Computational Statistics
Groupe 2.

TD 1

TAYEBJEE Meilame
MVA 2023-2024

Exercice 1

1/ Soit h une fonction continue bornée.

On montre que :

$$\mathbb{E}_{(X,Y)}[h(X,Y)] = \mathbb{E}_{R,\theta}[h(R\cos\theta, R\sin\theta)]$$

par indépendance de R et θ, $f_{R,\theta}(r,\theta) = f_R(r) f_\theta(\theta)$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} h(r\cos\theta, r\sin\theta) f_R(r) f_\theta(\theta)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\int_0^{2\pi} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r e^{-r^2/2} \frac{1}{2\pi}\, dr\, d\theta$$

Soit l'application $\Phi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \\ (r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$

On note que Φ bijective. ie $\forall u,v \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi],\ \exists! (r,\theta) / \begin{cases} r\cos\theta = u \\ r\sin\theta = t \end{cases}$

. En effet, on sait que le nombre complexe $z = u + it$ admet une unique représentation sous forme trigonométrique ; autrement dit,

$\forall u,t,\ \exists! (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times (0,2\pi) / z = u + it = re^{i\theta} = r\cos\theta + i r\sin\theta$

Par identification : $\forall u,t,\ \exists! (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times (0,2\pi) / \begin{cases} u = r\cos\theta \\ t = r\sin\theta \end{cases}$.

On note également : $\mathrm{Jac}(\Phi)(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

et $|\mathrm{Jac}(\Phi)(r,\theta)| = r$

Si bien que par suite :

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[h(X,Y) \right] = \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{2\pi} h(\Phi(r,\theta)) \, |\mathrm{Jac}(\phi)(r,\theta)| \, e^{-r^2/2} \frac{1}{2\pi} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} h(u,t) \, e^{-(u^2+t^2)/2} \frac{1}{2\pi} \, du \, d\theta.$$

→ par théorème de changement de variable, en notant que

- $\Phi^{-1}(\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]) = \mathbb{R}^2$
- $\forall (u,t) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r^2 = u^2 + t^2$

Ceci étant vrai $\forall h$ continue bornée, on a :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

$$= \varphi(x)\, \varphi(y)$$ où φ densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Si bien qu'on obtient à la fois :

- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
- X, Y indépendantes (densité jointe est le produit des densités).

2/ On note que la fonction de répartition de R se calcule :

$$F_R(r) = \int_0^r t\, e^{-t^2/2} \, dt$$

$$= \left[-e^{-r^2/2} \right]_0^2 = 1 - e^{-r^2/2} \in [0,1]$$

Et que cette fonction est bijective :

si $u = 1 - e^{-x^2/2} = F_R(x)$ avec $u \in [0,1)$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{-2\ln(1-u)} = F_R^{-1}(u) \in \mathbb{R}_+$.

Si bien que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, $F_R^{-1}(U)$ la même loi que R.

En effet, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}[F_R^{-1}(U) \leq t] = \mathbb{P}(U \leq F_R(r))$

$= F_R(r)$.

$\hookrightarrow$ $F_R^{-1}(U)$ et R ont la même fonction de répartition donc la même loi.

On peut donc simuler une variable suivant une Rayleigh de paramètre 1, ainsi qu'une uniforme $[0, 2\pi]$ ($2\pi \times U$ où $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$).

D'où l'algorithme :

- Simuler $U_1, U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$, indépendante.
- $R := \sqrt{-2\ln(1-U_1)}$, $\theta := 2\pi U_2$

Return : $(R\cos\theta, R\sin\theta)$

3/ On cherche la distribution jointe de V_1, V_2 conditionnellement à l'événement $\|V\|_2 \leq 1$

, avec U_1, U_2 iid $\mathcal{U}_{[0,1]}$

$V_1 = 2U_1 - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,1]}$

$V_2 = 2U_2 - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,1]}$

$V = (V_1, V_2)$

V_1 et V_2 indép.

Soit donc h C^0 et bornée.

$$\mathbb{E}_V\left[h(V_1, V_2) \mid \|V\| \leq 1\right]$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}[\|V\| \leq 1]} \mathbb{E}\left[h(V_1, V_2) \mathbb{1}_{\|V\| \leq 1}\right]$$

- On calcule $\mathbb{P}(\|V\| \leq 1) = \mathbb{P}\left[V_1^2 + V_2^2 \leq 1\right]$

$V_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,1]}$

$V_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,1]}$

V_1 et V_2 indépendantes

$$\longrightarrow = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{u^2+t^2 \leq 1} \, du \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dt \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} \, du \underset{\substack{u = \sin\theta \\ \text{bijectif } [-1;1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, |\cos\theta| \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta \quad \text{car} \quad \cos\theta \geq 0 \ \forall \theta \in [-\pi/2; \pi/2]$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \underline{\pi/4}$$

(C'est aussi l'aire du cercle de rayon 1 divisé par l'aire du carré $[-1, 1]^2$).

