# 高等数学，遇事不决拉格朗日的泰勒

## 注释：

f^(x)或者表示f(x)导数，y^或者表示y导数,oo表示无穷大，

用NAN表示极限非无穷大也非常数(震荡间断) ，fac(n)表示n阶乘

NAN\*0=0，NAN\*A(非0)= NAN，NAN+A= NAN

NAN\*NAN或NAN \*oo具体问题具体分析

* 数学中的”=”代表”向右属于”，是单向运算符,而C++是向左赋值

对于无穷小o(x^2)=o(x)成立，但o(x)=o(x^2)不成立

## 极限与连续

* 数学归纳法：分三步：验，设，证

验证n=1成立，设n=k怎么样，证明结论

* 等价无穷小在含有加减法的式子里，要看精度，比如就可以用，因为分子是1次方，分母等价后也都小于等于1次方；而在里，就不能用，因为分子是3次方，分母精度不够。
* 对于间断点问题，考试中第二类间断点直接写”第二类间断点”就可以，不用写出具体的。在分析间断点时要当心左右极限，分别分析；此外，应该尽可能分析的多，不要漏。

x/tanx，一眼看会以为分成2种情况x=kπ和kπ+，通过计算得

=1 =0 由于左右极限都是这点，所以都是可去型间断点。

但实际x=kπ要分为x=0和x!=0时，x!=0极限并非是1，而是oo

所以答案是x=0或kπ+是可去型间断点

是x= kπ+，k∈ Z且k!=0时是第二类间断点

* =0说明f(x)更靠近x轴，f(x)相对g(x)是高阶无穷小

=oo说明g(x)更靠近x轴，g(x)相对f(x)是高阶无穷小

* 注意对于等价无穷小1-sqrt(cosx)这种不能按照1- cos代换,

1. sqrt(cosx)!=x/2，若1-cos (sqrt x)就能换，因为1-sqrt(cosx)不是

1-cos狗的形式

同理1- ≠ /2

### 性质：

**唯一性**：是说数值最多有1个

**保号性：有如下套话：**

= A>0 (<0) ,则存在δ>0,，当0<|x-x0|<δ时，f(x)>0 (<0)

推论：

对于函数f(x),g(x)>0 //若<0有相反的结论

则存在δ>0,，当0<|x-x0|<δ时，f(x)>g(x),描述为f(x)比g(x)高

则存在δ>0,，当0<|x-x0|<δ时，f(x)<g(x),描述为f(x)比g(x)低

推论：

**脱帽法**： = A 则存在，使得f(x)= A+α,多元函数也适用

适用于所有一元函数，多元函数给极限求参数或者判断某点的题。

**运算:**

若极限都存在不为无穷，则有可拆性，设※是某个运算符

则 ，反过来不成立

反之：若

* 有个注意点：若并不能说明因为和不一定存在，只有保证它们都存在才成立，换成函数极限同理。
* 脱帽法f(x)= A+α中若已知f(x)表达式和其极限A具体数值，可利用无穷小等价代换求得α=f(x)-A是几阶无穷小
* 函数内部的等价无穷小也可以代换，但要保证精度足够
* = A => 设=F(x)
* 若f(x)是n阶无穷小，g(x)是m阶无穷小。则~o(x^m\*n)
* 形如的极限什么时候夹逼什么时候定积分定义：看n和i的函数是否为同阶无穷大，如就要凑定义

### 无穷大和无穷小比阶问题

f(x)和g(x)都是无穷小的前提下

记忆法是：“0上高，无穷下高，高阶在低阶下方”

在0处：x~sinx~tanx~arctanx~arcsinx~ln(x+1)~e^x-1 < 1-cosx

f(x)和g(x)都是无穷大的前提下

**简单有理函数 ,a>0 的比阶**

1. x->0时，a越大靠近0轴越快，就越高阶无穷小，数值越小

若 说明此处：

1. x->+oo时，a越大靠近+oo越快，就越高阶无穷大，数值越大

若说明此处：

总结：a越大，在0和无穷处的都是相应高阶无穷小/大

“0 小 无 大”

**简单有理函数 ,a>0 的比阶**

1. x->0时，a越大靠近+oo越快，就越高阶无穷大，数值越大

若 说明此处：

1. x->+oo时，a越大靠近0越快，就越高阶无穷小，数值越小

若 说明此处：

总结：a越大，在0和无穷处的都是相应高阶无穷大/小

“指数越大，0 大 无 小”

### 泰勒公式：

f(x)在点x0处泰勒展开式为

f(x)= +(x)

反转的泰勒展开： +()

(x)写成o((x-x0)^i)叫做皮亚诺型余项

(x)写成 叫做拉格朗日型余项, ξ∈ |(x0,x)|//正区间

泰勒公式本质是泰勒级数

余项只是一个自相似但值很小的式子。

x=0叫做麦克劳林级数，他是泰勒级数的特殊形式。

* 泰勒公式的几阶指的是余项以外的项最高次幂是几。
* 二阶泰勒公式

常出现在证明题，其中心问题是如何等于0的问题

要么证一阶导数为0，要么联立消去，要么求[0,2]消去

### 洛必达法则适用性问题

1. 求导之后更复杂，则换方法
2. 求导后上下极限不再是0或者无穷，则换方法
3. 求导后极限是NAN，说明洛必达法则不适用，并不能确定极限为NAN，如==3 - ，而为NAN，此时结论是不存在，但正确答案是=3

* 计算 若f(x)在x=a处极限是0，f(x)可导但导函数不连续，虽然可用洛必达法则，但无法确定该点导函数值

如：f(x)连续可导，求

若洛=但不能认为它是因为f^(x)不一定连续。正确是导数定义令t=hsinx则=

* 对于在[0,x]内不连续的f(x)，求不可用洛必达法则，因为

在x->0时结果为NAN(尽管F(0)为0)，不符合洛必达条件

### stloz定理(离散洛必达法则)

如果数列an和bn在n->oo时都趋近0或oo //和洛必达法则条件一样

### 夹逼准则

夹逼准则在极限的难题里有着重要地位，没有思路的极限问题往往就和它有关

* 当且仅当被取极限的式子里含有同构的函数相减时，联系拉格朗日中值定理；被取极限的式子里含定积分式时，联系积分中值定理。

(b-a)f(ξ)=

(ξ)=

直接把对应式子替换成关于(b-a)f(ξ)或者(ξ)，之后构造不等式即可

例：

发现含有arctan这个函数相减，令f(t)=arctant,

有结论：存在x<ξ<x+1使得f^(ξ)=(f(x+1)-f(x))/(x+1-x) = f(x+1)-f(x)

对x<ξ<x+1做恒等变形成关于f^(t)的不等式：f^(x) > f^(ξ) > f^(x+1)

再乘以得到不等式：它和x<ξ<x+1等价

而f^(ξ)= = f(x+1)-f(x)

得到不等式：

显然不等式中间项是待求式子，左右项极限是1，所以由夹逼准则，原题答案就是1

#### **无限分段函数**

往往不可导，洛必达法则失效，但依然可以利用”段”构造不等式，来求极限。

例题：f(x)=,求

这是个无限分段周期函数，明显分子不可导。但可设n<x<n+1,n为整数

1/n>1/x>1/(n+1) =>

分别计算左右式子极限非，发现：

可得

#### 带有极限的超越定积分

形如 //不可以轻易把极限和积分换位置。

若有解析解，则常规方法即可。

若无解析解，或解析解十分复杂。考虑夹逼准则。要注意的是，不要求把f(n,x)缩放的统一类型，只要求：它缩放后解析解易求，且极限相同，缩放手段可以暴力一些

#### 常用放缩手段

其中0<a<b<c 则

### 求极限的手段：

基本技巧：拆分，凑整，乘除，代换

* **积分上下限函数的极限:**

1. 积分上下限和被积函数也可以无穷小代换
2. 用积分中值定理

* **反函数的极限:**用换元法换取去，用洛必达行不通，因为导数是1/ 出现了字母y
* **关于点是奇偶函数**：只需要看一半也就是单侧极限

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

* 消去律：多项式相加的极限如果是oo或0，只保留距离x轴最远的项，其余舍去，如果相加的极限非(oo和0)，则不一定

具体来说，不论x本身趋近什么，只看多项式的每一项整体趋近什么：

如果都趋近oo，则只留高阶无穷大，其余舍去

如果都趋近0，则只留低阶无穷小，其余舍去

如果oo和0都有，自然是保留oo的项

特别的： //只保留最大的项

//只保留最大的项

以上推到过程用夹逼准则

* **拆分**：幂指函数相减一般先提出一个使其为1，这种拆分手段常被忽略
* **凑整：**

一个简单的办法是注意到分母有e^x，就可以想办法把它弄没了。对分子加上再减去x

然后拆分式子为+=

其中=1，x-泰勒得到了等价于x^2，=1/2;

* 定积分定义推论：且i和n局部加减常数可忽略

=

* 泰勒展开

注意：对于分子某一项展开时，次数要和分母次数一致，不能分母是x^3，而分母只展开到2阶无穷小

* 中值定理，形如
* 公式不适用于极限问题的部分化简，因为可能化简后出现指数的加减运算，而该问题推导中相当于把ln(x+1)~x带入，而有时需要令ln(x+1)~x-

### 数列和函数极限证明题

一般都是证明极限存在，并且求出极限(数值超越不要求)

#### 单调有界准则

没有地推式要先构建递推式

三步法：数列单调递增/减；证明有上/下界；求极限

**证明数列单调递增/减**

1. 方法一：构造

直接证明它的结果大于0或者小于0，在n趋近+oo时恒成立

其中，的结果可通过：缩放，化为函数，求极限。

1. 方法二：

已知 ,且大小关系已知，且**f(x)为单调函数**

则可由知正负

1. 方法三：构造，证明, 且大小关系已知,表示任意非负式子，这样可知是单调数列
2. 方法四：用归结原则，若已知=f(n)的关系，求导数y=f(x)来确定增减性
3. 方法五：已知等式存在同构函数相减，可构造关于的拉格朗日，

存在,使

或存在,使

代表已知等式的同构函数的导数，l,r由ξ范围变形得到。

//前三中都需要通过实现。

**证明有上/下界**

1. 构造,而k是常数，存在
2. 构造拉格朗日,在确定单调性时确定范围来说明有界
3. 基本不等式，或者常见有界函数
4. 归纳法，第一项大于0，猜想第n项大于0，证第n项大于0
5. 缩放，以找上界为来说，试图寻找式子中的一部分或一项，替换成一个恒大于它的数，使得替换后整体也显然小于某个数。
6. 带分母的，把分母缩放
7. 利用常见函数不等式缩放，见[公式]

**求极限：**

对式子等号两边取极限解方程。

#### 先斩后奏+夹逼+放缩

这种题比较死板，一般形式是给定递推公式

草稿纸设极限存在得，证 //不需要求出A具体数值，所以这种题A是超越数也无妨，固定手段是:

， 其中g(x)是缩放后得式子，k是缩放一次产生的在(0,1)区间得常数，每次都要把式子变得更小， =>

由于可有 由夹逼准则

即可证出

放缩法步骤可以被拉格朗日中值定理代替来但有点麻烦，需要讨论k得1和左右端点大小得问题，一般不考虑。

**固定步骤**：

1. 确定数列的范围以及增减性，一般这类题都会是单调的。
2. 设极限是A，如果有精确数值则写出来，没有直接设为A即可。
3. 列 ，其中k∈ (0,1)，
4. 结论得证

### 级数收敛证明题

#### 定义法

求出 前提是S(n)n可求，一般适用于：

**等比级数**,k∈(0,1)**和差级数**

#### 缩放+比较判别法(正项级数)

缩放是通过对数列函数f()来说的

1. 拉格朗日中值定理,要已知导数

构造**等比级数**或**差级数，**最终还是定义证明

1. 常规套路不等式化简(x<e^x-1,x>ln(x+1)等)，题目一般不给出
2. 题目已知的等式化简，题目一般给出，变成
3. 题目已知的等式化简，题目一般给出，变成

#### 泰勒展开

形如 其中f(x)连续，已知

这里不可以直接用等价代换(最后结论没错,选择填空可以用)

做泰勒： =>

推广：对于任意∑内部函数，只要都可以泰勒拆开，如果余项之和的级数为0，那么级数收敛数值 等于 余项之前的项的级数

#### 例题

1. 对于形如 的式子求敛散，应该提出nπ再用诱导公式拆分= =

=//变成交错级数，分母有理化

=,之后比较审敛法和调和级数比较，通过令t=

## 导数与微分

### 导数定义

=dy/dx==

一点导数存在的充分必要条件是，= !=oo

也就是左右导数都存在。

在考研中，导数是NAN以及oo都叫做不存在

* 用求导公式得到结果是NAN的点，则另寻它法，不一定导数真不存在

用求导公式得到结果是00的点，导数一定不存在

* 代表整体对x求导， 表示对求关于g(x)的导数
* 偶函数导数一定是奇函数，奇函数原函数一定都是偶函数

奇函数导数一定是偶函数，偶函数原函数有一个是奇函数

周期函数导数一定是周期函数，周期函数原函数不一定是周期函数

仅当周期函数1个周期面积是0，周期函数原函数才是周期函数

* ,其中f(a)=g(a),求x=a导数

a左侧有等于号，可以对g(x)求导再带入，则；

a右侧没等于号，不可以对f(x)求导再带入，则不一定成立，必须导数定义计算

### 微分定义

△y=f(x0 + △x)-f(x0)

如果△y=A△x+o(△x)，就叫函数在x可微，A这里是个常数

一元函数可微必定可导，可导必定可微

证明可导必定可微，已知==

去掉极限符号就变成+α 其中α是高阶无穷小

+

注意到可微的定义，△y=A△x+o(△x)

f^(x0)相当于A，△xα就是o()因为=，其中α是个趋近0的值，那=0说明了△xα是的高阶无穷小，记做o(△x)

上面可以看出△x，△y，dx,dy的关系：

dx=△x dy= f^(x)\*△x= f^(x)\*dx

而△y=A△x+o(△x)= f^(x)\*dx+ o(dx) ，且A是导数,A=dy/dx= f^(x)

dy就是y的微分，dy/dx是y对x的导数

* 有一种是说法称: dy是△y的**线性部分**或现象主部，指得是dy

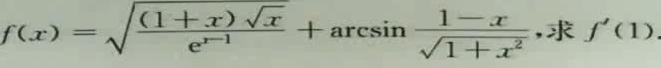
在微分里：△y=△x+o(△x)，A△x=dy是线性部分，而非

* 对于任意函数，搞清楚△x，△y，dy的几何意义，数值上|dy|<|△y|
* 等价于而非

### 求导方法

#### 普通函数求导：

背公式,导数定义,对数求导法

例题1：

第一个式子是多个函数的乘法，用对数求导

第二个式子显然满足用无穷小等价代换，所以导数定义

例题2:

直接公式得：

但注意此时定义域发生改变，原本时x∈R，求导后时x∈R&&x!=0

所以补上点即可，用导数定义求得x==0时，

#### 隐函数存在和求导

F(x,y)=0确定了x,y的函数关系，则

若=0或(和某个为NAN)，则说明F(x,y)=0不能确定y=y(x)的函数关系

若=0或(和某个为NAN)，则说明F(x,y)=0不能确定x=x(y)的函数关系

#### 积分上下限求导：

d(dt )/dx= d(dt - dt)/dx=

f(α(x))\* (x) – f(β(x))\* 这里注意，如果α(x)或者β(x)是个和x无关的常数，那么这一项是0，如d(dt )/dx= f(α(x))\* (x)

1. 混有x的积分上下限求导，d(dt )/dx中f(t)一定是个只含有t的函数，如果它当中带有x,就不能用上述方法求导，应该先代换来提出x,或者把x弄到积分上下限去
2. 等式，是个已知函数。求f(x)表达式

注意到左边是导函数乘以原函数的关系，做法是对两边求积分

令F(x)=得：

=>

解出F(X)求导可得到f(x)表达式

* 带有导数的积分还元，不可直接对导数内部进行还原，还要把导数分母的dx还元，如：(令sinx=t)=
* 积分上下限函数定义域问题：如果被积分有间断点，且积分区间包括间断点，则判断广义积分是否发散，发散则所有包括间断点的x值都不是定义域，否则忽略间断点的影响，如：的定义域是(-3,+oo)，因为间断点处积分发散，但定义域是R，因为t=0处广义积分收敛

#### 多元积分上下限求导：

先用多次积分化为只有一层积分的普通积分上下限函数

#### 参数方程求导

y=f(t),x=g(t)的倒数dy/dx就是：=dy/dx==h(t)

这里注意，如果让你求二阶导数，=

千万不可以直接对h(t)求导，这样相当于求了对t的倒数。

也不要以为我直接求不就是二阶导了么，这样也不对

正招是先求h(t)得导数，然后直接除以即是二阶导，推导如下：== 对于参数方程来说就是上下对t求导，所以

=====

此外，对于参数方程求高阶导数，方法也类似，=

比如三阶导就是=

#### 极坐标求导

极坐标系下的求导规则和直角坐标不同，所以对极坐标系方程求导只能先化成直角的或者参数方程的，用关系式x=rcosθ y=rsinθ，把给定了方程化成r=f(θ)

则把它带入两个关系式得到关于θ的参数方程

#### 分段函数求导

对于每个区间，可以直接导，但重点是分析间断部分，先看这个点是不是连续，如果不连续一定不可导，否则要利用导数定义公式=dy/dx=分别从左右趋近即和;如此做可以求出左右导数，假如左右导数相同，说明这个间断点可以求导数，如果左右导数不同或者不存在，说明这个点导数不存在。

#### 求n阶导数

解析法：

1. 暴力前几项，然后找规律
2. 二项式定理公式的莱布尼兹求导公式：

=\*\*CC(n,i)

单点导数值(数值法)：

1. 利用周期性奇偶性
2. 泰勒展开法1:对于求,//求单点导数值

第一步：背一遍x=a处抽象展开式 +(x),找到n次幂项

第二步：通过已经给出的f(a)的具体形式，手动展开算出它泰勒展开式里：

的系数设为k, k是已知常数且必定包含n阶导数

第三步：令则

1. 作为方法一的扩展：对于求h(x)=f(x)\*g(x)在x=a的n阶导，可分别对f和g泰勒展开到n次，然后找到n次项系数，用(1)的方法可求得h(x)单点导数
2. 先求1阶2阶导，用等价关系列出变系数线性微分方程F(x,y,y^,y^^)=0。

该微分方程系数必须是x多项式或其他高阶导可求的函数。

求单点导数值:对微分方程求n阶导，再带入点x=a得到差分方程，解差分方程得到n阶，利用初值得到的值

#### 幂级数求导

对于f(x)=求n阶导数，

特别的，x=0的n阶导数有1项，，和泰勒展开法求n阶导特殊点值的结论一样

#### 反函数的导数积分

设y=f(x)是单调函数，代表其反函数x=g(y).

