

# SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES

## RESUMO

A abordagem de efeitos não lineares em Física está no centro de vários problemas de interesse prático e permite a construção de modelos análogos gerando um conjunto de interfaces entre áreas distintas, aumentando o espaço para a obtenção de soluções analíticas e com isso um maior entendimento dos problemas propostos. Nesse sentido a inclusão da resistência do ar e do efeito de arrasto se apresenta como um primeiro contato bastante útil no tratamento da matemática envolvida, baseada no teorema fundamental da mecânica, como um conjunto de equações diferenciais, possivelmente parciais, acopladas e não lineares, que podem ser analisadas as vistas de plataformas computacionais, consideradas indispensáveis no estudo da descrição analítica, ou mesmo, na obtenção de comportamentos assintóticos, o que torna o estudo de sistemas mecânicos não lineares um requisito indispensável na formação básica na área e foco do nosso interesse.

## OBJETIVO

O presente trabalho teve como objetivo a solução de sistemas mecânicos não lineares a partir do uso de ferramentas computacionais.

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho advém do interesse em estudar soluções de sistemas mecânicos, na presença de efeitos não lineares, explorados além da simplificação apresentada nas componentes curriculares básicas sobre mecânica. O tratamento matemático foi baseado na formulação da lei fundamental da dinâmica como um conjunto de equações diferenciais. A obtenção das soluções podem ser realizada a partir das teorias gerais mas também com a exploração de programas computacionais, utilizados no estudo da Física e da Matemática, como são o caso do Maple Soft, Mathematica, MatLab, dentre outros.

Essa formulação apresenta a possibilidade de comparação com outros modelos, principalmente na física de fenômenos não lineares. É o caso, por exemplo, da influência do ar para o lançamento de projéteis, ou mesmo o lançamento de um torpedo sob o efeito dispersivo da água.

A busca por soluções analíticas, advindas de sistemas mecânicos não lineares representa um valoroso ganho teórico no conhecimento das várias propriedades de um sistema dispersivo, ou mesmo para o desenvolvimento de técnicas de análise de equações diferenciais.

## METODOLOGIA

Este projeto empregou a metodologia largamente utilizada pelo GFPC (Grupo de Física de Partículas e Campos) da UFPB, que tem acumulado bastante experiência no estudo de defeitos topológicos e na busca de soluções analíticas explícitas de várias teorias ou modelos da física.

## VISÃO GERAL

O teorema fundamental da mecânica representa boa parte do conteúdo formativo presente nas componentes curriculares. Por outro lado, devido à grande amplitude de aplicações, muitas vezes o estudo da mecânica se limita a problemas básicos e pouco adequados às situações reais. Muito pela dificuldade matemática trazida com a inclusão de vários efeitos em um mesmo modelo sendo esse um limitante na obtenção de soluções.

Podemos considerar, em especial, uma classe genérica na inclusão de interações em problemas básicos, que se traduz na transformação das equações diferenciais advindas do teorema fundamental da mecânica em equações diferenciais não lineares (Kibble e Berkshire, 2004), as quais apresentam um maior nível de dificuldade na análise das soluções obtidas, devido a consideração de interações dependem de várias variáveis, tornando-as em parciais ou acopladas.

Uma alternativa interessante sobre as dificuldades é a análise realizada em programas matemáticos como a plataforma Maple Soft, bastante efetiva na análise de equações.

## RESISTÊNCIA DO AR

Um dos problemas analisados nesse trabalho foi a inclusão de resistência do ar em problemas físicos básicos, como, por exemplo, o lançamento de projéteis. Permitindo avaliar a estabilidade de um sistema mecânico submetido à ação dispersiva do ar.

## ARRASTO EM FLUIDOS

Por outro lado, podemos focar sobre o lançamento de projéteis submersos, movimento balístico como torpedos, problema que inclui naturalmente os efeitos de arrasto em fluidos.

## INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO DAS LEIS DE NEWTON

Nosso estudo elencou o uso dos artifícios da integração e derivação das Leis de Newton tendo em vista sua utilidade para este trabalho.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

É evidente que a maioria dos problemas que abordamos sejam minimalistas, no sentido de suprimir efeitos em função da simplicidade matemática e a relação direta das soluções com os conceitos.

A nossa abordagem vai de encontro a essa tendência, quase imponderável dos livros textos, avançando apenas na inclusão do efeito direto desprezado no exercício.

É bem sabido que a baixas velocidades o efeito de resistência do ar segue uma lei do tipo  $bv$  para a força de arrasto e  $bv^2$  quando a velocidades mais elevadas.

No caso do lançamento vertical esse problema já se mostra desafiador e deve ser resolvido para servir como guia em uma possível generalização. No entanto, quando da inclusão do efeito de resistência do ar, temos um amplo crescimento no nível de dificuldade do problema genericamente, o problema deve ser dividido em quatro partes.

Em cada uma das fases o simples problema de algebrismo se torna um problema envolvendo equações diferenciais que exigem afixação de condições de contorno específicas em cada transição de termo  $bv$  para  $bv^2$ . Vejamos que dificilmente um problema como esse pode ser explorado nos nossos cursos retílineos com horários e obrigações bem estabelecidas. A discussão que queremos levantar é que muitos problemas são abordados em uma forma simplificada afastando o estudante da busca por soluções mais realísticas desses problemas e suas possíveis verificações experimentais, tão escassas em nossos cursos.

## LANÇAMENTO HORIZONTAL DE CURTO ALCANCE

Consideraremos o lançamento da origem do sistema de coordenadas, de modo que  $x(t=0) = x_0 = 0$  e  $y(t=0) = y_0 = 0$ . Até o momento em que a partícula chega a velocidade crítica de 24 km/h. Quando no eixo  $y$  ocorre a transição para a segunda etapa; no eixo  $x$  sempre mantemos a velocidade abaixo da velocidade crítica. Devemos então incluir o termo resistivo  $bv$  na análise.

$$F_x = -bv_x \quad \Rightarrow \quad m \frac{dx^2}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = 0.$$

o termo resistivo  $bv$  é negativo

$$x(t) = A + B e^{-(b/m)t}$$

a velocidade é dada por  $v_x(t) = -B(b/m)e^{-(b/m)t}$ . As constantes  $A$  e  $B$  podem ser fixadas em termos das condições iniciais  $x_0$  e  $v_{x0}$ :

$$x(t) = -v_{x0} \frac{m}{b} \left( e^{-(b/m)t} - 1 \right) \quad \text{e} \quad v_x(t) = v_{x0} e^{-(b/m)t}$$

Para o eixo  $y$  devemos incluir o termo resistivo quadrático negativo,

$$F_y = -mg - bv_y^2 \quad \Rightarrow \quad m \frac{dy^2}{dt^2} + b \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + mg = 0$$

Como solução temos para  $y(t)$  e  $v(t)$ :

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{m}{b} \ln \left( \frac{b}{mg} \left[ C \sin \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) - D \cos \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \right]^2 \right)$$

$$v_y(t) = \sqrt{\frac{mg}{b}} \left[ \frac{C \cos \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) + D \sin \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right)}{C \sin \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) - D \cos \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right)} \right]$$

Podemos agora fixar as constantes  $C$  e  $D$  em termos das condições iniciais  $y_0$  e  $v_{y0}$

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{m}{b} \ln \left( \frac{b}{mg} \left[ v_{y0} \sin \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) + \sqrt{\frac{mg}{b}} \cos \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \right]^2 \right)$$

$$v_y(t) = \frac{v_{y0} \cos \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) - \sqrt{\frac{mg}{b}} \sin \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right)}{v_{y0} \sqrt{\frac{b}{mg}} \sin \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) + \cos \left( \sqrt{\frac{bg}{m}} t \right)}$$

