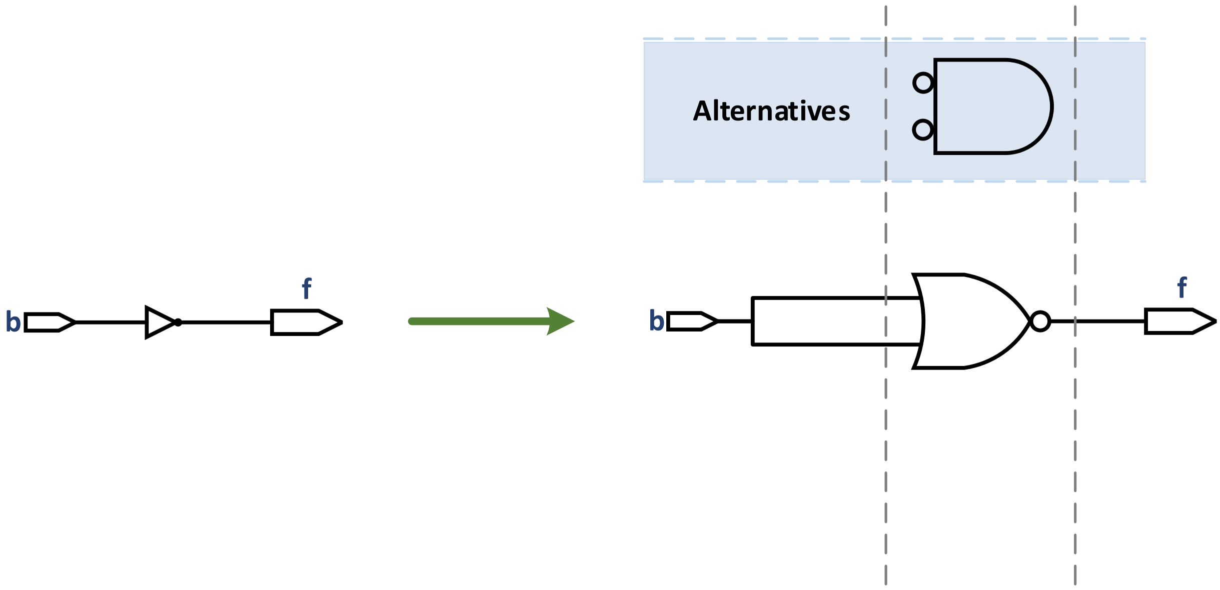
f(a,b,c,d) $= a'b'c' + a'b'c + ab' + b'c'd + b'cd'$

A

1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1

C D B

f(a, b, c, d) $= b'$



۶) توابع زیر را درنظر بگیرید :

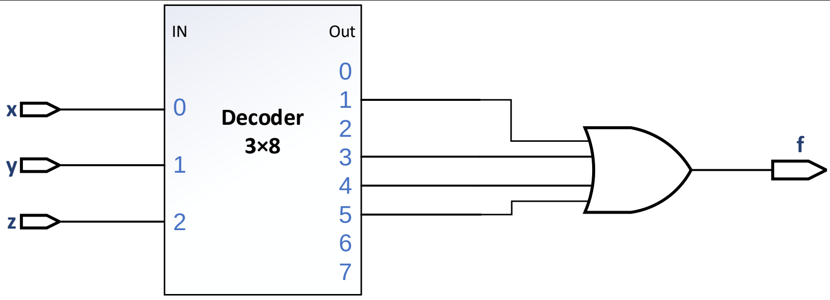
a) $f(x,y,z) = x \cdot y' + x' \cdot z$
b) $f(w,x,y,z) = \prod M(0,1,3,5,6,7,8,9,14,15)$

(آ) توابع را با استفاده از یک Decoder با خروجی فعال بالا و یک گیت OR طراحی کنید.