则导数：y^= (x)=

这里注意一点 而

不要错误写成 这里如果用函数f表示，表达式里没有y,尽管是对y求导。

此外f(kx)= g(y/k).故f^(kx)=

### 定理概述

#### 导数类

**罗尔定理**：f(x)如果x∈[a,b]连续， (a,b)可导，则存在ξ∈(a,b),使得(ξ)=0

**罗尔定理推论**：若区间(a,b)内(n)!=0，则f(x)=0至多有n个实根，若再已知具体函数形态，可推出到底有多少个根

**拉格朗日定理**：f(x)如果x∈[a,b]连续，(a,b)可导，则存在ξ∈(a,b),使得(ξ)= //考试时常用：当f(0)=0时，(ξ)=

拉格朗日定理有一些变形如：

(ξ)=

(a+ή(b-a))=,0< ή<1 ，ξ=a+ή(b-a)

a=0时为：bf^( ήb)=f(b)-f(0)

**柯西定理**：f(x)和g(x)如果x∈[a,b]连续，(a,b)可导，(a,b)上(x)!=0，则存在ξ∈(a,b),使得=

**费马定理**：f(x)在x=a的邻域内可导，且f(a)是领域内最值，必有f^(a)=0

#### 积分类

**积分中值定理**：f(x)在[a,b]连续，则存在ξ∈[a,b]，使得

f(ξ)=/(b-a)

积分中值定理推论：条件中的ξ∈[a,b]可改为ξ∈(a,b)

**积分第一中值定理**：

g(x)和f(x)在[a,b]连续，g(x)在[a,b]可积且g(x)不变号

则存在ξ∈[a,b]，使得

**积分第二中值定理：**

g(x)和f(x)在[a,b]连续，g(x)在(a,b)可导且单调

则存在ξ∈[a,b]，使得

**牛莱公式**：= F(b)-F(a)

**牛莱反用**：= F(b)-F(a) => = f(x)-f(a) =>

**多元积分中值定理：**

对于多元积分,其中积分区域是n维区域D

则存在n维向量 ∈D，使得

表示2-范数，1维是长度，2维是面积,3维是体积……

#### 介值类

**零点定理**：f(x)在[a,b]连续,且f(a)\*f(b)<0，存在 c∈(a,b)，使得f(c)=0

**介值定理**：f(x)在[a,b]连续，存在 c∈[a,b]和μ∈[f(a),f(b)]，使得f(c)=u

且当f(a)!=μ且f(b)!=μ时，c的范围改为c∈(a,b) ,即开区间

介值定理是核心，有以下推论：

**导数介值定理**：对于连续可导函数f(x),任意给出两点导数f^(a)和f^(b)

且f^(a)<f^(b),则其导函数f^(x)一定可以取到[f^(a),f^(b)]的任意值

**最值定理**：闭区间[a,b]内的连续函数f(x)，必定存在m,M，使得m<=f(x)<=M

**平均值定理**：闭区间[a,b]内的连续函数f(x)，若a<x1<x2…<xn<b,

则必定存在x1<=ξ<=xn使得：

**绝对值的平均值定理**：闭区间[a,b]内的连续函数f(x)，若a<x1<x2…<xn<b

则必定存在x1=<ξ<=xn使得：

#### 几何条件

设f(x)和g(x)都连续，且在x∈[a,b]存在相同最大值M，令F(x)=f(x)-g(x),可证存在ξ∈[a,b],使F(ξ)=0

由题意设f(α)=g(β)=M，若α==β，显然F(ξ)= f(α)-g(β)=0;其中ξ=α=β

若α!=β，F(α)= f(α)-g(α)>=0; F(β)= f(β)-g(β)<=0;

由0点定理，结论可证

#### 不等式

1. 积分保号性： >= <=> f(x) >= g(x)
2. 基本不等式
3. 绝对值积分不等式：abs() <=
4. 柯西不等式： \*>=

//由绝对值积分不等式得来

配合牛莱公式反用：f(x) =

套路：给定f(x)和f(a)构造

则

### 证明不等式

#### 具体不等式的暴力求导的优化

证明具体函数的不等式，一些题不加优化复杂度爆炸，或者无法求解。

**基本方法**：

1. 定义等式一侧的一部分为f(x)找到它的值域，分段和另一部分比较
2. 用周期性，奇函数偶函数缩小区间，减少复杂度。
3. 对求导后函数删除恒正或恒负的部分，继续讨论。
4. 待证公式取对数，设的函数带有对数，以抵消乘法。
5. 根据基本不等式和已给不等式进行缩放。这类题的缩放在过程中间，失败的原因有2类：**忽略某个式子的特点 和 没有把握好缩放的”度”**，都不能成功证明导数恒正或负。
6. 含有字母(一个或多个)的具体不等式，原则是：不以字母而设函数，而是以等式的函数形态设函数，如应设函数f(x)=

#### 常数变量化

抽象不等式，适用于普通不等式或积分不等式的证明。

常数变量化优化：

* 直接变量化得不到结论，分母：乘过去变量化，或通分变量化
* 乘法太多，取对数变量化
* 积分不等式换元同一积分上下限，再变量化
* 删除某部分再变量化

#### 二阶导数性质

两点中点和函数中点关系，为凸函数, 反之凹函数

可推广到：∈(0,1)且

有为凸函数, 反之凹函数

凹函数：区间[a,b]任意点(c,f(c))切线 <= f(x)

端点连线,c是[a,b]内任一点

凸函数：区间[a,b]任意点(c,f(c))切线 >= f(x)

端点连线,c是[a,b]内任一点

#### 区间划分

证明 A是一个常数。

令 对两边分别用拉格朗日。

#### 拉格朗日中值定理或积分中值定理

可以从a<ξ<b开始，推出：f^(a)<f^(ξ)<f^(b)

再用把f^(ξ)替换为：(f(b)-f(a))/(b-a)

例如：

**标志**

* 出现F(x)-xf(x)或f(x)-xf^(x),上面例子也是这个标志下的特例
* 套路：已知[a,b]内连续可导函数f(x)的f(a)>0,f(b)>0,中间一点f(c)<0或f(c)<min(f(a),f(b)), 证明f^^(ξ)>0

用拉格朗日定理存在使f^()<0, f()>0

再用拉格朗日定理存在 使f^^(ξ)=

#### 拉格朗日余项的泰勒公式(含高阶导)

存在ξ∈ |(x0,x)|使，f(x)= +

#### 缩放化为定积分

如：

=

#### 递推式整体缩放

如且已知{}递增 可有

则 =>

### 证明等式

#### 凑函数的方法

1. **右侧是-0**，如:lnx-ln1
2. **对数拆分**，如：ln(1+1/x)=ln(x+1)-lnx
3. **对分子分母同时除以或乘以某个式子**

#### 一个字母的等式证明的通解

分两步走：构造辅助函数+找点

**构造辅助函数**

设待证明的等式为微分方程G(ξ,f(ξ), f^(ξ), f^^(ξ))=0

1. 把等式的ξ替换为x, f(x)替换为y, 得到微分方程通解
2. 分离出常数C，等号右边就是辅助函数

如果是二阶及以上微分方程，则对通解求导，把联立方程组可分离出任意的C，等号右边就是辅助函数

**找点**

1. 题目已知，奇偶函数性质，费马定理(极值点处导数是0)，几何条件。这几条比较显眼，容易看出
2. 介值定理，平均值定理，找到得f(a)=0或者f(a)=c //c是常数，的点
3. 极限的性质，若f(x)连续，且则有f(a)=0

或保号性得到不等式，得到在x+Δ>a的邻域内有f(x)>0

1. 积分中值定理，积分保号性等
2. 带拉格朗日余项的泰勒公式，适用于待证结论含有高阶导数。

存在ξ∈ |(x0,x)|使，f(x)= +

再带入一些数，如令x=c，这样就得到了一些关于f高阶导数的等式，且此时的ξ∈ |(c,x0)|, 从而用这些等式做文章,这里注意，对于x不同赋值，余项的ξ是互不相同的ξ，不能合并，应该用来表示。

#### 两个字母ξ和η的思路：

1. 考虑分离两个字母，把η放到左边，ξ放到右边。
2. 用介质定理或给定条件，在区间[a,b]中间找一点c,分别对(a,c)(c,b)用拉格朗日或者柯西，对两个拉格朗日的等式做加法减法，凑成待证结论。一般情况下，找的c应满足让F^(ξ)= G^(η) 或F^(ξ)+ G^(η) = 常数C
3. 可以固定其中一个，把它视作常数，然后视作一个字母的题做

#### 恒等式f(x)Ξ 0

1. 证明f^(x)=0,f(a)=0,a为其定义域内任意点
2. 证明最大值M的绝对值等于0，要用介值定理

## 不定积分和定积分

### 概念

#### 黎曼积分存在

当且仅当：函数有界，且存在有限个间断点。

* 是作为变上限积分函数，积分上下限的x与f(x)dx的x不是一个x,应区分开来，且写成更方便看
* f(x)在连续可导，则其导函数要么连续，要么含有震荡间断点。绝不可能存在:无穷，可去，跳跃间断点。

反过来：有无穷，可去，跳跃间断点的函数必然原函数非连续可导。

#### 牛顿-莱布尼兹公式证明

证明：构造函数φ(x)=,则(x)=f(x)，φ(a)=0

设f(x)的原函数是F(x),那么F(x)和φ(x)相等或者相差常数

写作：F(x)-φ(x)=C，把a和b带入：

F(a)-φ(a)= F(b)-φ(b)=C => F(a)-= F(b)-=C

* F(a) = F(b)- =>= F(b)-F(a)

注：牛顿莱布尼兹公式只允许f(x)存在有限个第一类间断点，否则要拆开成广义积分分段计算。尤其是在代背好的公式时，可能被积函数连续，但化简的过程中出现了无穷间断点，使得公式不成立，这是个很隐蔽的错误，如

检查方法除了不跳步逐步检查，可以看原函数的区间内是否有第二类间断点，如果有就要小心了。

### 特殊题型

#### 凑定积分的原始公式

**定积分的原始公式**：=

扩展：n处和i处加减常数结果不变

,k1,k2,k3为任意常数

特别的当b=1,a=0时

凑定积分原始公式的技巧：以常见形式来说

1. 利用极限的无穷小等价代换和拆分甚至洛必达。
2. n处和i处加减常数结果不变
3. 是甩掉多余的项。来缩放+夹逼
4. 是有限的变中的i始末项，来缩放+夹逼
5. 只缩放一边，把缩放成一个定积分定义，用凑好的式子和原本式子相减，证明，再由存在得到

* 其中缩放夹逼原则是只动低次项,最高次项不动，如分母含有最高的n^2,i^2不动，但可以扔n,I,q.

### 技巧和换元法结论：

* 快速还元法：

令被积函数x+=a，积分上下限x-=a，等价于原来积分

令被积函数x\*=a，积分上下限x/=a，等价于原来积分

* //对于任何函数的区间在现公式

区间在现公式推论：

* =，//华里士公式

=

设I(n)==

I(0)=,I(1)=1，l(n)=l(n-2)

设I(n)==

I(0)=,I(1)=1，l(n)=l(n-2)

* 区间简化公式：令

为了解决形如：的积分

* f(x)是可积函数，且是周期函数(T为周期),有以下推论

=, n∈N\*

对于任意函数，若满足，则有

=

* 含有绝对值的定积分：其中f(x)递增连续，在(a,b)内存在c使得f(c)=0

推广： 其中Di是使f(x)为正的区域，D2i是使f(x)为负的区域。对多重积分也适用

### 常用换元法推导

第一类换元：把一部分挪到d里面，再把它得t

下面是8个平方和差的固定形式的推导  
∫dx=∫dx (令t=x/a)= ∫d(at)=arcsint +C

= arcsin(x/a) +C

∫dx=∫dx (令t=x/a)= ∫d(at)=arctant +C

=arctan(x/a) +C

∫dx (令x=atant)= ∫d(atant)=∫dt=

=∫sectdt = lnabs(sect+tant)+C =lnabs( + ) +C

= lnabs( + x) +C

∫dx (令t= asect)= ∫d(asect)=dt

利用公式1+=；原式=∫sect dt

= lnabs(sect+tant)+C=lnabs( + ) +C

= lnabs( + x) +C

∫dx=∫( - )dx = lnabs() +C

如果是∫dx化为∫dx即可

上述5个有规律可循，下面3个比较复杂。

∫dx (令x=asect)= a∫d(asect)

利用公式1+=；原式=∫ \* sec t \*tant dt

=∫\*tant d(tant)= +C = +C

= +C

∫dx (令x=asint)= a∫d(asint)=∫dt =

=∫dt=t+sin2t +C =arcsin+sin2(arcsin) +C

=arcsin + +C

∫dx (令x=atant)= a∫d(atant)=∫sectd(tant) =

=(secttant - ∫tantd(sect)) = (sect\*tant - ∫\*sect dt)

= (secttant - ∫d(tant))=sect\*tant - + C

= arctan - + C

在这块里经常出现如arcsin(cosx)或cos(arcsinx)这类化简:

arcsin(cosx)这类前边是反三角函数的，cosx=siny，由三角函数基本公式的得到y=-x

cos(arcsinx)这类前面是三角函数的，方法是画三角形：

cos(arcsinx) 里角度是arcsinx,设斜边是1，临边是x,对边就是，cos(arcsinx)==

### **积分方法**

#### 分部积分

列表法求分部积分

设P(x)和Q(x)是任意函数，(x)代表Q(x)求i次不定积分

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P(x) | (x) | (x) | (x) | … | … | (x) |
| Q(x) | (x) | (x) | (x) | …. | … | (x) |

对于任意n大于0，都有如下规律

= + +C

记忆方法是上求导下积分，交叉相乘，首项为正，正负交替，最后积分

**特殊形式**

1. n次多项式P(x)与指数函数或者三角函数Q(x)相乘,

此时显然P(x)会最终被求导得到0，(x)=0，那么最后一项可舍去。

1. 指数函数乘以三角函数，设P(x)是指数函数，Q(x)是三角函数

一定会出现自相似性，一般需要使用2次分部积分，列表法也是求2次

∫P(x)Q(x)dx=P(x)∫Q(x) - ∫∫Q(x) + ∫∫Q(x) +C

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P(x) | (x) | (x) |
| Q(x) | (x) | (x) |

∫∫Q(x)一定和∫P(x)Q(x)dx存在自相似，然后设它为A，解方程就好。原因是Q(x)代表既然三角函数，求2次积分一定又是自己了，尽管可能符号相反，比如sinx积分2次是-sinx

3多项式P(x)与对数函数或者反三角函数Q(x)相乘

此时对P(x)进行积分，意味着把P(x)移到”d()”里去。只需一步分部积分即可。

#### 有理函数积分

设P(x)和Q(x)是多项式，次数分别是n和m,

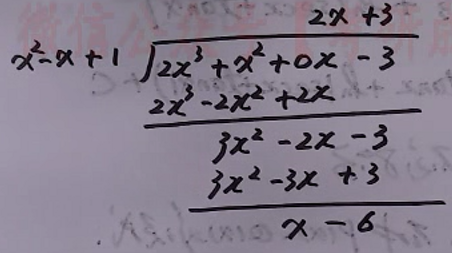
R(x)= P(x)/Q(x)叫有理函数，它的积分就是有理函数积分

有理函数积分一定存在解析解,且存在通用步骤。

**情况1：**若n>=m说明多项式是假多项式，它一定可以拆成多项式与另一个真多项式之和。R(x)= P(x)/Q(x)= P1(x)+ P2(x)/Q(x)

这个过程利用[多项式除法，和取模运算](file:///D:\Documents\笔记\公式.docx)。

如：R(x)=(+)/( – x + 1)



然后对于真分式，进入情况2求

**情况2：**若n<m，分式次数大于2

因式分解成几个式子相乘形式，利用待定系数法或代数

可以证明，任何一般多项式均可拆分成若干n(n<=2)此因式相乘，故我们只需要拆分多项式的分母，用待定系数法

设分母被因式分解成N项因式相乘，记 //有cnt个相乘

对于每个pi (x),它有次数和重数的概念：pi (x)=()^ki

则称pi(x)是**ki重si次因式**,把它记作p(**ki**)(si),其中si<= 2

对于**ki重si次因式**可以分解出cnt个分式相加，是：

其中A(j,i)代表一个待定系数，通分后，解方程组求得,但比较麻烦

这里注意：最好方法是，带入x的取值，设有n个待定系数，就取值n次不同的x值，然后也可以列出方程组，可以求得系数，这样相比通分，省了步骤。

**情况3**：若n<m，分式次数小于等于2

* ∫=lnabs(ax+b) +C
* ∫=∫令=t

=∫=arctan() +C=arctan() +C

#### 极坐标定积分

所有的极坐标定积分定积分皆可在x=rcosθ,y=rsinθ中，带入r=r(θ)化为参数方程

也可以用公式：

若未知r=r(θ)但已知f(x)

α和β通过观察确定，用一个初始在x轴正向的线，按照极角旋转，进入图形时为α，出图形时为β。

硬算也可以确定α和β，令x= r(θ)cosθ=a, =>

解方程 解出，同理β也一样。

对于一重二重三重定积分，各自都有化为极坐标的方法，不应该弄混淆，实际上二重积分三重积分也是推导出来的。

#### 反常积分

也叫广义积分,

第一类,x=c有无穷间断点.定义是

第二类,x=c定义是

如果把上述n和m换成同一变量，意味着以相同速度趋近，则是柯西主值积分。

* 推论：f(x)为奇函数,反常积分发散(柯西主值积分为0)

反常积分中，收敛+收敛=收敛

发散+发散= 不一定(用定义判断)

P-积分：，如果a<=1,发散，a>1收敛，

(且广义点是x=0)，如果a>=1,发散，a<1收敛，

对于类P积分判敛散：x->0时，只看min() 项

x->+oo时，只看max() 项 :”0看最小，无穷看最大”

收敛，当且仅当：a>1,b<1

如果积分在x=oo处广义，对于广义积分,构造合适的a使得收敛，也就是(且k!=0)，

想P-积分，f(x)它与x^-a同阶，a>1时一同收敛，x<=1时一同发散。f(x)敛散性同对应p-积分

k不能是零或者无穷，0代表x^-a取低阶无穷大了，应该把a调大；无穷代表 x^-a取高阶了，应该把a调小

如果积分在x=A处广义，对于广义积分,构造合适的a使得收敛，也就是(且k!=0)，

想P-积分，f(x)它与x^-a同阶，a<1时一同收敛，x>=1时一同发散。f(x)敛散性同对应p-积分

k不能是零或者无穷，0代表x^-a取高阶无穷大了，应该把a调小；无穷代表 x^-a取低阶了，应该把a调大

* 反常积分收敛的定义：其中A<B且A,B可以是无穷

存在常数C,使得都收敛

### 超越定积分

#### 思路

原函数不是初等函数的函数在实际生活中占了绝大多数，但在个别区间的定积分，依然有解析解。

1. 取平方改变字母来化二重积分提高维度： //

/待填坑

1. 见到被积函数含有F(a)-F(b)，可牛莱公式反用化二重积分提高维度，如 直接把被积函数看做
2. 区间拆分，用拉格朗日值定理，夹逼准则
3. 拉普拉斯变换

