1　6ページ目翻訳

グラフ G の頂点 v の次数は、v に隣接する辺の数であり、G の次数が p で v が G の頂点である場合、$0 \leq \deg v \leq p-1$ となる。次数 0 の頂点は**孤立点**と呼ばれ、次数 1 の頂点は**端点**と呼ばれる。頂点は、その次数が偶数か奇数かによって**偶数**か**奇数**かが決まる。例えば、図 1-6 のグラフ G は、v_1, v_2 と v_5 の 3 つの偶数頂点と、v_3、v_4 の 2 つの奇数頂点を持ち、v_5 は孤立し、v_3 は端点である。

図 1-6 のグラフ G は、次数 5、サイズ 4、そして

$$\sum_{i=1}^{5} \deg v_i = 8$$

つまり、すべての頂点の度数の和は 8 であり、このグラフでは、この和はグラフの大きさの 2 倍である。この観察は常に真であり、この結果は一般に "グラフ理論の第一定理" と呼ばれている。

定理 1.1 G を次数 p、サイズ q のグラフとし、$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ とすると、

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

である。

2　7ページ目翻訳

証明 G の頂点の次数を合計するとき、各辺は、その 2 つの接続頂点それぞれについて 1 回ずつ数えられる。この定理には有用な帰結がある。

補題 1.1 すべてのグラフは偶数個の奇数頂点を含む。

証明 偶数頂点の集合を V_e、サイズ q のグラフ G の奇数頂点の集合を V_o とすると、

$$\sum_{v\in V(G)} \deg v = \sum_{v\in V_e} \deg v + \sum_{v\in V_o} \deg v = 2q,$$

なので、この式の右辺の式はすべて偶数なので、左辺の和は偶数の項を含まなければならず、すなわち $|V_o|$ のサイズは偶数である。

グラフ G は、G のすべての頂点が位数 r を持つとき、**r-regular(r-正則)**、または次数 r の正則であるという。図 1-7 には、$r = 0, 1, \ldots 5$ で次数 6 の r-regular グラフ H も示されている。G が次数 p の r-regular グラフであれば、当然ながら $0 \leq r \leq p-1$ となる。しかし、$0 \leq r \leq p-1$ であれば、次数 p の r-正則グラフは存在しないことになる。

3　8ページ目翻訳

しかし、第6章で検証するように、r と p がともに奇数ではなく、$0 \leq r \leq p-1$ である場合、必ず次のような位数 p の r-正則グラフが存在する。グラフ G の補グラフ Gh とは、グラフ G が $V(G) = V(\overline{G})$ で、uv が G の辺でない場合にのみ、uv が $\overline{G}$ の辺となるグラフのことである。図 1-8 にグラフとその補数を示します。次数 p のグラフ G において v が次数 n の頂点である場合、G における v の次数は $p-n-1$ であることがわかる。したがって、$\overline{G}$ は G が正則である場合にのみ正則である。

問題点 SET 2

1. 次数 $n \geq 2$ のグラフはすべて、同じ次数の頂点を少なくとも 2 つ持つことを証明せよ。
2. 次数 5 のグラフ G で、G の 2 つの頂点がそれぞれ近傍にある、という性質を持つグラフの例を挙げよ。そのグラフを描き、その大きさと、各頂点の次数を明記する。
3. 以下に示すグラフ G の頂点 $v_1, v_2, \ldots, v_6$ の次数を決定し、$\sum_{i=1}^{6} \deg v_i$ を計算する。これを用いて G の大きさを決定せよ。
4. 頂点が 1, 2, 2, 3, 4 度である次数 5 のグラフを作る。このグラフの大きさはいくらか？
5. ハービーは自分の家で開かれるパーティーに 5 人の友人を招待した。彼らが全員到着した後、ハービーはパーティーに参加している人のうち何人を知っているかを尋ねた。5 人はそれぞれ違う答えをした。これは可能か？

4　9 ページ目翻訳

6. m と b をともに 0 でない非負の整数とし、m 個の偶数頂点と n 個の奇数頂点を持つグラフが常に存在するとは限らないことを示せ。ただし、n が偶数であることが必要な場合は、そのようなグラフが存在することを示せ。

