# 线性代数总结

## 线性代数的几何意义

行列式和矩阵秩的集合意义

### 向量空间

#### 概念

**基：**n维向量空间中，存在线性无关的n个向量的向量组{}，且中任何向量α都能由此向量组线性表出，即：α== {}\*x

则称该组向量是的**基**。基向量组的向量个数一定有n个,n代表向量空间**维度**。

则x=[]称为向量α在空间的**基**{}下的**坐标向量**，简称**坐标**

* 标准正交基是单位化和正交化后的基(基是向量组)，n维下的标准正交基不一定是用n维向量组表示，也可能是更高维向量组。

若{}和{}这2个向量组都是空间的基，且有关系

{}={}\*C ，其中C代表一个n\*n的矩阵

则公式{}={}\*C称为，由基{}到基{}的**基变换公式**

矩阵C称为由基{}到基{}的**过渡矩阵**，一定可逆

设：坐标x=[], y=[] ，且有向量α= {}x={} y,

且基{}到基{}的过渡矩阵为C

则有α= {}x= {} y= {}Cy = {} ,该式子为**坐标变换公式**

**此时**α是x在{}和y在{}下的坐标

* 提法”求两组基A,B的坐标变换公式”就是求过渡矩阵C，使得A=BC或B=AC

#### 求过度矩阵

求基{}到基{}的基变化的过渡矩阵C，就是用非齐次方程组解法，类似于问题：[[求矩阵方程Ax=B,且A不可逆]](#_求矩阵方程Ax=B) 把{}看成A，{}看成B

* 向量α在{}下的坐标是β，说明α={}\*β

公式{}={}\*C称为，由基{}到基{}的**基变换公式**

矩阵C称为由基{}到基{}的**过渡矩阵**，且过渡矩阵一定可逆

这里有个文字游戏，求A到B的过渡矩阵，是把A看做系数矩阵解方程组

等价于求

### 线性方程组的几何意义

* 矩阵秩的秩代表了其向量组代表的空间的维度：秩为1说明向量共线；秩为2说明向量面；秩为3说明向量共体。

对应到线性方程组里，则是代表它们系数向量的情况

只说结论，详细见张宇闭关修炼158，设A={} AX= 增广矩阵是exA

1. R(A)=R(EXA)时，系数矩阵秩等于增广矩阵秩，一定三面交于一点或线

1.1若R(A)=3(此时一定满足R(A)=R(EXA)),3平面相交于一点

1.2若R(A)=2,三平面相交于一条线，可按照:2个线性相关还是三个线性相关继续划分(两个成比例，还是第三个能被前两个表示)

1.3若R(A)=1 三面重合

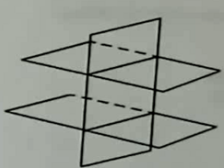
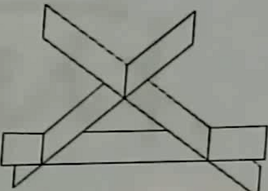
1. R(A)!=R(EXA)时，三面绝不会有相交部分，但可能两两相交

2.1 若R(A)=2,满足两两交于一条线，可按照:2个线性相关还是三个线性相关继续划分(两个成比例，还是第三个能被前两个表示)

2.2若R(A)=1,若R(EXA)=2则有2个面重合，若R(EXA)=3则有3个面平行

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| R(A) r() | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 三面重合  3面有交面 | 两重合  与第三个平行 | 三面平行 |
| 2 | NAN | 三面交于同一线  图1，图2  3面有交线 | 两两交于一线，且线之间没有交点  图3，图4 |
| 3 | NAN | NAN | 两两交于一线，且线之间有唯一交点  类似坐标系平面  3面有交点 |

1：两个成比例  2：两个表示第三个 

3：两个成比例 4：两个表示第三个

### 二次型的几何意义和深刻理解

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 特征值情况 | 3正 | 2正1负 | 1正2负 | 2正1零 | 1正1负1零 |
| 规范型表式 |  |  |  |  |  |
| 几何意义 | 椭球面 | 单叶双曲面 | 双叶双曲面 | 椭圆柱面 | 双曲柱面 |
| 向量表示 | X=()^T | X=()^T | X=()^T | X=()^T | X=()^T |

* 二次型在某点的数值是,其中是特征值，是把用正交特征向量表示的系数
* 正交变换不改变二次型所代表的图形的范数，也就是二维面积和三维体积
* 二次型合同里，如果，也就是矩阵A正定，把C左或右乘以一个正交矩阵Q，不会改变合同结果依然是E
* 已知二次型f=()^2+()^2

可令 由恒等式

f=

若f=() ()

化为f=,则不是二次型矩阵，因为它不是实对称，

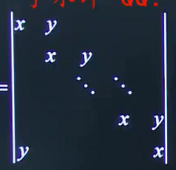
应该由f=得到f=

## 常用快速计算公式

### 行列式

#### 主要思路：

1. 规模较小的，暴力的用代数余子式或定义法 //3阶以内和简单高阶
2. 用已知类型的行列式的公式
3. 拆分行列式成|A|=|B\*C|, B,C都易求
4. 拆分行列式成|A|=|B|+|C|，单行列可拆性，B,C都易求
5. 设当前行列式为,通过递推关系列差分方程求
6. 凑|A|=，要求|A|易求，而|A|本身难求
7. 已知特征值，用特征值计算|A|

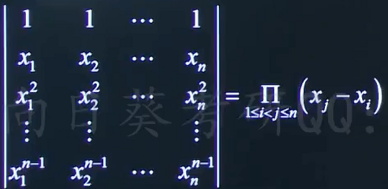
 = //主对角线是a其余是b

* 主对角线使a,其余都是b, = (a+(n-1)b)
* ,i=1,2,3…, 即：行和相等的行列式，方法是全都加到第一列
* 拉普拉斯展开式

= = = |A|\*|B|

= = = |A|\*|B|\*

!= |A|\*|B|-|C|\*|D|

* 范德蒙行列式：

对于n阶范德蒙行列式(n>=2)，看第2行。结果是：

### 求逆

* 2阶分块阵的逆

哪个对角线没有0，哪个对角线元素分别取逆

0在副对角线不变，0在主对角，则一定要交换所有对角线元素。

B左乘同行的，右乘同列的，加负号

* 2阶普通矩阵的逆：主对调，副变号，除以|A|
* 初等变换法扩展：两个方阵A和B，且A可逆，设函数GaussRight(A|B)代表把方阵(A|B)进行初等行变换，把A变成单位矩阵E后的右侧方矩阵