#### 拉普拉斯变换

#### 常见超越积分

**伽马函数г(x)**

г(x)=这是伽马函数

г(0.5)= =，г(x+1) = xг(x)

利用伽马函数，可以定义广义阶乘，对于任意实数x，

fac(x)==г(x+1)= xг(x)

伽马函数怎么看参数：t的指数+1即可，比如

就是г(3.5)=2.5\*г(2.5)= 2.5\*1.5\*г(1.5)= 2.5\*1.5\*0.5г(0.5)

=

* 余元公式：对于任意x∈ (0,1) , г(x)г(1-x)=

伽马函数可以对伽马类型的定积分求解。

= = г(n+0.5)

**正弦积分SI(x)**

= = //方法是变成二重积分

SI(x)=

## 二重积分

类似一重积分=

这是二重积分定义，二重积分除了代表体积，还可以代表平面图形面积的密度，等价于

### 二重积分等式

* =A，A代表积分区域D的面积
* f(x,y)在区域D内连续，则存在v2(ξ1,ξ2)∈D使得：

，A代表积分区域D的面积

* 若D关于y轴对称，说明D左右对称，设D1是右边一块

f(-x,y)=-f(x,y)则=0

f(-x,y)= f(x,y) 则=

类似的关于x轴对称也有这样的结论

* 轮换对称性： =

但此时D的方程里的x和y也要替换

轮换对称性说白了就是可以用任意字母当中被积的自变量

利用轮换对称性，计算积分时，可以把偏离正轨的图形移动正

二重积分的{与D的方程}，里的x或y时用其他式子替换，答案不变。

* 特殊的若D的方程x和y替换后相同(如x^2+y^2<=1)，则f(x,y)= f(y,x),可任意替换字母都使其在D下的二重积分完全相等
* 积分次序所谓”先A后B”指的是把A放在内层积分，B放在外层积分

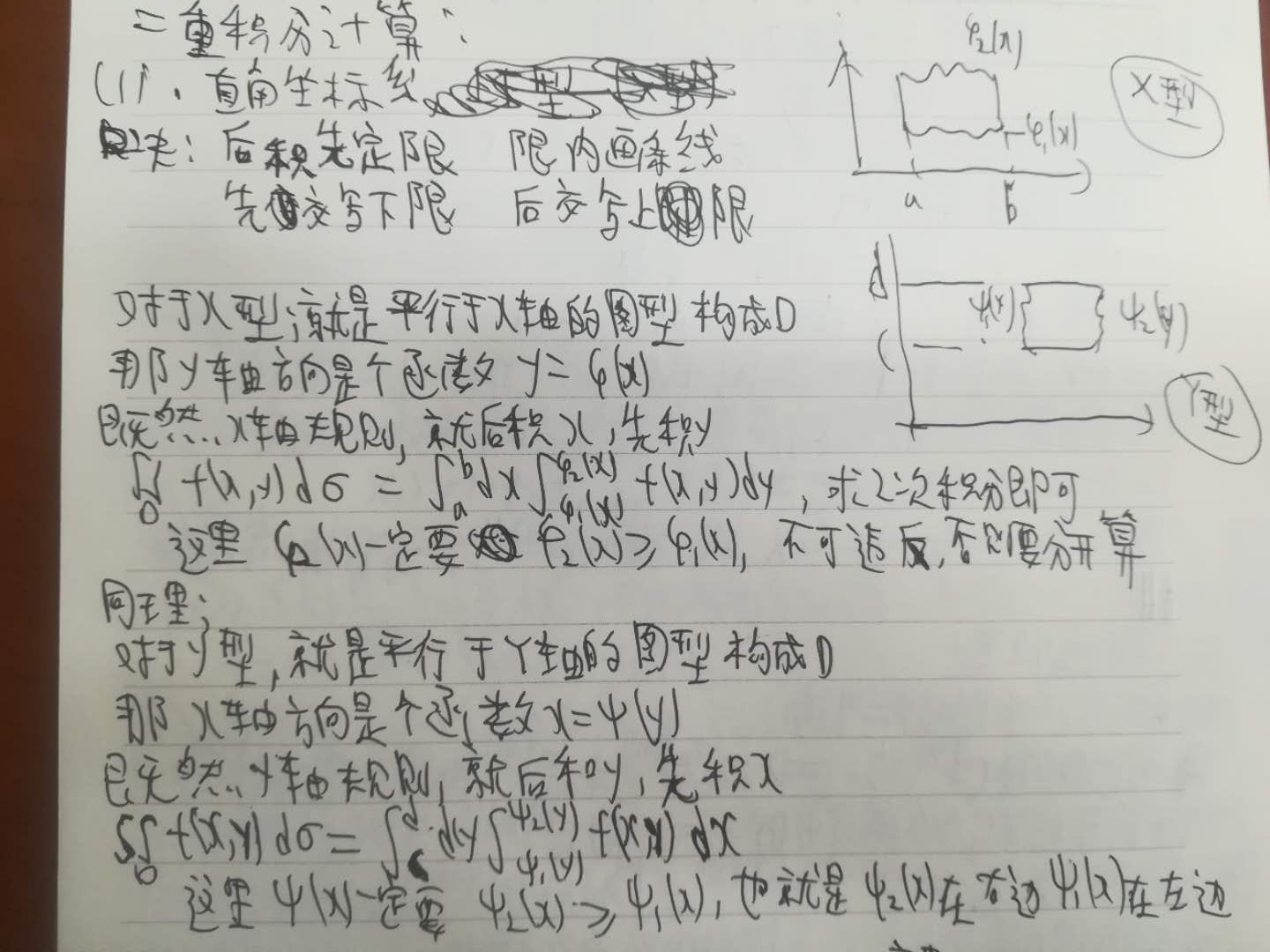
### 直角坐标系下二重积分计算

计算如图

注意在直角坐标下有两种积分X型和Y型，但有时被积函数出现“原函数没有初等表达式(如，，sin，cos，xtanx),”

时，如果改变积分次序，可能将其化为可积分的函数，然后计算，所以有时先X还是先Y不一定都行得通。

详细在例题里



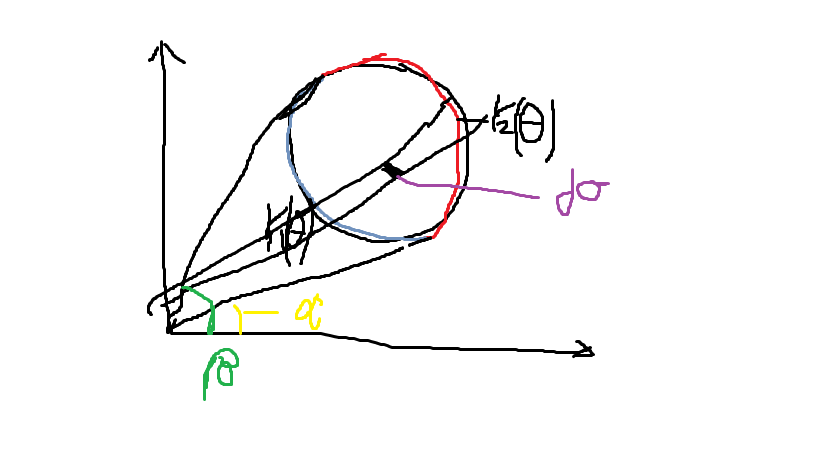
### 多元换元法

其中x=x(u,v),y=y(u,v) ,代表雅克比行列式，D1是原始区域，D2代换成u,v后的区域。

多元换元法可以解决所以坐标系转化问题，包括极坐标系和三重积分的极坐标系公式都可由它推得

### 极坐标系下二重积分计算

**先r后θ**



r1(θ)和r2(θ)分别是如图蓝色和红色的线，极坐标下r=r(θ)代表角度和极径的关系，dρ就是如图的小矩形，它是dr作为长dl作为宽的矩形，dl代表了图形弧长的微分，弧长公式是dl=rdθ

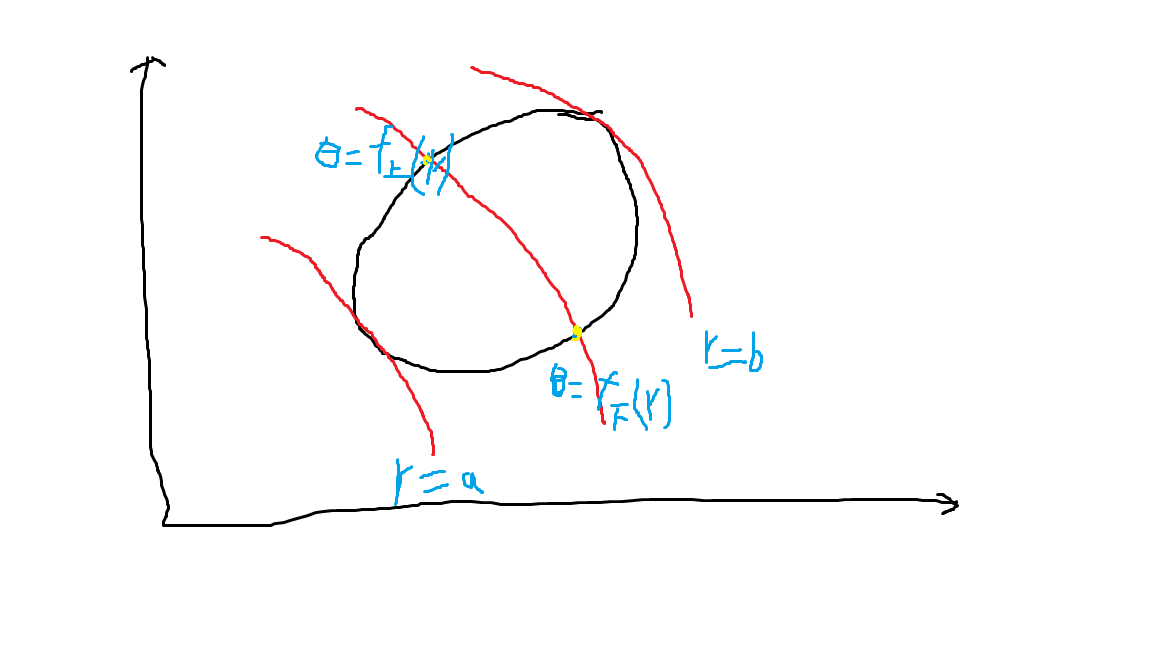
那么dρ=dl\*dr= r\*dθ\*dr

对于直角坐标系下的积分转换极坐标是：

=dr 这里α和β是角度，这怎么确定，应该是沿着坐标轴做扫描线进入图形是α出图形是β。

至于r1(θ)和r2(θ)，它们是” 内圈”和“外圈”图形的方程，在直角坐标系转换极坐标时，应该找到对应曲线直角坐标方程，然后带入转换公式x=rcosθ,y=rsinθ，来得到r= r(θ)的函数。

**先θ后r**

****

### 二重积分计算技巧：

1. 对于给定，其积分区域D是参数方程x=x(t),y=y(t)

嘉定先y后x,此时只要找到函数左右断点，显然能确定最外层积分的上下限，对于里层的对y积分，要带着y(x)这个函数

= (其中y1(x)和y2(x)题目已知)

= 然后变成关于t的积分即可求解定积分。

g(x)是的结果，是一个含有y1(x)和y2(x)的函数

1. 带有绝对值的2重积分I=，有两种策略：

I= ，D1是使f(x)>0的积分区域，D2是使f(x)<0的积分区域，

I= ， D2是使f(x)<0的积分区域，

## 多元微分

### 概念：

#### 多元函数极限

多元函数极限有两种标准：

* 在去心邻域内，要求各个方向的极限都存在且相等，才叫极限存在。
* 在去心邻域内，排除掉无定义区域，对函数有定义区域来说，各个方向的极限都存在且相等，叫极限存在。

多元函数求极限时，**洛必达法则和单调有界准则失效**。

有一类题：f(x,y)在(0,0)及其附近连续，，让你判断(0,0)是什么点,是关于x,y的表达式

方法是：

1. 用脱帽法化成：
2. 带着α求导： ，其中α可以无视。
3. 最保守的方法是调用多元函数极值问题判断，一定可以解决此类问题。但如果能找到2条线(y=kx)使得时正时负，违反唯一性，则(0,0)可以判断不是极值点

#### 偏导数定义：

= 这个极限存在就说明可对x偏导

= 这个极限存在就说明可对y偏导

求导的方法有**定义法**和**公式法**

**这里有几个注意点：**

* 对于偏导数符号没有运算法则： X

因为是个整体不可约分，严格应该记作,它和普通导数不同。

* 多元函数用**定义法**求导时，应该对一个字母看成常数，来求极限，如定义所示。让你求，此时有2个策略：

一是不带入y=a，得到极限函数，此时 = 。但这个方法要注意，极限函数很可能在y=a处间断，此时求得的在f(x,y)间断点出失效，因此这个方法不适用于求间断点处导数。。

二是先带入y=a，用定义可直接得到答案，此时 = 。但这个方法要注意，先带入y=a不能得到NAN或oo,必须函数此时有定义。

如果得到NAN或oo，说明在y这个方向极限不存在，该点不可导。

* 多元函数用**公式法**求导的充要条件是区域**可微**，对于单个点(a,a)来说：

不管是函数f(x,y)还是f(ϕ1(x), ϕ2(x)),在该点不能用复合求导公式，而是老老实实导数定义做，这个和一元函数一个道理，但换成复合的多元函数时，是个容易忽略的坑点。

#### 微分：

在点M(x0,y0)处求微分，

**对x偏微分**： = f(x0+Δx,y0) - f(x0,y0) = AΔx + o(Δx)

**对x偏微分**： = f(x0,y0+Δy) - f(x0,y0) = BΔy +o(Δy)

**全微分**：Δz = f(x0+Δx,y0+Δy) - f(x0,y0) = AΔx + BΔy +o(ρ)= Adx + Bdy

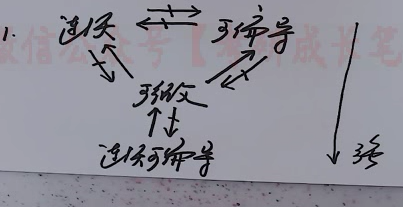
推论：f(x,y) =f(x0,y0)+A(x-x0)+B(y-y0)+o()

其中A，B是偏导数，ρ是点M(x0,y0)附近的区域，它趋近0.且

ρ=

#### 可微可导和连续关系：

**连续可偏导/解析**意思是：函数在(x0,y0)本身和附近都可微，但只能保证偏导数在该点连续，偏导数不一定可微和解析



解析>可微分>连续和可偏导

**连续可偏导/解析**是最强的条件，仅仅说可微不一定偏导数连续(可能存在奇点奇线)

* 可微一定可偏导，但不一定偏导数连续，偏导数有可能出现奇点奇线

#### 雅可比行列式：

用式子=行列式：det(for(i=1;i<=n;i++){for(j=1;j<=n;j++){ }})

其中u是一个关于｛｝的n元函数。

同样的，把行列式符号去掉叫雅可比矩阵。

特殊的考研时仅仅用到2阶情形，设u=u(x,y),v=v(x,y)

#### 多元函数可分离的条件

对于函数u=u(x,y)，存在f(x)和g(y)使得u(x,y)= f(x)\*g(y)的充要条件是：

//这对于概率论判断独立性有用

### 全微分的应用(难点)

1. 等号两边可以同时全微分：对于z=z(x,y)由F(x,y,z)=0确定，可以dF(x,y,z)=0 => => 进而得到偏导数。
2. 判断点M处全微分存不存在(是否可微分) ，用定义法：

=

其中y−y，

即判断

若A,B(偏导数)存在，以及这个极限是0，说明可微分, 已知f(x)可微，则

1. 任意可微函数f(x,y)的全微分的曲线积分与路径无关：

其中和分别为平面内任意两点

该等式表明：多元函数任意两点差值可表示成，以这两点为端点的任意路径的曲线积分，这是一维下某个数f(b)-f(a)=的推广

1. 已知x=x(u,v),y=y(u,v),

### 多元函数泰勒公式//未考过，2021考前记忆

设Δx=x-x0 , Δy=y-y0

f(x,y)=f(x0,y0) + () () + +R(x)

### 多元函数求偏导

#### 复合函数求导

* 若f是多元函数，规定f对第一个变量的导数用，f对第二个变量的导数用表示，f对第n个变量的导数用表示，
* 确定几元：z看字母，f看逗号

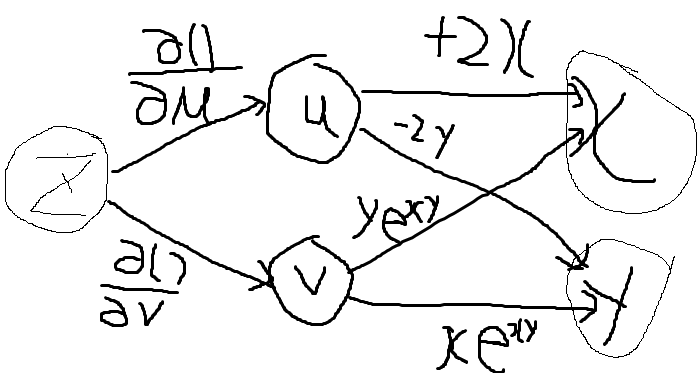
Z=f(x^2+y^2) => z=f(u),u= x^2+y^2 z二元，f一元

Z=f(t^2,e^t) => z=f(u,v),u=2t,v=t^2 z一元，f二元

Z=f(x+y,xy,x^2) => z=f(u,v,w),u=x+y,v=xy,w=x^2 z二元，f三元

**一些例题**：

z=f(u,v) ,u=x\*x-y\*y ,v=e^(xy)：



#### 复合隐函数求偏导

1. 求直接把z当因变量两边求关于x的偏导，再整理提出
2. 二元隐函数是型如F(x,y,z)=0，称作这是一个约束条件condition

隐函数如果能转换成显函数，那直接用<复合函数求偏导>的方法。但隐函数求偏导本身有单独的方法，下面介绍。

单个方程：

其推导过程很简单，就是直接对F(x,y,z)求导

#### 复合隐函数方程组求偏导

考研只考2种F(x,y,u,v)= G(x,y,u,v)=0和F(x,u,v)= G(x,u,v)=0

**直接计算法**

假设题目有m个约束条件，condition(1),condition(2)，…condition(m)

有n个字母。说明有m个因变量，n-m个自变量。(n>m)

其中谁是自变量,谁是因变量是由问题给的。

比如：让你求 那z是因变量，x是自变量

然后每个条件对x求偏导

for(i=1;i<=m;i++)