Si bien que :

$$\mathbb{E}_V\left[h(V_1, V_2) \mid \|V\| \leq 1\right] = \frac{4}{\pi} \mathbb{E}\left[h(V_1, V_2) \, \mathbb{1}_{\|V\| \leq 1}\right]$$

$$= \int_{[-1,1]^2} h(v_1, v_2) \, \mathbb{1}_{\|V\| \leq 1} \times \frac{\cancel{4}}{\pi} \times \frac{1}{\cancel{4}} \, dv_1 dv_2$$

D'où

$$\boxed{f_{V_1 V_2 \mid \|W\| \leq 1}(u,t) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\|(u,t)\| \leq 1}}$$

$\longrightarrow$ C'est la loi uniforme sur le disque unité dans $\mathbb{R}^2$.

b) On montre que T_1 et V sont indépendantes.

Soit h continue bornée.

$$= \mathbb{E}_{V_1, V_2}\left[h\left(\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} ; V_1^2 + V_2^2\right)\right]$$

$$= \int_{\mathcal{D}(0,1)} h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} ; v_1^2 + v_2^2\right) \frac{1}{\pi} \, dv_1 \, dv_2 \quad \Big| \; (V_1, V_2) \sim \mathcal{U}_{\mathcal{D}(0,1)}$$

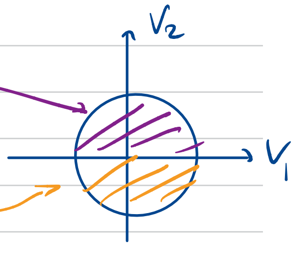
$$= \int_{\mathcal{D}(0,1)^+} h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} ; v_1^2 + v_2^2\right) \frac{1}{\pi} \, dv_1 \, dv_2$$

$$+ \int_{\mathcal{D}(0,1)^-} h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} ; v_1^2 + v_2^2\right) \frac{1}{\pi} \, dv_1 \, dv_2$$

où

$$\mathcal{D}(0,1)^+ = \{(V_1, V_2) \in \mathcal{D}(0,1) \mid V_2 \geq 0\}$$

$$\mathcal{D}(0,1)^- = \{(V_1, V_2) \in \mathcal{D}(0,1) \mid V_2 < 0\}$$



On considère le changement $\Phi(v_1, v_2) = \left(\dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} ; v_1^2+v_2^2 \right)$

- sur $\mathcal{D}(0,1)^+$

$$\begin{cases} t = \dfrac{v_1}{\sqrt{v}} \\ v = v_1^2 + v_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = t\sqrt{v} \\ v_2 = \sqrt{v(1-t^2)} \quad \text{car } v_2 > 0 \end{cases}$$

$\Phi_{|\mathcal{D}(0,1)^+}$ bijectif et :

$$\mathrm{Jac}\left(\Phi^{-1}_{|\mathcal{D}(0,1)^+}\right)(t,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v} & \dfrac{t}{2\sqrt{v}} \\ -t\sqrt{\dfrac{v}{1-t^2}} & \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

$$\left| \det \mathrm{Jac}(\Phi^{-1})(t,v) \right| = \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2} + t^2 \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\left(1 + \frac{t^2}{1-t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\,\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_{\mathcal{D}(0,1)^+} h\left(\Phi(v_1,v_2)\right) \frac{1}{\pi}\, dv_1 dv_2$$

$$= \int_{[-1;1]\times[0,1]} h(t,v) \, \frac{1}{\pi} \, \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \, dt\, dv$$

• sur $\mathcal{D}(0,1)^-$ On raisonne de la même manière, mais cette fois :

$$\Phi^{-1}_{|\mathcal{D}(0,1)^-}(t,v) = \left(t\sqrt{v},\ -\sqrt{v(1-t^2)}\right)$$

$$\mathrm{Jac}\left(\Phi^{-1}_{|\mathcal{D}(0,1)^-}\right)(t,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v} & \dfrac{t}{2\sqrt{v}} \\ t\sqrt{\dfrac{v}{1-t^2}} & \dfrac{-\sqrt{1-t^2}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

$$\left|\det \mathrm{Jac}\left(\Phi^{-1}_{|\mathcal{D}(0,1)^-}\right)(t,v)\right| = \left|\frac{-1}{2\sqrt{1-t^2}}\right|$$

$$\int_{\mathcal{D}(0,1)^-} h\left(\Phi(v_1,v_2)\right)\frac{1}{\pi}\,dv_1dv_2$$

$$= \int_{[-1,1]\times[0,1]} h(t,v)\ \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\,dt\,dv$$