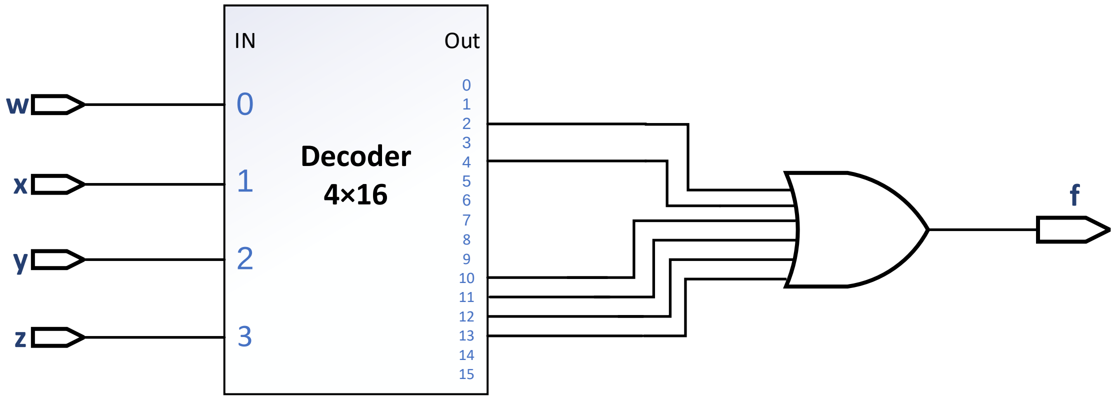
a) $f(x,y,z) = x \cdot y' + x' \cdot z = xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z$

$Minterms = 101 \ , \ 100 \ , \ 011 \ , \ 001$

$= \sum m(1,3,4,5)$

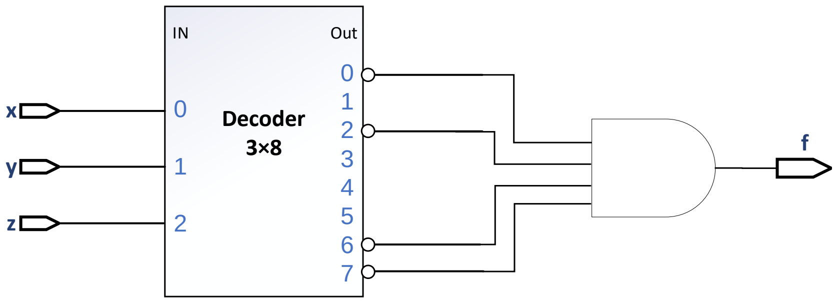


b) $f(w,x,y,z) = \prod M(0,1,3,5,6,7,8,9,14,15) = \sum m(2,4,10,11,12,13)$

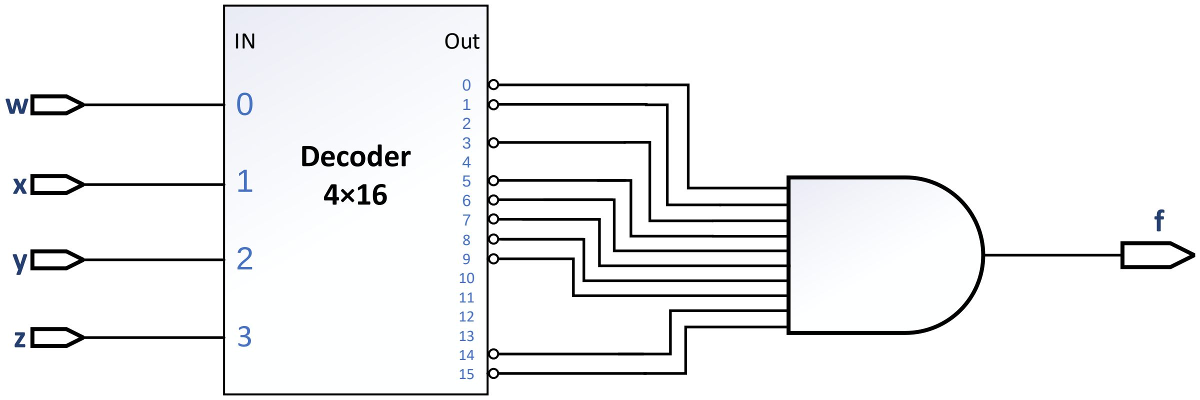


ب) توابع را با استفاده از یک Decoder با خروجی فعال پایین و یک گیت AND طراحی کنید.

