1　62 ページ目翻訳

ツリーは最も単純な接続グラフです。 これらのグラフは、理論的な特性だけでなく、検索、並べ替え、最小限のコネクタ問題などのアプリケーションとしても興味深いものです。 この章では、ツリーの理論と応用の両方について説明します。

最近の地震により、州内のいくつかの高速道路が破壊されたと仮定します。 その結果、特定の都市間を車で移動することはできなくなりました。 高速道路の再建には多額の費用がかかるため、最初は最小限の数の高速道路を再建して、再び 2 つの都市間を車で移動できるようにすることが望ましいです。

元の高速道路システムは、頂点が都市に対応するグラフ G によってモデル化できます。 また、G の 2 つの頂点は、対応する都市間を接続するが他の都市を通らない幹線道路がある場合、エッジで結合されます。 E を、破壊された高速道路に対応する G のすべてのエッジの集合とする。 次にグラフ G'。 結合された G_i の頂点がある場合に限り、 $v_iv_j \in E(H)$ となるような頂点セット $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を持つ新しいグラフ H を構築します E のエッジから G_j の頂点まで。 再構築される高速道路の最小数は、H の接続されたスパニング サブグラフ H' 内のエッジの最小数です。 H' にはサイクルが含まれないことに注意してください。 それ以外の場合は、H' のサイクル上のエッジを削除しても、H の接続されたスパニング サブグラフが結果として得られます。

この動機から、ツリーをサイクルのない接続されたグラフとして定義します。 したがって、木のすべての端が橋になります。 次数 1 のツリーは 1 つだけ、次数 2 のツリーは 1 つ、次数 3 のツリーは 1 つだけですが、次数 4 のツリーは 2 つあります。図 3-1 は、次数 6 の 6 つの (非同型) ツリーを示しています。) サイクルのないものは森です。

2　63 ページ目翻訳

したがって、フォレストのすべてのコンポーネントは木です。 スパニングツリーグラフ G の (スパニング フォレスト) は、ツリー (フォレスト) である G のスパニング サブグラフです。

ここで、上で説明した高速道路の問題に戻ります。 再構築される高速道路の最小数は、グラフ H のスパニング ツリー内のエッジの最小数であることに注目してください。 もちろん、ここでは 2 つの高速道路の建設コストが同じであると仮定します。 確かにそのような仮定は現実的ではありません。 さまざまなコストが関係する状況については、セクション 3.6 で説明します。

木は階層状況を表現するのにも役立ちます。 たとえば、上で説明したようにツリーを使用できます。 再構築される高速道路の最小数が、グラフ H のスパニング ツリー内のエッジの最小数であることに注目してください。 もちろん、ここでは 2 つの高速道路の建設コストが同じであると仮定します。 確かにそのような仮定は現実的ではありません。 さまざまなコストが関係する状況については、セクション 3.6 で説明します。

木は階層状況を表現するのにも役立ちます。 たとえば、ツリーを使用してビジネスや組織のレベルを記述することができます。 図 3-2 のツリーは、大学で考えられる管理階層の一部を示しています。

数学科委員長は数学科教授の直属の上司であり，芸術科学部長は数学科教授の直属の上司であり，芸術科学部長は数学科委員長の直属の上司である．

3　64 ページ目翻訳

ツリーはソート手順を記述するために使用することもできます。たとえば、ある企業で募集中のポジションに数人の応募者がいるとします。 同社はアファーマティブ・アクション/機会均等雇用主であるため、応募者が女性か、少数派の男性か、それとも少数派の男性かに応じて応募が分類されます。

各グループは、応募者が必要な種類の仕事を行った経験があるかどうかに応じてさらに分類できます。 これらの申請は、申請者が大学卒業者かどうかに応じてさらに分類できます。 この状況は図 3-3 に示されています。ここで、E、NE、CD、NCD はそれぞれ、経験のある、経験のない、大卒の学位、および大卒の学位がないことを示します。