7. (a) 各 $r, 0 \leq r < 8$ について、位数 8 の r-regular グラフを構築せよ。
   (b) (a) で構築した各グラフの補数を調べよ。
   (c) (c) G が正則グラフであれば、G は正則であることを示せ。

8. トムとその妻が、3 組の注文のある夫婦と一緒にパーティーに参加したとする。何度か握手が行われた。同じ人と 2 回以上握手する人はいませんでした。すべての握手が終わった後、トムは妻を含む各人に何回握手したかを尋ねた。各自が違う答えをした。
   (a) トムは何人と握手したのでしょうか？
   (b) 奥さんは何人と握手しましたか？

9. 次数 14、サイズ 25 のグラフ G のすべての頂点は次数 3 または 5 である。G は次数 3 の頂点をいくつ持っているか？

10. 次数 7、サイズ 10 のグラフ G は、次数 a の頂点が 6 個、次数 b の頂点が 1 個ある。b は何個か？

11. 次数 4 のグラフは、次数 3 の頂点が 3 つ、次数 1 の頂点が 1 つあることがあるか？

1.3 同型のグラフ

同じグラフを表す 2 つの図が、全く違うものに見えることがあります。このことは、図 1-3 や図 1-4 ですでに確認済みです。しばしば、2 つのグラフ G_1 と G_2 が実際に同じグラフであるかどうかを知ることが重要である。直感的には、それぞれを描画（または再描画）してもう一方のグラフを得ることができれば、それらは同じであると言える。この考えを定式化するために、同型という概念を導入する。2 つのグラフ G_1、G_2 は、$V(G_1)$ から $V(G_2)$ への一対一の関数 ϕ が存在し、$\phi(u)\phi(v) \in E(G_1)$ の場合に限り、uv が $E(G_1)$ に存在する場合、同型であるとする。(表記を簡略化するため、u の像を $\phi(u)$ ではなく、$\phi(u)$ と書く。)

この関数 ϕ は同型と呼ぶ。G_1 と G_2 が同型である場合、$G_1 \cong G_2$ と書く。

図 1-9 のグラフ G1 と G2 は、関数 $\phi : V(G_1) \to V(G_2)$ のため、同型である。

$\phi v_i = u_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$ で定義される $V(G_1)$ は同型である。

したがって、グラフ G_2 は、G_1 が得られるように描画することができ、ここで、u_1 は、すべてのについて v_1 に置き換えられる。$i (1 \leq i \leq 5)$

5　10 ページ目翻訳

$V(G_1) = V(G_2)$ で、$E(G_1) = E(G_2)$ のとき、2 つのグラフ G_1 と G_2 は等しい。確かに、等しいグラフは同型である。しかし、その逆は、グラフの順序が同じでなければならず、

しかし、図 1-9 のグラフ $G1$、$G2$ は同型であるが等しくないので、逆は成り立たない。(2 つのグラフが等しくなるには、まず頂点集合が同じである必要がある。)

G_1 と G_2 が同型のグラフであるならば、同じ順序と同じ大きさを持つはずである。なぜそうなのかを知るために、$V(G_1)$ から $V(G_2)$ への同型を ϕ とする。ϕ は $V(G_1)$ から $V(G_2)$ への一対一の関数であるから、G_1 と G_2 が同じ順序を持つように G_1 と G_2 の頂点の対が存在することになる。u' と v' を G_2 の任意の 2 つの異なる頂点とする。すると、G_1 の頂点 u と v には、$\phi u = u'$、$\phi v = v'$ となるような、異なる頂点が存在する。u' と v' が G_2 で隣接するのは、u と v が v に隣接する場合のみであるから、G_2 の n 個の頂点 $\phi v1, \phi v2, \ldots, \phi vn$ は G_1 で隣接し、グラフ G_1 と G_2 は同じサイズである。