a) $f(x,y,z) = x \cdot y' + x' \cdot z = \sum m(1,3,4,5) = \prod M(0,2,6,7)$

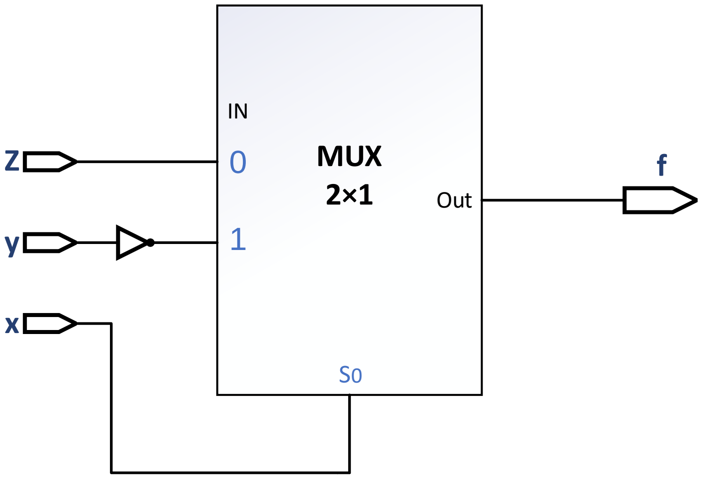


b) $f(w,x,y,z) = \prod M(0,1,3,5,6,7,8,9,14,15)$

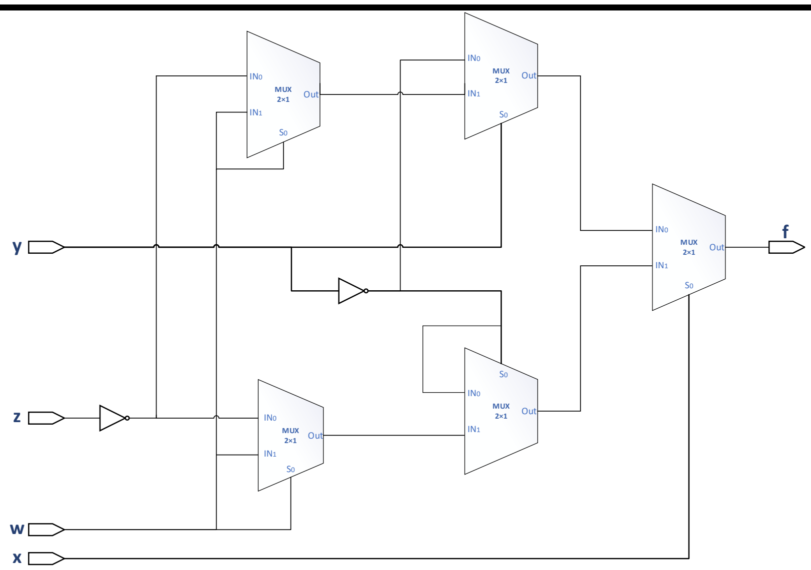


ج) توابع را با استفاده از کوچکترین Multiplexer ممکن طراحی کنید.

a) $f(x,y,z) = x \cdot y' + x' \cdot z$



b) $f(w,x,y,z) = \prod M(0,1,3,5,6,7,8,9,14,15) = \sum m(2,4,10,11,12,13) = wx'y + wxy' + xy'z' + x'yz' = x(wy' + y'z') + x'(wy + yz') = x(y'(w+z')) + x'(y(w+z'))$



