## 积性函数和狄利克雷卷积

积性函数：对于**任意互质的整数**a和b有性质f(ab)=f(a)f(b)的[数论函数](https://baike.baidu.com/item/%E6%95%B0%E8%AE%BA%E5%87%BD%E6%95%B0)。

完全积性函数：对于**任意整数**a和b有性质f(ab)=f(a)f(b)的[数论函数](https://baike.baidu.com/item/%E6%95%B0%E8%AE%BA%E5%87%BD%E6%95%B0)。

若 f(x), g(x)均为积性函数，则以下四个函数也均为积性函数(p是任意整数)：

h(x)=f(x^p) h(x)=( f(x))^p h(x)=f(x)\*g(x)

h(x)= d代表x%d==0的数

定义两个数论函数 f和g 的**狄利克雷卷积** (Dirichlet) 为(f※g)(x):

(f※g)(x)=

狄利克雷卷积有如下性质

交换律f※g=g※f 结合律f※g※h= f※(h※g)

分配率: f※(g+h)=(g※f)+ (h※f) 单位元： f※ε(n)=f

## 杜教筛：

先说一个重要结论，==

f(x)是积性函数 求S (x)= 有以下方法

找到一个合适的数论函数 g(n)，求g(x)和f(x)狄利克雷卷积的前缀和：

=

根据狄利克雷卷积也有重要结论的变换

==

对最右边等式提出i=1时的情况得到：

g(1)S(n)+

现在如果我们有快速方法，能顺利求到狄利克雷卷积的 以及g(x)的 那么就能通过分块模型来求解S(n)

g(1)S(n)= -

上面公式里，n/i是整除分块模型，之前得到结论它只有2\*sqrt(n)种，所以建立hashmap表示S(n),不会超内存。

预处理得到i<=1e6的所有求S(i) 对于i>n的s(i)就用整除分块模型缩小i，直到i<=1e6 ，此方法时间复杂度是n^(2/3)

此处用到hashmap记忆化搜索,效率不佳，常数较大，应该用数组ind[d]代表前n/d的前缀和，因为之前说了，实际上s(i)只有2\*sqrt(n)种

至于怎么找合适g(x)不是一件容易的事，但应该直到找的g(x)必须很容易求sum,且狄利克雷卷积也要很容易求sum

## 后记：

常见积性函数：

φ(n) －[欧拉函数](https://baike.baidu.com/item/%E6%AC%A7%E6%8B%89%E5%87%BD%E6%95%B0)

μ(n) －[莫比乌斯函数](https://baike.baidu.com/item/%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%87%BD%E6%95%B0)，关于非平方数的质因子数目

gcd(n,k) －最大公因子，当k固定的情况

d(n) －n的正因子数目(约数个数函数)

σ(n) －n的所有正因子之和(约数和函数)

σk(n) － 因子函数，*n*的所有正因子的k次[幂](https://baike.baidu.com/item/%E5%B9%82)之和，当中*k*可为任何[复数](https://baike.baidu.com/item/%E5%A4%8D%E6%95%B0)。

1(n) －不变的函数，定义为 1(n) = 1 （完全积性）

Id(n) －单位函数，定义为 Id(n) = n（完全积性）

Idk(n) －幂函数，对于任何复数、实数*k*，定义为Id*k*(n) = n^k （完全积性）

ε(n) －定义为：若n = 1，ε(n)=1；若 n > 1，ε(n)=0。别称为“对于[狄利克雷](https://baike.baidu.com/item/%E7%8B%84%E5%88%A9%E5%85%8B%E9%9B%B7)卷积的乘法单位”（完全积性）

λ(n) －[刘维尔函数](https://baike.baidu.com/item/%E5%88%98%E7%BB%B4%E5%B0%94%E5%87%BD%E6%95%B0)，关于能整除*n*的质因子的数目

γ(*n*)，定义为γ(*n*)=(-1)^ω(n)，在此加性函数ω(n)是不同能整除*n*的质数的数目

沿用上述符号 常见狄利克雷卷积有：

ε(n)=(※1)(n)=

d(n)=(※1)(n)=

σ(n)=(※1)(n)=

φ(n)=(μ※id)(n)=

d(n)=( φ※1)(n)= 通过φ(n)的反演得到

## 实例：

**求莫比乌斯函数前缀和**：这里不能用d去卷莫比乌斯函数，狄利克雷卷积是φ(n)。φ(n)前缀和不可快速求。应该用1去卷莫比乌斯函数，狄利克雷卷积是ε(n)

ε(n)=(※1)(n)=

现在f(x)是μ ，g(x)是1

g(1)S(n)= –

S(n)= 至此数论分块即可

**求欧拉函数前缀和**：用1去卷欧拉函数，狄利克雷卷积是d(n)。

d(n)=( φ※1)(n)=

现在f(x)是φ，g(x)是1

g(1)S(n)= –

S(n)= 至此数论分块即可