则B=GaussRight(A|B) B=

* 哈密顿凯莱定理：A为n阶方阵，(λ)是特征多项式，E为n阶单位阵，(λ)=det(λE-A)=，则 必定成立。

若A可逆，则必定存在常数项，提出后

### 克拉默法则得AX=β唯一解

若系数矩阵|A|≠0，则Ax=β有唯一解ξ, 解的每个数=

若系数矩阵|A|=0，则Ax=β可能有无穷多组解，也可能无解

这里||代表了：A中的第i列元素替换为后所得到的矩阵计算行列式，代表系数列向量

### 施密特正交化

=

= -

= - -

= -

= - ,

### 初等矩阵变换表

初等矩阵是由单位阵经过一次初等变换得到，配合左行右列定理使用，设P为如下矩阵，灰色代表不变或者很容易得到，注意到，swap操作都不变

* 注意：相对位置的不同E(I,j,k)代表的含义不同

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 设交换两行/列为E(i,j) | 第i列k倍加到第j列E(i,j)(k)  第j行k倍加到第i行E(i,j)(k) | 第i行/列乘k为E(i)(k) |
| | E(i,j)|=-1 | | E(i,j)(k)|=1 | |E(i)(k)|=k |
| (i,j) = E(i,j) | (i,j)(k) = E(j,i)(k) | (i)(k) = E(i)(k) |
| (i,j) = E(i,j) | (i,j)(k) = E(i,j)(-k) | (i)(k) = E(i)() |
|  |  |  |

### 几种特殊矩阵的性质

N是n阶方阵, n>=2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 幂0矩阵  A^k=0, n>=2 | 幂等矩阵  A^2=A, | 对合矩阵  A^2=E | 秩1矩阵  R(A)=1, n>=2 | 反对称阵  A^T=-A |
| R(A)<= ⌊⌋<n  不可逆  |A|=0 | R(A)+R(E-A)=n  不一定可逆  |A|=0或1 | R(E-A)+R(E-A)=n  可逆,|A|=1或-1 | 不可逆，且存在非0列向量α和β,使A= | 秩必为偶数  奇数阶一定不可逆，偶数阶不一定 |
| (n重)，特征多项式为 | ，若有0则|A|=0 | [特征值](https://baike.baidu.com/item/%E7%89%B9%E5%BE%81%E5%80%BC)只可能是-1或1 | (n-1重), (\*)  (1重),或β都可以当作那个特征向量 | 特征值是0或成对的虚数，纯虚数的[特征向量](https://baike.baidu.com/item/%E7%89%B9%E5%BE%81%E5%90%91%E9%87%8F/8663983)的实部和虚部形成的实向量等长且互相[正交](https://baike.baidu.com/item/%E6%AD%A3%E4%BA%A4/36310) |
| 非0幂0矩阵，不可相似对角化 | 可相似对角化 | 可相似对角化 | 若  可相似对角化  否则都是0,特征向量只有n-1个 | *不可相似对角化*  *合同于某特殊分块阵，考研不考* |
| Tr(A^i)=0  i>0 | tr(A)=R(A) | 无规律 | 也是非0特征值 | 主对角线全是0，Tr(A)=0 |
|  |  | A对合的充要条件是为幂等矩阵 |  |  |

**\*处**：(n-1重)的特征向量由得来，设 中b1!=0

则n-1个特征向量分别是：

(-b2,b1,0,0…0)

(-b3,0,b1,0…0)

……

(-,0,0,0…b1)

## 逆伴随转置公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 转置 | 逆 | 伴随 |
| A^T^T=A | A^(-1) ^(-1)=A | = |
| **=** | **=** | **=** |
| (A+B)^T=A^T+B^T | ≠ | ≠ |
| ||= |A|  =  ||= |A| | || = 1/|A|  =  ||= |A| | ||=  =  ||= |
| “转伴逆”三者可交换次序 | A可逆才有： |  |
| R() = R(A) | R() = R() | r() = |

加法只有转置可以有

* 若 则 |A|=0或1

若再知道，则A为正交阵，且A=

## 秩的公式

秩的定义：存在r，使得r阶子式不全是0，r+1阶子式全都是0，则r是A的秩

设A是一个n行m列矩阵，有如下定理需记下(闭关修炼的15条)

1. 0<=r(A)<=min(m,n)，且r(kA)=r(A),k!=0
2. 若P,Q均为可逆方阵，则 r(A)=r(PA)=R(AQ)=r(PAQ),其中P,Q可看做若干次初等变换，表述为初等变换不改变矩阵秩

推论：逆否命题：若r(BA)<r(A)或r(AB)<r(A),则B一定不满秩，反证即可

1. r(A)+ r(B)-m <= r(AB) <= min(r(A), r(B)),m代表A的列数或B的行数

r(A+B)<= r(A)+ r(B)，R(A-B)<= r(A)+ r(-B) ,R()<= r(A)+ r(B)

当AB=0时有，r(A)+ r(B)<= m

1. 对于r(AB) <= min(r(A), r(B))的进一步讨论

r(B)=r(AB) ⬄ A列满秩 逆否命题：A列不满秩⬄ r(B)>r(AB)

r(B)=r(BA) ⬄ A行满秩 逆否命题：A行不满秩⬄ r(B)>r(BA)

r(B)>r(AB) ⬄ A列满秩 r(B)>r(BA) ⬄ A行满秩

特殊的，对于n阶方阵A：

R(A)=n ⬄ R()=n , R(A)<n ⬄ 严格递减，

1. r(A)=r() =r(A) = r(A)
2. 若A是**幂等矩阵**，则 r(A)+r(E-A)=n

若A是**对合矩阵**，则r(A+E)+r(A-E)=n

1. A是n阶方阵，则r() =
2. r()= r() = r(A)+ r(B)
3. r(A)+ r(B) <= r() <= r(A)+ r(B) +r(C)
4. <在特征值那里>

对r(A)<n的解读

n阶方阵A,不满秩的解读

r(A)<n

⬄ 其计算行列式得0，即|A|=0

⬄ 其对应齐次方程组只有0解

⬄ 其对应行列向量组线性相关

⬄ λ=0至少是n-r(A)重特征值，当且仅当A可对角化，特征值有n-r(A)个0

**对r(A)=n的解读**

A,B是n阶方阵,满秩的解读

r(A)=n

⬄ 其计算行列式非0，即|A|!=0

⬄ 其对应齐次方程组有非0解

⬄ 其对应行列向量组线性无关

⬄ 其特征值没有0

⬄ 它的行或列向量组成的，n条n维{,j=1,2…n}**广义直线**只有0作为交点

⬄ 它的任意n-1个行或列向量组成的，n-1条n-1维{,j=1,2…n}**广义直线**有唯一交点

* 若B也可逆，存在可逆矩阵P，使得PA=B或AP=B
* 若A和B其中1个可逆，则AB~BA

## 公共解和同解的一些结论

判断2方程组Ax=0和Bx=0解的关系：拼接方程,找秩

* ”Ax=0的解也是Bx=0的解” ⬄方程组同解 ⬄r(A)=r(B)=r()

推论：若A∈ B则只需要r(A)=r(B)

* 只有0解，意味着Ax=0和Bx=0基础解析的向量组线性无关
* 对于n阶方阵的方程组，和同解
* 已知 左乘=> ，可知 故两方程组同解
* 两个非齐次方程组同解的充要条件是

的行向量组等价

## 向量组和线性方程组一些结论

### 已知某线性方程组的通解

已知某线性方程组通解是x=+η

其中{}和η全部是已知的n维向量，{}是参数

* 原方程有S个自由向量，R(A)=n-S,原方程组Ax=β有n列，且s<n
* 任意是Ax=0的解，η是Ax=β的解，有线性方程组解的性质得到
* 是A特征值λ=0下的特征向量，且A有s重特征值是0。