Resolvendo a solução de  $x(t)$  para  $t$  e substituindo o resultado na solução  $y(t)$  obtemos a equação da trajetória para essa etapa e de modo similar podemos reescrever as componentes da velocidade  $v_x(t)$  e  $v_y(t)$ , o que nos permite construir graficamente a solução para a etapa e passarmos já a próxima onde a componente  $x$  do movimento não sofre alteração estrutural durante o movimento e novamente temos a equação diferencial:

$$m \frac{dx^2}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = 0$$

As constantes da solução são agora fixadas em termos do ponto crítico de transição entre as fases quadrática e linear da resistência do ar, para a componente do movimento em  $y$ . Seja  $t_{c1}$  o tempo crítico da transição, onde  $x(t=t_{c1}) = xc1$  e  $v_x(t=t_{c1}) = vx_{c1}$ :

$$x(t) = xc1 - v_{xc1} \frac{m}{b} \left( e^{-\frac{b}{m}(t-t_{c1})} - 1 \right) \quad \text{e} \quad v_x(t) = v_{xc1} e^{-\frac{b}{m}(t-t_{c1})}$$

lado, a componente  $y$  do movimento agora responde por um termo linear

$$m \frac{dy^2}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + mg = 0$$

vez escolhido o ponto crítico, com  $y(t=t_{c1}) = yc1$  e  $v_y(t=t_{c1}) = vy_{c1}$ ,

$$y(t) = yc1 - g \frac{m}{b} (t - t_{c1}) - \left[ v_{yc1} \frac{m}{b} + g \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right] \left( e^{-\frac{b}{m}(t-t_{c1})} - 1 \right)$$

$$v_y(t) = vy_{c1} e^{-\frac{b}{m}(t-t_{c1})} + g \frac{m}{b} \left( e^{-\frac{b}{m}(t-t_{c1})} - 1 \right)$$

etapa que termina no ponto de máximo do movimento, quando o termo de resistência do ar deve ser invertido. Passamos para a Etapa 3: Análise do setor linear do lançamento durante o processo de descida do projétil e, para tanto, preservamos o termo linear na equação de movimento em  $x$ .

$$m \frac{dx^2}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = 0$$

Agora a condição de contorno escolhida é o ponto de máximo do movimento e a solução é inscrita em termos do tempo máximo  $t_m$ , onde temos  $x(t=t_m) = xm$  e  $v_x(t=t_m) = vxm$

$$x(t) = xm - v_{xm} \frac{m}{b} \left( e^{-\frac{b}{m}(t-t_m)} - 1 \right) \quad \text{e} \quad v_x(t) = v_{xm} e^{-\frac{b}{m}(t-t_m)}$$

Para a componente  $y$  fui preciso inverter o termo de resistência do ar decorrente da ação da força peso sobre a partícula, de modo que consideramos o termo resistivo positivo,

$$F_y = -mg + bv_y \quad \Rightarrow \quad m \frac{dy^2}{dt^2} - b \frac{dy}{dt} + mg = 0$$

Sob a mesma condição de contorno, sendo  $y(t=t_m) = ym$  e  $v_y(t=t_m) = vy_m = 0$ :

$$y(t) = ym + g \frac{m}{b} (t - t_m) - g \left( \frac{m}{b} \right)^2 \left( e^{\frac{b}{m}(t-t_m)} - 1 \right)$$

José Jamilton Rodrigues dos Santos <sup>1</sup>,

Thomas Kauan Gomes de Andrade <sup>2</sup>,

José Arnaldo de Assis Pina Neto <sup>3</sup>

<sup>1</sup>U.E.P.B., Dept. de Física, jamiltonrodrigues@gmail.com,

<sup>2</sup>U.E.P.B., Dept. de Física, thomaskauanga@gmail.com,

<sup>3</sup>U.E.P.B., Dept. de Engenharia Civil, pina.eng.civil@gmail.com

$$v_y(t) = -g \frac{m}{b} \left( e^{\frac{b}{m}(t-t_m)} - 1 \right)$$

podemos obter as soluções  $y(x)$ ,  $v_x(x)$  e  $v_y(x)$ . Assim, passamos à Etapa 4: A partícula continua seu processo de descida e ganha velocidade atingindo a velocidade crítica, agora com sinal invertida;

$$m \frac{dx^2}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = 0$$

A componente  $x$  não sofre alteração estrutural e segue:

$$x(t) = xc2 - v_{xc2} \frac{m}{b} \left( e^{-\frac{b}{m}(t-t_{c2})} - 1 \right) \quad \text{e} \quad v_x(t) = v_{xc2} e^{-\frac{b}{m}(t-t_{c2})}.$$

