1　13 ページ目翻訳

次に、誘導部分グラフの辺の類推を考えてみよう。グラフ G の辺の集合 (空でない) を X とすると、X によって誘導される部分グラフは、辺集合 X を持つ G の最小グラフであり、$\langle X \rangle$ で示される、すなわち、$\langle X \rangle$ は、X の 1 辺に接続する G の頂点からなる。

グラフ G の部分グラフ H は、G の辺のある空でない集合 X に対して $H = \langle X \rangle$ であるとき、辺誘導部分グラフである。図 1-13 では、u は H_1 の辺に入射しないので、グラフ H_1 は G_1 の辺誘導部分グラフではない。しかし、F_1、J_1 はいずれも G_1 の辺誘導部分グラフであり、実際には、

$$F_1 = \langle \{uv, uw, wy, yx, xv\} \rangle$$

と

$$J_1 = \langle \{vx, xy, yw\} \rangle$$

とする。

グラフ G の部分グラフ H は、$V(H) = V(G)$ であれば、G の全域部分グラフとなる。図 1-13 のグラフ F_1 と H_1 は G_1 の全域部分グラフであるが、$u \in V(G_1) - V(J_1)$ のため、J_1 は G_1 の全域部分グラフではない。

X をグラフ G の辺の集合とすると、$G-X$ は $E(G)$ から X の辺を削除して得られる G の全域部分グラフである。実際、H がグラフ G の全域部分グラフであるのは、$H = G-X$ のときだけであり、$X = E(G)-E(H)$ である。e がグラフ G の辺である場合、$G - \{e\}$ ではなく、$G - e$ と表記する。図 1-13 のグラフ G_1, F_1, H_1 について、$F_1 = G_1 - vw$, $H_1 = G_1 - \{uv, uw\}$ とする。

G を、$u_i, v_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ を G の非隣接頂点の組とするグラフとすると、$G + u_1v_1, u2v2, \ldots, u_n, v_n$ は G は、集合 $\{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$ に辺を追加することで得られるグラフである。

u と v が非接続である場合グラフ G の頂点は、$G + \{uv\}$ ではなく、$G + uv$ と書きます。例えば、図 1-13 のような感じです。$G = F + yw, G_1 = H + \{uv, uw\}$ となる。

対象となるグラフが頂点集合と辺集合で記述される場合は、必ず「グラフの部分グラフ」という概念がうまく定義されます。しかし、グラフはダイアグラムでも記述できるため、そのような場合は別の定義が必要である。例えば、図 1-14 のグラフ H は G の補グラフであろうか。

これらの図で定義されるグラフ H と G に対して、H と G の頂点をラベル付けして、H が先に説明した意味で G のサブグラフになることが可能であれば、H を G のサブグラフと呼ぶことにする。誘導部分グラフについても同様である。

図 1-14 では、H と G にラベルを付けてそれぞれ H_1 と G_1 を生成することができるので、H は G のサブグラフであることがわかりました。

実際、H は G の誘導部分グラフである。H_1 のラベルはこの事実を示していないが、H_2 にはこの事実がある。グラフ F も G の部分グラフであるが、G の誘導部分グラフではない。

2　14 ページ目翻訳

1. 以下のグラフ H と F は G の部分グラフであり、G の誘導部分グラフであるかどうかを判定する。
2. 15 ページ上段に示したグラフ G の全域補グラフをすべて決定せよ。このうち、辺が誘導されるものはどれか。
3. 以下に示すグラフ G の最大次数の誘導 r-正則部分グラフを $r = 0, 1, 2$ で求めよ。
4. H を以下に示すグラフとする。H が G の誘導部分グラフとなるような 4-正則グラフ G を求めよ。
5. $H = \langle E(G) \rangle$ とすると、$H = \langle V(G) \rangle$ となるのか。
6. G をラベル付き $(p,\ q)$ グラフとする。G は何種類の辺誘導部分グラフを持つか？

3　15 ページ目翻訳

次数列

$V(G) = v_1, v_2, \ldots, v_p$ のグラフ G に対して、その次数列と呼ばれる非負整数の列 $\deg v_1, \deg v_2, \deg v_p$ を連想する。ここでは、$\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \cdots \geq \deg v_p$ となるように頂点をラベル付けした慣例を採用する。

4 16 ページ目翻訳

次数列の最小項 $degV_p$ を G の最小次数と呼び、$\delta(G)$ と表記し、最大項 $\deg v_1$ を最大次数と呼び、$\Delta(G)$ と表記している。例えば、図のグラフ G は次数列 4, 4, 3, 2, 2, 1, 0 を持つ。したがって、このグラフでは $\delta(G) = 0$ で $\Delta(G) = 4$ となる。

$d_1, d_2, \ldots, d_p$ をあるグラフの次数列とすると、必然的に $\sum_{i=1}^{p} d_i$ は偶数で、$0 \leq d_i \leq p-1$ したがって $1 \leq i \leq p.$ しかしながら、$\sum_{i=1}^{p} d_i$ が偶数で、$0 \leq d_i \leq p-1$ for $1 \leq i \leq p$ となるような整数の列 $s : d_1, d_2, \ldots, d_p$ が与えられた場合、s があるグラフの次数列であるという保証はない。

例えば、$s : 5, 5, 3, 2, 1, 0$ は、和が偶数で各項が最大 5 である 6 つの非負整数の列であるが、s はいかなるグラフの次数列でもない。しかし、次数 5 の頂点は、次数 0 の頂点を含む G のすべての頂点に隣接しており、これはありえないことである。しかし、Havel [6] と Hakimi [4] による、どの非負整数の列がグラフの次数列であるかを決定することができる、便利な結果がある。非負整数列があるグラフの次数列である場合、それをグラフ列と呼ぶ。

例えば、$s : 5, 5, 3, 2, 1, 0$ は和が偶数で各項が最大 5 である 6 つの非負整数の列であるが、s はいかなるグラフの次数列でもない。しかし、度数 5 の頂点は、度数 0 の頂点を含む G のすべての頂点に隣接しており、これは不可能である。しかし、Havel [6] と Hakimi [4] による、あるグラフの次数列であれば、非負整数のどの列がグラフ的であるかを決定することができる有用な結果が存在する。

定理 1.2 (Havel-Hakimi) 非負整数の数列 $s : d_1, d2, \ldots, d_p$ で、$d_1, d_2, \ldots, d_p,$ である $p \geq 2, d_1 \geq 1$ は、以下の場合にのみ、グラフ的である s はグラフ的である

この結果の証明を紹介する前に、この定理が何を言っているのかが分かっていることを確認しておこう。まず、数列 s_1 は、s から最初の項 d_1 を削除し、s のちょうど次の d_1 項から 1 を引くことによって得られる。この定理は、s がグラフかどうかを判断するには、s_1 がグラフかどうかを判断すればよいことを教えている。しかし、s_1 は s より項数が少なく、s_1 の項の中には少し小さいものもあるので、この作業はもっと簡単なはずである。