若已知原方程组Ax=β的β满足：β=cη，则c是A特征值，η是A特征向量。

* 若已知A={ }的r(A)=n-1,通解是

则对于所以非0系数对应的向量组{,}}

{,}}必线性相关，{,}}必线性无关

### 线性方程组解的关系

s个向量的组{}的每个向量都是齐次方程Ax=0的解,

s个向量的组{}的每个向量都是都是 非齐次方程Ax=β的解 则：

1. {}任意线性组合依然是Ax=0的解。//意思是:齐的解线性组合是齐
2. {}任意线性组合 (系数是{})

是齐次方程Ax=0解,当且仅当；

是非齐次方程Ax=b解，当且仅当；

其他情况既不是齐次也不是非齐次的解

1. {}任意线性组合(系数是{})，加上{}任意线性组合(系数是{})

只需要看{}，{}可以任意取值，哪怕是0

### 向量组/矩阵的形状

对于一个m\*n的A矩阵，它的m维列向量组是A={}，它的n维行向量组是A={}，有如下**总结论**：

1. 已知Ax=0，A的列向量线性无关：能推出它只有0解
2. n个m维列向量组{}线性无关，且n==m：一定可线性表出同维度向量；

n个m维列向量组{}线性无关，且n<m：则不是所有同维(m维)列向量都可被 {}线性表出；

n个m维列向量组{}线性无关,则不可能n>m

**若m<n,矩阵是扁平的长方形**：

1. 列向量组一定线性相关，有多余的列向量，行向量不一定
2. AX=β要么无解，要么无穷多解，Ax=0必定有无数个非0解

r(A)<=min(n,m)=m<n此时自由变量t=n-r(A)>0，方程也就一定存在非0解

**若m>n,矩阵是竖直的长方形**：

1. 行向量组一定线性相关，有多余的行向量，列向量不一定
2. Ax=0不一定，AX=β也不一定。

### 向量组相关无关被表出

向量组相关无关问题还是：形状和秩的问题，归根结底是**秩**

若向量组{}可被{}线性表出 => r({}) <= r({})

若向量组{}可被{}线性表出 ⬄ r({}) == r({}|{})//把被表示的放在靠左()，另一个放在它右边。

列不满秩⬄ 列向量组线性相关 ⬄ 做行变换可以表出其他列向量，也能求得 Ax=0的通解

行不满秩⬄ 行向量组线性相关 ⬄ 做列变换可以表出其他行向量，也能求得 (x1,x2…xn)A=0的通解

总之：表出做(行or列)的变换和(行or列)相关相反,求Ax=0的解一定做行变换。

* β可以被向量组{}线性表出:

⬄存在一个向量k={}!=0使得β = k\*{} =

⬄令A={}，非齐次方程组Ax=β有解，且 β= [是通解

⬄令A={}，r(A)=r(A+β) //因为显然Ax=β的系数矩阵等于增广矩阵.

* 两个线性无关的向量组A和B不能相互表出也不意味着A|B线性无关，因为仅仅说明A随便拿出一个向量和B线性无关

### 向量组等价，矩阵等价，方程组同解

对于一个m\*n的A矩阵，它的m维列向量组是A={}，它的n维列向量组是A={}，有如下**总结论**：

矩阵等价 ⬄ 同型且r(A)=r(B) //本质是：通过有限次初等变换达到一样

根据左行右列定理：

1. 行满秩矩阵等价通过列变换就可以达到，即：AC=B //C为某n阶可逆方阵
2. 列满秩矩阵等价通过行变换就可以达到，即：CA=B //C为某m阶可逆方阵
3. 满秩(矩阵/向量组)做乘法到另一个满秩(矩阵/向量组)，必须乘以可逆矩阵，
4. 行列都不满秩的2个矩阵判断等价必须通过行列变换，即：

存在可逆矩阵P和Q使得PAQ=B

”方程组同解”这个提法可以看成”行向量组等价”

方程组同解 ⬄ 同维且r(A)=r(B)=r() ⬄ 行向量组等价⬄ 可以相互线性表出 ->表出的方式是做列变换，求方程组解的方式是做行变换

有几种提法：

1. 行向量组等价或列向量组等价无法推得矩阵等价,因为矩阵等价要求同型，向量组等价只需要同维，个数不一定相同，如果相同则正确。
2. 矩阵等价，其行列向量组也不一定等价，因为行列不一定可以相互线性表出，可能错开排列。

但：行满秩的矩阵列向量组等价;列满秩的矩阵行向量组等价。(错不开了)

### 消去律和交换律

普通矩阵没有消去律：A\*B=A\*C且A不是0 ≠> B==C

1. A是n\*m的矩阵:

A列满秩时(r(A)=m)，满足左消去律；//A在左边

A行满秩时(r(A)=n)，满足右消去律。 //A在右边

以上实际就是广义逆矩阵的性质

证明：以右消去律为例： BA=CA => (B-C)A=DA=0，设A =线性无关的行向量组{}，则{}是线性无关的行向量组，对于D的任意行向量乘以{}都有{}=0 ，即：(B-C)A= = 0，所以D全部是0，得到B-C=0，即B=C

1. 作为条件1的特殊情况：A可逆，AB=AC或者BA=CA，都可消去

普通矩阵没有交换律，但一下情况满足交换律，即A\*B=A\*B

矩阵相乘可交换的充要条件是：存在多项式函数f,使得f(A)=B或f(B)=A

有如下充分条件

1. A与它自己的多项式函数f(A)相乘可交换
2. 至少一个是：0矩阵or单位阵or数量阵，则可交换
3. 互为伴随，互为逆矩阵，则可交换
4. 都是对角阵，则可交换(只有一个是对角阵不一定可交换)
5. 与整体相乘可交换

* 也是矩阵二项式定理成立的条件
* 都是对称阵不一定可交换，因为对称矩阵相乘不一定是对称矩阵

矩阵相乘A,B还是对称矩阵的充要条件是：A,B的乘法可交换

### 矩阵和向量相乘的解读

A\*B=0的解读

其中A是n\*m的矩阵，B是m\*s的矩阵

1. R(A)+R(B)<=n
2. 若A不满秩，则Ax=0的一组特解是B的列向量组
3. A的每个行向量和B的对应列的列向量正交
4. 若A是方阵，B的极大无关组设为{}可以作为A的特征值是0情况下的特征向量，此时 特征向量是极大无关组{}