(i)；

这样形成了一个方程组，每个因变量当未知数，解出一个因变量只含有z的式子。把其中分离即可。

这里还要注意，自变量如果有多个，只考虑我们要的，其他当做常数。

**公式法：**

F(x,u,v)= G(x,u,v)=0其中u=u(x),v=v(x)

和

* 隐函数求单点导数，也可以代入所求点数值，变成一元函数

#### 复合求导的图论法

1. 借助图论画辅助有向图G(V,E)：点集表示变量集合，弧表示函数的直接导数关系。边e(u,v)=,这里如果u=f(z,v),z=z(v)，也只让e(u,v)=因为是直接导数关系。
2. 到这里要保证图是个DAG(有向无环图)，如果不是，则函数关系存在重叠，要删除和修改一些边(合并函数关系。使它们不重叠)函数关系，对于字母较多的多元函数导数，找出有重叠的函数关系是关键
3. 对于一条路径path(u,v)。它经过中间节点{}

path(u,v)=

则导数=

要注意：弧表示函数的直接导数关系，例如y=f(x,t),t=t(x),如果把t=t(x)带入得y=f(x,t(x))=g(x)则函数关系{y=g(x)}和{ y=f(x,t),t=t(x)}存在重叠，只保留其一

#### 求全微分

1. 对于显函数z=f(x,y)或隐函数F(X,Y,Z)=0求z的全微分dz

,如此，就是求2个偏导，可以解决所有问题

1. 也可以直接求全微分如：

直接等号两边求全微分：

整理一下提出dz即可，这种方法效率比方法1高

### 偏微分方程

**题型1：已知偏导数，求原函数z=f(x,y)**

已知du=2xdx-2ydy,u(0,0)=3 求u(x,y)

方法一：du=2xdx-2ydy => dx==2x,dy==-2y

=2x => u=x^2+φ(y) //这里是二元函数，对x求导原函数剩下的不是C而是一个关于y的函数

在用上述式子求偏导 = (y) = -2y 可以解出来(y) = -2y

那φ(y)= -y^2+C

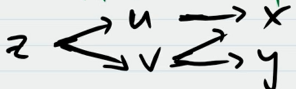
u= x^2-y^2+C 带入点u(0,0)=3 u= x^2-y^2+3

**题型2：已知偏导数，带入等式变成常微分方程**

**题型3：已知偏微分方程和参数关系，化简偏微分方程**

已知u=u(x,y),v=v(x,y) ,和偏微分方程f()=0 ，让你化简偏微分方程，使其不含有x和y. 这类题解题关键是画出：u,v,x,y,z的关系图 得到

如:u=x,v=y/x ,和偏微分方程

 **可求得**

带入可以替换掉

而剩下的x和y，联立原关系式u=u(x,y),v=v(x,y)带入即可

**题型4:**

形如P(x,y)+ Q(x,y)=0 且不为全微分方程,其中z=z(x,y)

此类偏微分方程思路是化常微分方程：因为由z(x,y)=C确定的曲线中，, 故，然后用常微分方程的方法解出y与x的关系，移项求出通解是u(x,y)=C,

**则z(x,y)通解是z(x,y)=C(u(x,y)), C(u)是任意可微函数**

### 多元函数极值问题

#### 定义法判断极值

#### 普通极值

对于点A(a,b)，在A附近二维邻域内每个点都不大于它，则称A是极大值点，这是二维函数极大值的几何意义，极小值类似。

如果f(x,y)在M(x0,y0)处可导(函数在一点取得极值不一定连续或者可导)。

f(x,y)在M(x0,y0)取得极值的必要条件是(x0,y0)=(x0,y0)=0

解(x0,y0)=(x0,y0)=0可求出求出极值点，要是再知道周围正负情况，可知道增减区间，以及这点具体是极大还是极小值。

f(x,y)在M(x0,y0)处可导，还有如下判别法(用来判断是不是极值，是什么极值)：

记:A=(x0,y0) B=(x0,y0) C=(x0,y0)

Δ = B^2 – AC

If :Δ<0 && A<0 :极大值

If :Δ<0 && A>0 :极小值

If :Δ>0 :不是极值点

If :Δ=0 方法失效，另寻它法

* 函数在M取得极值，则各个偏导数和方向导数一定是0，对任意维度函数均成立
* 函数各个偏导数或方向导数是0，不一定取得极值，且每个维度的函数都有单独的判别法，类似二元函数。

#### 条件极值

英文subject to 服从于.. 受…约束 受…管制

Z=f(x,y) subject to φ(x,y)=0 求条件最小/大值点(xo,y0)

拉格朗日乘数法：

构造函数F(x,y, λ)= f(x,y)+λφ(x,y)

/\*

若是三元函数p=f(x,y,z), subject to φ1(x,y,z)=0 φ2(x,y,z)=0

则设F(x,y,z, λ1, λ2) = f(x,y,z)+λ1φ1(x,y) +λ2φ2(x,y)

\*/

对F(x,y, λ)求偏导，构造方程组：

= (x,y) + λ(x,y) = 0

= (x,y) + λ(x,y) = 0

= φ(x,y) = 0

这是非线性方程组观察带入可解， x,y,λ。一般有多组。

//考研里，不用给出非线性方程组解答过程，直接写有哪些解即可

这里实际是三元函数极值问题，想要知道是不是极值，是极大还是小，需要用广义判别法列三阶行列式，考研不做要求。只需简单找出最值而不是极值即可。

方法是：

这里解出的x,y带回Z=f(x,y)即可得到最小/大值，会得到多组x,y

将它们分别带入，哪个结果小/大哪个就是最小/大值点

#### 非线性方程组求解技巧

1. 轮换对称性，来找变量等价关系
2. 两等式相除/乘，消去变量
3. 构造F(x,y, λ)= f(x,y)+λφ(x,y),时如果f(x,y)太复杂，可以用简单易求导与它有相同增减性的函数代换，这样得到的x,y也是原本函数的最值点。

比如f(x,y)=|x+y| => , f(x,y)= => x+y

1. 模仿曲线曲面积分把能带入的复杂等式带入
2. 只把x,y看做自变量看做线性方程组，设线性方程组有非0解，可以得到系数矩阵行列式为0，得到λ的等价关系。

再带入x=y=0看看是否为非线性方程组解

## 多元微分几何应用

### 基础知识

#### 场

场(field)：空间每一个点M(x,y,z)，都存在着一个权值u,形成场对空间的函数u=u(x,y,z),场是标量没有方向。

向量场(vector field)：空间每一个点M(x,y,z)，都存在着一个向量，形成场对空间每个点对向量的函数F(x,y,z)=P(x,y,z)i+ Qx,y,z)j+ R(x,y,z)k

F是向量，i,j,k依次为空间坐标x,y,z三个坐标轴上的单位向量,它们的模都是1,方向就是各坐标轴的正向.  
P、Q、R就是向量A在三个坐标轴上的投影. P、Q、R的合力正是M

向量场是矢量，既有方向又有大小。

#### 向量//考研里重合也算平行

对于=(x,y,z)，cosα=，cosβ=，cosγ=

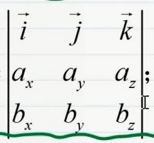
且+ + + =1

线性运算，值的是向量加减和乘以常数

**点积：**=cosθ 它是标量，得到具体的数

点积用途之一是通过判断向量垂直(充要条件)

**叉积：** 数值是sinθ，方向同时垂直于可见，叉积结果还是向量，n纬度的向量叉积，结果是n维行列式，比如：

行列式计算参考线性代数

行列式计算结果得到的向量，就是叉积结果

此外向量叉积有反交换律， = -

叉积用途之一是通过判断向量平行(充要条件)

已知三角形的某2边的向量即可得到以它们为边的平行四边形面积，进而得到三角形面积S=/2

**混合积：**

表示为=()结果是个标量

它运算规律是：==可以把第一个挪到后面结果不变； = = =

也就是相邻的换加”符号”

#### 空间平面

**点法式**：A(x-x0)+B(y-y0)+C(z-z0)=0

**一般式**：Ax+By+Cz+D=0

**截距式**： = 0 //截距式里a,b,c分别是在x,y,z上的截距

这里(x0,y0,z0)是平面上任意一定点。=(A,B,C)是平面法向量

**三点式：det(** //其中三点不共线

#### 空间直线

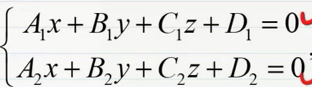
一个点(x0,y0,x0)和一个方向向量(m,n,p)确定直线，

**点向式**： = =

令点向式=t,分别提出z,y,z得到参数式

**参数式**x=mt+x0 , y=nt+y0 , z=pt+z0

**一般式**是说直线是由两个平面相交得到



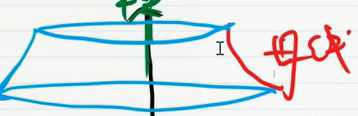
方向向量是两平面法向量叉积

**两点式：**

* 一般式化点向式：对法向量做叉积，在任取直线一点即可。
* 点向式化一般式：有无穷多组，找出直线上一点和其方向向量，然后利用线性代数的知识，得到其方向向量为系数矩阵的方程组的基础解析，则2个解向量分别是两个平面的法向量

#### 空间曲面与曲线

F(x,y,z)=0是表示曲面S

**旋转曲面**：

曲线绕坐标轴或者某条直线旋转而成

详细见<多元函数微分几何应用>

**柱面**

很简单，一个二维图形沿着第三个纬度在区间[a,b]内活动就形成柱面

空间中x^2+y^2=r^2代表一个高度无限贯穿z轴的圆柱

柱面和旋转面不一样，但有交集，圆柱即是旋转面又是柱面

* 证明曲面F(x,y,z)=0是柱面：

只需证明它的法向量垂直与某固定直线(方向是)，换句话说对于任意属于曲面的点(x,y,z)都成立

进一步，若证明曲面是以L为准线，为方向的柱面，只需证明：过L以为方向的空间直线在F(x,y,z)=0内

**空间曲线**

一般方程是由两个曲面相交得到：

F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0

联立上述方程消去一个字母令它是0可得投影曲线：若消去z令z=0可得在xoy面投影；若消去y令y=0可得在xoz面投影；若消去x令x=0可得在zoy面投影

**参数方程**：x=x(t)，y=y(t)，z=z(t) 也可以表示空间曲线

### 位置关系和公式

1. 点M0(x0,y0,z0)到平面Ax+By+Cz+D=0距离

d = //它和二维下点到直线距离很像

1. 点(x0,y0,z0)到空间直线 = = 距离

d = / 这里M是直线上任取的点

1. 空间直线L1和L2的夹角(方向向量是)

也是两空间平面夹角(法向量是)，二者公式相同

https://gss1.bdstatic.com/-vo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D320/sign=c4820ca56881800a6ae58f0c813433d6/ac6eddc451da81cb2c0176e75666d01609243130.jpg

1. 叉积判断平行(充要条件)

点积判断垂直(充要条件)

混合积判断三向量共面(充要条件)

推论：判断两条直线共面， 设是两直线各自任取一点组成的非0向量，是方向向量，若混合积：结果为ture，则说明共面

1. 两向量平行 ⬄ 对应坐标成比例，即：

()与()平行，则分母不为0

换成梯度也适用

### 其他求法

#### 空间曲面面积空间体积：

直角坐标：z=f(x,y),S= V=

#### 给定三点求平面方程

用三个点做出2个向量，求它们叉积即是平面法向量，再带入任意点即可有点法式得到平面方程

#### 平面束

已知两相交平面一般式：a1x+b1y+c1z+d1=0, a2x+b2y+c2z+d2=0

则方程π：a1x+b1y+c1z+d1+λ(a2x+b2y+c2z+d2)=0代表：过两平面交直线的除了a2x+b2y+c2z+d2=0以外的，所有平面，λ的不同取值决定了该平面与原本2个平面之间的角度。

由于a1x+b1y+c1z+d1=0, a2x+b2y+c2z+d2=0也可代表某直线一般式，则π也表述为过该直线的平面束。

注意，平面束不包括”被括号套入”的那个平面

#### 求投影

1. 点在面上投影：过点做面的法直线，求交点即可
2. 点在线上投影：过点做垂线
3. 线在线上投影：Prj(b,a)=代表a在b上得投影
4. 线在面上投影：如下

构造过L且与π垂直的平面，只要求出它的方程，π，就构成了直线一般式方程。其中，L和π的方程已知，只需求出

方法一：找L的方向向量和π的法向量 则即是法向量，然后在上随便找一点，即可得到方程。

方法二：得到过直线的平面束，由它的法向量与π的垂直可解出λ，得到。

1. 面在坐标轴上投影：如下

以xoy面投影为例，相当于求无数个平面z=k与曲面F(x,y,z)=0的所围交线的投影取并集合，即：F(x,y,k)=0，k∈R。

如果z可分离变为f(x,y)=φ(z)，则只需要求出φ(z)的最大值M,f(x,y)=M是投影

1. 空间曲线在坐标平面投影 or 两个曲面交线在坐标平面投影

给定空间曲线: F(x,y,z)=0和G(x,y,z)=0，

联立消去某个字母，就得到了关于另外2个字母组成面的投影

比如：消去z,就得到xoy面投影

由于F(x,y,z)=0和G(x,y,z)=0还可以代表两个空间曲面，故这个方法也表示两个曲面交线在坐标平面投影

#### 交点交线

1. 已知两直线求交点：联立方程组即可
2. 已知一条直线L和一个其他点P，求P到L垂线与L的交点

等价于求P为一点以L方向向量为法向量的平面，与L交点，求出这个平面联立方程组即可。

#### 方向余弦

任意向量=(x0,y0,z0)=|r|(cosα，cosβ，cosγ)

α，β，γ代表在x,y,z方向上的夹角

其中cosα= cosβ= cosγ=

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------

对于z=f(x,y)表示的曲面,则令u(x,y,z)= f(x,y)-z

其梯度gradu=( , , ) 令

---------------------------------------------------------------------------------------------------------------

对于F(x,y,z)=0表示的曲面

其梯度gradF=( , , ) 令

#### 椭球面一点切平面

上一点P(x,y,z)切平面方程是

相当于把分母的一个字母变成大写，大写X,Y,Z是变量

### 曲面的切平面与法线：

1. 曲面∑以隐式普通方程给出F(x,y,z)=0,则每一个点法向量是：= (,,)
2. 曲面∑以显式普通方程给出z=f(x,y),则每一个点法向量是：与z轴正方向成钝角：= (,,) 与z轴正方向成锐角：= (,,)
3. 曲面∑以二维参数方程给出x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),

则固定u求，固定v求 则=

则过点M(x0,y0,z0)的且与∑相切的平面可由和M确定， 同样，则过点M的法线也可由和M确定

关于= (,,)证明简单，把f(x,y)-z看做F即可

### 曲线的切线与法平面：

* 若曲线L是参数方程：x=x(t),t=y(t),z=z(t)则对于任意点的切向量是：

= (,,)

* 若曲线L是一般方程：F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0对于任意点的切向量是：

=× 也就是F和G的两个切面的法向量的叉积

则过点M(x0,y0,z0)的且与L相切的直线方程可由与M确定，同样

法平面的方程也可由与M确定

二维下，(,)代表曲线法向量，切向量是(1/,-1/)，且切线是

故化简后二维下的曲线切线方程是：

二维线的地位同三维面，公式都是类似的，若是套用三维线的，就会错

### 空间曲线绕空间直线旋转：

已知空间曲线г： {F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0}

已知空间直线L： = =

轨迹法已知空间直线方向向量=(m,n,p)和它上面一点

M0(x0,y0,z0),索性在点向式里就取M0=(a,b,c)

然后取旋转曲面的一个截面，截面是圆形的，圆上有点P(x,y,z)和

M1(x1,y1,z1)

此时有关系dis(P)=dis()，⊥，点M1在曲线上

dis(P)=dis()，⊥，F(x1,y1,z1)=0，G(x1,y1,z1)=0

联立方程组消去x1,y1,z1，留下x,y,z就能得到曲面方程

特殊的，空间曲线绕坐标轴旋转：

比如绕x轴旋转，此时M0就是o(0,0,0),=(1,0,0)

答案形如：

联立{F(x,y1,z1)=0， G(x,y1,z1)=0} 用x表示y1和z1，假设解出

最终答案 //左侧没有x

### 空间直线绕空间直线旋转：

已知空间直线 = =

求它绕坐标轴旋转的形成曲面的方程

用轨迹法，设曲面上一点是M(x,y,z)，再取和M在一个高度，且在直线上的点M0(xo,yo,z),他们有共同的圆心T(0,0,z)

由于MT和M0T都是半径，所以二者相等。

+ = +

把M0带入直线方程： = ， =

提出x0= +a , y0= +b

带入得到 + = ( +a)^2 + ( +b)^2

yoz面存在一条平面曲线L ：f(y,z)=0

它绕z轴旋转, 它投影在xoy面上是个圆，得到方程

f(-+ , z)=0

它绕y轴旋转, 它投影在xoz面上是个圆，得到方程

f(y, -+)=0

可以说，绕哪个轴旋转，哪个纬度字母不变

比如xoz面的曲线：-=1

绕z轴旋转得到-=1, 绕x轴旋转得到-=1,

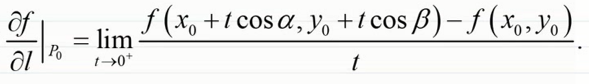
### 方向导数与梯度

多元函数梯度：

gradf(x,y,z)= + + =( , , )

梯度就是二维曲线或三维曲面法向量。

二维下方向导数定义



方向导数只是单侧导数，如果在M可微，那么任意方向导数都存在.

