# 常用极限：

**极限定义的ε-δ语言:**

**任意ε>0,存在δ>0,使得当0<|x-x0|<δ时，有|f(x)-A|<ε**

**极限定义的ε-δ语言:**

**任意ε>0,存在δ>0,使得当x>δ时，有|f(x)-A|<ε**

# 等价无穷小/大

在如果f(g(x))存在且是0，f内部g(x)也可以代换

x ~ sinx ~ tanx ~ arcsinx ~ arctanx ~ln(x+1) ~- ~-1

-1 ~ xlna

cosx ~1-

~ 1+abx //，前提是x->0,如-1 ~ 而不是

也可以写成 前提是f(x)->0

n->+oo时，fac(n) ~ //斯特林公式，比较判别法用

n->+oo时， ~ ln(n) //证明题

------------------------------------------------------------

# 泰勒与幂级数展开式

## 多元微分

**多元泰勒**

设Δx=x-x0 , Δy=y-y0

f(x,y)=f(x0,y0) + () ()

+ +R(x)

f(x,y) =f(x0,y0)+A(x-x0)+B(y-y0)+o()

如f(x,y)=-2x-y+o()的f(1,2)=4而非0

注意A,B的符号

**散度旋度关系**

**最大环量面密度**：旋度的模，即：|rot(A(x,y,z))|

* rot(cA)=c rot (A)
* rot (A±B)= rot (A) ±rot (B)
* rot (uA)= u rot (A)+grad(u)×A //其中u是某个函数
* rot(grad(u))=0, div(rot(A))=0,

## 傅立叶级数

令

= //一个周期上的积分除以半周期

= n=0,1,2…

= n=1,2,3….

=S(x) ~ f(x)

## **其他常用级数**

= ，x∈(-1,1)，特别的x=0时得1

= ，x∈(-1,1) ，特别的x=0时得1

//推论 = ，x∈(-1,1)

= ，x∈R，

------------------------------------------------------------------------

ln(1+x) = ，x∈(-1,1]

-ln(1-x) = ，x∈[-1,1)

----------------------------------------------------------------

cosx = ,x∈R

sinx = ,x∈R

coshx = ,x∈R

sinhx = ,x∈R

x=0时有下面6个：

sinx=x - + o(x^3) arcsinx=x + + o(x^3)

cosx=1- + + o(x^4) arccosx化成srcsinx即可不用背

tanx=x + + o(x^3) arctanx=x - + o(x^3)

----------------------------------------------------------------------

= = 1 + ax +a(a-1)x^2/fac(2) + ….

a>0时x∈[-1,1] ；a<=-1时x∈(-1,1) ；-1<a<0时，x∈(-1,1]

--------------------------------------------------------------------------------------

F(0)(x)= F(1)(x)=

F(2)(x)=

F(3)(x)=

# 高阶导数规律

,

, 象征±

, 二者n差1

的除了别的n都减一

# 导数和积分

## 导数和积分的基础知识：

1. 偶函数导数一定是奇函数，奇函数原函数一定都是偶函数

奇函数导数一定是偶函数，偶函数原函数有一个是奇函数

偶函数套奇函数或偶函数都是偶函数。奇函数套奇函数是奇函数，奇函数套偶函数是偶函数。(偶函数是0，奇函数是1，做”与”运算)