同理若AB=bB， {}可以作为A的特征值是b情况下的特征向量，此时 特征向量是极大无关组{}

P(A)α=0的解读，其中A是n阶方阵，P()是多项式函数，α！=0

1. R(P(A))<n, P(A)不满秩
2. |P(A)| =0，再把P因式分解 => ,代表分解的初等多项式
3. 若α是特征向量，则P(λ)α=0 => P(λ) =0

## 特征值和特征向量的一些结论

* 有A~B,无法知道他们特征向量的关系，有可能相关也有可能无关

A和B有相同特征向量前提下，则aA+bB=

即它们线性组合的特征值才是

* 特征根的重数设为,它是特征多项式的解，和线性无关特征向量个数=n-r(E-A),二者不一定相等，关系是：,取”=”当且仅当A能相似对角化.有推论：

若A~Λ,则，=n-r(A)=,r(A)就是非0特征值个数。

若A!~Λ，。=n-r(A)<。r(A)大于非0特征值个数

只有相似于对角阵的前提下，秩和0特征值个数才可互推导

若A不相似于Λ，但有0特征值，则r(A)=n-cnt()，其中cnt()代表0特征值下，线性无关的特征向量个数

注意：特征根的重数设为,它是特征多项式的解，和线性无关特征向量个数=n-r(E-A),二者不一定相等，关系是：,取等于当且仅当A能相似对角化

* 两个矩阵的特征值完全相同，只能知道等价：

不一定：合同，相似，行列式相同。但都是实对称矩阵时一定成立。

* =tr(A) ， = |A| //和是迹，积是特征值

推论：0是A的特征值，充要条件是：矩阵非满秩

//上三角矩阵的n个特征值就是对角线元素

* 不同特征值的特征向量之间一定线性无关。同一特征值(k重)下的特征向量之间不一定线性无关，k特征向量里有s=n-r(λE-A)个线性无关s∈[1,k])

特别的，若k==s，才说明特征向量之间线性无关

实对称矩阵同一特征值的特征向量必然线性无关。

* 根据齐次方程组解得性质：如果m个n维向量组{}是矩阵A同一个λ下的特征向量，设非0的n维列向量k=()

则n维列向量β=k\*{}是矩阵A的那个λ下的特征向量

根据齐次方程组解得性质：如果m个n维向量组{}不是矩阵A同一个λ下的特征向量，设非0的n维列向量k=()且kind()至少2个非0

则n维列向量β=k\*{}不是矩阵A的任何特征向量

上述kind()表示不同种类特征值下的特征向量的系数

* n阶方阵不一定有n个线性无关的特征向量，因为可能在特征值s重根下，特征向量数不足s

注意提法：n阶方阵有n个线性无关的特征向量(等价于k重特征值λ，正好有k个线性无关的特征向量)，不意味着有n个不同得特征值。

* 多项式方程,若也就是最高次项系数是1，且为整数

有结论：方程的解一定包含的因数。

该方法有利于试验求特征值。

## 相似理论和几种矩阵。

### 相似

* 相似的充要条件：特征矩阵等价，初等因子相同

相似矩阵的充分条件(实对称矩阵充要):”秩，迹，行列，特征，四个相等“

实对称矩阵下,上述都是充要条件。

* A ~ B ⬄ 它的:**逆,伴随,转置, 多项式函数**，都相似

但是特征向量不再和A相同，与其他矩阵相加不一定相似

推论：A相似于对角阵，它的**逆,伴随,转置, 多项式函数**，都相似于对角阵

* **A可相似于对角阵**充要条件:

⬄ A有n个线性无关的特征向量

⬄ 对于每个A的k重特征值λ，正好有k个线性无关的特征向量，

* 设A.B是两个n阶矩阵则: 两个矩阵可逆 ⬄ AB~BA

### 实对称矩阵

元素都是实数的对称矩阵叫做**实对称矩阵**

* **实对称矩阵**特征值和特征向量元素都是实数，必可相似对角化

也一定可以合同对角化**。**

* **实对称矩阵**不同特征值对应特征向量相互正交//尤为重要，做题常用公式

实对称矩阵同一特征值的特征向量线性无关。

已知A是实对称矩阵，且已知是特征向量，则立即得到方程组：把它看成秩是1的方程组，求基础解系，解向量有2个，这两个解就是特征向量。

* 实对称矩阵不一定是正交矩阵，只是它的特征向量构成的矩阵P可以是正交矩阵
* 实对称正交矩阵有很好的性质，
* 一个提法：二次型经过可逆线性变换x=py可化为标准型。则只知道实对称阵A合同对角化即：P^TAP=Λ。只有说”正交变换”才可以说合同且相似于对角阵，即P^-1AP=Λ

### 正交矩阵

满足Q = = E 的矩阵叫**正交矩阵**

* (充要条件)每列(行)的模是1，且任意2列(行)的**相互正交**
* (充要条件)一个或多个正交矩的：”**转,逆,伴,幂,乘”**还是正交矩阵，但加减法则不一定
* (充分条件): 一定是对合的，行列式或特征值是1或-1，
* (充分条件)Q是正交阵，β和α都是列向量，且β=Qα ，则|β|=|α|

//证明：由于是列向量，则=() ====

=> 即可证明结论：|β|=|α|

* 扩展若 = aE,a>0可令Q=P/使得 = E，此时P也有类似正交矩阵的性质

### 正定矩阵

n元二次型正定，矩阵A正定，有以下充要条件：

⬄ 对非0向量x，均有 //定义,证明题有用

⬄A≃E即：存在可逆矩阵C，使得 //正定矩阵合同单位阵

⬄A的所有特征值，也就是正惯性指数p=n

⬄A的**顺序主子式**计算行列式均大于0 能推论出：以下充分条件

=>A的对角线每个元素aii>0

=>A满秩，且计算行列式大于0即：|A|>0

以上2条都是由：” A的**顺序主子式**计算行列式均大于0” 推得。

反过来用逆否命题，可以判断一个矩阵不能作为**正定矩阵**

**推论：**

* 如果A，B是正定矩阵：与A有关的矩阵,A+B，AB(可交换的前提下)，以及A,B构成的主对角阵，以及它们的正系数线性组合得到的结果矩阵，依然都是正定矩阵。反过来只有,A,B构成的主对角阵，这几项成立

/\*证明很简单，注意到A特征值的表格，上述变形的特征值全部是整数，在前面不乘以负系数得情况下，当然结果是正数，根据前面的定理，特征值都是正数的矩阵是正定矩阵\*/

* A正定且正交，则它必是单位矩阵E
* 考研范代数围内，正定矩阵一定是实对称矩阵，它是实对矩阵的子集
* 实对称正定矩阵一定可以sqrt，即：存在B使得A=B\*B，方法是正交对角化：求出

令B=即可

* 在正定问题证明时设:不要忘了对x=0的讨论。

其中若已知B与A合同，有P^TBP=A,f=可利用B的正定性证明二次型正定，也可以确定A的正定性

* 正定二次型化为的规范型的线性变换不是唯一的，对于

有可逆矩阵P使得 那么左右同时乘以某任意同阶正交阵Q和，可使

## 求A

### 已知B,C和BA=C

1. 若B可逆，直接A=
2. 若B不可逆，令增广矩阵 为B|C，解非其齐次线性方程组
3. 用特征值，已知BA=C=λA，则A里面的列向量是B特征向量，λ是特征值，r=R(A)就代表了λ是几重根。r=n或者用其他方法确定了特征向量时，根据相似对理论P={}使得 其中P一定可逆，从而解出A