方向导数是数值，若已知点M(x0,y0)，求M处方向的方向导数

= + + = gradu(x0,y0,z0) (cosα，cosβ , )

= gradf(x0,y0)\* 特别的，若是单位向量，则不需要除以它的长度

* 当偏导数不存在时，不意味方向导数不存在，应该用定义求解

令θ是直线与向量gradf(x0,y0)夹角

θ=0说明与向量gradf(x0,y0)重合，此时方向导数最大

此时方向导数方向与梯度重合，也是曲线u=F(x,y,z)=0在这点法向量方向，此时方向导数数值是梯度的模

θ=π说明与向量gradf(x0,y0)竖直相反，此时方向导数最小

θ=π/2说明与向量gradf(x0,y0)垂直，此时方向导数是0

导数是对x轴方向的导数，它既不一定最大也不一定最小。

* **方向导数的方向与梯度关系使得方向导数值：重合最大相反最小垂直为0**
* 方向导数的提法：变化率，升高速度..变化率最大就是方向导数最大
* 二维空间，求一条路径使得沿这条路径u=u(x,y)升高最快？

设路径是y=y(x)或F(x,y)=0，沿着F(x,y)=0升高最快则说明F方向与u梯度平行，则 gradF与gradu垂直，即gradF\*gradu=0 =>

* 解出微分方程即可

--------------------------------------------------------------------------------------------

应用：

多元在M处增长/下降最快的方向，是方向导数最大/小的梯度的方向；增长是0的方向，是方向导数为0的梯度的方向

这里把角度看做未知数，去带入三角函数最值即可。

比如f(x,y)=(x^2+y^2),M(1,1)

求函数((增长/下降)最快)/变化率0的方向，以及相应导数

gradf(x0,y0)=(1,1) =\*cosθ，cosθ=1时=

cosθ=-1时=-，cosθ=0 ，时=0

增长最快方向就是梯度方向(1,1),下降最快是梯度反方向(-1,-1)

变化率0的方向是垂直于梯度方向(1,-1)或者(1,-1)

### 散度与旋度

设有向场为A(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z) + R(x,y,z)

A通过有向曲面的面流量φ(也叫面通量)

φ= =

描述为：通过有向曲面的面流量φ等于该向量场函数的曲面积分

不管是不是闭合曲面，

div(A(x,y,z)) = 记作向场A在(x,y,z)的散度，是标量

* div(cA)=cdiv(A)
* div(A±B)=div(A) ±div(B)
* div(uA)= udiv(A)+grad(u)\*A //其中u是某个函数

设有向场为A(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z) + R(x,y,z)

则A沿着闭合有向曲线г的环流量φ

φ=

描述为：通过闭合有向曲线г的环流量φ等于该向量场函数的曲线积分

**rot(A(x,y,z))** = 记作向场A在(x,y,z)的旋度,是矢量

**最大环量面密度**：旋度的模，即：|rot(A(x,y,z))|

* rot(cA)=c rot (A)
* rot (A±B)= rot (A) ±rot (B)
* rot (uA)= u rot (A)+grad(u)×A //其中u是某个函数
* rot(grad(u))=0, div(rot(A))=0,

散度和旋度分别对应高斯公式(div)和斯托克斯公式(rot)内部的式子

* 散度和旋度一般都是对坐标点(x,y,z)来说，若问如(y,z,x)就要调换公式里的

∂x,∂y,∂z,的对应位置

* Rot=(0,0,0)叫做无旋场，div=0叫做无源场，此时积分与路径无关

Rot=div=0叫调和场

## 多元函数积分：

与三重积分，二重积分的区别，曲线面积分不论几型，都可以直接带入

而三重积分，二重积分都绝对不能带入

### 三重积分：

三重积分是对三元函数积分，几何意义是：

密度各处不相同随函数变化的立体物体的质量，因为质量是密度乘以体积嘛)。

或者也可以理解成4维空间下，4维物体体积，可以想象成某个物体时间乘以三维体积是4维体积。

定义是= =

这里dv是简写,

三重积分是把空间和时间无限分割，类比二重积分(从三维图形的顶端无线分割，切成一个个小的四棱柱，二维下是对底面平面区域分成一个个小矩形), 三重积分是从四维图形的顶端无线分割，三维下是某个物体切成一个个立方体小丁，时间上从a时刻到b时刻(最外层积分上下限),可以看成是四维的四棱柱

#### 基本性质

它有着1和2重积分全部性质，包括各种对称性，特别强调轮换对称性，它是针对面来说的，比如设物体相对于xoy面对称(没有字母z)，

且积分区域是D，xoy面上半部分积分区域是D1

对z奇函数：=0

对z偶函数：=2

三重积分的{与D的方程}，里的x或y或z同时用其他式子替换，答案不变。

#### 投影法(先一后二):

对于把物体向xoy面上投影：投影的区域是D，是物体上表面的z关于v2(x,y)的函数，是物体下表面的z关于v2(x,y)的函数，解决办法是先把x,y看做常数，对z算一重积分，得到关于(x,y)的函数，再在进行二重积分即可算出答案。(也叫先一后二法)

=

这里一定要比高，和还有D如何确定？

z1(x,y)和z2(x,y)代表了物体的上下曲面

是通过题目给定的物体空间方程确定。试图分离给出空间物体方程的z，即可得到曲面方程

内部二重积分的区域就是底面的投影，找到投影方程即可解出二重积分

#### 切片法(先二后一,适用于旋转体):

假设积分区域是由外圈曲面F(x,y,z)=0围成(如果内圈是空的相减即可)

这种计算法要满足图形在竖直方向是规则的，可用一个xoz的竖直面转动，角度是[α，β]

把物体向z轴上面投影：得到物体高度范围是[c,d],之后垂直着z轴，用无数个平行于xoy的平面切割物体，切割成无数片，每片看成一个二维图形。每片区域是D，分别对无数个区域D进行二重积分

=

=

这里a和b不是曲面方程，是物体在z轴尺度上的”保守”范围，是确定的2个常数

通过分离y,得到y=f(x,z)的函数,作为最外层积分上线，下限默认是0，如果区域是空心的可以用2个积分相减

而c和d是物体在x轴尺度上的保守范围，是常数。

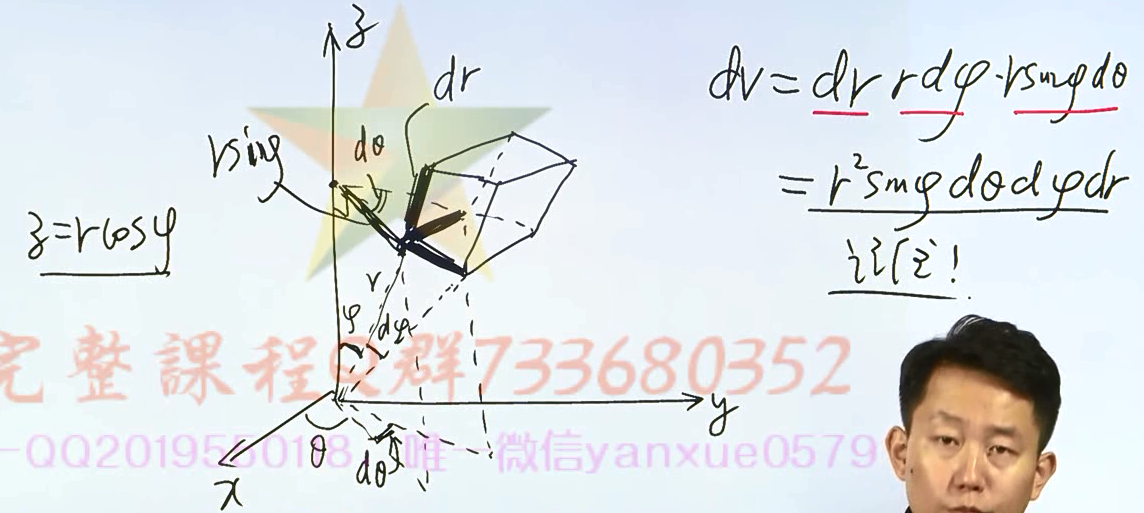
如果采用柱坐标二重积分，假设外圈F(x,y,z)=0可带入{x=rcosθ, y=rsinθ}变成r=R(θ,z),且满足：竖直方向是规则的，可用一个xoz的竖直面转动，角度是[α，β]

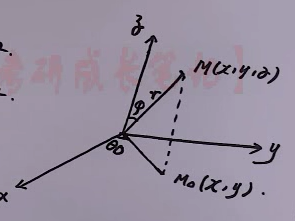
=

#### 球坐标(适用于类球体)

对于函数中含有x^2+y^2+z^2的三重积分，它的形状类似球体，采用球坐标系会简单一些。

/\*球坐标系下dv=sinφ \*(drdφdθ) 是怎么得来，相当于把物体分成小立方体丁，高是dr，底面长y轴方向是rdφ(扇形弧长公式)，宽x方向是rsinφdθ (rsinφ为半径的扇形弧长)





如图所示的球坐标系通过2个角度1个极径来定位一点(类似平面极坐标系)，φ是与z轴正方向夹角，θ是点M在xoy投影与x轴正方向夹角，r代表极径长度(一定大于0)。空间可以有二维函数r=(φ,θ)确定，而三重积分被积函数可以写成：f(φ, θ,r)的形式

与直角坐标系下的x,y,z有如下关系(观察即可看出来)

x=r sinφcosθ

y=r sinφsinθ

z=r cosφ

dv=sinφ \*(drdφdθ)

φ, θ,r均通过给定的物体方程V确定。

在对物体三重积分时，**θ就是用一个竖着的xoz平面，以z轴为轴转方向是(x正 -> y正 -> x负 -> y负)，θ**∈[0,2π]，碰到物体时角度是积分下限，出物体时角度是上限,如此做一定能确定θ

φ和θ不同，φ也可以是一个初始与z轴正方向重合的线，然后按照任意方向旋转得到的角度，φ∈[0,π]，如果底面是个球或者锥，可以想象φ确定的具体数值，否则φ是关于θ的函数，位于z上半部分的物体，φ一定是正数，位于z下半部分的物体，φ一定是负数

#### 化简计算：

不论二重还是三重积分或是第一类曲线曲面积分，都利用轮换对称性，替换字母，对于第二类曲线曲面积分，应该先变成普通积分，再化简

求，积分区域： + + <=1与z=0的平面围成区域

可令x=x+1,y=y+1,z=z/2

=

=

积分区域变成了上半球 + + <=1

在计算三重积分时如果积分区域是负的，比如z=-

### 第一型曲线积分

几何意义：对二元函数(一元也包括)的曲线积分是三维曲面面积

第一型曲线积分表达式是，L代表z=y(x)这个曲线，ds就代表对这条线积分。这里z=f(x,y)是二元函数，按照弧微分公式

ds==

曲线积分表示为 或

特别的，曲线为闭合曲线时，可表示为：

或

#### 普通带入计算法：

一：投：向坐标轴投影，沿着平行于y轴弯曲的就得向xoy面投影，弯曲函数是y=y(x)，得到伪二元函数的积分

找到投影后的上下限a和b

如果是空间的曲线，要先往面投，再往轴投。

如果是以参数方程给出，还要通过函数求t.

二：代：带入f(x,y)和y(x)，如果是参数方程给出，带入参数方程

三：计算

**二维**： =

**三维**：

=

**参数方程**：曲线{x=x(t), y=y(t), z=z(t)}

=

对于二维下的曲线积分可以化为极坐标形式，先把y=y(x)变成极坐标，设为r=r(θ)

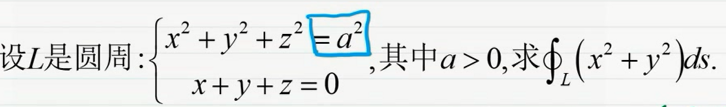
=

#### 整体带入计算法

L:{F(x,y,z)=G(x,y,z)=0} 求

当且仅当联立:{F(x,y,z)=G(x,y,z)=0} => f(x,y,z)=A

在计算曲线积分时，应该注意利用轮换对称性和普通对称性化简式子，来凑整体带入法，如



#### 性质：

第一型曲线积分相当于区域是曲线的二重积分，拥有二重积分的性质。

* =A，A代表曲线弧长
* 估值定理：f(x,y,z)在L上连续内，设m和M分别是最小值最大值，A代表曲线弧长

mA<= <= MA

* 中值定理：f(x,y,z)在区域L内连续，则存在v3(ξ1,ξ2, ξ3)∈L使得：

，A代表曲线弧长

* 若D关于yoz面对称，设L1是L沿着面切开的其中一半

f(-x,y,z)=-f(x,y,z)则 =0

f(-x,y,z)=+f(x,y,z)则 =

类似的关于其他面对称也有这样的结论

若D关于y轴对称，说明L左右对称，设L1是右边一块

f(-x,y)=-f(x,y)则 =0

f(-x,y)=+f(x,y)则 =

类似的关于其他轴对称也有这样的结论

看对称性时，只看相关的字母，比如f(x,y)=2xy,且L关于y轴对称，则f(x,y)=2xy只把x当变量，2y看做常数，它是个奇函数，=0在L满足关于y轴对称的前提下成立

* 轮换对称性： =

此时曲线的方程y=y(x)或者{x=x(t), y=y(t), z=z(t)}的字母也要发生对应改变。

轮换对称性说白了就是可以用任意字母当中被积的自变量

* 特殊的若曲线的方程y=y(x)和x=x(y)相同，则f(x,y)= f(y,x),可任意替换都完全相等

### 第一型曲面积分

几何意义：把二重积分的底面在第四维下弯曲，求此时的弯底的四维薄片体积

第一型曲面积分的表达式是，一般已知怎么弄弯的这个面z=z(x,y)。dρ代表对z(x,y)这个面积分。按照曲面微分公式

dS==

计算方法：

一：投：向空间投影，比如向xoy面投影，弯曲函数应该变成以z为自变量是z= z(x,y)，得到伪三元函数的积分

，D是空间物体的积分区域

二：代：积分区域D,以及带入f(x,y,z)和z= z(x,y)

三：计算：

对于直角坐标：

//曲面写成F(x,y,z)=0

这里如果不给z对x和y的函数而是x=x(z,y)或者y=y(x,z)，曲面微分对yoz面投影：

对xoz面投影：

第一型曲面积分还可以用柱坐标和球坐标表示，待填坑

第一型曲面积分可以用2个参数的参数方程表示，但很麻烦

* 偏导数可以用复合隐函数求导法，再配合二型面化一型面的方向余弦时可以重复利用

### 第二型曲线积分：

#### 形式和物理意义

它没有几何背景，是由物理问题得来，它解决了变力沿着曲线做功的问题。把曲线无线分割，每一段既有方向又有大小(因为力是矢量)

这里也可以理解成，一个水流函数按照某个函数F(x,y)从A到B流，求对平面某个有向点的通量。

做功的公式W=FS= (P(x,y)i+ Qx,y)j)S 其中F是个有方向的量

L是代表曲线，它有起点和终点，一般L和起点终点都是已知

dW= Pdx+Qdy => = ，P,Q代表2个函数

#### 奇偶性质：

第二类曲面或者曲线积分，有轮换对称性，但普通对称性和普通积分不同：

**平面的(二维)**：

若曲线L关于x轴对称(其他轴同理),是L关于x轴上半部分，是L关于x轴下半部分， 中，则只看，对的y来说:

若相同方向:”偶倍奇0”； 若相反方向:”偶0奇倍”，

但如果把它化为普通积分，则可以使用普通积分的对称性。

#### 直接带入计算

**二维**

P和Q， y=f(x)，起点M1(a1,b1), M2(a2,b2)都是已知条件，可以直接把相应关系带入

普通函数 = =

参数方程: =

不论哪种方法，直接带入法应该**格外注意正负号问题：**方向(正负号)都是与积分上下限有关，不用外加正负号

如果用普通函数带入：

以往x轴投影为例，关注给定的起点和终点往x轴投影后的起点和终点

如果用参数方程x=x(t),t=t(t),z=z(t)带入：

关注给定的起点和终点的每个对应坐标的始末对应的t

特殊的如果满足 = ，说明积分与路径无关，可以自定义任意有向线来计算，结果不变,但注意若被积函数存在无定义点，则自定义的曲线不能经过这些无定义点，即自定义新曲线应该在被积函数定义域内。

**三维**

P, Q和R， y=f(x)，起点M1(a1,b1), M2(a2,b2)都是已知条件，

1. 如果知道空间曲线关于某个轴的解析式y=y(x),z=z(x)可直接带入方向根据原本确定
2. 如果知道空间曲线参数方程x=x(t),y=y(t),z=z(t)可直接带入方向根据原本确定
3. 如果知道过空间曲线的某个曲面，且可以显式表达成z=z(x,y), x=x(y,z),y=y(x,z)

可直接带

相当于向xoy面投影化为二维曲线来做.投影的曲线和原本曲线方向一致

#### 化成第一类曲线积分

其中()是与L同方向的单位切向量，就是夹角余弦值，不是具体数，而是关于x,y的函数

#### 曲线牛莱公式

如果能判定积分与路径无关,其中L起点是A终点是B

则必定可以找到D内存在可微的u(x,y)使得du=Pdx+Qdy.

则

寻找u(x,y)可以用偏微分法和凑微分法

#### 格林公式

假设曲线L光滑 &&

L可围成一个封闭区域设它是D &&

P(x,y)和Q(x,y)在D上具有一阶连续偏导数 &&

L取正向(**使用右手定责握住，拇指指向观测者，**叫做正向，否则是负向)

简单来说就是从上往下看，以逆时针为正向，如果内部有洞，洞以顺时针为正向

则有如下等式：

=

P是dx前面的函数，Q是dy前面的函数

描述为：沿着边界的变力做功 等于

覆盖封闭区域的变力的偏导数相减得到的体积(二重积分)

**格林公式要格外注意正负号问题，**特别是对于补线问题，L:y=sinx从(0,0)到(π,0) 且设L1,从(π,0)到(0,0),

1. 如果条件不满足” 一阶连续偏导数”：

做法是打补丁，之后再减去补丁的地方，选取合适的圆和椭圆，把残缺的点完全覆盖，其半径是a,=0

1. 特殊的如果满足 = 且但联通区域说明积分与路径无关，可随意更换包含缺少点的完好闭合曲线
2. 如果条件不满足”曲线闭合”：则加几条线使图形闭合，然后在减去

如果再边界上出现不连续点，也要用打补丁的方法，但补丁的形状只有一半。

比如对于，L是逆时针单位圆=1或者且从(1,0)到(-1,0)

先补线它是针从(-1,0)到(1,0)沿着y=0,使区域闭合

再补椭圆=a^2且y>0使得函数在区域全都有定义

用格林公式之后减去所有的补丁

#### 斯托克斯公式

**条件**：向量函数F(x,y,z) =Pi+Qj+Rk具有一阶连续偏导数&&曲线C闭合

存在或选取有向曲面∑，使曲线C为∑边界，C方向与∑方向成右手系(按照右手定则握住C，拇指和∑方向同向，这个方向后面会用到)