Si bien que l'on a in fine :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[h(T_1,V)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} h(t,v)\ \frac{1}{\pi}\ \frac{\mathbb{1}_{\{t\in[-1,1]\}}}{\sqrt{1-t^2}} \times \mathbb{1}_{\{v\in[0,1]\}}\,dt\,dv}$$

D'où

- $f_{T_1}(t) = \dfrac{1}{\pi}\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathbb{1}_{t\in[-1,1]}$
- $f_V(v) = \mathbb{1}_{\{v\in[0,1]\}}$ $\quad (V \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]})$
- T_1 et V indép car $f_{T_1,V}(t,v) = f_{T_1}(t)\,f_V(v)$.

- On note maintenant que $T_1^2 + T_2^2 = 1$

$$\Rightarrow T_2 = \pm\sqrt{1 - T_1^2}$$

T_1 et V étant indép on a :

* $\left(T_1, \sqrt{1-T_1^2}\right)$ et V indép

* $\left(T_1, -\sqrt{1-T_1^2}\right)$ et V indép

D'où (T_1, T_2) et V indép.

- Loi de (T_1, T_2)

On sait que $\|(T_1, T_2)\| = 1 \Rightarrow (T_1, T_2) \in \mathcal{C}_{(0,1)}$

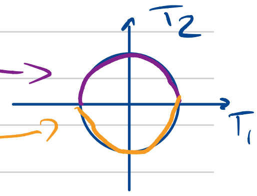
(cercle unité dans $\mathbb{R}^2$)

$$\Rightarrow \boxed{\exists!\, \theta \in [0, 2\pi] \,/\, (T_1, T_2) = (\cos\theta, \sin\theta).}$$

On définit $\mathcal{C}(0,1)^+$ et $\mathcal{C}(0,1)^-$ de manière analogue à ce qui a été fait précédemment.

$$\mathcal{C}(0,1)^+ = \{(T_1, T_2) \in \mathcal{C}(0,1) \mid T_2 \geq 0\}$$

$$\mathcal{C}(0,1)^- = \{(T_1, T_2) \in \mathcal{C}(0,1) \mid T_2 < 0\}$$



On rappelle également la densité de T_1 :

$$f_{T_1}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathbb{1}_{t \in [-1;1]}$$

$$= \frac{-1}{\pi} (\arccos)'(t)\, \mathbb{1}_{t \in [-1;1]}$$

On a alors que la fonction de répartition de T_1 est :

$$F_{T_1}(v) = \int_v^{-1} \frac{1}{\pi} \arccos(t)\, dt = 1 - \frac{\arccos(t)}{\pi}.$$

Si $(T_1, T_2) \in \mathcal{C}(0,1)^+$ $\quad \Theta \in [0, \pi]$; $\Theta = \arccos(T_1)$

$\forall t \in [0,\pi]$, $F_\Theta(t) = \mathbb{P}(\arccos(T_1) \leq t)$

$= \mathbb{P}(T_1 \geq \cos(t))$ par décroissance de $\cos$ sur $[0,\pi]$

$= \dfrac{t}{\pi}$

Autrement dit, la loi de Θ sachant $(T_1, T_2) \in \mathcal{C}(0,1)^+$ est une $\mathcal{U}_{[0,\pi]}$.

Si $(T_1, T_2) \in \mathcal{C}(0,1)^-$ $\quad \Theta \in [\pi, 2\pi]$ $\quad \Theta = \arccos(T_1) + \pi$

$\forall t \in [\pi, 2\pi]$, $F_\Theta(t) = \mathbb{P}(\arccos(T_1) + \pi \leq t)$

$= \mathbb{P}(T_1 \geq t - \pi)$

$= \dfrac{t-\pi}{\pi}$

Cette fois, $\Theta \,|\, (T_1, T_2) \in \mathcal{C}(0,1)^- \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\pi, 2\pi]}$