### 已知A的特征值特征向量

1. A可相似于对角阵，P={}， =>
2. A为任意方阵，AP={} =>

### 已知A求A的幂

对于求N阶方阵，有如下方法：

1. 常用幂有规律的矩阵

* 当A是对角矩阵，它的n次幂是：对角线每个元素的n次幂组成矩阵

显然，单位矩阵和0矩阵幂是本身。

* A是幂0，幂等，对合矩阵
* 和本身具有递推关系，可以把递推方程转化成通项

1. R(A)==1,这种矩阵一定可拆成列向量乘以行向量，设A=B\*C，且B.m=C.n=1

B.n=C.m=N //已知矩阵时由列向量乘行向量得到，立即想：把它取平方

我们知道行向量乘以列向量一定是固定的数，k=CB=tr(A);

此时 = =(BC) (BC) (BC)….. (BC) = B(CB) (CB) (CB)…. (CB)C

=(BC)\* = BC = A=

1. 满足A=B+C，且B和C的n次幂求法简单，且CB=BC,此时利用二项式定理展开： 这样调用其他方法求和
2. 初等矩阵变换求其中P,Q是初等矩阵，由于同一个初等变换做多次都有规律性(swap,mul,sup),所以这类题其实很简单
3. 在A可相似对角化前提下， 由于Λ是由A特征值组成，而的每特征值恰好是,又根据对角阵性质，A^n也可相似对角化，

且，进而有：

对角矩阵 计算非常简单就是对角线各数取n次幂，这么做把矩阵幂，转换为：2次矩阵乘法和1次求逆和对角阵幂。时间复杂度由O(n\*)变为O(nN+)

1. 这种方法仅仅能求出||，不能知道具体是什么。

利用特征值求解，先求A的特征值λ，由于Aα=λα =>

求得A的所有特征值由于矩阵行列式和特征值关系得： ||=

## 题型

### 一类线性无关证明题的通解

已知α1!=0,且B为n阶矩阵，A={}为n维列向量组，满足B{}={}C

让你证明：{}线性无关或者A可逆？

其中：B未知是抽象的最一般的矩阵；C是已知的具体矩阵,但有可能带参数，可逆性未知。

从命题人角度，可以证明：这类题当且仅当C是**上三角或下三角的托普利兹矩阵**时，题目才可解。也就是C必定是这种矩阵

**套路是反证法**：设列向量k=(k1,k2,…kn)!=0, 使Ak=0

BA=AC

有

思路是反复乘以A，乘多少个？是A^(n-1)个，列出：

=> ({})=0

=> ({})=0

……

=> ({})=0

此时可倒着往前推，得到

与向量k!=0矛盾，故假设错误，{}线性无关，A也可逆，证毕

### 一类相似的证明

已知P={}可逆，但AP不可逆，即：AP={}线性相关

且的系数{}已知，求与A相似的矩阵B

思路：不要想对角化，而是分解B={}

只需证：{}={}{},

得到这一步后:显而易见{}取单位矩阵的第i+1列的向量即可

通过得到的线性表出

第n个向量满足,则 ，

则B求出是{} 有

### A=的相似对角化

已知α,β为3维单位列向量，(α\*β)=c为常数，a,b是常数

若a=0且b=0,A=0显然A可相似对角化

若a=0或b=0,A为秩1阵，由秩1阵性质，A可相似对角化

若a!=0且b!=0，思路如下：

等式同时乘以α或β得：Aα= 和 Aβ=

然后待定系数法：xAα+yAβ= x,y非0

* A(xα+yβ)=(acx+ay)α+(xb+bcy)β=λ(xα+yβ) x,y非0
* 有方程acx+ay=λx 和 xb+bcy =λy x,y非0
* 其中λ和x,y都是未知数, 但它是非线性方程组

联立得到 此方程不一定有解

但题目可解的条件下，该方程有解，利用此方法可求得两个特征向量和两个特征值。此外，r(A)<=2,一定是特征值，特征向量存在，总归是有3个线性无关特征向量，一定可相似对角化。

如果a=b条件下，A是实对称矩阵，可利用叉积求出的特征向量

* 此模型作为题源，常出现α,β正交，或a=b=1的情况

### 带常数项的二次型的正交变换

F()=f() ++c=0有 线性变换x=Qy+β

可化为，

其中f()是普通二次型A是其矩阵，。

解：

则F()= ，把x=Qy+β带入,Q为f化为标准型的正交阵

经过带入后，化为

由题义它可化为为

经过一系列化简得到未知向量β就是方程组Ax=的某个解

令 化为

### 求A与B公共特征向量

1. 已知：AB=BA，A,B都是n阶非0方阵，

证明：求A,B的所有公共特征向量,如果A,B可以相似对角化，则让它们相似对角化

思路：

对于A的S重特征值λ,特征向量组是{,},其中s<=S<=n

对于任意，AB=BA= Bλ => A(B)=λ(B) 显然B非0向量

则可知，B一定还是A的特征值λ下的特征向量

而{,}是特征向量组，可以表示任意特征向量，则对于任意B来说，存在系数{}使B *//系数是求出来的*

设μ是B特征值，其对应所有特征向量是β，则Bβ=μβ

要想求公共特性向量，就要试图把β用{,}线性表示，未知系数为{},则β=

左乘B: Bβ=

由于Bβ=μβ 则Bβ=

由线性表示唯一性

有非齐次线性方程组{}

系数矩阵为C=可以系数矩阵，x=

则化为Cx=μx, 即μ是C特征值，x是对应特征向量

则存在无穷多个x使方程组Cx=μx *//这里解出的x带有任意常数作为系数*

由于C和μ已知，β=，这个β就是λ下的所有公共特征向量

------------对于A的任意特征向量做上面操作就可以求出A,B所有公共特征向量

* 如果A可相似对角化，对于每个λ下的公共特征向量β取特值组成n个线性无关的特征向量，这些向量构成的可逆矩阵P就可把A,B同时对角化
* 本类型题关键步骤是求出矩阵C和μ

1. 已知：A与B是n阶方阵，存在一次多项式函数F()，使F(A,B)= AB+aA+bB+cE =0，且A可相似对角化

证明： B也可以相似对角化，且它们有n个线性无关的公共特征向量

即: 存在可逆矩阵P, 使得

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

步骤一：证明矩阵没有某特征值

已知矩阵方程F(A,B)=0，证明A或B没有某特征值λ

思路是证明(A-λE)可逆，利用F(A,B)=0构造f(A-λE)g(B)=E

如果F(A,B)=0是A,B的一次多项式函数，可以待定系数法设(A-λE)(B+bE)=cE

* 例题：

已知AB=2A-B,证明A特征值没有-1

(A+E) (B+bE)=cE => AB+bA+B+(b-c)E=AB-2A+B=0 => c=b=-2

该题可证明(A+E) (B-2E)=-2E 则(A+E)和(B-2E)都可逆

步骤二：证明存在可逆矩阵P, 使得

已知A可相似对角化，则存在可逆矩阵P, 使得

F(A,B)=AB+aA+bB+cE=0 带入得B+a+bB+cE=0

一顿化简可得：

有(1)待定系数法可知对于任意方程AB+aA+bB+cE =0必定有(A+E)可逆

进而得到可逆

其中和都是对角阵

则为对角阵，

# 概率记忆

## 基本公式

### 事件

减法公式：A-B=A-AB=A

互斥率：A∪B =A∪B= B∪A=AB∪B∪A

分配率：A∩(B∪C)= (A∩B)∪(A∩C) ，A∪(B∩C)= (A∪B)∩(A∪C)