特别的：F(x)=

f(x)是偶函数，F(x)必为奇函数，f(x)是奇函数，F(x)必为偶函数

1. 函数以T为周期，且，

则F(x)=也以T为周期

1. 抽象函数y=y(x),则积分中
2. 先导后积分公式，令F(x)= 则F^(x)=f(x), F(x0)=0

f(x)=f(x0)+ 和 F(x)=F(x0)+

## 求导

方向导数定义：没考过

d = dx //对数函数绝对值忽略

d a^x= lna a^x dx

d tanx = (secx)^2= dx

d cotx =- (cscx)^2= dx//凡是和csc以及cot有关的导数要加负

d secx = + secx tanx dx

d x = + 2x tanx dx

d csctx = - cscx cotx dx

d x = - 2x cotx dx

d =

d

dsinhx = coshx dcoshx=sinhx dtanhx=

darsinhx= darcoshx= dartanhx=

y= y^= y^^=

## 简单函数积分公式

∫P(n)(kx)=+C //P(n)(kx)代表多项式函数复合常系数的函数。

∫a^x= a^x/lna +C

∫=x - x/lna +C

∫dx=+C

∫dx=+C

∫dx= +C //对求类型的积分有用

∫dx= +C//对求类型的积分有用

∫dx=+C//对求类型的积分有用

∫tanx= -lnabs(cosx) +C//这是唯一tan的导数或者积分加负

∫cotx= +lnabs(sinx) +C

∫secx= lnabs(secx+tanx) +C

∫cscx= lnabs(cscx- cotx) +C

∫x= tanx +C

∫x= - cotx +C

∫arcsinx= x arcsinx+sqrt(1-) +C

∫arccosx= x arccosx-sqrt(1-) +C

∫arctanx= x arctanx -ln (1+) +C

∫x = xx+2sqrt(1-) arcsinx -2x +C

∫ = 2ln ，d “”代表的反符号

## 根号倒数积分公式(三组)：

无根号有倒数：这组前面有

∫dx= +C

∫dx= lnabs() +C = +C ,x<a

∫ = arctan() +C 满足(|a|>|b|才成立)

推导用万能代换公式 tan(x/2)

有根号有倒数：//这组前面没有

∫dx= arcsin(x/a) +C

∫dx = lnabs( + x) +C =arsinh(x/a)+ C

∫dx = lnabs( + x) +C =arcosh(x/a)+ C

有根号无倒数：

∫dx = + ∫dx +C

∫dx = - ∫dx +C

∫dx = + ∫dx +C

## 其他三角函数公式

求∫xdx或者∫xdx

n是偶数时: ∫xdx=∫xd(tanx)借助公式1+x=x

=∫xd(tanx)令tanx=t即可出答案

n是奇数时：∫xdx=∫xd(tanx)=

xtanx-∫tanx d(x) 把x拿出来

=xtanx-∫secx \*(n-2)dx

=xtanx-∫ \*(n-2)dx借助公式1+x=x

=xtanx - (n-2)∫dx + (n-2)∫dx

又出现了∫dx，和题目自相似，挪到左边得

∫dx=(xtanx + (n-2)∫dx)/(n-1)

还要继续算∫dx，这是一个“递归”的过程，

递归出口是：∫secxdx,这是基本公式。

## 万能代换公式：

sinx= cosx= t=tan

则

## 微分方程

1. 伯努力方程+p(x)y=q(x)\*，令z=

得到： + p(x)z= q(x)

1. f(ax+by+c) = 令ax+by+c=u即可

得到： = dx

1. = φ() => = φ(u) => = //φ()的x在分母

= φ() => = φ(u) => = //φ()的y在分母

## 几种反直觉的函数

**一元函数**

1. 魏尔斯特拉斯函数 f(x)=,0<a<1,b为正奇数

性质：处处连续处处不可导；处处是极值点；处处不单调

1. 狄利克雷函数：{f(x)=0,x为有理数，f(x)=1,x为无理数}

性质：x!=0，处处间断；x=0时连续，但在邻域内间断。

1. f(x)= f^(x)=

* x=0处函数连续，但在x=0邻域内不连续
* x=0处函数可导，但在x=0邻域内不可导

1. f(x)= f^(x)=

* f(x)处处连续处处可导，但导函数存在第二类间断点
* x=0处导数不由非0点导数取极限得来，必须定义求。
* x=0处函数导数为正，单调递增，但在x=0邻域内不递增，导数也不恒正或恒负

由此推论，一点导数为正不能得到该点邻域增减，但若已知二阶导存在，则可知道邻域增减。

**多元函数**

1. f(x,y)=

性质：在(0,0)处不连续，不可微，但(0,0)处偏导存在(偏导不连续)

