

PRML 1 章 演習問題

mei

問題 1.1

$$y(x, \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^M w_j x_j, \quad E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \{y(x_n, \mathbf{w}) - t_n\}^2 \quad (1)$$

二乗和誤差 (1) を最小にする係数 $\mathbf{w} = \{w_i\}$ が次の線形方程式の解として与えられることを示す

$$\sum_{j=0}^M A_{ij} w_j = T_i \quad (2)$$

ただし、

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N (x_n)^{i+j}, \quad T_i = \sum_{n=1}^N (x_n)^i t_n$$

解答

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial w_i} &= \sum_{n=1}^N (y_n(x_n, \mathbf{w}) - t_n) \frac{\partial}{\partial w_i} (y_n(x_n, \mathbf{w}) - t_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=0}^M (x_n)^j w_j - t_n \right) (x_n)^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

の時に最小になる

よって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=0}^M (x_n)^j w_j \right) (x_n)^i &= \sum_{n=1}^N (x_n)^i t_n \\ \sum_{j=0}^M \sum_{n=1}^N (x_n)^{i+j} w_j &= \sum_{n=1}^N (x_n)^i t_n \end{aligned}$$

となり、(2) を得る。

補足

E は w_i について下に凸な二次関数だから $\frac{\partial E}{\partial w_i} = 0$ となる w_i が E を最小にする

問題 1.2

式 (1) に正則化項がついた次の誤算関数を最小にする係数 w_i が満たす式を求める

$$\tilde{E}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \{y(x_n, \mathbf{w}) - t_n\}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \quad (3)$$

解答

問題 1.1 と同様の計算により、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial w_i} &= \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=0}^M (x_n)^j w_j - t_n \right) (x_n)^i + \lambda w_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、

$$\sum_{j=0}^M A_{ij} w_j = T_i - \lambda w_i \quad (4)$$

ただし、

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N (x_n)^{i+j}, \quad T_i = \sum_{n=1}^N (x_n)^i t_n$$

が w_i が満たすべき線形方程式系になる

問題 1.3

下の表のような箱がある。箱を $p(r) = 0.2, p(b) = 0.2, p(g) = 0.6$ の確率でランダムに選び果物を区別せず等確率で取り出す時、(i) りんごを取り出す確率、(ii) 選んだ果物がオレンジであった時それが g の箱から取り出されたものである確率、を求める

箱	りんご	オレンジ	ライム
r	3	4	3
b	1	1	0
g	3	3	4

解答

(i)

$$\begin{aligned}
 p(F = a) &= \sum_B p(F = a|B)p(B) \\
 &= p(F = a|B = r)p(B = r) + p(F = a|B = b)p(B = b) + p(F = a|B = g)p(B = g) \\
 &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5} \\
 &= \frac{17}{50}
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 p(B = g|F = o) &= \frac{p(F = o|B = g)p(B = g)}{p(F = o)} \\
 &= \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

問題 1.4

hoge

解答

問題 1.5

hoge

解答

問題 1.6

2 つの変数 x, y が独立ならそれらの共分散が 0 になることを示す

解答

$$\text{cov}[x, y] = \mathbb{E}_{x,y}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y] \quad (5)$$

一方、

$$\mathbb{E}_{x,y}[xy] = \sum_x \sum_y p(x, y)xy$$

であり、 x, y が独立であることから $p(x, y) = p(x)p(y)$ とかけるので、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,y}[xy] &= \sum_x \sum_y p(x, y)xy \\ &= \sum_x \sum_y p(x)p(y)xy \\ &= \sum_x p(x)x \sum_y p(y)y \\ &= \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y] \end{aligned}$$

となる。

これと (5) 式より、

$$\text{cov}[x, y] = 0$$

が示される。

補足

離散変数で考えたけど連続でも同じ