次数 6 の各ツリー (図 3-1 を参照) には 5 つのエッジがあることに注意してください。 図 3-2 および 3-3 に示されているツリーのサイズも、次数より 1 つ小さくなっています。 ここで、木の順序とそのサイズの間の単純だが重要な関係を検証します。

定理 3.1。 次数 p のツリーのサイズは $p-1$ です。

証拠。 p の強い帰納法によって進めます。 K_1 は次数 1 の唯一のツリーであり、そのサイズは 0 であるため、$p=1$ の結果が続きます。 $k \leq 2$ を整数とし、その結果が k 未満の次数のすべてのツリーに当てはまると仮定します。 T を次数 $p=k$、サイズ q の木とし、e を T の辺とする

e が T のブリッジであるため、$T-e$ がフォレスト (2 つのコンポーネントで必要) であることはすでに観察しました。 $T-e$ の 2 つの成分を T_1 と T_2 で表します。ここで、$T_i (i=1,2)$ は次数 p_i とサイズ q_i の木です。

$p_i < k (i=1,2)$ なので、$i=1,2$ の場合、仮定により $q_i = p_i - 1$ であることがわかります。 $p = p_1 + p_2$ および $q = q_1 + q_2 + 1$ であるため、

$$q = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + 1 = p_1 + p_2 - 1 = p - 1$$

。

したがって、帰納法により、ツリーのサイズは次数より 1 小さくなります。定理 3.1 を利用すると、次のことが証明されます (問題 5 を参照)。

4　65 ページ目翻訳

帰結 3.1. G を次数 p のグラフとする。 その場合、以下は同等です。

(i) G はツリーです。(ii) G は接続されており、サイズは p-1 です。(iii) G のサイズは $p-1$ で、サイクルはありません。

定理 3.1 から、木の別の有用な特性を取得できます。

定理 3.2。 すべての非自明ツリーには、少なくとも 2 つの終了頂点が含まれます。証拠。 T が次数 p、サイズ q の木であると仮定します。d_1、d_2、...、d_p がその頂点の次数を示し、$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_p$ となるように順序付けされます。 。 T は接続されており自明ではないため、各 $i(1 \leq i \leq p)$ に対して $d_i \leq 1$ になります。 T に 2 つの終点頂点が含まれていない場合は、$2 \leq i \leq p$ に対して $d_1 \leq 1$ と $d_i \leq 2$ が成り立つので、

$$fdsafs$$

ただし、定理 1.1 と 3.1 より、

$$fdsafdsf$$

これは不等式 (3.1) と矛盾します。したがって、T には少なくとも 2 つの終端頂点が含まれます。

u と v が接続されたグラフ G の 2 つの頂点である場合、G には少なくとも 1 つの $u-v$ パスが含まれます。 ただし、G が木である場合は、さらに多くのことが言えます。

定理 3.3。 u と v がツリー T の異なる頂点である場合、T には 1 つの $u-v$ パスが含まれます。

証拠。 逆に、T に 2 つの $u-v$ パス、たとえば P と Q が含まれているとします。 P と Q は異なる $u-v$ パスであるため、P と Q の両方に属する頂点 x (おそらく $x=u$) が存在し、上のxの直後の頂点が存在する必要があります。P は、Q 上の x の直後の頂点とは異なります (図 3-4 を参照)。

y を、同じく Q に属する x に続く P の最初の頂点とします (y は v の可能性があります)。 次に、これにより、x と y のみが共通する 2 つの $x-y$ パスが生成されます。 これら 2 つのパスは T に循環を生成しますが、これは T がツリーであるという事実と矛盾します。 したがって、T には $u-v$ パスしかありません。

