1　26 ページ目翻訳

図 1-23a のグラフは、$V(G)$ が部分集合 $V_1 = \{v_1, v_6\}$ と $V_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ に分割され、G の各辺がこれらの集合の頂点を結ぶため、2 部グラフになります。このグラフは図 1-23b に再描画されており、V_1 が上部に、V_2 が下部にあり、G が 2 部構成である理由をより明確に示しています。二部グラフとサイクルの間には特別な関係があります。

証明

まず、G が 2 部グラフであると仮定します。 次に、$V(G)$ は、G の辺が V_1 の頂点と V_2 の頂点に結合するように、2 つの空でない部分集合 V_1 と V_2 に分割できます。G にその n サイクル $C : v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ が含まれているとします。 n が偶数であることを示します。$v_1 \in V_1$ とします。 辺 v_1v_2 は V_1 の頂点と V_2 の頂点を結合するため、必然的に $v_2 \in V_2$ です。同じ理由で、$v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$ などです。 v_nv_1 は G と $v_1 \in V_1$ の辺であるため、$v_n \in V_2$ に従い、n は偶数になります。逆に、G が奇数サイクルのないグラフであるとします。 私たちの目標は、G が二部であることを示すことです。 最初に G が連結されていると仮定し、v_1 を G の頂点とします。G は連結されているため、G の各頂点 v に対して G に $v_1 - v$ 基本道が存在します。

2　27 ページ目翻訳

もちろん、与えられた頂点 v に対して、G に複数の $v_1 - v$ 基本道が存在する場合があります。そのような場合、存在する必要がある最短の長さのものを選択します (最短の長さが複数ある場合は、いずれかを選択します。) $V(G)$ の部分集合 V_1 を v_1 と G の各頂点 v で構成されるように定義し、G の最短の $v_1 - v$ 基本道が偶数の長さと V_2 の頂点を持つようにします。これが起こらないと仮定します。 次に、G のいくつかの辺 e が V_2 の 2 つの頂点を結合する必要があります。e が V_2 の 2 つの頂点 v_j と v_k を結ぶとします。v_j と v_k は V_2 に属しているため、それぞれの最短 $v_1 - v_j$ 基本道と $v_1 - V_2$ の v_k です。v_j と v_k は V_2 に属しているため、最短の $v_1 - v_j$ 基本道と $v_1 - v_k$ 基本道はそれぞれ奇数の長さになります。P を最短 $v_1 - v_j$ 基本道、Q を最短 $v_1 - v_k$ 基本道とする。次に、P, Q および辺 $v_j v_k$ によって、奇数の長さの閉じた道が生成されます。しかし、この結果は、問題セット 1.6 の問題 10 によって、G が奇数サイクルを持ち、矛盾を与えることを意味します。したがって、V_2 の 2 つの頂点は隣接しません。 同様の引数は、V_1 の 2 つの頂点が隣接していないことを示しています。これで、G は 2 部であると結論付けることができます。

G が切断されている場合、G には 2 つ以上のコンポーネント ($G_1, G_2, \ldots, G_n$など) があります。G の各サイクルは偶数であるため、G のすべての要素の各サイクルは偶数です。要素は接続されているため、前の引数は各要素が 2 部構成であることを示しています。次に、たとえば、$V(G_1)$ を部分集合 U_1 と W_1 に分割して、G_1 の各辺が U_1 の頂点と W_1 の頂点に結合するようにすることができます。一般に、G_1 の各エッジは、U_1 の頂点と W_1 の頂点を結合します。一般に、各 $i(1 \leq i \leq n)$ について、$V(G_i)$ を部分集合 U_i と W_i に分割して、G_i の各辺が U_i の頂点と U_i の頂点と W_i の頂点を結ぶようにすることができます。 したがって、G の各辺は、$\bigcup_{i=1}^{n}$ の頂点 U_i と $\bigcup_{i=1}^{n}$ の頂点 W_i を結び、G が 2 部であることを意味します。グラフ G_i が 2 部構成の場合、$V(G)$ を部分集合 V_1 と V_2 に分割して、G のすべての辺が V_1 の頂点と V_2 の頂点に結合できることがわかっています。ただし、これは、V_1 の各頂点が V_2 のすべての頂点に隣接していることを意味するものではありません。この場合、G は完全な 2 部グラフと呼ばれます。$|V_1| = m$、および $|V_2| = n$ とする。このグラフを $K_{m,n}$ とする。 グラフ $K_{1,n}$ (または $K_{n,1}$) はスターと呼ばれます。$K_{1,1} \cong K_2, K_{1,2} \cong P_3$ および $K_{2,2} \cong C_4$ であることに注意してください。