یا

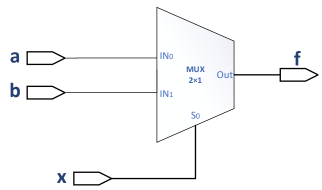
w

	0	1	1	0	
	0	0	1	0	
	0	0	0	1	z
y	1	0	0	1	

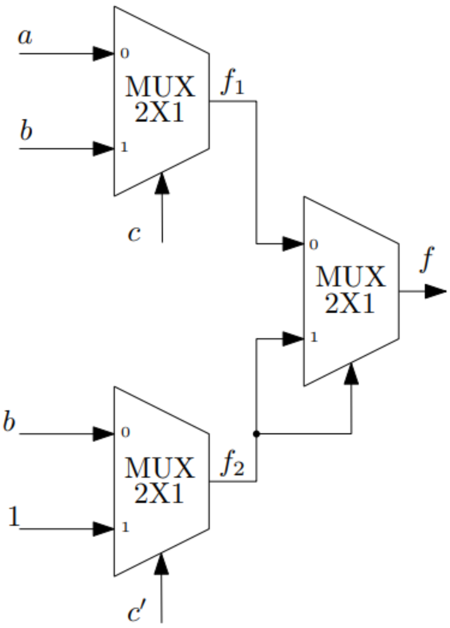
x

b) $f(w,x,y,z) = wxy' + wx'y + xy'z' + x'yz' = x(wy' + y'z') + x'(wy + yz')$

$$\begin{cases} a = wy' + y'z' \\ b = wy + yz' \end{cases} => f(w,x,y,z) = ax + bx'$$



۷ خروجی مدار زیر را به ساده‌ترین فرم SOP بنویسید.



$$f(a,b,c) = f_2 + f_2'(f_1) = (bc + c') + (bc + c')(ac' + bc) = bc + c' + bc + ac'$$
$$= bc + c' = b + c'$$

۸ برای تابع داده شده:

$f(a,b,c,d) \ = \ \sum m(1,3,4,5,10,11,14,15)$

الف) ابتدا آن را به ساده‌ترین فرم SOP بنویسید، سپس موج خروجی را به ازای گذار «صفحه بعد» رسم کنید. تاخیر گیت‌های یک ورودی، دو ورودی و سه ورودی به ترتیب ۳ و ۴ و ۵ نانوثانیه است.