德摩根率： = ∪ ， =

减法公式：P(A-B)=**P(A)-P(AB)=P(A)**

若事件B包含在A内，则P(A-B)=P(A)-P(B)= P(A)

多个事件减法：P(A-)=

条件概率：P(B|A)=

P{X+Y<b | Y=a}= P{X+a<b}

乘法公式：**P(AB)=P(A)\*P(B|A) =P(B)\*P(A|B) =P(A)-P(A)**

P(AB)>0，P(ABC)=P(A)\*P(B|A)\* P(C|AB)

普通全概率公式：P(B)=

连续全概率公式: X,Y都是连续随机变量

P{A}= = 其中A是关于x,y的式子

逆概率公式(贝叶斯公式)：

P(|B) = = /

### 不等式

* 0<=P(AB)<=P(A)<=P(A+B)<=1

P(A+B)< =1得 => P(A)+P(B) -P(AB)<=1 => P(AB)>= P(A)+P(B)-1

max(0,P(A)+P(B)-1)<=P(AB)<=P(A),P(B)<=P(A+B)<=min(1,P(A)+P(B))

//乘小加大，乘大加小要减一

* 若P{A|B}=1，则P(A)>=P(B)
* 由基本不等式，p(A)(1-p(A))<= =
* **随机变量的比较大小：X<=Y说明**

P{Y<=y} ∈ P{X<=x } 即： 且P{ Y<=y, X<=x}= P{Y<=y}

//大的∈小的，大的概率低,联合概率分布函数是大的的分布函数。

### 方差和期望

* 0<=DX=E = <= E,当且仅当C=EX时取等号

DX=

标准差，均方差：σX=

**标准化随机变量**= =

* c代表任意常数,E(c)=c，E(cX+d)=cEX+d, D(c)=0，D(cX+d) = D(X)\* c^2
* E(X+Y)= E(X)+E(Y)
* 当X和Y相互独立，E(X\*Y)= E(X)\*E(Y)

但X和X本身必然不独立，应该方差去换，E(X\*X)= D(X) +

* 任意X= DX=

当{}两两相互独立，D() =

* 当X和Y相互独立，D(XY)=D(X)D(Y) + D(X)(Y) + D(Y)(X) >=DXDY

### 协方差和相关系数

* COV(X,Y)=E( (X-E(X) )( Y-E(Y) ) ) = E(XY)-E(X)E(Y)
* COV(X,Y)= COV(Y,X)

COV(X,X)= E(X^2)-E(X)E(X)=DX

COV(X,c)= E(cX)-E(c)E(X) = 0

* COV(aX+c,bY+d)=ab COV(X,Y) //协方差内部，加减常数可忽略,系数可外提
* COV(aX1+bX2,cY1+dY2)

= acCOV(X1,Y1) + adCOV(X1,Y2) + bcCOV(X2,Y1) + bdCOV(X2,Y2)

COV(X,) = //单个可拆性

* 方差反求cov: COV(X,Y)=(D(X+Y)-DX-DY)
* ρ(X,Y)= ∈[-1,1] ，ρ(X,X)=1

### 独立性：

* 二维离散(X,Y)独立的充要条件是：联合分布律是秩1矩阵，即：r(A)=1
* 已知n个事件相互独立，将其中任意个换成自己的对立事件，他们依然相互独立。独立事件组(含有任意个事件且互不相同)做运算，得到的结果事件，仍然与原事件组任意事件独立。两个事件若某个是概率是0或1，一定相互独立
* 两个事件独立，且P(A)>0 ⬄ P(B|A)=P(B) (因为P(B|A)= P(BA)/ P(A),且独立性质又有，P(BA)/ P(A)=P(B))

两个事件独立，若P(A)>0同时还P(A)<1 ⬄ P(B|A)= P(B|)=P(B) ⬄ P(B|A)+ P(|)=1

* 互斥和独立互相推导：”A,B做与运算,非0可逆推,为0可正推”
* 独立性判断：

1直接：P(AB)=P(A)P(B)?是:否 ⬄ 对任意a,b是否有(a)(b)= (a,b)

2反证：取特殊定点或特殊动点用定义判断不独立

基本结论，大题不能直接用

1：二维随机变量(X,Y)的非0区域为“非矩形非矩形并”时，X,Y一定不独立

2：二维随机变量(X,Y)的非0区域为“矩形或矩形并”时，X,Y不一定独立，但若是二维均匀分布，X,Y一定独立。

* abs(ρ(X,Y))=1代表几乎处处有线性关系(不能说完全有线性关系)

0<abs(ρ(X,Y))<1代表有部分线性关系

ρ(X,Y)=0代表几乎没有线性关系

若已知EX,EY,DX,DY,可求线性关系是什么，可求线性关系的系数

则两边取期望和方差：EY=aEX+b ,DY= ,a的正负取决于ρ的正负

ρ(X,Y))=±1 ⬄ Y=aX+b a=

* X,Y独立 => : E(XY)-EXEY=0⬄ COV(X,Y)=0⬄ ρ(X,Y)=0 ⬄D(X±Y)=DX+DY⬄不相关

矩形区域的二维均匀和二维正态，独立等价于不相关

### 样本和总体关系

设总体(不论是什么总体)X的期望是EX=μ，方差是DX=

{}是总体的一个简单随机样,统计量的期望和方差与总体本身的方差存在关系：

样本**均值的期望**是**总体均值**：E=EX=μ

样本**方差的期望**是**总体方差**：E=DX= //样本方差

样本均值的方差是总体方差除n：D = DX = 标准差

注：凡是说样本的\*\*的期望，那就等于总体的

* 关于简单随机抽样的分布问题：某离散分布分布律为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 |
| P(x) |  |  |  |

设{}是简单随机样本，分别是n个样本取0,1,2的数量

求的分布，这里显而易见

但由于,就会纠结的分布律是否是和

这里不要把随机变量的关系和普通常数混淆，只能说明三个随机变量不独立相互有影响，但求各自分布时候不必考虑。

### 正态总体下的统计量分布

～ N(0,1) ～ t(n-1) ～ N(0,1)

区间估计”估大提小” (提μ或)，假设检验”验小提大”(提或)

估大提小,验小提大

E=EX=μ E=DX= D=DX =

//这是三个通用的统计量，下面是正态总体的

* 找分位数：是一个数，代表P{X>}的概率，也就是概率密度图像右侧面积
* N(0,)下，

### 大数定律切比学夫

**切比雪夫**

P{|X-EX|>=ϵ } <= DX/ = 其中

描述为：**随机变量偏离均值的概率不大**

**马尔可夫不等式：**P{|X-C|>=ϵ } <= E/ ,其中C, r>0是实数。

当C=EX,r=2时，就是**切比雪夫不等式**

**依概率收敛**

随机变量X与随机变量序列{}，如果对于任意ϵ>0都有：

= 0 或 = 1

**辛钦大数定律条件**

* {}相互独立且同分布
* E=μ都存在且相同

**切比雪夫大数定律**

* {}相互独立

和D都存在，且有上界限 //由切比雪夫不等式推导而来

**伯努利大数定律**

* X~B(n,p)