いくつかの完全な 2 部グラフを図 1-24 に示します。2 部グラフは自然な方法で n 部グラフに拡張できます。$n \geq 2$ の場合、$V(G)$ が n 個の空でない部分集合 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ に分割され、G の辺が同じ集合内の頂点に結合しない場合、グラフ G は n 部分グラフです。 集合 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ は、G の辺が同じ集合内の頂点を結合しないようにします。集合 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ は、G の分割集合と呼ばれます。

G が部分セット $V_1, V_2, \ldots, V_n$ を持つ n-部分グラフで、V_i のすべての頂点が V_j のすべての頂点に結合されている場合 $(1 \leq i \leq j \leq n)$, G は完全グラフと呼ばれます。n 部分グラフ $|V_i| = p_i$ の場合、$i = 1, 2, \ldots, n$ の場合、G を $K_{p1,p2,\ldots,p_n}$ で表します。これらのグラフは、完全多部グラフとも呼ばれます。図 1-25 にいくつかの例を示します。他のグラフからグラフを作成する方法はいくつかあります。 この一例、つまり補数についてはすでに見てきました。この場合、操作は 1 つのグラフに対してのみ実行され、新しいグラフが生成されます。次に、2 つ以上のグラフに対する操作を考えます。

3　29 ページ目翻訳

G_1 と G_2 を頂点非接続グラフとする。したがって、$G_1 \cup G_2$ で表される $G1$ と G_2 の結合は、$V(G_1 \cup G_2)$ と $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$ を持つグラフです。$G_1 \cong G_2 \cong G$ の場合、$G_1 \cup G_2$ を $2G$ と書きます。一般に、$G_1, G_2, \ldots, G_n$ が G に同形な一対一頂点非接続グラフの場合、$G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$ を nG と書きます。図 1-26 は、グラフ $K_{1,3} \cup 2K_3 \cup 3K_1$ を示しています。

ここでも、G_1 と G_2 が頂点から離れたグラフの場合、G_1 と G_2 の結合 ($G_1 + G_2$ と書く) は、$G_1 \cup G_2$ の結合と、 $v_1 v_2$ 型のすべての辺 ($v_1 \in V(G_1)$ $v_2 \in V(G_2)$) を組み合わせたグラフであることを示します。結合 $P_3 + K_2$ を図 1-27 に示します。

説明したいグラフの最終操作は、グラフ G_1 と G_2 の場合より複雑です。積 $G_1 \times G_2$ には頂点集合 $V(G_1) \times V(G_2)$ と 2 つの頂点 (u_1, u_2) と (v_1, v_2) があります。$u_1 = v_1$ と $u_2 v_2 \in E(G_2)$、または $u_2 = v_2$ と $u_1 v_1 \in E(G_1)$ のいずれかの場合にのみ、$G_1 \times G_2$ で隣接している頂点の隣接性の定義の対称性は、$G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$ を (正しく) 示唆しています。2 つのグラフの積を視覚化する直感的な方法があります。$V(G_1) = u_1, u_2, \ldots, u_m$ および $V(G_2) = v_1, v_2, \ldots, v_n$ とします。G_1 の n 個のコピー ($H_1, H_2, \ldots, H_n$ と呼びます) を取り、G_2 の頂点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ の位置にそれぞれ配置します。$v_j v_k \in E(G_2)$ の場合に限り、H_j で u_i とラベル付けされた頂点を H_k で u_i とラベル付けされた頂点に結合します。この操作を図 1-28 に示します。