さらに、G_1 の各頂点 v について、$\deg_{G_1} v = \deg_{G_2} \phi v$ となり、これは以下のように検証することができる。$deg_{G1}v = n$ であり、$v_1, v_2, \ldots, v_n$ が存在するとする。G_2 の $v_1, v_2, \ldots, \phi v_n$ は ϕv に隣接し、G_2 の他の頂点は ϕv に隣接していない。

それから、n 個の頂点 $\phi v, \phi v2, \phi vn$ は ϕv に隣接し、G_2 の他の頂点は ϕv に隣接しない。したがって、$deg_{G2}\phi v = n$ したがって、2 つのグラフが同型である場合、それらは必ず同じ順序と大きさを持ち、頂点の度数は同じである。(このしかし、2 つのグラフが等しいと言うことは、驚くことではありません。同型は、本質的には同じであるという事実を表現するための形式的な方法に過ぎません。

は同じグラフになる)。しかし、これらの性質は、2 つのグラフが次のようになるには十分ではありません。は、非同型のグラフが同じ度数を持つことがあるので、同型であることがわかる。例として図 1-9 のグラフ $G2, G3$ は、次数 5、サイズ 6、度数 3 である。3、3、2、2、2、でも $G_2 \ncong G_3$。G_2、G_3 を納得させる一つの方法として同型でないことを示すには、$V(G_2)$ から $V(G_3)$ への 1 対 1 関数 a がないことを示す必要がある。は同型である可能性がある。このような関数 a の場合、以下の 3 つが必要です。$G2$ の頂点で、w_1, w_2, w_3 をイメージ頂点とするもの。そのうちの 2 つはすべての頂点 w_1、w_2、w_3 は、G_3 において隣接している。a の下でそれらと共振する G_2 もまた、隣接していなければならない。ただし、G_2 ははそのような頂点を 3 つ含み、a は同型でない。したがって、同型は存在しない。は、$V(G_2)$ から $V(G_3)$ への同型であり、$G2 \ncong G3$ である。G_1、G_2 は同型であるから、上記の議論を G_1 と G_3 で繰り返すと、$G_1 \ncong G_3$ が示される。2 つのグラフが同じであるのは同型である場合だけなので、次数 1 のグラフは 1 つしかなく、これを単純グラフと呼ぶことにします。図 1-10 に示すように、次数 2 のグラフは 2 つ（非同型)、次数 3 のグラフは 4 つあります。さらに、次数 4 のグラフは 11 個あります（問題 2 参照)。

6　11 ページ目翻訳

プロブレムセット 1.3

1. 次数 6，サイズ 9 の非同型 3 規則グラフを 2 つ求めよ．
2. (a) 次数 4 の非同型グラフを 11 個すべて描け．
   (b) S を次数 4 の 23 個のグラフの集合とすると、S は少なくとも 3 個のグラフを含むことを示せ。pairwise isomorphic (3 つのグラフのうち 2 つとも同型)。
3. $G \not\cong \overline{G}$ となるような次数 5 のグラフ G の例を挙げよ。
4. 次数 5 の正則グラフは 3 つ、次数 6 の正則グラフは 8 つである。全て描け。
5. 2 つのグラフ G_1 と G_2 が同型であるのは、その補集合が同型である場合に限ることを証明しなさい。
6. 次数 7 の非同型 4 規則グラフをすべて描け。(ヒント：これらのグラフの補集合を考えてみよう)．
7. 以下のグラフ G_1, G_2, G_3 のうち、どの組が同型であるか調べよ。
8. 以下に示すグラフ G_1 と G_2 が同型であるかどうかを判定せよ。

7　12 ページ目翻訳

1.4 サブグラフ

グラフ H は、$V(H) \subseteq V(G)$ と $E(H) \subseteq E(G)$ のとき、グラフ G の補グラフとなる 図 1-11 のグラフ H は G のサブグラフとなる。$wy \in E(F)$ であるが、$wy \in E(G)$ であるので、グラフ F は G の補グラフではない。

ある種の部分グラフは、あまりに頻繁に出現するため、特別な名前をつけている。グラフ G の頂点集合を S とすると、S によって誘導される部分グラフは、頂点集合 s を持つ G の最大部分グラフであり、S で示される、すなわち。S は S 内の 2 つの頂点に結合する G の辺を正確に含む。