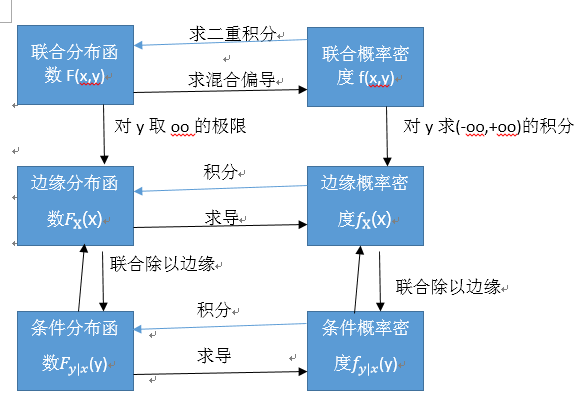
**Lindburg-Levy中心极限定律**

* {}相互独立且同分布
* 和D都存在

不管原本{}服从什么分布，都有~N(nμ,)

标准化有=N(0,1)= Φ(x)

## 随机变量和性质



### 泊松分布// X~P(λ) ，EX= DX =λ

P(X=k) = / fac(k) ，λ>0 ，k=0,1,2….，oo

* X～B(n,p) 若n很大，p很小，则X近似服从P(np)

### 几何分布// X~G(p) ，EX=1/p，DX=

P(X=k) = ，p∈(0,1)，k=1,2….，oo

### 指数分布// X~E(λ) , λ>0，EX= ，DX=

F(x)= f(x)=

1. 任意t,s>0，P(X>=t+s | X>=s) = P(X>=t) = //此为无记忆性
2. X ~ E(λ) kX ~ E(λ)
3. (2)=E() => E(λ1)+ E(λ2)=

### 正态分布

一维：

正态分布关于x=μ对称，μ代表正态分布的左右平移量，σ是标准差，代表正态分布函数的胖瘦，σ越小，图形越瘦，σ越大图形越扁平。

μ=0的正态分布F (-x)=1-F (x)，因为它的密度函数f(x)是偶函数

二维正太分布//N(μ1, μ2,,,ρ)

https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D633/sign=98efb91e80d6277fed12313b1b391f63/472309f7905298226de01466d0ca7bcb0b46d447.jpg

**性质**

* N(μ1, μ2,,,ρ)若4个系数都已知，无论X,Y是否独立

有：X~N(μ1,) Y~N(μ2,)

若ρ已知，可通过ρ计算U=aX+bY的概率分布。

* 已知X~ N(μ1,)，Y~ N(μ2,)，有以下结论

**若X和Y相互独立**

则(X,Y) ~ N(μ1, μ2,,,0) //化为二维随机变量

则aX+bY ~ N(aμ1+bμ2,)， //化为一维随机变量

**若X和Y不独立，且相关 ，即X,Y存在线性关系**

则 (X,Y) ~ N(μ1, μ2,,, ρ)， //服从二维正太，ρ未知？？

则aX+bY ~ N(aμ1+bμ2,) //是否可以这么写？

**若X和Y不独立，且不相关，即X,Y存在非线性关系**

则(X,Y) ~？，//二维分布无法确定是否服从正太。

则aX+bY ~ N? //服从正态，但参数未知？还是说什么分布都有可能？？？

以上结论的参数a,b不全为0

* 已知(X,Y) ~ N(μ1, μ2,,, ρ)，有以下结论

不论X和Y是否独立，X,Y服从正太，U=aX+bY,V=cX+dY，U,V都服从正太，若,则(U,V)也服从二维正太，但相关系数ρ要另算

* 仅仅在二维正态分布里，X和Y独立⬄X和Y不相关 ⬄ =0
* N(0,)下，

* 正态分布反推：已知X分布函数φ() ,则X ~N(a,b), bX+a~N(0,1)

已知X概率密度,此时X就不是正态分布

只有已知X概率密度, 则X ~N(a,b), bX+a~N(0,1)

### 卡方分布，{}都相互独立

概率密度：f(x)=

{}~N(0,1) 则X= ~ (n)

* X ~ (n) => EX=n,DX=2n
* 系数可加性若{}相互独立，且for(i=1;i<=n;i++) ~ ()

则有 ~ ()，注意这里的{}不是之前卡方分布概念的{}

* n很大时，卡方分布近似正态分布。
* n=2时，(2)=E() 也就是n=2时服从指数分布

### T分布，X和Y相互独立

随机变量X ~ N(0,1)， Y ~ (n) ，则T== ～ t(n)

* EX=0,DX=n/(n-2)
* T(1)分布可以写成绝对值的形式
* T分布是偶函数(由此也可知EX=0)， = N(0,1)

### F分布，X和Y相互独立

随机变量X ~ (n1)，且Y ~ (n2) ，则F== ～ F(n1,n2)

性质：

* F ~ F(n1,n2),则1/F ~ F(n2,n1),可见F分布的2个参数不可随意互换
* F(n,n)有”倒对称”,即P{x>a}+ P{x>1/a}= P{x<a}+ P{x<1/a}=1

**F(n1,n2)的:**

n1/n2越大(n1>n2)，在(0,1)内越靠近y轴，(0,+oo)处收敛的慢

n1/n2越小(n1<n2)，在(0,1)内越远离y轴，(0,+oo)处收敛的快

* 当且仅当n2=n1时，1/F = F，且F关于x=1左右面积相同，即： 此时可推出P{F<1}=P{F>1}=1/2
* = // (取倒数，自由度互换，分位数变1-)
* 若X ~ t(n),则X\*X ~ F(1,n)

### 其他特殊分布

#### 最值分布

(z) = //分布函数相乘，而不是概率密度

(z) = 1-

* Max(X,Y)= Min(X,Y)=
* 最值函数的随机变量是连续的，当且仅当它的每个要素都连续，否则不是连续的，就不存在概率密度，如Y=max(X,1) //这里1是常数视作离散型

但依然可以用求期望

* 最值分布函数的期望方差应该单算，对于独立同分布的min{},Emin{}!=EX
* P{}=P{} , P{}=P{}

#### 取整分布

U=，V= ，则分布律为P{U=k}=(k)-(k-1) P{U=k}=(k+1)-(k)

即：”向下取证是后的一段, 向上取证是前的一段”

#### 连续混离散ab分布

X为某连续分布，分布函数F(x) Y分布律：{P(Y=a)=p; P(Y=b)=q,a<b}

求Z=XY的分布函数

1. 若0<a<b： Z为连续随机变量
2. 若0=a<b： Z为混合随机变量
3. 若a<0<b： Z为连续随机变量
4. 若a<b=0： Z为混合随机变量
5. 若a<b<0： Z为连续随机变量