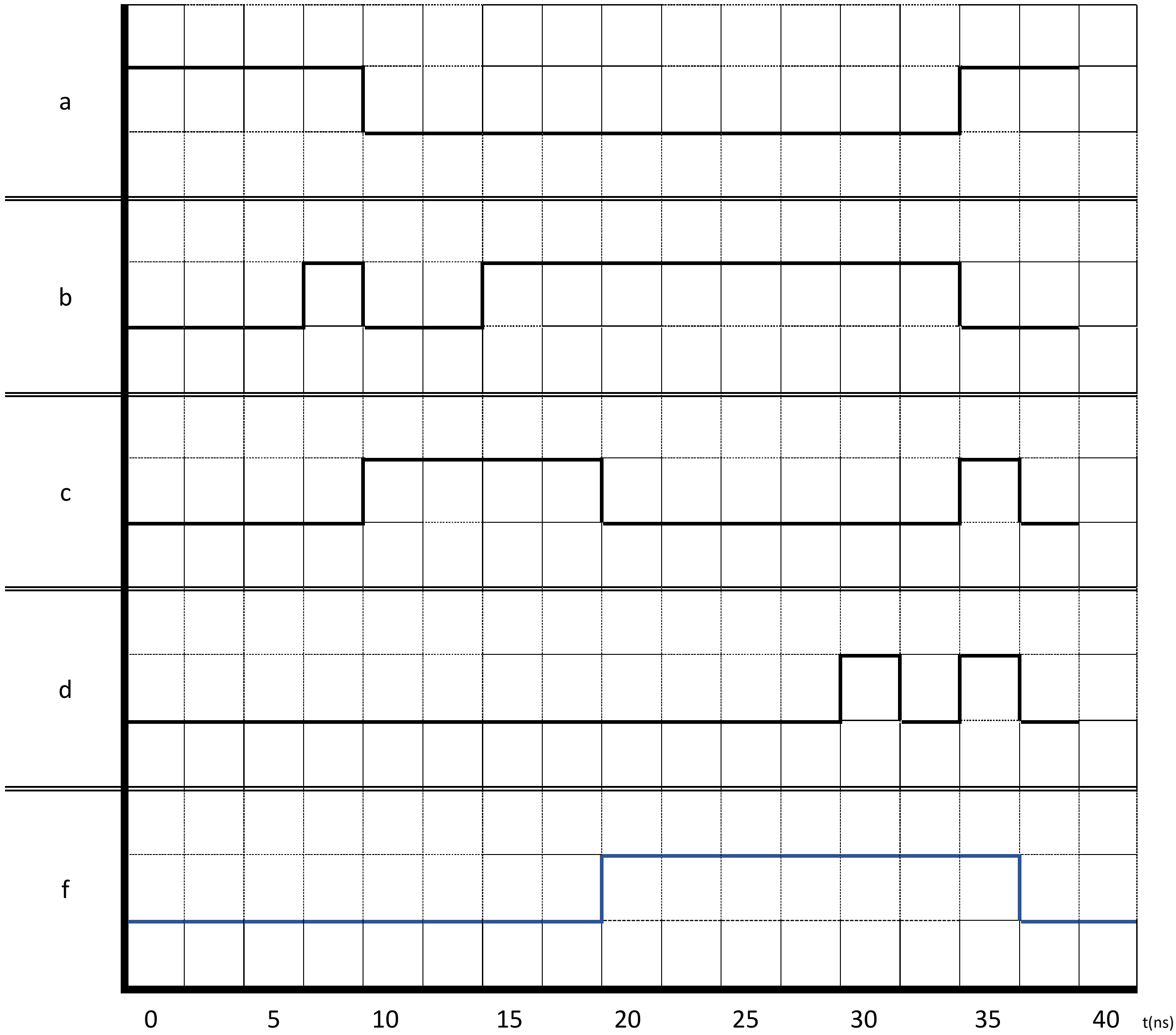
ب) با ذکر دلیل تعیین کنید که آیا مدار گلیچ می‌گیرد یا خیر.

الف)

			A	A	
	0	1	0	0	
	1	1	0	0	D
C	1	0	1	1	D
C	0	0	1	1	
		B	B		

$$f(a,b,c,d) = ac + a'bc' + a'b'd$$

ب) با توجه به شکل موج زیر، در حالت های خواسته شده گلیچ رخ نمی‌دهد.



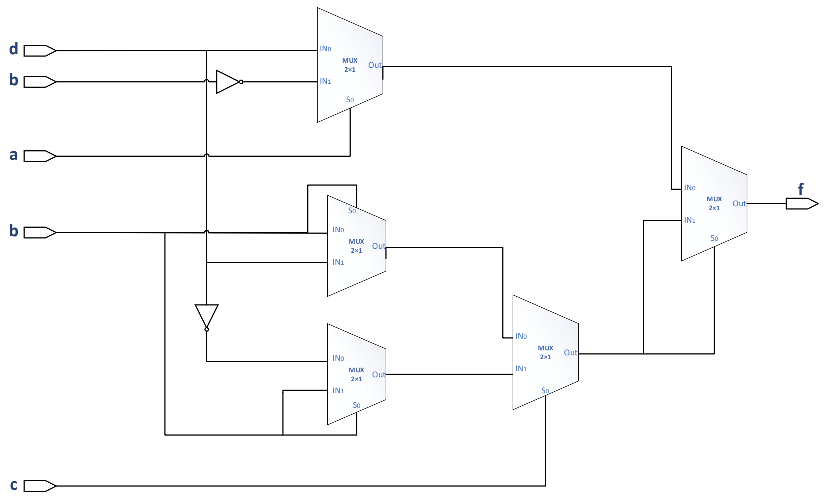
۹

تابع زیر را با استفاده از کمترین تعداد مالتی پلکسرهای ۲ به ۱ پیاده‌سازی کنید

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,3,4,5,6,8,9,13,14), d(10,11)$$