有如下行列式

=

=

= //第二型曲面

= //第一型曲面

其中， 代表和它相乘的式子对x求导,

P1,Q1,R1表示求导相加减后的结果函数

在斯托克斯公式里，∑的选取是任意的，不会影响结果，变成第一类曲面积分在斯托克斯公式里一般计算较简单，若变成第二类需要处理大量方向问题

**如果用 计算**

是第二型曲面积分，变成了高斯公式或直接计算法的问题

要求出面∑的投影作为积分区域，根据之前∑方向的x,y,z轴分量取正负

准备用高斯公式计算，∑不能取平面，取球面比较简单。

准备用直接带入计算，∑取平面比较简单。

**如果用 计算**

是第一型曲面积分，显然∑取平面比较简单。可使三个夹角余弦是常数

α，β，γ怎么算出来

∑的平面方程已知,求出法向量单位化即可(即便∑是曲面依然可以通过求导求得法向量)，或者提出z用公式

cosα= cosβ= cosγ=

对=(a,b,c)的平面来说：

cosα= cosβ= cosγ=

不论用什么方法，正负要看右手定则得到的∑的方向向量，把方向分解成x,y,z三个方向的然后给cosα，cosβ，cosγ添加符号

### 第二型曲面积分

#### 概念

沿着某个空间水流(是个向量函数)的路径走，它穿过某个有向曲面∑，流过这个曲面的通量或者说对这个曲面做的总功。

=

在曲面∑的某微元dS上，可以分成向量=(P,Q,R) 其中P,Q,R是是三个方向的函数，dS是有向曲面∑的微分，也可以分解

dS=(dydz,dzdx,dxdy)它代表曲面∑微分的x,y,z方向上的投影

它还可以写成dS=，=(cosα，cosβ，cosγ) ，

α，β，γ代表有向曲面的某一点的切平面的法向量在x,y,z方向上的夹角，且这个法向量是单位向量。

所以第二型曲面积分的式子是：

= =

=//这是第一型曲面积分

特别的，如果是闭合曲面可表示为

它是向量函数F(x,y,z) =Pi+Qj+Rk通过向量曲面∑的通量,这类比第二型曲线积分：向量函数F(x,y)通过某个有向点的通量

=

这个等式左边是第二型曲面积分，右边是第一型，由此也能看出二者联系，其实和两个曲线积分的联系类似

曲线积分： =

#### 奇偶性质：

第二类曲面或者曲线积分，有轮换对称性，但普通对称性和普通积分不同：

若曲面关于xoy面对称(其他面同理),是关于xoy面上半部分，是关于xoy面下半部分， 中，则只看，对的z来说:

若相同方向:”偶倍奇0”； 若相反方向:”偶0奇倍”

#### 直接带入和化为第一类计算

**化为第一类**：

=

按照第一类曲线积分解法，方向余弦用梯度求，对于：F(x,y,z)=0表示的曲面

梯度gradF=( , , ) 令

法向量有两种方向，方向余弦也有两种方向，我们取与曲面方向一致的。

--------------------------------------------------------------------------------

**直接带入**：

I= sgn(cosα) +sgn(cosβ) +sgn(cosγ)

= sgn(cosα) +sgn(cosβ)

+sgn(cosγ)

积分区域D1，D2，D3 ，是曲面投影到yoz,xoz,xoy图形，

这里+sgn(cosγ)怎么取：看曲面方向的分量，以相应轴正方向为正1,垂直取0，,负向取负1,也可以通过方向余弦公式求出方向预先再判定。

如果曲面在不同部分的正法向量的分量方向的余弦的符号不同，要把曲面拆开算，这样很麻烦，所以此时应该考虑高斯公式或者变成第一类曲面积分

* 对于非封闭曲面，若div F(x,y,z)=0，叫做”无源场”,说明积分与路径无关，可以在其边界不改变的前提下换任意曲面(方向不变，不能过奇点)，计算结果不变

**两种方法的区别：**

直接带入:一般要投影三个面，要确定方向余弦的正负，不必算出表达式。

转换一类:要先求梯度，计算方向余弦，从2种方向选一个与一致的，变成第一类后要投影一个面，求另外两个方向的导数，即

#### 投影转换法+直接带入计算：

推导：I=

对于F(x,y,z)=0表示的曲面

其梯度gradF=( , , ) 令

则

则

以xOy面为例：

#### 高斯公式计算

**满足**：有向光滑曲面∑是个封闭曲面，正方向是外侧&&无奇点&&

且向量函数F(x,y,z) =Pi+Qj+Rk具有一阶连续偏导数

=

表述为第二类曲面积分，可在满足条件情况下变成：以围成体积作为区域，对P,Q,R求偏导下的三重积分

题目中可能不会满足封闭曲面，做法是补一个面，变成三重积分减去增加曲面的二重积分

题目中可能P,Q,R一阶偏导不连续,缺某些特殊点，做法是把这些点看做是一个球体，然后减去这个球体的曲面积分，再对球体半径取极限。

* 特殊的，对于封闭曲面，若div F(x,y,z)=0，叫做”无源场”,说明积分与路径无关，可换任意闭合曲面用高斯公式(方向不变)。若封闭曲面内缺少若干点但div F(x,y,z)=0，则无需补点直接当作不缺计算，或者用其他包**含缺少点的封闭曲**面代替原来曲面皆可，答案不会变化。这个性质类比格林公式

### 总结：

* 给线面方程但全程不提方向 => 第一类线面积分

带有起点终点的线，有方向的面 => 第二类线面积分

* 第一类曲线积分，第一类曲面积分：

直接带入，整体代入，用对称性。

* 第二类曲线积分：

直接带入，变成第一类，曲线牛莱公式，格林公式，路径无关，斯托克斯公式(曲线是空间一般式)

* 第二类曲面积分：

直接带入，变成第一类，高斯公式

#### 题目和细节：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 三重 | 一型线 | 一型面 | 二型线 | 二型面 |
| 轮换对称 | Yes | Yes | Yes | Yes | Yes |
| 普通对称 | 偶倍奇0 | 偶倍奇0 | 偶倍奇0 | 偶0奇倍 | 偶0奇倍 |
| 直接带入： | 投影，切片，球坐标 | 直角，参数方程，极坐标 | 直角, | 直角，参数方程，曲线牛莱公式 | 直角 |
| 化简 |  |  |  | 化成第一型曲线 | 化成第一型曲面 |
| 公式 |  |  |  | 格林公式化为二重积分  ---------------------  斯托克斯公式化为二型面或一型面 | 高斯公式化为三重积分  ---------------------  投影转化法 |
| 路径无关 |  |  |  | “无悬场”换路径，但不能经过奇异点，换完和原本曲线要构成单联通平面 | “无源场”换曲面，但不能经过奇异点，换完和原本曲面要构成单联通空间 |

* 4种线面积分的题目经常让2个物体互相”截”，让你用被截得部分的线或面来做积分，此时就要注意是谁被谁”截”，这决定了题目对错

如：求锥面被柱面的图形面积

上述题目做曲面积分时要带入锥面而非柱面

* 4种线面积分的直接带入法投影时要看是否从一个方向投影。

对于第一型曲面积分：如果从双向投影比如区域是整个球面，结果应该乘2；

如果两侧面不规则的只能分开计算。

对于第二型曲面积分：如果从双向投影比如区域是整个球面，看方向，二者反向则结果乘2，二者同向则是0；如果两侧面不规则的只能分开计算。

最保守的办法就是遇到两侧有面时分开计算

#### 路径无关理论说明

**对于单联通区域D**

* 的答案只是与的起点终点以及P,Q有关，与本身的方程如何无关
* = 在D内处处成立
* D内存在可微的u(x,y)使得du=Pdx+Qdy
* 矢量函数=P(x,y)i+Q(x,y)j为某单值函数u(x,u)的梯度,

Grad(u)==P(x,y)i+Q(x,y)j

* u = Pdx+Qdy = 0是个全微分方程

已知单联通区域路径无关有”三个是”的结论:是全微分，是全微分方程，是梯度

其中，”是全微分”的其他提法：Pdx+Qdy原函数存在

**对于复联通区域D**

此时积分与路径无关是 = 的充分条件。积分与路径无关有如下充要条件：

* = 在D内处处成立，且存在某个闭曲线L1包含D的奇点，使
* D内存在可微的u(x,y)使得du=Pdx+Qdy.

//寻找函数u时，可用凑微分法和偏微分法,且求出的u(x,y)定义域必须包含D，否则无效(例如原本奇点放大为奇线就不行)

* 矢量函数=P(x,y)i+Q(x,y)j为某单值函数u(x,u)的梯度,

Grad(u)==P(x,y)i+Q(x,y)j

* u = Pdx+Qdy = 0是个全微分方程

上面4个任意找到一个成立，就可说复联通区域内积分与路径无关

#### 路径无关

rot(P,Q,R)=0//说明是无旋场，表述为旋度是0向量，二维来说就是 =

1. 无旋场路径且单联通区域，无奇点：则积分与路径无关，在单联通区域内随意换路径，特殊的如果是封闭曲线，则答案是0
2. 无旋场路径且复联通区域，有奇点，闭曲线：则用合适的图形补上奇点，使得函数在复联通区域可导，在复联通区域用格林公式
3. 无旋场路径且复联通区域，有奇点，非闭曲线：保证换的路径和原有路径围成单联通区域的条件下(但方向还是A->B换得路径和原本同向)，才能换路径。也可以补线变成(b)的情况

#### 三大公式关系

<https://blog.csdn.net/yu132563/article/details/84589602>

格林公式相当于斯托克斯公式在xoy面投影。

斯托克斯公式相当于格林公式的在三维空间里的形式

格林公式相当于高斯公式本身的二维形式

高斯公式相当于格林公式本身的三维形式

应用层面，使用斯托克斯公式，相当于把计算复杂度转化：

联立方程带入复杂曲面消去x,y,z中字母的2个，求定积分

=>计算行列式，求导，带入简单曲面，求二重积分

当”联立方程带入复杂曲面”复杂度极高时，应该采用斯托克斯公式

步骤：找PQR列行列式，找面找方向，计算。

或找PQR列行列式，找法向量余弦，计算直接出结果

### 综合题

1. 空间平面和曲面交线的曲线积分

L为{Ax+By+Cz+D=0, G(x,y,z)=0}

注意到斯托克斯公式里∑的选取是任意的，那就转换成平面

变为π：Ax+By+Cz+D=0,的曲面积分。

对平面来讲，显然提取出z=f(x,y)更容易，求曲面积分显然更容易带入或化为第一类。

1. 空间曲面和曲面交线的曲线积分，但曲线在某个面的投影较简单

,L为{F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0,在某个面的投影较简单}

再转换投影：

直接带入即可化为简单二重积分

### 整体带入的有关问题

曲面积分在计算前先观察能否整体带入，这样有利于简化计算。

但带入必须全部带入，不能一部分带入一部分不带入，且带入后如果补面化为高斯公式，变成三重积分减去二重积分，两部分临时结果会发生变化，但减去之后结果仍然与暴力计算相同。

比如 ∑是z=向外

如果暴力计算，答案是π，如果事先带入=

会让计算简单很多，值得注意的是：

带入=后如果高斯公式，变成了

- = 0-(-π) =π

不带入=后如果高斯公式，变成了

- = – (-) = π

可见：带入和不带入，只是用高斯公式计算的过程和中间结果不同，但最终结果相同。

利用此性质，可以命制高斯/格林反用的问题，

r(x,y,z)= ,,

对于,本身结果A易求

同时：，

则由高斯公式：

其中易求设结果为B

则三重积分

### 曲线面积分的其他应用

1. 二型线和方向导数综合

求 其中n是L法向量,L为简单闭曲线方向逆时针,u有二阶连续偏导

分析：

有个误区是：以为再ds，化为第二类曲线，不就是=，由格林公式答案不就是0吗？

错误原因：n是法向量，但

曲线积分第一类第二类相互转化：

这里的()指的是曲线的切向量，第二类曲面才是法向量

正确方法：

n=(),则切向量l=

或

其中

=

1. 形心公式逆用，这个方法可以作为特殊的曲线曲面积分的计算公式，

对于计算来说，直接计算比较麻烦。但满足：积分区域几何体形心可观察得到设观察的结论, 且易求

根据公式，有这个独特方法，其他类型积分也适用

## 微分方程

### 概念

微分方程就是给定一个带有x,y,的等式，让你求出一个y=f(x)

**常微分方程：**未知函数是一元函数的微分方程

**微分方程的阶：**最高导数的阶数

**微分方程的解：**带入后使得等号成立的y=f(x)的函数

**微分方程的通解：**解里含有独立常数的个数等于其阶数，独立常数一般用C表示，通解不一定包含全部解

**微分方程的特解：**给定初始条件，确定通解中常数后的解

**微分方程的奇异解：**指无法由通解中求出但仍能符合微分方程式的解，奇异解只会在非线性方程式中才会出现。

### 一阶可分离变量

= f(x)g(y)= => =f(x)dx

这种只要把y,dy放到等号左侧，x,dx放到等号右侧

两边同时求不定积分即可

注意：

* 在 =f(x)dx求积分这里，求完就要有”+C”，微分方程这块要严格按照什么时候求不定积分什么时候+C,不能延迟+C

若结果里出现如e^C等常数，就要把它变成C

* f(x)g(y)= => =f(x)dx 这一步g(y)做分母，默认g(y)!=0但事实上是可以等于0的，所以这里可能丢掉奇异解。

### 一阶线性

+p(x)y=q(x)，其中p和q都是已知连续函数

设g(x)= 背公式：

Y= (x) ( + C)

推导过程如下:还是设g(x)=

+p(x)y=q(x) => g(x)(+p(x)y)=g(x) q(x)

注意到：g(x)\*p(x)=它正好是(x)

利用乘法复合求导公式，g(x)(+p(x)y)= g(x)+y(x)=

= g(x) q(x)两边求不定积分

Yg(x)= +C 把g(x)移到右边可得到结论

注意：一阶线性微分方程里，取对数的地方均不加绝对值，原因是可证明加不加不影响答案，在张宇书上有。

### n阶常系数线性齐次方程

形如： + =0 ，其中pi代表常数

该微分方程解得情况由n次关于λ的普通方程给出

+ =0 ，这个n次普通方程一定有n个根(因为它有n次嘛)，这些根里不确定有多少复数根多少实数根(可能没有复数根，也可能没有实数根)。把n个根中，相等的根合并成一组，每组有若干个(设为k个，每组的k都可能不同)，每组都对应着原微分方程解的k项。接下来对于每组来说：

* λ为这一组的解，当λ是实数时，对应k项

() 特殊的k==1是 C

* λ为这一组的解，当λ是复数时(共轭复数)，λ=a± bi，对应2k项

() + () C,D都是常数

特殊的k==1是 (C cosbx+D sinbx)

总的来说对于n次常系数线齐次方程，它通解一定有n项，就是上面说的所有组的加和

### 2阶常系数线性齐次方程

可以证明对于n此普通方程，n>=5时不存在求根公式，没法判断哪些是实数根，哪些是复数根，以及哪些相等，所以n阶常系数线齐次方程不一定求得出来解，但对于二阶方程就很简单了。

+ + q =0 Δ=p^2-4q

Δ>0说明2个不等实根：y= +

Δ==0说明2个相等实根(也叫二重根)：y= (+)

Δ<0说明2个不等复根a± bi：y= ( + )

### 2阶常系数线性非齐次方程

+ + q = f(x)

该方程的通解是：对应齐次方程的通解 + 一个特解

先解出对应齐次方程的其特征方程的2个根λ1和λ2

特解设为 ，问题转化为求特解(一下Pn和Qn代表n次多项式)

这个地方考研只考两种类型：

注意：特解形式只与右侧的非齐次项有关，与齐次通解形式无关

#### **类型一**

f(x) = (x)时，特解设为 = (x)

k确定方法：k=0;for(int i=1;i<=2;i++)if(a==)k++

此时若λ1和λ2是复数那显然k=0

(x)是n次多项式，(x)=

用待定系数法，把带入原方程

要 + + q = f(x)= (x)

解出Ai即可，计算会有点麻烦

#### 类型二

f(x) = ( (x)cosbx + (x)sinbx )

特解 = ((x)cosbx + (x)sinbx )

K确定方法：k=a±bi是 对应齐次方程特征根? 1:0;

显然特征根是实数时k=0

PP和QQ是另外2个多项式，求法还是待定系数法，确定系数，计算比较麻烦。

实际上类型一是类型二的特殊形式，只记住类型二就可解决类型一

### 全微分方程，求函数u

几种提法：

1. 已知路径无关 = 在区域D内处处成立，求存在u(x,y)使得:du=Pdx+Qdy
2. dP/dy==dQ/dx，求微分方程P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0
3. (P,Q)是某个函数的梯度，求这个函数u(x,y)

#### 全微分法：

令f(x,y)==C

按照曲线积分计算，路径无关理论,任选一个从()到(x,y)路径,比较简单是(0,0)到(x,0)到(x,y)

= + = f(x,y)

f(x,y)=C即是通解 ,未知函数u(x,y)=f(x,y)+C

#### 偏微分法：

按照偏微分方程计算，因为已知通解形式是z(x,u)=C,故微分方程中的P,Q都是z的偏导数，z(x,u)= 则解出可得u(x,y)=z(x,y)+C。

#### 凑微分法

P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 => du= P(x,y)dx+Q(x,y)dy

寻找函数z=ϕ (x,y)和ψ (x,y)使得:

则du= P(x,y)dx+Q(x,y)dy=

当成一元函数去积分即可

* 通常情况下凑微分时两个d是不能合并以及相加的。但是如果对P(x,y)看做x的函数，Q(x,y)看做y的函数，化du= P(x,y)dx+Q(x,y)dy= d+d

可以把他们可以非相加合并du= d+d=dR(x,y)

### 换元法

#### 主次关系换元(x,y地位)

对不认识的微分方程可采取x与y对调位置，把x与y地位交换，

一阶： =>

尤其是对二阶 =>

#### x,y的一次多项式换元

= f(ax+by+c) =

令ax+by+c=u即可，则y=(u-c-ax)/b

原方程变成了f(u) = ( - )/dx => = a+bf(u)这是可分离变量的，

= dx 两边积分即可

#### 和换元

= φ() 或者 = φ() 这种叫齐次方程，令u= 或

= φ() => = φ(u) => = //φ()的x在分母

= φ() => = φ(u) => = //φ()的y在分母

#### y的幂换元(伯努利方程)

+p(x)y=q(x)\*，其中p和q都是已知连续函数

其实它就是一阶线性右边乘以个y^n而已，方法就是化成一阶线性

两边同除以y^n，再令z=,得到一阶线性方程：

+ p(x)z= q(x) => + p(x)z= q(x)，用一阶线性方程公式即可

#### 导数换元(降阶法)

**= f(x) 型**，直接反复求不定积分即可，结果含有n个C

**= f(x, )型**，这种形势下f里没有y,令p=,则=

原方程由 **= f(x, )**变成= = f(x,p)，再用其他方法求解

若求得其解时候p==φ(x) 再通过不定积分可求得y本身

**= f(y, )型**，这种形势下f里没有x,令p==,

则== 而由p==,可知，dx=dy/p

原方程由 **= f(y, )**变成p = f(y,p)。再用其他方法求解

若求得其解时候p==φ(y) 变成了可分离变量的方程，用分离变量法求解即可。

* 可降阶的微分方程带有In()的地方要注意加绝对值，事实上除了一阶线性，其他都不能省绝对值

#### 指数换元(欧拉方程)

+ px + qy =f(x) p,q是常数

解法是还元，x>0时，令x= ；x<0时，令x=

二者关系：通解中的x互为相反，只需对x>0通解取反就可得到x<0通解。

不论x大于还是小于0，可以转化成二阶常系数线性方程：

+ (p-1) + qy(t) =f()

//记忆法是带入前的px变成p-1，系数变成1

按照二阶常系数线性方程解法，最后把t换回x即可

应该注意这个推导过程，里不可简单代换x^2

应该是先计算= 之后求d()/d()

