PRML 1 章 演習問題

mei

問題 1.1

$$y(x, \boldsymbol{w}) = \sum_{j=i}^{M} w_j x_j, \qquad E(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{y(x_n, \boldsymbol{w}) - t_n\}^2 \tag{1}$$

二乗和誤差 (1) を最小にする係数 $\boldsymbol{w} = \{w_i\}$ が次の線形方程式の解として与えられることを示す

$$\sum_{j=0}^{M} A_{ij} w_j = T_i \tag{2}$$

ただし、

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^{N}(x_n)^{i+j}, \qquad T_i = \sum_{n=1}^{N}(x_n)^i t_n$$

解答

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \sum_{n=1}^{N}(y_n(x_n, \boldsymbol{w}) - t_n)\frac{\partial}{\partial w_i}(y_n(x_n, \boldsymbol{w}) - t_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{M}(x_n)^j w_j - t_n\right)(x_n)^i \\
&= 0
\end{aligned}$$

の時に最小になる

よって、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{M}(x_n)^j w_j\right)(x_n)^i &= \sum_{n=1}^{N}(x_n)^i t_n \\
\sum_{j=0}^{M}\sum_{n=1}^{N}(x_n)^{i+j} w_j &= \sum_{n=1}^{N}(x_n)^i t_n
\end{aligned}$$

となり、(2) を得る。

補足

E は w_i について下に凸な二次関数だから $\frac{\partial E}{\partial w_i} = 0$ となる w_i が E を最小にする

問題 1.2

式 (1) に正則化項がついた次の誤算関数を最小にする係数 w_i が満たす式を求める

$$\widetilde{E}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{y(x_n, \boldsymbol{w}) - t_n\}^2 + \frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 \tag{3}$$

解答

問題 1.1 と同様の計算により、

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{M}(x_n)^j w_j - t_n\right)(x_n)^i + \lambda w_i \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、

$$\sum_{j=0}^{M} A_{ij} w_j = T_i - \lambda w_i \tag{4}$$

ただし、

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^{N}(x_n)^{i+j}, \qquad T_i = \sum_{n=1}^{N}(x_n)^i t_n$$

が w_i が満たすべき線形方程式系になる

問題 1.3

下の表のような箱がある。箱を $p(r)=0.2, p(b)=0.2, p(g)=0.6$ の確率でランダムに選び果物を区別せず等確率で取り出す時、(i) りんごを取り出す確率、(ii) 選んだ果物がオレンジであった時それが g の箱から取り出されたものである確率、を求める

箱	りんご	オレンジ	ライム
r	3	4	3
b	1	1	0
g	3	3	4

解答

(i)

$$\begin{aligned}
p(F=a) &= \sum_B p(F=a|B)p(B) \\
&= p(F=a|B=r)p(B=r) + p(F=a|B=b)p(B=b) + p(F=a|B=g)p(B=g) \\
&= \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5} \\
&= \frac{17}{50}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
p(B=g|F=o) &= \frac{p(F=o|B=g)p(B=g)}{p(F=o)} \\
&= \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

問題 1.4

hoge

解 答

問題 1.5

hoge

解 答

問題 1.6

2 つの変数 x, y が独立ならそれらの共分散が 0 になることを示す

解 答

$$\mathrm{cov}[x,y] = \mathbb{E}_{x,y}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y] \tag{5}$$

一方、

$$\mathbb{E}_{x,y}[xy] = \sum_x \sum_y p(x,y)xy$$

であり、x, y が独立であることから $p(x,y) = p(x)p(y)$ とかけるので、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,y}[xy] &= \sum_x \sum_y p(x,y)xy \\ &= \sum_x \sum_y p(x)p(y)xy \\ &= \sum_x p(x)x \sum_y p(y)y \\ &= \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y]\end{aligned}$$

となる。

これと (5) 式より、

$$\mathrm{cov}[x,y] = 0$$

が示される。

問題 1.7

次の 1 変数ガウス分布に関する規格化条件を証明する

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2)dx = 1$$

解答

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2)dx = I$$

とおき、I^2 を考える。

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(y|\mu, \sigma^2)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2)\mathcal{N}(y|\mu, \sigma^2)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2+(y-\mu)^2\right]\right)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right)dxdy
\end{aligned}$$

最後の行は改めて $x-\mu \to x, y-\mu \to y$ とおいた。

ここで、極座標変換を施すと、

$$\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}r^2\right)rdrd\theta \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}r^2\right)rdr \\
&= -\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2\sigma^2}r^2\right)'dr \\
&= -\left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}r^2\right)\right]_0^{\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

よって、$I \geq 0$ より $I = 1$ が示された