4　30 ページ目翻訳

非常によく知られているグラフのクラスは、製品の観点から説明することができます。$n = 1$ の場合、ハイパーキューブまたは n キューブ Q_n は K_2 として定義され、

$$Q_n = Q_n - 1 \times K_2$$

$(n \geq 2$ の場合)。

キューブ Q_1, Q_2、および Q_3 を図 1-29 に示します。n-cube を記述する別の方法は、n-tuple の各項が 0 または 1 であるすべての n-tuple のコレクションによってその頂点集合を表すことです。ここで、2 つの頂点 Q_n は、対応する n-タプルは 1 つの座標だけが異なります。図 1-29 は、$n = 1, 2, 3$ の場合の Q_n の頂点のラベル付けを示しています。

5　31 ページ目翻訳

n-cube を表現するもう一つの方法は、その頂点集合をすべての n-tuple の集合で表すことである。n-tuple の各項は 0 または 1 であり、Q_n の二つの頂点は、対応する n-tuple が正確に一つの座標で異なる場合にのみ隣接する。

図 1-29 は、$n = 1, 2, 3$ の場合の Q_n の頂点のラベリングである。

1.9 有向グラフ

ある状況を表現するのに、グラフが適切でない場合がある。例えば、一方通行の道路がある道路地図は、グラフでは適切に表現することができない。しかし、我々は「有向グラフ」を使うことができる。有向グラフの定義の多くは、グラフの概念と密接に関連しているため、ここでは簡潔かつ直感的に理解できるように説明する。

有向グラフ（またはダイグラフ）D は、頂点の有限で空でない集合 $V(D)$ と、異なる頂点の順序付けられた組の（空の可能性のある）集合 $E(D)$ である。$E(D)$ の要素は弧と呼ばれる。

6　32 ページ目翻訳

グラフと同様に、ダイグラフはダイアグラムで表すことができます。有向グラフ D の頂点は小さな円で示され、D の円弧 (u, v) は、頂点 u から v に向かう曲線または線分を描くことによって表されます。(u, v) と (v, u) は別個の円弧であり、2 つの頂点の方向が反対の場合、2 つの円弧で結合できます。$V(D) = \{u, v, w, x\}$ および $E(D) = \{(u, w), (v, w), (w, x), (x, w)\}$ の有向グラフ D は、図 1-30 に示します。

有向グラフ D の基礎となるグラフは、すべてのアーク (u, v) または (v, u) を辺 uv で置き換えることによって D から得られるグラフ G です。 有向グラフ D とその下にあるグラフ G を図 1-31 に示します。

有向グラフ D の頂点の数はその順序と呼ばれ、D の弧の数はそのサイズです。(u, v) が D の弧である場合、u は v に隣接し、v は u に隣接していると言われます。さらに、弧 (u, v) は u から入射し、v に入射します。有向グラフ D の頂点 v の出次数 od v は v に隣接する頂点の数であり、v の内次数 id v は頂点の数 $\deg v =$od v + id v です。 図 1-30 の有向グラフ D の頂点の度数も図 1-30 に示されています。

有向グラフ理論の最初の定理は、グラフ理論の最初の定理に類似しています。

定理 1.7.