= +

推广：

所有形如 = f(x)的方程都可以用x=e^t转换成对应n阶常系数非齐次方程来计算。

令x=有结论

= //系数{1}

= + //系数{-1 ,+1}

= - + //系数{2, -3,+1}

= //系数{-6, +11,- 6,+1}

= S(n)(i)是第二类斯特林数

有n个数

i==1时， =

1<i<n时， = -

i==n时， =1

它就是第二类斯特林数S(n)(i)

### 差分方程

一阶线性齐次常系数差分方程 通解是

一阶线性非齐次常系数差分方程通解是

### 性质：

* 任何非齐次方程的通解=某个本身的特解+对应齐次方程通解
* 对于任何非齐次线性微分方程 ××××××=f(x)

若f(x)=f1(x)+f2(x)+…+ fn(x)那么可以拆成n个方程分别求解，最后通解相加

* n阶常系数线性齐次方程里，若特解是y= φ1(x)+ φ2(x)+…+φn(x)

则y= k1φ1(x)+k2 φ2(x)+…+knφn(x)还是原方程的特解

也就是每个函数随便乘以常数后，y还是原方程特解

* n阶常系数线性非齐次方程里，若都是特解

则y= k1φ1(x)+k2 φ2(x)+…+knφn(x)中,有如下充要条件

若==0 🡸🡺 y是对应齐次方程的特解

若==1🡸🡺 y是原方程特解

其他情况不是原方程的解

* n阶线性齐次方程里(不一定常系数)，若有n个线性无关的特解，那么，y=是该方程通解，代表通解里的常数

线性无关是不成常数比例，1-x和1-x^2也算无关

* 若y1是齐次方程特解和y2是非齐次方程特解，则y1+y2是非齐次方程特解。因为: 齐次和非齐次等号右边相差f(x), y1带入非齐次会让等号左边变成0，y1+y2等效于y2
* 若y1和y2是非齐次方程特解, 则y1-y2是对应齐次方程特解
* 非齐次方程 + + q = f^(n)(x)记为PDE(n)

若y1是PDE(1) 特解和y2是PDE(2)特解，则y1+y2是原方程即

PDE(0)特解。

* 给定通解求微分方程，只需要对它消去常数即可，比如对它反复求导然后联立消去C，如(x+C)^2+y^2=1 ，只要求导得到x+C+y=0

C=-x-y，带入得到+=1

### 注意：

#### 正负讨论问题

**绝对值来源**：

1. ，且这类问题大都是分离变量两边积分得来,

特例：一阶线性不加绝对值，可以证明它的被常数吸收

1. ,其中2|n，即n为偶数
2. 原本题目中就有绝对值

**通解的问题**，如下：

1. |f(x,y)|=|g(x,y)+C| 或|f(x,y)| = |g(x,y)|+C

或f(x,y)=|g(x,y)+C| 或f(x,y)=|g(x,y)|+C => f(x,y)=g(x,y)

1. |f(x,y)|=|g(x,y)\*C| 或|f(x,y)|=|g(x,y)\*C

或f(x,y)=|g(x,y)\*C| 或f(x,y)=|g(x,y)|\*C

=> f(x,y)=g(x,y)因为C吸收了

**特解的问题**：

对于k阶微分方程，每降低阶，求出带的k-1通解，就要带入初值

根据初值取值去除，还有可能要根据C的取值分类讨论更低阶的解

根据**C范围分类讨论的原函数**，如下

* 根据sign(C)的值讨论

#### 微分方程反问题

有这样一类题，给你二阶齐次微分方程2个线性无关特解，求原方程。没说是常系数，应该叫二阶变系数齐次微分方程，不再能用特征方程求解。

**方法一：**

设易得通解是y= 求导得到y^和y^^

把x,y,y^和y^^当常数,把C1,C2当变量三个方程联立，消去C1，C2

**方法二：**

设原方程是y^^+f(x)y^+g(x)y=0

带入两个特解，解出f(x)与g(x)即可

#### 带有函数的微分方程

设是单调可导函数且，满足微分方程F(,x,f^(x))=0,求f(x)

如：f^(x)+ f()=0，求f(x)

四步法：求导，换元，抵消，检查

求导：f^^(x)+ f^()=0

换元: f^()+ f()= f^()+ f()=0

抵消: f^^(x)-f()=0 //这是一个普通微分方程，容易求解

检查：由于人为升阶，答案的2个常数至少一个可以消去对f^(x)+ f()=0取x=0,得到关系f^(0)+ f()=0，再带入通解即可消去一个C

## 无穷级数

### 概念：

常数级数：每一项项都是常数的级数，记为,为了和计算机数组下标统一，笔记里级数的i从0开始

级数收敛 <=> != oo && !=NAN

级数发散 <=> == oo || ==NAN

收敛，叫做级数绝对收敛，绝对收敛的级数本身一定收敛

本身收敛，但发散，叫做级数条件收敛

绝对±绝对=绝对 绝对±条件=条件

条件±条件=至少本身收敛，也就是绝对值的敛散性未知，但本身一定收敛

已知级数本身发散，那么其加绝对值一定发散(和绝对收敛是逆否命题)

### 性质：

* **收敛级数的收敛级数的线性组合一定收敛。**

**收敛级数和发散级数的线性组合一定发散(发散部分系数非0)。但：**

**发散级数和发散级数的线性组合** -> 不确定敛散

/\*区别于广义积分，发散±发散->发散\*/

* 去掉 加上 改变 交换有限项，加系数，都不影响敛散
* 收敛级数加括号还收敛 发散级数加括号不一定

收敛级数拆括号不一定(加条件极限是0则一定收敛) 发散级数拆括号还发散

* 收敛 -> = 0 反过来不一定 反例调和级数

!= 0 –> 发散 反过来不一定 反例调和级数

= NAN不一定敛散

* 收敛 -> 存在某个τ使得i>τ时，单调递减

### 正项级数(每项非负)

#### 基本判别法

正项级数收敛 ⇔ S(n)有上界

证明就是单调有界准则的离散表述

这是定义，是充要的，除此这外一下几条都是充分不必要条件

* 但对于非正项级数不成立

#### 比较判别法(无穷小等价代换)

对于正项级数和,且ui<=vi恒成立

大的收敛 -> 小的收敛

小的发散 -> 大的发散

想进一步知道级数增长率的关系，应该比较极限

对于正项级数和，比较极限

=0，说明ui小； =oo，说明vi小

=A(有限非0常数)说明ui和vi通阶，同敛散

=NAN，无法用极限判断大小，另寻它法

再根据上述大小用

大的收敛 -> 小的收敛

小的发散 -> 大的发散

关于找参照物技巧，应该参照极限的章节，尽量构造与给定函数比值是常数的函数。

* 有比较判别法可知，对符合无穷小等价代换的级数的项代换，不改变敛散性，尤其是对存在分数形式的级数求敛散性。

#### 比值判别法

对于正项级数 ，看

<1收敛 ， >1发散

= 1或NAN方法失效，另寻它法

* 对于指数多项式相加的，采用同时除以系数求极限，或者直接用消去律

#### 根值判别法

对于正项级数 ，看

<1收敛 ， >1发散

= 1或NAN方法失效，另寻它法

#### 积分判别法

对于正项级数 ，设f(n)= 且它单调递减

敛散 ⬄ 敛散

函数f(x)是连续的，而级数是离散的

通常用来判别带对数的级数，如 这个用前几个都不好判断，但是积分判别法很简单

### 交错级数(正负交替)

交错级数写作，ui>=0

假设的首项是正数，交错级数和S<= 这是显然的

莱布尼兹判别法

= 0 ，且 >= , 则级数收敛

但若级数的不递减，不能就断定级数发散

交错级数收敛，只能得到 = 0 , 未必递减

求交错级数收敛域或者和函数，都应该分开来看，把正负分离

* = 0一般较易，但有两个难点：造和判断的增减性，用到了数列极限的知识

### 任意级数和其他判别法

考研判级数敛散问题，非正项级数绝对收敛的提法，除了有名的定理性结论，大都是错的。

1. **阿贝尔判别法**：

数列{}单调有界，收敛，则级数收敛

如果是正项级数且收敛，则只需{}的极限存在，就知收敛

1. 收敛，则绝对收敛
2. 级数夹逼准则，若,且收敛，则收敛
3. 极限脱帽法和级数结合：

,是正向数列,极限存在，已知，求敛散性

则 α是低阶无穷大，则有正向级数比较判别法

此时若收敛，原本级数收敛

1. 收敛，不一定 ，若是正项级数一定。

收敛，不一定 ，若是正项级数一定。

收敛，不一定 ，若是正项级数一定。

收敛，和不一定 ，若是正项级数一定。

收敛，不一定 ，若是正项级数一定。

收敛，任意子级数不一定收敛，若是正项级数一定。

### 幂级数

#### 幂级数性质和细节

对于函数项级数 ，所有的使级数收敛的x构成的set叫做收敛域，所有的使级数发散的x构成的set叫做发散域

**收敛区间**：是一个开区间，不判断端点敛散性

**收敛域**：收敛区间基础上，判断端点敛散性，结果可能是开区间可能是闭区间

对于一个点x0,它使集合(收敛/发散)，x0叫做叫做(收敛点/发散点)

= S(x)叫做函数项级数的和函数

幂级数是形如的级数

幂级数里0^0==1

幂级数在收敛域内绝对收敛，因为它收敛域以0位中心

* 幂级数题目有3件事需要注意：和函数奇点，级数收敛域，项的初始下标
* 和函数S(x)在收敛域上连续
* 和函数S(x)的求导或者积分，都与原本级数有相同的收敛半径，收敛域边界的取值，可能变化：级数积分后可能使得收敛域扩大,级数求导可能使收敛域缩小,即：”幂级数本身积分变小求导变大”
* ,即求和符号的初始条件+1，每项下标和次数要-1
* 级数的收敛半径是，则的收敛半径如下;

如和收敛半径都是1，但是加和后抵消了

#### 阿贝尔定理

幂级数若在x=处收敛，则abs(x) <= 区间也收敛

幂级数若在x=处发散，则abs(x) >= 区间也发散

在收敛区间内的点，幂级数绝对收敛；在收敛区间外的点，幂级数发散。

阿贝尔定理推论：

1. 任何幂级数存在一个点x=R,使得：

abs(x) < R区间收敛，abs(x) > R区间发散

abs(x) == R可能收敛也可能发散

这个R叫收敛半径，且R一定存在

特殊的：R==0 ⇔ 仅仅在x=0处收敛

R==oo ⇔ 在R上都收敛

1. 对于级数 若已知它在x1处条件收敛，则R=|x1-x0|

这也意味着幂级数里，可能条件收敛的点仅在边界点

1. 对于级数 若已知它在收敛半径是

则幂级数,c,b,p,q是常数

它的收敛半径是,中心是

它是由定义推得

* 注意区分：和的收敛半径，容易混淆

是对的系数不变把x取平方，自然收敛半径要开根号

是取的偶数项，收敛半径是不变的

#### 求收敛半径和收敛域和收敛区间

##### 方法一，公式法

=A= => R==1/A

特别的：是oo收敛半径R=0

是0收敛半径R=oo

若级数收敛域以0为中心，则收敛半径以内的级数绝对收敛

**收敛区间**是**开区间**，不包含端点，**收敛域**要判断端点是否收敛.

##### 方法二，定义法

1. 对级数取绝对值
2. 用比值或者根植判别法：令，

令，解出的取值范围：a<x<b,即是收敛区间，收敛半径R=

1. 特判边界点x=a和x=b,确定收敛域

这个方法适用于任意交错或缺项幂级数，比方法一简单。

* 若说明方法失效，不能说级数发散或收敛。
* 区分和

幂级数收敛半径为R，若取其偶数项并不改变收敛半径只能能收敛域的边界变化；而前面讨论的收敛半径会变的级数是，

#### 展开成幂级数

**方法一，暴力展开：**

用泰勒公式在x=0处展开，对于一个函数能展开成幂级数的充要条件是：

它无穷阶可导，且

= = 0 也就是余项趋近0

**方法二，背公式：**

背常见函数的幂级数展开，做加减乘除常数的变形，收敛域不变

* 用先积分后导公式f(x)=

用先导后积公式：f(x)=f(x0)+

这两个公式要重新确定收敛域端点的情况

* 对于有多项的函数展开成幂级数，可以尝试合并它们，再展开，如果分别展开再相加会加大复杂度

**类型总结**

1. **f(x)=展开成x的幂级数。**

对于的函数，应该上下除以c把c化为1。

f(x)=的通用方法是待定系数，设f(x)=

解出系数，然后对分布按照AX和BX用分式的幂函数展开，最后把和提出，整理工整即可。

#### 给幂级数展开求和函数

这类题要先求收敛区间，同时应该知道一个结论：系数是多项式的和差积商的幂级数收敛半径是1,

* 复杂的级数先看是否能换元

一般思路：

1. 先求收敛半径和收敛域
2. 对于一般形式的缺项幂级数 ，先令x=变成

根据f(i)的情况套下面总结的方法

1. 补全特殊点，因为步骤2可能会出现如，使得原本有意义的收敛点变得无意义，要对和函数取极限或者带入特殊点，特别注意此时0^0=1

##### P(i)是任意n次多项式

把P(i)拆成，代表系数。

问题变成了求 a=0,1,2…

这类题想法构造 = , = ,

先求收敛域：x=±1时，级数发散，收敛域是(-1,1)

----------------------------

= ,提出x

,就是 =

= = x =

---------------------------------------------------------------

对于 , 看成+

其中已知， 提出x^2

==

原式=+

-------------------------------------

对于 , 看成+ -

其中和已知

提出x^3

==

原式=+ -

----------------------------------------------------------------------------

设F(m)(x)=，且F(0)(x)=

则F(m)(x)=

//S(m)(m-i)代表斯特林数表左起第i个，S(2)(1)=-1,S(3)(1)=2 (3)(2)=-3

F(0)(x)=

F(1)(x)=

F(2)(x)==

F(3)(x)==

##### ,且P(i)能化成的形式

先求收敛区间，且把P(i)化成减法，问题变成了如何求

方法一：

= =(令=c)

凑-ln(1-x) = ，x∈[-1,1)

或者ln(1+x) = ，x∈(-1,1]

=

相当于比 少了

= -

=-ln(1-x) -

所以S(x) = = (-ln(1-x) -)

方法二：

= =(令=c)，构造

S(x)= //对 用先导后积公式

S(x)= =

其中代表级数初始项比如这里是

S(x) = //到此算是求完了S(x)

这类型题要当心边界情况，x==±R，和x==0

因为和函数里，x=±R或0的点很可能没意义，但在原本级数里确实收敛的点，所以此时应该特判这些点

1. ，P(i)是多项式的和差积商

收敛域显然是R

设法化成 = ，x∈R，用之前的方法解决P(i)

1. ，P(i)是多项式的和差积商

收敛域显然是R

设法化成cosx = ,x∈R，用之前的方法解决P(i)

1. ，P(i)是多项式的和差积商

收敛域显然是R

设法化成sinx = ,x∈R，用之前的方法解决P(i)

1. ，P(i)是多项式的和差积商

收敛域显然是R

由于不是交错级数，不再能化成三角函数，令S(x)=

求出=

正好可以+ S(x) = 用之前的方法解决P(i)

得到微分方程，去解微分方程即可求出S(x)

##### 列微分方程

已知数列{}递推关系和先积后导先导后积公式，得到级数和函数S(x)和它的导数积分的地推关系。解微分方程得到S(x)

#### 生成函数：

对于一组数列{}，如果每个正好是某个幂级数里项系数，就称这个幂级数的**和函数S(x)是{}的生成函数**或**母函数**,如的生成函数是-ln(1-x)

有两类题，给生成函数求数列，给数列求生成函数，要利用级数展开，利用递推关系，可以证明所有线性递推序列的生成函数和通项都有解析解.

给数列求生成函数：

以斐波那契为例，求{}的生成函数和通项和收敛域

设级数收敛时，S(x)=

, S(x)=

S(x)=，设

S(x)

由定义求极限可知S(x)收敛域为(-α,α), S(x)=是斐波那契数列生成函数

### 傅里叶级数

#### 傅里叶级数

幂级数展开是可以把一个函数变成幂函数的倍数求和的形式

傅里叶级数展开是可以把一个函数变成三角函数的倍数求和的形式

傅里叶级数定义如下

f(x)在(-oo,+oo)上以2L为周期(不一定是最小周期)，且[-L,L]可积，则称

令

= n=0,1,2…

= n=1,2,3….

