# 波利亚计数

高中时候曾经想法推到同分异构体个数，希望考试能用比较高端的方法熏迅速解出来(但是没有找到)，几年过去了这个疑虑终于解开了，用到的叫波利亚计数(**[Pόlya](http://www.baidu.com/link?url=1eODRzXIQ2BUDhh7nqINC-D0-mfO_5_iIARO6xuq1E-VWUmvAcmzekYDCJDrG9VwiVCeHGU_-1E7aCVwh2-2V2i7SYgRu_Pc2pDTkFRi6RwL7zVoCHdf-c7KNVEH1_-FXaDb_R9gmpviw3J70BTDZFmjE8iX-N_tnFpkfBuwJFiYBdFSWXbJGy69S4d6mOUo718Y1poj1mBaD6cd7ZOw5rk8sTcjUJ1dTbIoKX5o8IX3GR7SwmD7VmuulcM28uFDsaaGRiwcsSUB2yOg-RvWDWmURaoxyQk9u8528coaYAoEPQ89t1Dd2OZHFM7vK_jpRL2u9D8r_APpo8ukwbw5NLN0G8u5ui8eThYTt3e7tTUN9nJrLqKfxVgzCUQ0y_oa" \t "_blank)**计数定理)是组合数学的核心知识点，这里只说用法，证明比较复杂的略

有如下问题：

1. 用两种颜色去染色一圈的6个棋子，旋转相同算一个有多少种染法
2. 给定一个苯环，问用一个羟基一个羧基取代苯环氢原子，理论上有多少种取代方法，忽略化学上的冲突。
3. 有k1颜色珠子n1个，k2颜色珠子n2个，k3颜色珠子n3个。。。。kN颜色珠子nN个,问能穿成多少种不同的项链。

这个博客讲的比较好https://blog.csdn.net/ojshilu/article/details/15378645

**要知道波利亚计数，一定要了解一下理论**

## 群理论：

以棋子问题为例，有6个棋子构造一个2\*6的矩阵

表中第一行表示为位置序号，第二行表示棋子序号，初始是：记作a1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

顺时针旋转一个单位后，记作a2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

顺时针旋转一个单位后，记作a3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 |

顺时针旋转一个单位后，记作a4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 |

顺时针旋转一个单位后，记作a5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |

顺时针旋转一个单位后，记作a6

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 |

**置换：**以上是集合内部元素位置改变(总元素不变，整体经过旋转，翻折，对称等操作)的产物，用矩阵表示某个状态的每个元素，这个矩阵称为置换

置换除了矩阵表示，为了表示出内部元素位置是怎么变动的

a1=(1) (2) (3) (4) (5) (6) 代表了1的位置是1，2的位置是2，等循环，6个括号代表有6个循环

a2=(1,6,5,4,3,2),代表了1的位置是6,6位置是5…最后一直到1，只有1个循环

a3=(1,5,3)(2,6,4) 代表了1到5到3到1 和 2到6到4到2，2个循环

a4=(1,4)(2,5)(3,6)

a5=(1,3,5)(2,4,6)

a6=(1,2,3,4,5,6)

用c代表循环个数

c1=6,c2=1,c3=2,c4=3,c5=2,c6=1

**置换群：**由置换组成的群，所谓群可以理解成，集合再组成的集合。

这里设置换群是G G=(a1,a2,a3,a4,a5,a6) ,|G|表示G元素个数，这里|G|=6

## 波利亚计数定理：

设置换群G={a1,a2,a3,…an }是N={1,2,...,n}上的置换群,现用m种颜色对这N个点染色,则不同的染色方案数为:

CNT=(m^c1+m^c2+…+m^cn)/|G|=（）/n

这其中没有说明m种颜色每个颜色取多少个这个条件，意味着CNT是颜色数量任意取得结果。

6个棋子圆环染2种色，有14种(ooxoxx和xxoxoo是两种)

## 怎么找置换？

找置换是波利亚计数关键，这个要从题目条件看，比如经过旋转算作同一个，那么就如例子中6个棋子，如果经过旋转和翻折对称都算同一个，那么还要加上以某个线为对称轴翻折的结果去求置换。

而且求置换往往需要其他数学知识。

## 常见置换模型总结：

### n个珠子圆环用m种颜色染色，中心对称算同一种

数据较小(<100)可以开个数组寻找循环节数量(复杂度n\*n)，但是如果是1e5以上的数据就不行了，这里可以找规律，因为只说了旋转算同一种，旋转的置换有n个，第i个置换循环节数ci时gcd(n,i)，当然这里不能把ci加和，因为要算m^ci之和，应该把ci分类，这样能用sqrt(n)\*logn的时间求得。

关于[gcd(1,n),gcd(n,n)]这区间的数字分类，是数学题老套路，参考我的其他文章：最大公约数前缀和。

### n个珠子圆环用m种颜色染色，轴对称算同一种

类似中心对称，按照n分奇数偶数，

奇数：按照每个点翻折，循环节是(n+1)/2，有n个

偶数：分为2种。按照某2个点翻折：循环节是(n+2)/2，有n/2个; 按照某个中轴线翻折：循环节是n/2，有n/2个。总共也是n个

## 题目：

**poj 1286**

poj2154

poj2409

Hdu1812

更新。。。。