O termo linear deve ser substituído pelo termo quadrático positivo para a componente  $y$  do movimento,

$$F_y = -mg + bv_y^2 \quad \Rightarrow \quad m \frac{dy^2}{dt^2} - b \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + mg = 0$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{mg}{b}} t - \frac{1}{2} \frac{m}{b} \ln \left( \frac{1}{4} \frac{b}{mg} e^{2 \frac{b}{m}(t-t_{c2}-v_{xc2})} \right) \left[ \sqrt{\frac{mg}{b}} \left( e^{2 \sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_{c2})} + 1 \right) - v_{yc2} \left( e^{2 \sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_{c2})} - 1 \right) \right]^2,$$

sendo a componente  $y$  e da velocidade dada

$$v_y(t) = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \frac{\sqrt{\frac{mg}{b}} \left( e^{2 \sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_{c2})} - 1 \right) - v_{yc2} \left( e^{2 \sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_{c2})} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{mg}{b}} \left( e^{2 \sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_{c2})} + 1 \right) - 2v_{yc2} \left( e^{2 \sqrt{\frac{bg}{m}}(t-t_{c2})} - 1 \right)}$$

## ANÁLISE GRÁFICA

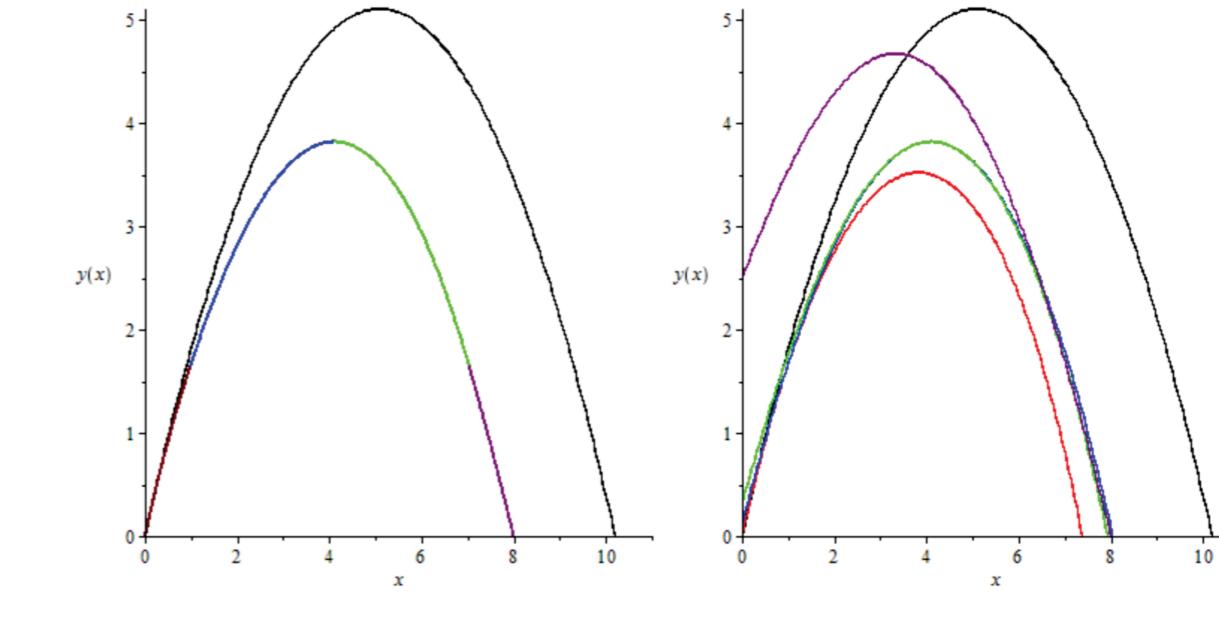


Figura 1: Figura 1. Esquerda: Trajetória sem (preto) e com (colorido) resistência do ar. Direita: Extrapolação das soluções.