是傅里叶系数,则：

=S(X) ~ f(X)

/\*把当中和用欧拉公式代换可得到傅里叶级数的复数形式，不过考研不考\*/

* 如果给定区间[-L,L]上的连续函数，求区间[-L,L]的傅立叶级数，直接f(x)=S(x)即可。但若求整体的傅立叶级数，需严格确认周期间“缝隙”位置的点傅立叶级数值，利用狄利克雷收敛定理可知，它是左右极限平均值。

#### 狄利克雷收敛定理

f(x)以2L为周期(不一定是最小周期)，且[-L,L]上满足：

* 连续或第一类间断点(跳跃,可去)的个数有限
* 极值点个数有限

则f(x)的傅里叶级数处处收敛。且对于任意点,

有

狄利克雷收敛定理可以不求傅里叶展开就知道某一点的傅里叶级数的数值

可见如果f(x)处处连续，其傅里叶展开等于函数本身

f(x) = +

* 弄清对应关系，傅立叶级数是对f(x)展开成傅里叶级数，得到的傅里叶级数和函数S(x)和f(x)不一定相等，在连续的点上s(x)==f(x),第一类间断点上S()数值是左右f()平均值，即但对于间断点,依然可以带入傅立叶级数来得到式子，使它等于

#### 正弦函数和余弦函数

f(x)在(-oo,+oo)上以2L为周期(不一定是最小周期)，且[-L,L]可积，

如果f(x)是奇函数，为奇函数，傅里叶系数没有, 是正弦级数

= =0

=

+ =S(x) ~ f(x)

是以2L为周期的f(x)的傅里叶级数，正弦级数

如果f(x)是偶函数，为奇函数，傅里叶系数没有, 是余弦级数

=

= =0

+ =S(x) ~ f(x)

是以2L为周期的f(x)的傅里叶级数，余弦级数

* 注意几种提法：

”把f(x)展开成傅里叶级数(0<x<a)”，严格按照定义半周期L=

”把f(x)展开成余弦级数(0<x<a)”此时f(x)为偶,拓展函数补全图像,半周期L=a

”把f(x)展开成正弦级数(0<x<a)”此时f(x)为奇,拓展函数补全图像,半周期L=a

#### 应用

1. 求级数,考虑函数f(x)=|x|展开成傅里叶，最后得到

,此时，采取拆奇偶方式：

类似定积分区间再现，I=

* 此类问题不要和等比级数弄混，等比级数”拆奇偶”不能区间再现

### 重要级数：

**等比级数** =

q==1, = = oo，发散

q==-1, =NAN，发散

abs(q)>1, =oo,级数发散

abs(q)<1, 极限是0， = ,收敛 代表级数第一项，

等比级数只有| q |<1才收敛

**调和级数** https://gss0.bdstatic.com/94o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D148/sign=0bbdefa21ece36d3a604873402f33a24/b90e7bec54e736d17f269f7090504fc2d5626994.jpg

其中是γ欧拉常数(暂且看成无限不循环小数)，而https://gss0.bdstatic.com/-4o3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D14/sign=cfd895548c01a18bf4eb164b9e2fb605/30adcbef76094b36e8a30895a8cc7cd98d109d90.jpg 约等于1/2k

调和级数发散，且无法算出准确数值，增长率近似lnk

交错调和级数收敛于ln2由常见幂级数展开可求得

**广义调和级数：**(a!=0,b为实数)也发散，[比较审敛法](https://c.sogoo.icu/extdomains/zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AF%94%E8%BE%83%E5%AE%A1%E6%95%9B%E6%B3%95)可证明

* 调和级数并不是类型级数敛散的界限，存在比它发散更慢的级数，如：p=1的广义p-级数，素数调和级数都是发散的。但有意思的是[孪生素数](https://baike.baidu.com/item/%E5%AD%AA%E7%94%9F%E7%B4%A0%E6%95%B0)调和级数是收敛的，收敛于布隆常数。

**P-级数**： ，p∈R

p>1时收敛，p<=1时发散

P-级数的数论性质考研不考也不再总结

**广义P-级数**： ，p∈R 结论同p-级数

* 广义P-级数可无限构造比调和级数发散还慢的级数，在判断级数收敛问题有着巨大战略意义！
* **广广义P-级数**：

当a<1时必定发散，当a>1时必定收敛

当a==1退化为广义p-级数：p>1收敛；p<=1发散

证明当a>1时必定收敛：其中足够小使a-ε>1成立

是个小于1的正数，则，比较判别法可知收敛

**交错p-级数**：



## 微积分应用和疑难细问题

### 求渐近线

竖直，斜。本质都是计算极限，要求计算准确

**竖直**：其中要注意，竖直渐近线左右极限不必都是oo，而是

=oo || =oo，故竖直渐近线不一定在无穷间断点处

**斜渐近线**：是设k和b是待定系数解方程组：

=k ， =b 或

=k ， =b

满足：k不是NAN,0,oo, b不是NAN,oo 。即可说斜渐近线存在

* 注意斜渐近线保险起见应该正负无穷都趋近一次
* 当k=0时，且b不是无穷或NAN时，**斜渐近线**退化成水平渐近线。

且对于两侧的某一侧(指+oo和-oo)，有水平一定没斜，有斜一定没水平。

### 极值点拐点

#### 定义

**最值点**：顾名思义，且最值点的讨论不需要任何条件，该存在即可。

**驻点**：一阶[导数](https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%BC%E6%95%B0)为0的点，所以导数是无穷或NAN等，均不是**驻点，**多元函数则要求对各个自变量偏导数都是0,

**极值点**：一阶导数符号改变的点，要求在左右邻域内符号不同，但不要求这点本身的值存在，它是0是NAN皆可

**拐点**： 二阶导数符号改变的点且原函数在该点连续，要求在左右邻域内符号不同，但不要求这点本身的值存在，它是0是NAN皆可

特别注意：**驻点和拐点都是坐标(x,y)，而极值点是单个x**

* **拐点极值点驻点**讨论的前提是原函数在该点和邻域都有定义，单侧有定义不讨论，也就是说端点不能作为**拐点极值点驻点**。
* **极值点**不一定是连续的点，对于各种间断点(无穷震荡跳跃可去等)，只要补齐定义使得该点在邻域最大/小，那么他就是**极值点。**

**拐点一定是连续的点。**

* 如果一个点非端点，且是最值点，则一定也是极值点
* 不加限制条件，极值点不一定是**驻点**，**驻点**也不一定是极值点,拐点同理。
* 如果加限制条件：f(x)在a处可导，则可证明导数是0；反过来导数是0不一定取得极值，比如y=x^3

判断函数的极值点,先看定义域，再找出导数是0或者不存在的点，对于导数是0的点，要确定它就是极值点，除了看导数的左右邻域正负情况，还有一种策略，称为费马定理：

f(x)在a处n阶可导；若对于1到n-1阶导(a)=0，但(a)!=0，则

n为偶数：(a)<0有极大值，(a)>0有极小值

n为奇数：则a不是极值点

证明:用来泰勒：不妨设(a)>0, f(x)= +

考虑

由于f(x)是无穷可导的连续函数，可由极限保号知：在x=x0附近为正，而本身为0，所以x=x0是极小值点

f(x)在a处n阶可导；若(a)不一定是0,2到n-1阶导(a)=0，但(a)!=0

(a)不一定是0,则

n为奇数：

n为偶数：不是拐点

#### 求零点个数

求拐点极值点驻点个数也可以归结为求0点个数。

求零点个数的基本方法是暴力求导，看增减性和极值最值

* 优化1：直接数形结合，有对称性周期性奇偶性减少计算量
* 优化2：对待求函数变形，找”不动点个数”：化为f(x)=x的形式

利用y=x与f(x)图形交点确定0点

* 优化3：

### 祖孙三代的间断点

#### 已知f(x)在[a,b]内连续，研究它导数性质

对连续函数f(x)，若导数不连续，在特殊点可能是NAN以及oo，不可能是第一类间断点

1. 若导数是NAN，则该点是折点，类似绝对值函数
2. 若导数是oo，则该点存在切线，函数是光滑的，只不过切线平行于y轴

如在x=0处的导数为oo，所以它在(0,0)处是光滑的。

#### 已知f(x)在[a,b]内的x=c以外连续,a<c<b研究它原函数的性质

1. 若f(x)在[a,b]内连续，则存在原函数
2. 若f(x)在x=c处不连续，且x=c是第一类间断点(不论可去还是跳跃)或无穷间断点，不存在原函数
3. 若f(x)在x=c处不连续，且x=c是震荡间断点，是否有原函数依具体函数而定

* 那有的人说了：f(x)=导数是f^(x)=那f(x)不就是f^(x)的原函数吗？或是说f(x)的变上限积分函数不就是f^(x)的原函数吗？然而仔细看就会发现，f^(x)求原函数在x=0处是空心的。实际上已知f(x)的导函数是f^(x),不一定能推出f^(x)的原函数是f(x),只有在f^(x)连续或是某一类震荡间断点的情况才成立

#### 已知f(x)在点x=0的导数性质

已知f(x)的导数f^(0)存在，唯一可知

1. f(x)在x=0连续，在x=0附近存在且有界，但不一定连续，在(-з,0),(0,з)内可以存在非无穷间断点

#### f(x)可黎曼积分的条件

充要条件超纲。

充分条件：函数在闭区间连续或存在有限个第一类间断点，一定可积。

* 无穷间断点一定不可积，第二类间断点不确定是否可积

由此引出已知f(x)的变上限积分F(x)=的性质(区间内包含间断点)：

1. 若f(x)在[a,x]内连续，则F(x)连续可导，且导函数是f(x)
2. 若f(x)在[a,x]内有有限个可去间断点，则F(x)连续可导，但导数不是f(x)
3. 若f(x)在[a,x]内有有限个跳跃间断点，则F(x)连续,除特殊点外连续可导,导数是否等于f(x),看f(x)在特殊点本身是否有定义
4. 若f(x)在[a,x]内有无穷间断点，某些反常积分发散，则F(x)不存在
5. 若f(x)在[a,x]内有有限个无穷间断点，且反常积分都收敛，则F(x)连续,除特殊点外连续可导, 导数是否等于f(x),看f(x)在特殊点本身是否有定义
6. 若f(x)在[a,x]内有震荡间断点.其他间断点，无限个第一类间断点,无限个反常积分收敛的无穷间断点…F(x)的性质无法确定，此时可能会出现F(x)不连续的情况，比如震荡间断点

//一般情况下不必考虑情况6，只有情况6这些”刺头”函数会出现F(x)不连续的情况。

#### 无穷小和震荡间断点问题

f(x)= f^(x)=

以此作为反例

已知x->0处，则

* 不一定存在一个使得存在
* 而非无穷，因为在x->0时它不是稳定趋近无穷的，简而言之对于变号的NAN，NAN\*oo依然是NAN
* f(x)是比g(x)高阶的无穷小不一定得到：g(x)是比f(x)低阶的无穷小，或是无穷大量，要考虑震荡间断点

### 积分，极限，级数

#### 积分的极限

形如求

1. 先看积分都能否计算
2. 然后想能否缩放夹逼
3. 再想拆区间
4. 再想拉格朗日,积分中值定理，积分第一中值定理
5. 分部积分继续考虑234

//被积函数含有n慎用思路4，因为ξ可能随n变化无法固定

* 若x∈[0,1]，f(x)连续，则

//方法是积分第一中值定理或夹逼

* 若x∈[0,1]，f(x)有一阶连续导数，则

//方法是分部积分后，再用积分第一中值定理或夹逼

该结论可以秒杀多种题目

如：判别敛散，计算

#### 积分的级数

形如求

1. 先看积分都能否计算
2. 然后想能否缩放夹逼
3. 再想拆区间
4. 再想拉格朗日,积分中值定理，积分第一中值定理
5. 分部积分继续考虑234

#### 积分和求和加减的极限

1. 先看能否分别把积分和级数算出来，得到解析解，再取极限
2. 拆积分成无穷段，来呼应级数

定积分 求和

故 //作为一个结论记下

### 积分比大小

一重积分比较大小

一般情况都是相同区间不同被积函数，即与,b>a

1. f(x)与g(x)有明显大小关系，即f(x)-g(x)>=0或<=0在[a,b]内成立
2. f(x)与g(x)无明显大小关系，但容易看出f(x)大于或小于g(x)的区域多,
3. 积分不等式凹函数：(b-a)f()< ,凸函数反过来
4. 做分部积分，都写成A-的形式，比较后面的式子
5. 区间压缩，压缩后正负显然。

令h(x)= 则

=

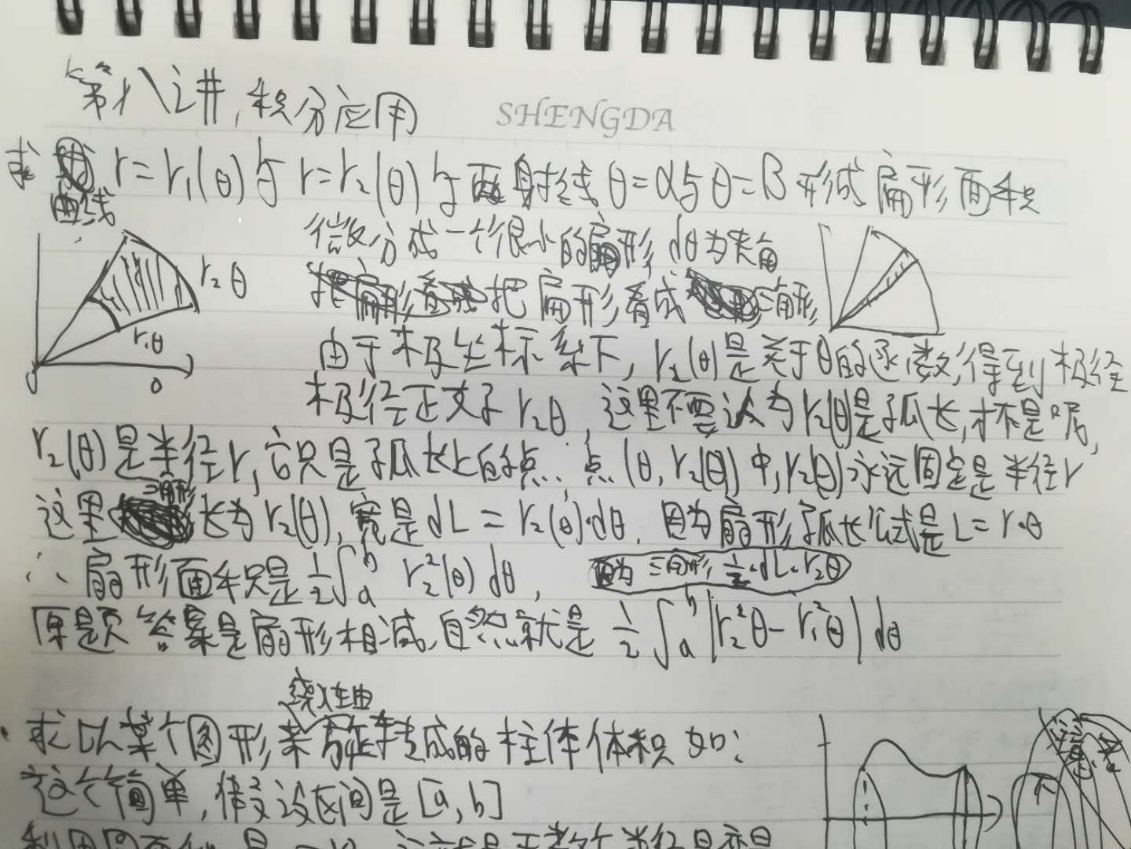
证明的正负即可

二重积分比较大小

1. 积分区域不同，被积函数相同：被奇函数为正的越多的区域越大
2. 积分区域相同，被积函数不同：被积函数越大积分越大

### 定积分的几何应用

#### 曲边扇形面积



其实很简单，因为扇形公式A=rR=r^2，(扇形有个常识是θ=R/r),r代表弧长。

#### 旋转体面积和体积

**计算绕x轴旋转的旋转体体积表面积**

一个沿着x轴积分的图形，它沿着x轴旋转一圈得到体积，很简单，把体积看成看成无数个半径是dy的圆片所组成，圆面积是π,

那体积V=dx

那如果求表面积呢？

思想是分成无数圆环贴在旋转体上，然后把它“剪开”变成矩形,长是以y为半径的圆的周长，但矩形宽是可不是dx，因为画图或者空间构思发现矩形是斜着包裹在旋转体上的，宽应该是以dx为底，以dy为高的三角形的斜边(设它是s)，勾股定理可求

矩形面积dS=y\*2π \* ds = 2π|f(x)|\*

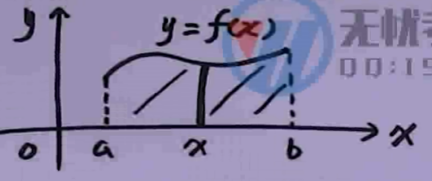
=2π|f(x)|\* //加绝对值是防止f(x)是负数

S=

**计算绕y轴旋转的旋转体体积表面积**

显然可以把函数取反函数，重新确定积分上下限，按照x轴那种算

但是如果取反之后不存在函数关系，这么做就不可行了，比如下图



也类似思想，看成无数卷起来的超薄空心圆桶

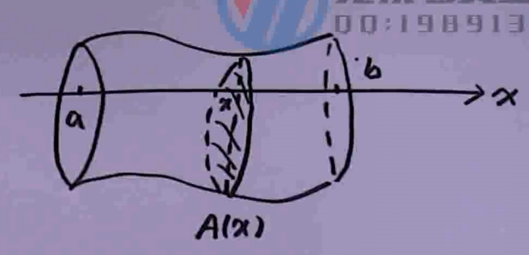
对于每个圆桶”隔开”变成矩形(或者说是厚度很小的长方体，好像一张纸)，长是y，宽以x为半径的圆的周长

=2π|x| \* |f(x)| 现在要把面积变成体积(把矩形变成纸)，乘dx

dV=2π|x| \* |f(x)|dx

V=

#### 截面函数的体积



图形是个扭曲的圆柱，每个位置截面面积不同，A(x)代表截面面积，注意这是一个函数，那整个图形体积就是面积累加，答案很简单就是：

V=

#### 弧长

说白了就是给定函数y=f(x), 用积分求弧长

直角坐标下：

勾股定理有(△L)^2≈(△x)^2+(△y)^2

微积分思想，(dL)^2=(dx)^2+(dy)^2=(1+((x))^2)(dx)^2

dL= 想算出L就两边求积分即可

参数方程下：

参数方程数x=φ(t)，y=Ψ(t)

(dL)^2=(dx)^2+(dy)^2 => dL=

=> dL=dt

极坐标下：

x=rcosθ , x=rsinθ

(dL)^2=(dx)^2+(dy)^2 => dL=

化简后得到：dL=dθ,其中r^代表：按直角坐标求导公式对r求导

#### 求函数平均值：

函数在区间[a,b]平均值就是

## 微积分物理应用

### 相关变化率：

求A对B的变化率，就是求导数： 若A是个函数，则把A化为已知变量对B的导数。如：P在y=x^3上运动，原点距离P的长度是l,P横坐标对时间变化率是V0，问P到(1,1),l对时间变化率？ 应该带入l=

### 物理公式以及积分形式

路程S=vt，变速路程S=

做功W=Fs，变力做功W=

水里提取物体做功，抽水做功：W= ,S(h)表示横截面积

水里某位置压力P= , S(h)表示横截面积

f(h)表示上表面的曲线函数，g(h)表示下表面的曲线函数

物理应用的正负号根据实际情况决定

### 曲率相关//计算易错误

设y=f(x)二阶可导，曲率公式：

设A=

曲率K = 曲率半径R = = 1/k;

曲率圆是(x-a)^2+(y-b)^2=R^2

a = x - ， b= y+ 即曲率圆心：

* 曲率k几何意义是弯曲程度,在某点处k越大，表示函数在该点越弯

用多项式曲线y1=P(x)代替某曲线y2在x=2处的值

令它们：函数值相同，斜率相同，曲率相同，凹凸性相同

* 曲率存在要求该点二阶导数存在，间断点端点原则上都不可求。

y^2=x的曲率不可化为，正确是用隐函数求导法求y^^

如果分母是0可以取极限。

### 形心公式

一维(线段中点)：

=

二维(平面图形形心)：

= //假设图形有f(x)与x轴围城，且x区间[a,b]

=

* 二维图形求形心严格按照公式写二重积分，不可以直接写定积分，因为y的形心分子不是

三维(立体图形形心)：

=

=

=

### 质心公式

所谓质心是对有密度的物体来说的，设密度函数是ρ，质心是形心推广，在n维霞，ρ=1时，质心就是对应维度下的形心

一维(有密度的线段中点)：

=

二维(平面图形质心)：

= =

三维(立体图形质心)：

= = =

三维曲线质心：

= = =

三维曲面质心：

= = =

### 转动惯量

转动惯量有对坐标轴和原点之分，设密度函数是ρ

二维图形(平面薄片)

= =

=

三维图形(立体物体)

= =

= =

三维曲线

= =

= =

三维曲面

= ==

== ==

### 引力

引力是个向量，令=()^ 则(x0,y0,z0)处引力：

三维图形(立体物体)

= =

=

三维曲线

= =

=

三维曲面

= ==

==