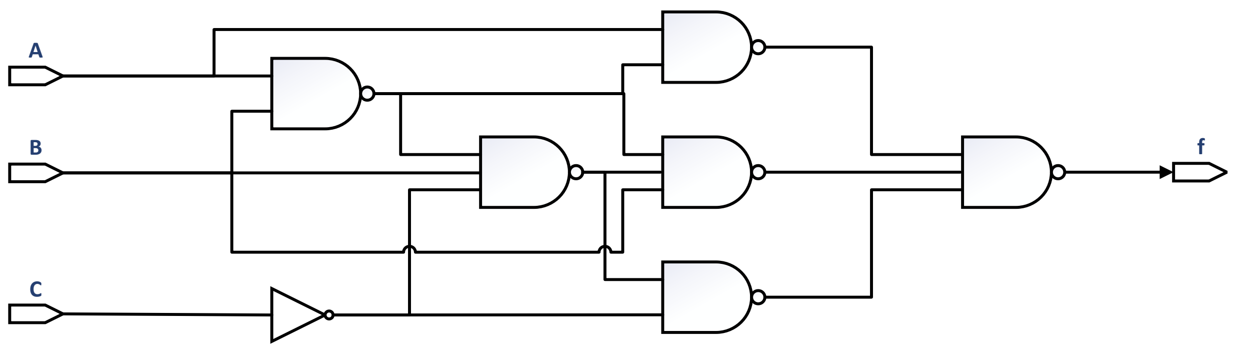
			A	A	
	1	1	0	1	
	0	1	1	1	D
C	1	0	0	x	D
C	1	1	1	x	
		B	B		

$$f(a,b,c,d) = ab' + cd' + a'd' + b'c + bc'd = ab' + a'd + c\left(d' + b\right) + c'(bd)$$



۱۰ مسئله ۷-۲۴. از کتاب Roth

الف)

