PRML 演習問題 1.11 1.20

mei

問題 1.11

1 次元正規分布の μ と σ^2 の最尤解を求める

解 答

正規分布から独立に生成されたスカラー変数のデータセット $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^{\mathrm{T}}$ があったとする。
この時対数尤度は

$$\ln p(\mathbf{x}|\mu, \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu)^2 - \frac{N}{2}\ln\sigma^2 - \frac{N}{2}\ln(2\pi)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln p(\mathbf{x}|\mu, \sigma^2) &= -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu)\\ &= 0\end{aligned}$$

よって、

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu) = 0$$

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n$$

となり、μ の最尤解は標本平均と一致する
一方、分散については

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln p(\mathbf{x}|\mu, \sigma^2) &= \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu)^2 - \frac{N}{2}\frac{1}{\sigma^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

よって、

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu)^2$$

μ の最尤解を μ_{ML} と書くと

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - \mu_{\mathrm{ML}})^2$$

となり、μ_{ML} は標本平均に一致したから、σ^2 は標本平均に対する標本分散になる

問題 1.12

$$\mathbb{E}[x_n, x_m] = \mu^2 + I_{nm}\sigma^2$$

を示す。ただし x_n, x_m は平均 μ、分散 σ^2 の正規分布から生成されたデータ点であり、$I_{nm} = \delta_{nm}$ である

解 答

(i)　$n = m$ のとき

左辺は二次のモーメントであり、

$$\mathbb{E}[x_n^2] = \mu^2 + \sigma^2$$

となるので成立

(ii)　$n = m$ のとき