# 三角函数关系：

arcsinx + arccosx = x∈[0,] 若否则要分类讨论

arctanx + arctan =

arcsecx = arccos

arccscx = arcsin

= + 1

= + 1

正反三角函数区间

对x=sint∈[-1,1], t∈ [,]时， t=

对x=cost∈[-1,1],t∈ [,]时， t=

对x=tant∈R, , t∈ [,]时， t=

和差化积公式：//左侧必定是一样的

表示与相反的符号，word打不出来上减下加的符号

积化和差：//右侧必定是一样的

//

相同是cos,不同是sin

正反三角公式：//也可以画三角形临时推导

Cos(arsinu)=sin(arcosu)=

Cos(artanu)= sin(artanu)=

tan(arcosu)= tan(arsinu)=

# 常用定积分公式

## 定积分的应用,不要忘了绝对值

扇形面积：公式A=rR=r^2，扇形有个常识是θ=R/r,r代表弧长。

**曲边扇形面积**

S= //极坐标系

**计算绕x轴旋转的旋转体体积表面积**

体积V=dx

表面积S= //把弧长当中微元时，要做曲线积分去ds

**计算绕y轴旋转的旋转体体积表面积**

体积V=

表面积S=

**躺着的扭曲圆柱的体积(与x轴平行)**

V=

**函数f(x)在区间[a,b]平均值**

## 区间再现公式

* //对于任何函数的区间在现公式

区间在现公式推论：

* 令 则

=

* f(x)是可积函数，且是周期函数(T为最小正周期)

=, n∈N\*

* 对于任意函数，若满足，则有



## 点火公式，华丽士公式和推论

=

设I(n)==

I(0)= I(1)=1 l(n)=

设I(n)=

,I(0)= I(1)= l(n)=

//点火公式推来

//点火公式推来

## 常见做题定积分的结论

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 |
|  |  |  | 1/2 | 1 |
|  | 1/2 |  |  | 1 |

sin(nπ)=0 cos(nπ)=

sin(a+nπ)= cos(a+nπ)=

sin()//不好表示 cos() //不好表示

，a取任意常数

当且仅当a为奇数

## 伽玛函数

г(x+1)= ,x>0

г(x)= ,x>0 г()= =，

г(1) =г(2)= 1 递推：г(x+1) = xг(x) г(n+1)=fac(n)

* 推论：Ga(A,n)=

## 超越积分

显然,si(x)是偶函数

li(x)= 它与π(x)和是等价无穷大

狄利克雷积分：

# 组合数学公式

## 斯特林数表

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n|i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 |  |  |  |  |  |
| 2 | -1 | 1 |  |  |  |  |
| 3 | 2 | -3 | 1 |  |  |  |
| 4 | -6 | 11 | -6 | 1 |  |  |
| 5 | 24 | -50 | 35 | -10 | 1 |  |

## 组合数学公式

* ，其中
* =
* ：=+
* = //由先积后导公式得来

# 初等数学基础知识

## 双曲函数

y=sinh(x)= 反函数是：y=arsinh(x)=ln()

y=cosh(x)= 反函数是：y=arcosh(x)=ln()

y =tanh(x)= 反函数是：y=artanh(x)=ln()

## 常见函数的不等式

X>0时:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x>ln(x+1) | x>sinx | x>arctanx |  |  |
| x<e^x-1 | x<arcsinx,x<1 | x<tanx,x< |  |  |

x∈[0,a]但 用于夹逼准则

它是重要极限的函数

------------------------------------------------------------------------------------------

0<=|a-b|<=|a|+|b|

|a\*b|<=|a|\*|b| //向量的不等式

基本不等式： ，

基本不等式推广： ,

## n次方差公式

若n是正偶数：

若n是正奇数：

表述为”奇加偶减”

## 常见数列通向公式

## 常见变形

* 出现F(x)-xf(x)或f(x)-xf^(x)做朗格拉日 => f(x)-xf^(x)=x f(ξ)-xf^(x)

# 概率

* N(0,)下，

//秒杀绝对值的正太期望

# 一些固定提法

1. “从z轴正向看是逆时针”：方向是正向
2. “n阶连续导”：[1,n]阶导数存且连续，且f(x)至少～o(x^n)

# 常见标准曲面：

完全球：x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ,r>0

上凸半球：z = sqrt(r^2 - x^2 - y^2) ,r>0

上凹抛物锥面：z = x^2 + y^2

上凹圆锥：z = sqrt(x^2 + y^2)

马鞍面：z=xy

双纽线：

玫瑰线：r= a cos kθ

阿基米德螺线：r=θ

心形线：r=a(1-cosθ) 或 r=a(1+cosθ) (a>0)