Assumimos os valores  $b = 0$ ;  $1$ ,  $m = 1$  kg,  $g = 9$ ;  $8$  m/s<sup>2</sup> e  $v_{x0} = 5$  m/s e  $v_{y0} = 10$  m/s, sendo a velocidade crítica admitida como  $vc = 24$  km/h.

O gráfico da direita apresenta a extrapolação para além do setor considerado e foi incluído para verificar o ajuste das condições de contorno no decorrer do problema, percebemos que as curvas se ajustam tangencialmente para cada etapa, atestando o caráter analítico.

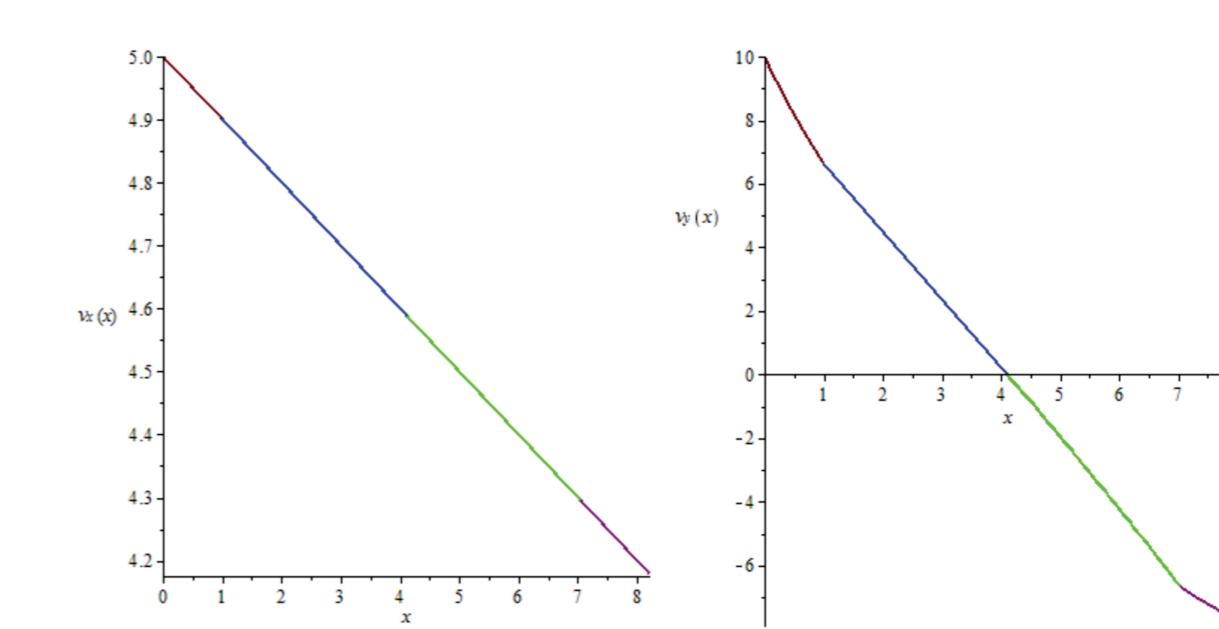


Figura 2: Figura 2. Esquerda: Evolução de  $v_x(x)$  para cada etapa. Direita: Evolução de  $v_y(x)$  para cada etapa.

Para  $v_x(x)$ , acima) é contínua e decrescente como esperávamos, uma vez que não ocorre alteração de fase da resistência do ar. Por outro lado, a curva da evolução de  $v_y(x)$  apresenta duas alterações acentuadas, exatamente nos pontos críticos de transição ( $t_{c1}$  e  $t_{c2}$ ). Fica evidente a complexidade do tema, um problema aparentemente simples, a inclusão da resistência do ar. Saliento que não resolvemos o problema no esboço de sua totalidade.

## CONCLUSÃO