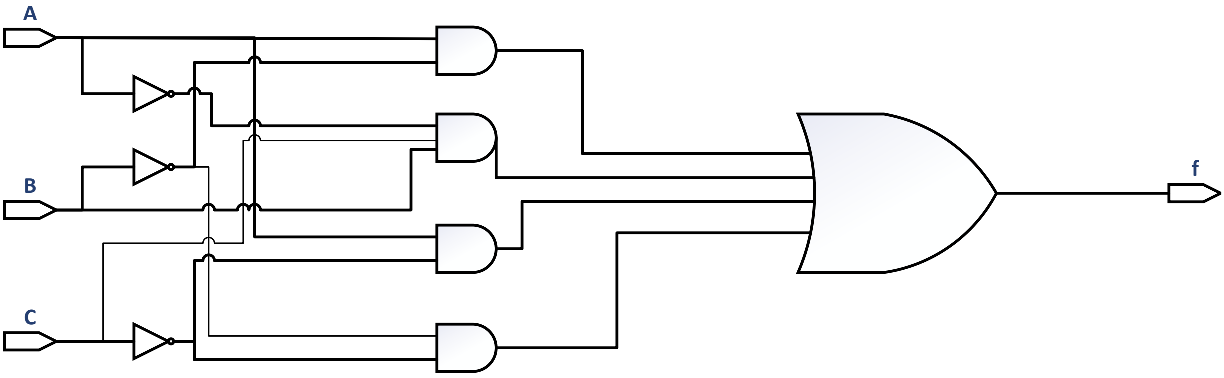


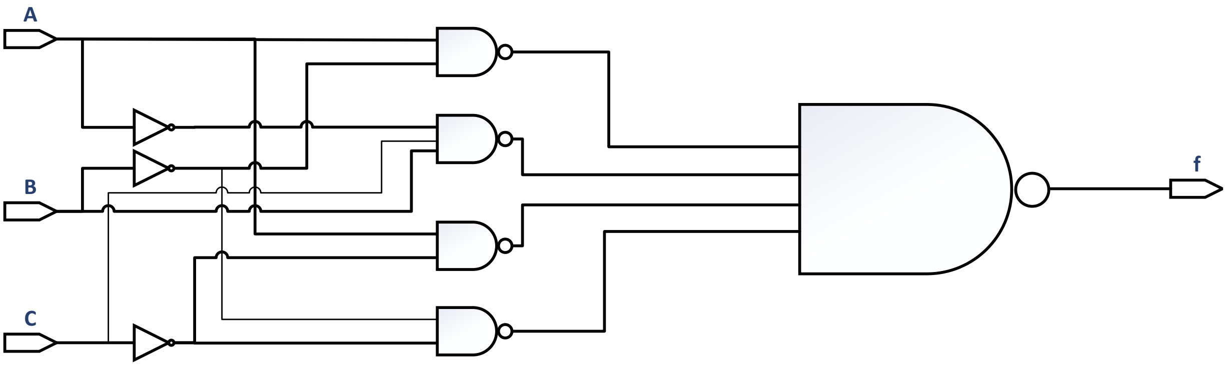
ب)

$$f(a,b,c,d) = \left(a(ab)'\right) + b\left((ab) + b' + c\right)(ab)' + c'\left((ab) + b' + c\right) = ab' + (ab + bc)(ab)' + ac' + b'c' = ab' + a'bc + ac' + b'c'$$

	A			
	1	0	1	1
C	0	1	0	1
		B		

ج)





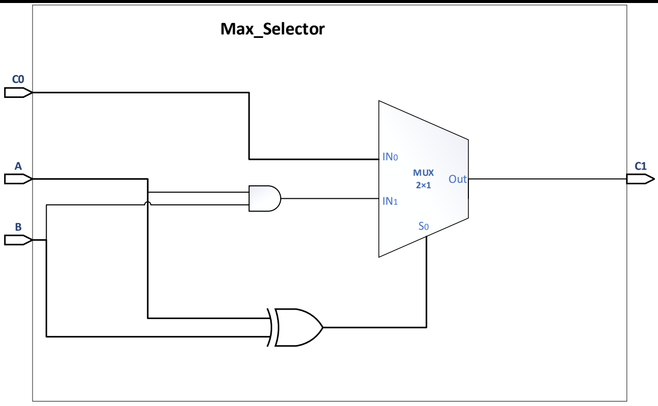
سوالات امتیازی

الف)

فرض کنید C برابر با صفر (یا ۱) نشان‌دهنده این است که A بزرگتر از B (کوچکتر از B) در بیت‌های۰تا i است

بنابراین : $c_{i+1} = c_i a'_i + c_i b_i + a'_i b_i$

حال فرض کنید c = 1 و Ci = 1(0) نشان‌دهنده این است که A بزرگتر از B (کوچکتر از B) در بیت‌های ۰ تا i باشد، بنابراین : $c_{i+1} = c_i b'_i + c_i a_i + b'_i a_i$



ب) این مدار مانند جمع‌کننده/ تفریق کننده چند بیتی از چند بلوک ساخته شده است و رابطه خروجی C آن به صورت زیر است:

$$C_{i+1} = C_i a_i$$

همچنین برای $C_0=1$، C_i رقم‌های نقلی بین مراحل جمع‌کننده برای عملیات محاسباتی $A + (-B)$ هستند.

ج) وقتی $a_i=0$ و $b_i=1$ باشد، در صورتی که ورودی M_i نشان‌دهنده A>B در بیت‌های i+1 تا ۳ باشد نمی‌توان خروجی M_j را تعیین کرد. اگر A>B در بیت‌های i+1 تا ۳ باشد، خروجی M_j باید همچنان نشان‌دهنده A>B باشد، اما اگر A=B در بیت‌های i+1 تا ۳ باشد، خروجی M_i باید نشان‌دهنده A<B باشد.
بنابراین، لازم است بین سه حالت A>B ، A=B و A<B تمایز قائل شویم. برای این کار، باید یک خط دوم بین ماژول‌ها اضافه شود.