5　66 ページ目翻訳

実際、定理 3.3 で述べた性質を持つのは木だけである。 (問題 10 を参照)。木にはもう一つ注目すべき特徴があります。木 T の隣接しない 2 つの頂点を u と v とすると、$T + uv$ はちょうど 1 つのサイクル C を持ちます (これには辺 uv が含まれている必要がある)。C から辺 e を削除すると、再び木が生成されます。この木は必ずしも T と同型であるとは限らない。

さらに、木は非常に単純な構造を持っているため、比較的多くの辺を持つグラフの部分グラフとして大量に発生することがよくある。辺の数が最も少ない接続された全域部分グラフは必ず木である必要があるため、すべての接続されたグラフには少なくとも 1 つの全域木が含まれます。実際、グラフは、全域木が含まれている場合にのみ接続されます。最小次数が十分に大きなすべてのグラフには、特定の次数の木がすべて含まれることを示して、このセクションを締めくくります。

定理 3.4。 T を次数 m の木とし、G を $\delta(G) \leq m-1$ のグラフとする。 すると、T は G の一部の部分グラフと同型である。

証明。 m について帰納法で進める。 K_1 はすべてのグラフの部分グラフであり、K_2 はすべての空でないグラフの部分グラフであるため、結果は $m = 1$ と $m = 2$ に当てはまります。

次数 $m-1$ の木 T_1（ここで $m \leq 3$）と、$delta(H)\ \Gamma\ m-2$ のグラフ H について、T_1 は H の部分グラフと同型であるとする。

v を T の端点とし、u を v に隣接する T の頂点とする。 この場合、グラフ $T - v$ は次数 $m-1$ の木になる。 $\delta(G) \leq m-1 \leq m-2$ なので、$T - v$ は G の部分グラフ T' と同型であるという帰納的仮説が導き出されます (図 3-5 を参照)。

定理 3.4 の証明のステップ。

同型写像のもとで $T - u$ の頂点 u に対応する T' の頂点を u' とする。 $\deg_G u' \leq m-1$ と T' には u' と異なる $m-2$ 個の頂点を持つので、必然的に u' は G の頂点 w に隣接し、 T' に属さない。すると、G の部分グラフ $T' + u'w$ は T と同型である。

6　68 ページ目翻訳

根付き木

このセクションでは、重点をツリーから有向ツリーに変更します。有向木 T は、根と呼ばれる T の頂点 r が存在し、T のすべての頂点 v に対して T に $r-v$ 基本銅が存在する場合、根付き木と呼ばれます。図 3-6 は、2 つの有向木 T_1 と T_2 を示しています。有向木 T_1 は根付き木であり、根は r です。有向木 T_2 は根がはられていません。

T が根付き木の場合、根 r を最上位のレベル 0 として T を描画するのが通例です。r に隣接する頂点は、1 レベル下のレベル 1 に配置されます。レベル 1 の頂点に隣接する頂点はレベル 2 にある、というようになります。一般に、レベル $i>0$ のすべての頂点は、ちょうど 1 つの頂点、つまりレベル $i-1$ の頂点に隣接しています。より正式には、ルート r を持つルート付きツリーの頂点 x は、T の $r-x$ パスの長さが i である場合に限り、レベル i になります。

7　68 ページ目翻訳

図 3-6 の根付き木 T_1 は、レベルを示すために図 3-7 に再描画されています。各弧は、あるレベル j の頂点からレベル $j+1$ の頂点に向けられていることに注意してください。根付き木のレベル h に頂点が存在する最大の整数 h は、その高さと呼ばれます。図 3-7 の根のある木の高さは 3 です。

次の定理は、根付き木の特徴を示します。

定理 3.5. 有向木 T は、T に $\mathrm{id}r = 0$ の頂点 r が含まれ、他のすべての頂点について $\mathrm{id}v = 1$ が含まれる場合に限り、根付き木になります。 T の v。

