Teoria dos Grafos

Conceitos Básicos:

$$G = \{V(G), E(G)\}$$

$V(G)$: conjunto de vértices (entidades)

$E(G)$: conjunto de arestas (relações entre vértices)

$$v(G) = |V(G)| = n \quad \Rightarrow \text{ordem}$$

$$e(G) = |E(G)| = m$$

tamanho = *n+m*

Ψ_e: extremos de uma aresta *e* (vértices incidentes de *e*)

Vértices adjacentes: dois vértices são adjacentes se forem incidentes da mesma aresta;

Arestas paralelas : seja e_1 e e_2 arestas paralelas, então $\Psi_{e_1} = \Psi_{e_2}$

Loop : aresta cujos extremos são iguais

Grafo simples : grafo que não possui loops ou arestas paralelas

Multigrafo : loop e arestas paralelas fazem parte do grafo (grafo não simples)

Vizinhança do vértice v ($N_{(v)}$) : conjunto de vértices que possui relação (aresta) com v.

Vizinhança fechada do vértice v ($N_{[v]}$) : $N_{[v]} = N_{(v)} \cup \{v\}$

Vértice universal: v é universal quando $N_{[v]} = V(G)$.

Complemento de G: sumponha G um grafo simples

$$\bar{G} = \{V(G), \bar{E}(G)\}$$

Onde

$$\bar{E}(G) = \{(u, v) \mid (u, v) \notin E(G), u \neq v\}$$

$|E(G)| + |\bar{E}(G)| = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \quad O(n^2)$

O crescimento das arestas se dá na ordem quadrática ($O(n^2)$)

Distância entre dois vértices *v* e *w* ($d(v, w)$): caminho entre os dois vértices com a menor quantidade de arestas.

Representação de grafos

Existem duas maneiras padrão para representar um grafo $G = (V, E)$: lista de adjacências e matriz de adjacência.

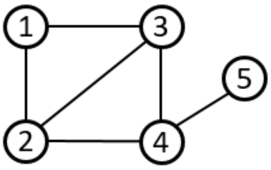
1. Lista de Adjacência

Consiste em um arranjo Adj de $|V|$ listas, uma para cada vértice em V. Para cada $u \in V$, a alista adjacente $Adj[u]$ consiste em todos os vértices v tais que existe uma aresta $(u, v) \in E$

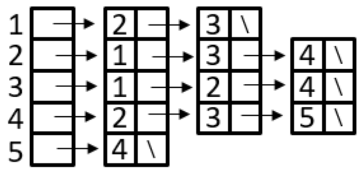
2. Matriz de Adjacência

Supomos que os vértices são numerados $1,2,3,..,|V|$ de alguma maneira arbitrária. Então, a matriz de adjacência consiste em uma matriz $|V|x|V|$ $A(a_{ij})$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E, \\ 0 & em\ caso\ contrário \end{cases}$$



$G = (V, E)$



Adj

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	1	1	0
3	1	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	0	0	0	1	0

$A = (a_{ij})$

Algoritmos de busca em grafos

1. Busca primeiro na extensão

Seja G o grafo de entrada, $s \in V[G]$ o vértice origem da busca, e os arranjos *cor[v]*, *d[v]* e $\pi[v]$ representando respectivamente a cor, a distância da origem e o predecessor na pesquisa do vértice v. Segue o algoritmo de busca primeiro na extensão.

```
BFS (G, s)
for cada vértice de u ∈ V[G] − {s}
    do cor[u] ← BRANCO
        d[u] ← ∞
        π[u] ← NULL
cor[s] ← CINZA
d[s] ← 0
π[s] ← NULL
Q ← ∅
ENQUEUE(Q, s)
while Q ≠ ∅
    do u ← DEQUEUE(Q)
        for cada vértice de v ∈ adj[u]
            do if cor[v] = BRANCO
                then cor[v] ← CINZA
                    d[v] ← d[v] + 1
                    π[v] ← u
                    ENQUEUE(Q, v)
            cor[u] ← PRETO
```

2. Busca primeira na profundidade

$DFS\ (G)$
$\boldsymbol{for}$ cada vértice de $u \in V[G]$
    $\boldsymbol{do}\ cor[u] \leftarrow BRANCO$
        $\pi[u] \leftarrow NULL$
$\boldsymbol{for}$ cada vértice de $u \in V[G]$
    $\boldsymbol{do}\ if\ cor[u] = BRANCO$
        $then\ DFS - VISIT(u)$

$DFS - VISIT\ (u)$
$cor[u] \leftarrow CINZA$
$\boldsymbol{for}$ cada vértice $v \in adj[u]$
    $\boldsymbol{do}\ if\ cor[u] = BRANCO$
        $\boldsymbol{then}\ \pi[v] \leftarrow u$
        $DFS - VISIT(v)$
$cor[u] \leftarrow PRETO$

Atividade de implementação:

1. Implemente os algoritmos de busca em grafos.
    a) Implemente as estruturas: matriz de adjacência e lista de adjacência
    b) Implemente um leitor de grafos em arquivos
    c) Implemente Busca em largura
    d) Implemente Busca em Profundidade