グラフ G の部分グラフ H は、頂点誘導部分グラフ、または単に、誘導部分グラフ図 1-11 のグラフ H が G の部分グラフであることは既に述べたが、$x, w \in V(H)$ と $xw \in E(G)$ であるが、xw は $E(H)$ であるので、H は誘導部分グラフではない。一方、図 1-11 のグラフ J は、G の誘導部分グラフであり、実際には、

$$J = \langle \{v, w, x, y\} \rangle$$

とする。

G をグラフとする。G の頂点の適切な部分集合 S の削除は、S にない G の頂点と、S にある頂点に入射しない G の辺を含む部分グラフである。この部分グラフを $G - S$ と表記する。S が 1 つの頂点 v からなる場合、$G - v$ の代わりに $G - v$ と書く。図 1-12 は、グラフ G と、$G - v$ と $G - \{u, v\}$ のグラフを示したものです。H がグラフ G の誘導部分グラフである場合、G から頂点の部分集合（おそらく空）を削除することによって得られる。

8　13 ページ目翻訳

次に、誘導部分グラフの辺の類推を考えてみよう。グラフ G の辺の集合 (空でない) を X とすると、X によって誘導される部分グラフは、辺集合 X を持つ G の最小グラフであり、$\langle X\rangle$ で示される、すなわち、$\langle X\rangle$ は、X の 1 辺に接続する G の頂点からなる。

グラフ G の部分グラフ H は、G の辺のある空でない集合 X に対して $H = \langle X\rangle$ であるとき、辺誘導部分グラフである。図 1-13 では、u は H_1 の辺に入射しないので、グラフ H_1 は G_1 の辺誘導部分グラフではない。しかし、F_1、J_1 はいずれも G_1 の辺誘導部分グラフであり、実際には、

$$F_1 = \langle\{uv, uw, wy, yx, xv\}\rangle$$

と

$$J_1 = \langle\{vx, xy, yw\}\rangle$$

とする。

グラフ G の部分グラフ H は、$V(H) = V(G)$ であれば、G の全域部分グラフとなる。図 1-13 のグラフ F_1 と H_1 は G_1 の全域部分グラフであるが、$u \in V(G_1) - V(J_1)$ のため、J_1 は G_1 の全域部分グラフではない。

X をグラフ G の辺の集合とすると、$G-X$ は $E(G)$ から X の辺を削除して得られる G の全域部分グラフである。実際、H がグラフ G の全域部分グラフであるのは、$H = G-X$ のときだけであり、$X = E(G)-E(H)$ である。e がグラフ G の辺である場合、$G - \{e\}$ ではなく、$G - e$ と表記する。図 1-13 のグラフ G_1, F_1, H_1 について、$F_1 = G_1 - vw$, $H_1 = G_1 - \{uv, uw\}$ とする。

G を、$u_i, v_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ を G の非隣接頂点の組とするグラフとすると、$G + u_1v_1, u2v2, \ldots, u_n, v_n$ は G は、集合 $\{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$ に辺を追加することで得られるグラフである。

u と v が非接続である場合グラフ G の頂点は、$G + \{uv\}$ ではなく、$G + uv$ と書きます。例えば、図 1-13 のような感じです。$G = F + yw, G_1 = H + \{uv, uw\}$ となる。

対象となるグラフが頂点集合と辺集合で記述される場合は、必ず「グラフの部分グラフ」という概念がうまく定義されます。しかし、グラフはダイアグラムでも記述できるため、そのような場合は別の定義が必要である。例えば、図 1-14 のグラフ H は G の補グラフであろうか。

これらの図で定義されるグラフ H と G に対して、H と G の頂点をラベル付けして、H が先に説明した意味で G のサブグラフになることが可能であれば、H を G のサブグラフと呼ぶことにする。誘導部分グラフについても同様である。