$V(D) = \{v_1, v_2, \ldots v_p\}$ で、次数が p でサイズが q の有向グラフを D とします。したがって、

$$\sum_{i=1}^{p} odv_i = \sum_{i=1}^{p} idv_i = q$$

7　33 ページ目翻訳

証拠。

D の頂点の出次数が合計されると、D の各弧は正確に 1 回カウントされます。 度数についても同じことが言えます。同形の有向グラフには、期待される定義があります。 2 つの有向グラフ D1 と D2 は、V(D1) から V(D2) への 1 対 1 の関数 fai (同型) が存在し、(u, v) が D1 のアークである場合、i (faiu , faiv) は D2 の円弧です。非形式的には、D1 と D2 は、どちらか一方を描画して他方を得ることができる場合、同形です。サブダイグラフと誘導サブダイグラフは、グラフィカルな対応物と同じ方法で定義されます。 図 1-32 の有向グラフでは、F と H は D のサブ有向グラフです。F は D の誘導サブディグラフであり、H はそうではありません。有向グラフ D のウォークは交互シーケンスです W: v0、e1、v1、e2、v2、...、vn-1、en、vn (n¿=0) i = 1, 2, ..., n に対して ei = (vi-1, vi) となるように、頂点で始まり、頂点で終わる頂点と弧。このウォーク W は v0 - vn ウォークで、長さは n です。 トレイル、パス、サイクル、および回路の概念のように、有向グラフの場合は、グラフの場合と同様に定義されますが、有向グラフでは常に円弧の方向に進みます。 有向グラフでは長さ 2 のサイクルが可能であることに注意してください。有向グラフ D のセミウォークは、交互のシーケンス W: v0、e1、v1、e2、v2、...、vn-1、en、vn (n ¿= 0) の頂点と弧であり、ei = (vi -1, vi) または ei = (vi, vi-1) 各 i (1 ¡= i ¡= n). セミウォーク W は、長さ n の v0-vn セミウォークです。図 1-33 の有向グラフ D の場合、W: v, (v, w), w, (u, w), u, (x, u), x は、v-x ウォークではない v-x セミウォークです。実際、D には v-x ウォークが含まれていません。 セミウォークは弧の方向を無視するため、基礎となるグラフのウォークに対応します。有向グラフ D の 2 つの頂点 u と v は、D に u-v セミウォークが含まれている場合に接続されます。 D の 2 つの頂点がすべて接続されている場合、有向グラフ D は接続されています。つまり、基になるグラフが接続されている場合、D は接続されています。 図 1-33 の有向グラフ D を接続します。

8　34 ページ目翻訳

切断された有向グラフと切断された有向グラフの要素は、グラフと同じ方法で定義されます。有向グラフの場合、複数のタイプの接続性があります。接続されている有向グラフは、弱接続と呼ばれることもあります。有向グラフ D は、D の 2 つの異なる頂点 u と v ごとに、$u-v$ 基本道または $v-u$ 基本道、またはその両方がある場合、片側 (または片側接続) です。D の 2 つの異なる頂点 u と v ごとに、$u-v$ 基本道と $v-u$ 基本道がある場合、有向グラフは強い (または強く接続されている) ことになります。したがって、強い有向グラフは一方的であり、一方的な有向グラフは弱く接続されていますが、逆の状態はどちらも真ではありません。 図 1-33 の有向グラフ D は一方的ではありません (もちろん、強くもありません)。 図 1-34 の有向グラフ D_1 は一方的ですが強くはありませんが、$D2$ は強いです。

D のすべての頂点 v に対して $odv = id\ v = r$ となる非負の整数 r が存在する場合、有向グラフ D は正則です。このような有向グラフは、r-正則とも呼ばれます。(u, v) が D の n アークである場合はいつでも、(v, u) も同様である場合、有向グラフ D を対称と呼びます。D が対称有向グラフの場合、G の各辺 uv を弧 (u, v) および (v, u) で置き換えることにより、グラフ G から D を取得でき、$D = G^*$ と記述します。 対称有向グラフ $K^*_{1,3}$、P^*_4 および、K^*_3 を図 1-35 に示します。

9　35 ページ目翻訳

反対に、(u, v) が D の弧であり、(v, u) が D の弧でない場合、有向グラフ D は非対称であると言われます。2 つの頂点は、多くても 1 つの円弧で結合されます。2 つの頂点がちょうど 1 つの円弧で結合されている有向グラフは、トーナメントと呼ばれます。 これらの有向グラフについては、第 11 章で詳しく説明します。図 1-36 は、2 つの非対称の有向グラフを示しています。D_1 はトーナメントですが、D_2 はそうではありません。

最後に、有向グラフ内の平行な弧が許可されている場合、複数の有向グラフが得られます。 さらに、(有向) ループが許可されている場合は、疑似有向グラフが生成されます。 多重有向グラフ D_3 と疑似有向グラフ D_4 を図 1-37 に示します。