可见Z=XY是连续型的充要条件是Y的分布函数在y=0处连续

### 有可加性的分布

若X,Y独立，则二型分布，泊松分布，正态分布，卡方分布可加。指数分布系数相同可加

* 卡方分布为例，加法是内部自由度相加(相互独立)，外部系数相加不成立，不独立的卡方分布相加也不成立。

以下X1和X2代表两个相互独立的卡方分布。

错误//系数不能加

正确,因为不同卡方分布独立

错误//相同的卡方分布间不独立

## 随机变量函数

### 求P{l<P(X,Y)<r |Q(X,Y)=a}

其中X,Y不一定独立，但边缘概率密度都已知，l,r,a是已知常数，Q(X,Y)=a代表关于X,Y的等式，由于右侧是等式，测度和左侧不同，无法用：

P{ l<P(X,Y)<r |Q(X,Y)=a}=P{ l<P(X,Y)<r, Q(X,Y)=a }/ P{ Q(X,Y)=a }来做

**方法一:**

令U= P(X,Y),V= Q(X,Y)化为P{l<U<r |V=a}，试图证明U与V独立，从而P{l<U<r |V=a}=

= P{l<U(x)<r }把”=”扔了

特别注意，这里有2条路计算，不要混淆。

1. 若P{Q(X,Y)=a}已知或可测，可直接带入

P{l<U<r |V=a}= P{l<U<r ,V=a}\* P{ V=a}。

进而联立：l<P(X,Y)<r 和Q(X,Y)=a 化成只含有1个随机变量的等式

1. 若P{Q(X,Y)=a}未知或不可测

P{l<U<r |V=a}= P{l<U<r}直接扔掉，因为已经证明U,V独立了。

单独搞P{l<U<r}= P{l< P(X,Y)<r}即可，用分布函数知识找U= P(X,Y)的概率密度，或者若知道(X,Y)联合概率密度直接做二重积分即可

**方法二:**

令U= P(X,Y),V= Q(X,Y) 化为P{l<U<r |V=a}，

要求已知或可求U,V联合概率密度和V边缘概率密度，因此用联合除以边缘便得到条件概率密度(u|v)，由条件密度的实际意义，(u|v)=P{U<=u|V=v}

因此，带入a,l,r相减即可得到答案。

### P{}推导的有关问题

已知P{X>c}=p,不能贸然的下意识的得出P{ψ(X)>ψ(c)}=p,要具体问题具体分析，根据X的分布，和ψ()的增减性按照随机变量函数的步骤来判断。

一般的，如果能确定ψ()是单调函数，且X的概率密度f(x)连续函数(如正太分布，t分布，双指数分布)，就可以认为P{ψ(X)>ψ(c)}=p

* X服从t分布或正态分布,P{X>c}= 则：P{X^2>c^2}!=，因为X^2不是单调函数。实际上由对称性P{X<-c}=故P{X^2>c^2}=

### 卷积公式

n维卷积公式：

条件：**U=g({})**代表n维随机变量函数且它n维内单调可导，{}联合概率密度是**f({})**

(u)=

其中，是**f({})**提出后,作为因变量的反函数

也可以用其他任意取代的位置，道理一样，都是进行n-1重积分

特殊的，如果随机变量之间相互独立独立。则**f({})=**

(u)=

**二维**：

若Z是：X和Y的单调函数

由z=g(x,y)，便形成y=h(x,z)，则f(z)=

**一维：**

若Y=g(X)在区间a<x<b是单调可导函数,反函数是x=h(y)

则(y)=(h(y))\*abs(h^(y)) ，c<y<d

求谁的概率密度，就对谁求导

### [二维随机变量函数(重点题型)](#_二维随机变量函数(重点题型))

## 估计量

* 有多个未知参数的概率密度或分布律，要先尝试利用概率之和是1确定它们关系

### 矩估计步骤

分为求未知参数矩估计和统计量距估计

**未知参数矩估计**：

1. 看未知参数，多个未知参数要看能否找到它们关系化简成1个。
2. 选矩，选取原则是：用原点矩，先考虑1阶，以下情况要用高阶：
3. 待估计量多于1个，1个方程不够表示待估计量。
4. 1阶矩的方程不含待估参数，则换二阶矩列方程。
5. 1阶矩的方程无效，无意义，则换二阶矩列方程。
6. 1阶矩的方程有效但超越，无法表示待估计量，则换二阶矩列方程，同时保留1阶矩的方程，很可能待估计量无法用任何一个方程表示出来，则可以联立解出参数(多个方程确定一个参数)
7. 令： = 即：令(总体矩) = (样本矩)，解出被估计参数，答案的待估计量一定用表示(α就用)

**统计量距估计**：

如果直接求的估计，还是选一阶原点矩。但如果直接求样总体方差DX矩估计，就要选用二阶中心矩，令DX=用样本方差代替右边， =是矩估计

* 矩估计是直接令真实期望EX等于测定数据的平均值，所以它显然具有无偏性，矩估计一定是无偏估计
* 统计量不能含有未知参数：包括矩估计最大似然估计，以及其他表达式所表达的式子。

### 最大似然估计

定义：参数=？时，观测值出现的概率最大。

L(θ)的意义是：它是样本发生率和未知参数θ的函数，我们要找使得样本发生率最大的θ的表达式。

**具体步骤(一个参数)：**

写出似然函数L(θ),

离散型：L(θ) =

连续型：L(θ) =

以连续型为例，取对数得到ln L(θ) =ln=

这样方便求导，对ln L(θ)求导，令 = 0 解出θ即可(求导时{当做常数)

* 若 Ξ 0,则任意符合范围的，但要在L(θ)非0范围

由得到范围

* 若 = 0，则θ有解，解出具体值即可
* 若 0，则θ有无穷多解，需要用定义写出θ具体范围
* 若 >=0 θ无解，说明函数L(θ)是单调增的

利用已知反解出θ的范围，设θ关于Xi的范围是

因为L(θ)是单调增，取可使L(θ)最大

一般情况下θ关于Xi的范围是令θ = min({)即可

* 若 <=0 θ无解，说明函数L(θ)是单调减的

利用已知反解出θ的范围，设θ关于Xi的范围是

因为L(θ)是单调减，取可使L(θ)最大

一般情况下θ关于Xi的范围是令θ = max({)即可

结果如果求最大似然估计量，应该写一个θ关于{的式子

结果如果求最大似然估计值，应该把题目给的一组具体”数”带入{，解出θ

**具体步骤(二个参数)：**

写出似然函数L(θ1, θ2)

离散型：L(θ1, θ2) =

连续型：L(θ1, θ2) =

以连续型为例，取对数得到ln L(θ1, θ2) =ln=

这样方便求导，对ln L(θ1, θ2)求偏导，采用高数的知识，二维函数是0，一阶偏导都是0，最后还要检验

令 = 0 和 = 0 解出θ1和θ2的几组解，

然后检验是最大值，最小值还是非极值点。我们保留其中使ln L(θ1, θ2)取最大值的一组(θ1,θ2)

**最大似然估计量的不变性原则**

是未知参数θ的最大似然估计，函数μ=μ(θ)单调，则μ()是μ(θ)的最大似然估计。

由此可命制问题：求函数G(θ)的最大似然估计。=> 推论：一切带有未知参数θ的统计量甚至概率，只要单调都可以求最大似然估计，如EX ，P(X=0)

### 评价标准

**无偏**：证θ的无偏估计，问谁的就令谁的”帽”等于它自己，比如：

**有效**：在无偏基础上，求方差方差小的有效

**一致：**不一定无偏，直接用切比雪夫不等式让右边=0