図 1-14 では、H と G にラベルを付けてそれぞれ H_1 と G_1 を生成することができるので、H は G のサブグラフであることがわかりました。

実際、H は G の誘導部分グラフである。H_1 のラベルはこの事実を示していないが、H_2 にはこの事実がある。グラフ F も G の部分グラフであるが、G の誘導部分グラフではない。

9　14 ページ目翻訳

1. 以下のグラフ H と F は G の部分グラフであり、G の誘導部分グラフであるかどうかを判定する。
2. 15 ページ上段に示したグラフ G の全域補グラフをすべて決定せよ。このうち、辺が誘導されるものはどれか。
3. 以下に示すグラフ G の最大次数の誘導 r-正則部分グラフを $r = 0, 1, 2$ で求めよ。
4. H を以下に示すグラフとする。H が G の誘導部分グラフとなるような 4-正則グラフ G を求めよ。
5. $H = \langle E(G) \rangle$ とすると、$H = \langle V(G) \rangle$ となるのか。
6. G をラベル付き $(p,\ q)$ グラフとする。G は何種類の辺誘導部分グラフを持つか？

10　15 ページ目翻訳

次数列

$V(G) = v_1, v_2, \ldots, v_p$ のグラフ G に対して、その次数列と呼ばれる非負整数の列 $\deg v_1, \deg v_2, \deg v_p$ を連想する。ここでは、$\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \cdots \geq \deg v_p$ となるように頂点をラベル付けした慣例を採用する。

11 16 ページ目翻訳

次数列の最小項 $degV_p$ を G の最小次数と呼び、$\delta(G)$ と表記し、最大項 $\deg v_1$ を最大次数と呼び、$\Delta(G)$ と表記している。例えば、図のグラフ G は次数列 4, 4, 3, 2, 2, 1, 0 を持つ。したがって、このグラフでは $\delta(G) = 0$ で $\Delta(G) = 4$ となる。

$d_1, d_2, \ldots, d_p$ をあるグラフの次数列とすると、必然的に $\sum_{i=1}^{p} d_i$ は偶数で、$0 \leq d_i \leq p-1$ したがって $1 \leq i \leq p.$ しかしながら、$\sum_{i=1}^{p} d_i$ が偶数で、$0 \leq d_i \leq p-1$ for $1 \leq i \leq p$ となるような整数の列 $s : d_1, d_2, \ldots, d_p$ が与えられた場合、s があるグラフの次数列であるという保証はない。

例えば、$s : 5, 5, 3, 2, 1, 0$ は、和が偶数で各項が最大 5 である 6 つの非負整数の列であるが、s はいかなるグラフの次数列でもない。しかし、次数 5 の頂点は、次数 0 の頂点を含む G のすべての頂点に隣接しており、これはありえないことである。しかし、Havel [6] と Hakimi [4] による、どの非負整数の列がグラフの次数列であるかを決定することができる、便利な結果がある。非負整数列があるグラフの次数列である場合、それをグラフ列と呼ぶ。

例えば、$s : 5, 5, 3, 2, 1, 0$ は和が偶数で各項が最大 5 である 6 つの非負整数の列であるが、s はいかなるグラフの次数列でもない。しかし、度数 5 の頂点は、度数 0 の頂点を含む G のすべての頂点に隣接しており、これは不可能である。しかし、Havel [6] と Hakimi [4] による、あるグラフの次数列であれば、非負整数のどの列がグラフ的であるかを決定することができる有用な結果が存在する。

定理 1.2 (Havel-Hakimi) 非負整数の数列 $s : d_1, d2, \ldots, d_p$ で、$d_1, d_2, \ldots, d_p,$ である $p \geq 2, d_1 \geq 1$ は、以下の場合にのみ、グラフ的である s はグラフ的である

この結果の証明を紹介する前に、この定理が何を言っているのかが分かっていることを確認しておこう。まず、数列 s_1 は、s から最初の項 d_1 を削除し、s のちょうど次の d_1 項から 1 を引くことによって得られる。この定理は、s がグラフかどうかを判断するには、s_1 がグラフかどうかを判断すればよいことを教えている。しかし、s_1 は s より項数が少なく、s_1 の項の中には少し小さいものもあるので、この作業はもっと簡単なはずである。