Finalement $\forall t \in [0, 2\pi]$,

$$\mathbb{P}(\Theta \leq t) = \mathbb{P}(\Theta \leq t \mid (T_1, T_2) \in \mathcal{C}_{(0,1)}^+)\, \mathbb{P}((T_1, T_2) \in \mathcal{C}_{(0,1)}^+)$$
$$+ \mathbb{P}(\Theta \leq t \mid (T_1, T_2) \in \mathcal{C}_{(0,1)}^-)\, \mathbb{P}((T_1, T_2) \in \mathcal{C}_{(0,1)}^-)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{t}{2\pi} & \text{si } t \in [0; \pi] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{t-\pi}{2\pi} = \dfrac{t}{2\pi} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$= \frac{t}{2\pi}$$

en utilisant que

i) $\mathbb{P}(\Theta \leq t \mid (T_1, T_2) \in \mathcal{C}_{(0,1)}^+) = \begin{cases} t/\pi & \text{si } t \in [0, \pi] \\ 1 & \text{si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$

ii) $\mathbb{P}(\Theta \leq t \mid (T_1, T_2) \in \mathcal{C}^-(0,1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \pi] \\ \frac{t-\pi}{\pi} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$

iii) $\mathbb{P}((T_1,T_2)\in \mathcal{C}^+_{(0,1)}) = \mathbb{P}(V_2>0) = \frac{1}{2}$

(car $V_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1;1]}$)

$= \mathbb{P}((T_1,T_2)\in \mathcal{C}^-(0,1))$

Donc $\boxed{\Theta \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,2\pi]}}$

Donc on a bien $(T_1,T_2) \sim (\cos\Theta, \sin\Theta)$
avec $\Theta \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$.

c/ • $V \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ donc $V \sim 1-V$

et $S = \sqrt{-2\log(V)} \hookrightarrow$ Rayleigh (1).

• $T_1 \sim \cos\Theta$ avec $\Theta \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$

$T_2 \sim \sin\Theta$

Donc si $X = ST_1$, $Y = ST_2$

• $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ • $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ • X et Y indép

d'après 1/

$$\left(f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \right)$$

d/ On définit Z = le nombre total de pas dans la boucle. ; $\forall n$, $B_n = \begin{cases} 1 & \text{si on sort de la boucle à l'étape } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Les $(B_n)_n$ sont iid $\mathcal{B}(\mathbb{P}(\|V\|\le 1))$

Z suit donc une $\mathcal{G}(\mathbb{P}(\|V\|\le 1))$.

Son espérance est $\boxed{\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{\mathbb{P}(\|U\| \leq 1)} = \frac{1}{\pi/4} = \frac{4}{\pi}}$

cf q.3 : $\mathbb{P}(\|U\| \leq 1) = \frac{\mathcal{A}_{D(0,1)}}{\mathcal{A}_{[-1;1]^2}}$

Exercice 2

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, $x \in [0,1]$. On conditionne $X_n = x$.

- si $\forall m \in \mathbb{N}^*, \ x \neq \frac{1}{m}$ $\qquad$ A est un borélien de $\mathbb{R}$

On sait que dans ce cas $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$.

Autrement dit, $\underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x)}_{= P(x, A)} = \int_{A \cap [0,1]} dt$.

- si $\exists m \mid x = \frac{1}{m}$

On pose $B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{n+1} = \frac{1}{m+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ $\qquad B_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1-x^2)$

On a alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x) = \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x, B_n = 1)}_{= \begin{cases} 1 \text{ si } \frac{1}{m+1} \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \delta_{\frac{1}{m+1}}(A)} \underbrace{\mathbb{P}(B_n = 1)}_{x^2}$$

$$+ \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n = x, B_n = 0)}_{= \int_{A \cap [0,1]} dt \text{ car } X_{n+1} \mid B_n = 0 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}} \underbrace{\mathbb{P}(B_n = 1)}_{1 - x^2}$$

$$= x^2 \, \delta_{\frac{1}{m+1}}(A) + (1 - x^2) \int_{A \cap [0,1]} dt.$$

$\boxed{\text{In fine on a bien le résultat voulu}}$

2/ On cherche à montrer que :

$\forall A$ borélien de $[0,1]$, $\pi(A) = \int \underbrace{\pi(dx)}_{= \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx} P(x,A)$

où $\pi(A) = \lambda(A)$ la mesure uniforme sur $[0,1]$

(λ étant la mesure de Lebesgue)

ie $\forall A$, $\lambda(A) = \int_0^1 P(x,A)dx$

On note $\mathcal{E} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{\frac{1}{m}\right\}$ (inclus dans $[0;1]$)

- On a : $\int_0^1 P(x,A)\,dx$

$$= \int_0^1 P(x,A)\left[\mathbb{1}_{\{x\in\mathcal{E}\}} + \mathbb{1}_{\{x\notin\mathcal{E}\}}\right]dx$$

$$= \int_{\mathcal{E}} P(x,A)\,\mathbb{1}_{x\in\mathcal{E}}\,dx + \int_{[0,1]\cap{}^c\mathcal{E}} P(x,A)\,\mathbb{1}_{\{x\notin\mathcal{E}\}}\,dx.$$

- $\mathcal{E}$ étant une union dénombrable de singletons, $\mathcal{E}$ est de mesure nulle.
  La première intégrale est donc nulle.