証明。 T を根 r を持つ根付き木とします。 この場合、$\mathrm{id}r = 0$ となります。$v(= r)$ を T の頂点とし、v がレベル $i(> 0)$ にあるとします。 この場合、v はちょうど 1 つの頂点、つまりレベル $i-1$ の頂点に隣接しているため、$\mathrm{id}v = 1$ になります。逆に、T を、$\mathrm{id}r = 0$ の頂点 r を含む有向木とし、すべての頂点 $v = r$ に対して $\mathrm{id}v = 1$ とします。u_1 を T の頂点とし、$u_1 = r$ とします。 $\mathrm{id}u_1 = 1$ なので、u_2 に隣接する頂点 u_3 があります。これらの頂点 u_1、u_2、u_3 はシーケンスの始まりです。

このシーケンスを可能な限り続けます。 まず、このシーケンスには個別の頂点のみが含まれていることを観察します。$u_i = u_j, i < j$ で、頂点 $u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}$の場合、$u_j = u_i$ は循環ですが、これは不可能です。したがって、シーケンスは有限です (u_1、u_2、...、u_n など)。 $\mathrm{id}r = 0$ のみなので、$u_n = r$ と結論付けます。したがって、$r = u_n, u_{n-1}, \ldots, u_2, u_1$ は $r - u_1$ パスになります。

定理 3.5 によれば、根のあるすべての木には一意の根が含まれます。根を持つ木 T のルート r を最上部に描き、残りの頂点を r の下の適切なレベル $i(i = 1, 2, \ldots)$ に描くのが一般的であるため、すべての円弧は下向きになります。 したがって、このような図面に示されている方向は不要です。したがって、端に矢印を付けずに、根の生えた木をこの方法で描くのが通例です。たとえば、図 3-7 のルート付きツリーは、図 3-8a で説明したように再描画されます。

8　70 ページ目翻訳

アルゴリズムと木を調べる前に、根付き木でよく使用される説明的な用語が必要です。T を根のある木とする。T の頂点 v が u に隣接し、u が v の下のレベルにある場合、u は v の子と呼ばれ、v は親と呼ばれます。u。たとえば、図 3-8a の根付き木では、頂点 z は x の子であり、x は y と z の両方の親です。T の $v-w$ パスが v の下にある場合、頂点 w は v の子孫です (v は w の祖先です)。図 3-8a では、a は T 内の $t-a$ 基本道 t,v,a は t の下にあるため、t の子孫です。ただし、T の $t-y$ パス t,r,x,y には t を下回らない頂点が含まれているため、y は t の子孫ではありません。

頂点 v によって生成される根付き木 T の部分木とそのすべての子孫も、根 v を持つ根付き木です。この部分木は、v をルートとする T の最大部分木と呼ばれます。図 3-8b は、t をルートとする T (図 3-8a) の最大部分木を示しています。したがって、根付き木では、ルートだけが親を持たず、他のすべての頂点には親が 1 つだけあります。子のない頂点は葉と呼ばれます。他のすべての頂点 (つまり、子を持つ頂点) は内部頂点と呼ばれます。図 3-8a では、頂点 u、w、s、y、z、a は T の葉です。

すべての頂点に最大でも m の子がある場合、根付き木は m-ary と呼ばれます。二分木は、各子が左の子または右の子として指定される 2 分木です。二分木を描くとき、各子は左の子または右の子として指定されます。二分木を描画する場合、左の子はそれぞれ親の右下に描画され、右の子は親の右下に描画されます。図 3-9 のツリー T_1 と T_2 は二分木です。たとえば、T_1 では、t_1 は c_1 の左の子で、u_1 は右の子です。

セクション 2.2 では、二分探索アルゴリズムについて説明しました。アルファベット順のリストの二分検索における二分検索。目的の単語が、現在検討している単語の前または後ろにあるものと同じであること。セクション 2.2 で示した例を繰り返して、二分探索で二分木をどのように使用できるかを説明します。DOOR という単語が次のアルファベット順のリストに含まれるかどうかを確認したいとします。