- $\mathcal{E}$ étant de mesure nulle, $\lambda([0,1]\cap{}^c\mathcal{E}) = 1$.

Par ailleurs, sur ${}^c\mathcal{E}$, $P(x,A) = \lambda(A)$ d'après la question précédente.

On obtient : $\boxed{\int_0^1 P(x,A)\,dx = \lambda(A)\cdot\lambda\left([0,1]\cap{}^c\mathcal{E}\right) = \lambda(A) = \pi(A).}$

et le résultat voulu.

3/ • Conditionnellement à $X_0 = x \notin \mathcal{E}$,

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0;1]}$. $\quad \left(P(x,dy) = \mathbb{1}_{y \in [0;1]}\, dy\right)$

Donc $P f(x) = \mathbb{E}[f(X_1) \mid X_0 = x] = \int f(t)\, \pi(dt)$

$$= \int_0^1 f(t)\, dt = \pi f$$

• Puis on sait que π est la distribution invariante,

donc si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0;1]}$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0;1]}$

si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0;1]}$, $X_3 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0;1]}$

Autrement dit, par récurrence, si

$P^n f(x) = \pi f$. $\quad \forall f$ bornée mesurable

$$\Rightarrow P^{n+1} f(x) = \int \underbrace{P^n f(y)}_{= \pi f} \underbrace{P(x,dy)}_{\mathbb{1}_{y \in [0;1]} dy} = \pi f \int_0^1 dy = \pi f$$

Donc $\boxed{\begin{array}{l} \forall x \notin \mathcal{E}, \quad P^n f(x) = \int f(t)\, \pi(dt) = \int_0^1 f(t)\, dt \\ \forall x \notin \mathcal{E}, \quad P^n f(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int f(t)\, \pi(dt) \end{array}}$

4/ a/ On prouve par récurrence (sur n) que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P^n\left(x, \frac{1}{m+n}\right) = \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right)$

$$\cdots \left(1 - \frac{1}{m+n-1}\right)^2$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right)$$

$x = \frac{1}{m}$ avec $m \geq 2$ dans la suite.

• $n = 1$

On a $\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1}{m+1} \,\middle|\, X_n = \frac{1}{m}\right) = 1 - x^2$

$$= 1 - \frac{1}{m^2}.$$

Donc il vient $P\left(x, \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m^2}$

$$= \prod_{k=0}^{0} \left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right).$$

• $n \Rightarrow n+1$ Supposons l'identité vraie au rang n.

ie $P^n\left(x, \frac{1}{n+m}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right)$

$$P^{n+1}\left(x, \frac{1}{m+n+1}\right) = \int P^n(x, dy)\, P\left(y, \frac{1}{m+n+1}\right)$$

On rappelle que :

$$P\left(y, \frac{1}{m+n+1}\right) = \begin{cases} y^2 \overbrace{\int_{\left\{\frac{1}{k+1}\right\}} dt}^{=0 \text{ car } \lambda\left(\left\{\frac{1}{k+1}\right\}\right) = 0} + (1-y^2)\, \overbrace{\delta_{\frac{1}{k+1}}\left(\frac{1}{m+n+1}\right)}^{= \begin{cases} 1 & \text{si } k = m+n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} & \text{si } y = \frac{1}{k} \\ \underbrace{\int_{\left\{\frac{1}{m+n+1}\right\}} dt}_{=0 \text{ car le singleton est Lebesgue-négligeable}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(y, \frac{1}{m+n+1}\right) = \begin{cases} 1 - y^2 & \text{si } y = \frac{1}{m+n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Donc il vient : $P^n\left(x, \frac{1}{m+n+1}\right) = P^n\left(x, \frac{1}{m+n}\right)\left(1 - \frac{1}{(m+n)^2}\right)$

Ce qui achève la récurrence.

b/ On note que $\pi(A) = 0$

car A est une union dénombrable de singletons.

On s'intéresse à $\lim\limits_{n\infty} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right)$

On a : $\ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right)\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right)$$

On a que $\ln\left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right) \underset{k\infty}{\sim} -\frac{1}{(m+k)^2}$

et $\ln\left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right) \leq 0 \quad \forall k.$

La série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^2}$ étant finie, on a donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right) = c \in \mathbb{R}.$$

Alors $\boxed{\prod\limits_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(m+k)^2}\right) = e^{c} > 0 = \pi(A)}$