

# 1 ÚVOD

**Definice 1** (Homogenní systém hydrodynamického typu). Homogenní systém hydrodynamického typu je systém parciálních diferenciálních rovnic tvaru

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = f_j^{i\alpha}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, \dots, d. \quad (1)$$

prop: transformace-A

**Tvrzení 1** (Transformace  $f_j^{i\alpha}$ ). Provedeme-li záměnu proměnných  $u^i \mapsto v^a$  vztahem

$$u^i = u^i(v^1, \dots, v^N), \quad (2)$$

pak se funkce  $f_j^{i\alpha}$  transformují jako

$$f_b^{a\alpha}(v) = \frac{\partial v^a}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial v^b} f_j^{i\alpha}(u). \quad (3)$$

*Důkaz.* Stačí rozepsat

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}(v) = \frac{\partial u^i}{\partial v^a} \frac{\partial v^a}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}(v) = \frac{\partial u^j}{\partial v^b} \frac{\partial v^b}{\partial x^\alpha}, \quad (5)$$

takže

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^a} \frac{\partial v^a}{\partial t} = \frac{\partial u^j}{\partial v^b} f_j^{i\alpha}(v(u)) \frac{\partial v^b}{\partial x^\alpha} \quad (6)$$

a odtud

$$\frac{\partial v^a}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial v^a}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial v^b} f_j^{i\alpha}(v(u))}_{f_b^{a\alpha}(v)} \frac{\partial v^b}{\partial x^\alpha}. \quad (7)$$

□

Označme tedy  $M^N$  prostor (varietu) s lokálními souřadnicemi  $u^1, \dots, u^N$ . Pak lze na tvrzení 1 nahlížet jako na změnu souřadnic na  $M^N$  a funkce  $f_j^{i\alpha}$  jsou tenzory typu (1,1) pro každé zvolené  $\alpha$ . Zavedeme nyní bohatší geometrii na  $M^N$  pro případ, že  $f_j^{i\alpha}$  jsou ve speciálním tvaru.

**Definice 2.** 1. Poissonova závorka hydrodynamického typu funkcionalů  $I_1$  a  $I_2$  je definována vztahem

$$\{I_1, I_2\} = \int dx \left[ \frac{\delta I_1}{\delta u^q(x)} f^{qp} \frac{\delta I_2}{\delta u^p(x)} \right], \quad (8)$$

kde

$$A = (A^{qp}) = \left( g^{qp}(u) \frac{d}{dx^\alpha} + b_s^{qp\alpha}(u) \frac{\partial u^s}{\partial x^\alpha} \right), \quad (9)$$

přičemž  $g^{ij\alpha}$  a  $b_k^{ij\alpha}$  jsou dané funkce,  $i, j, k = 1, \dots, N$  a  $\alpha = 1, \dots, d$ .

Speciálně

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij\alpha}[u(x)] \delta_\alpha(x-y) + b_k^{ij\alpha}[u(x)] u_\alpha^k(x) \delta(x-y), \quad (10)$$

2. Hamiltonián hydrodynamického typu je definován vztahem

$$H[u] = \int_{\mathbb{R}^d} h(u(x)) d^d x, \quad (11)$$

kde  $h[u]$  je nezávislá na  $u_\alpha$ ,  $u_{\alpha\beta}$ . Funkci  $h(u)$  nazýváme hamiltonovská hustota.

3. Řekneme, že systém je hamiltonovský, jestliže lze psát

$$u_t^i(x) = \{u^i(x), H\} := \left[ g^{ij\alpha}[u(x)] \frac{\partial^2 h(u)}{\partial u^j \partial u^k} + b_k^{ij\alpha}[u(x)] \frac{\partial h(u)}{\partial u^j} \right] u_\alpha^k(x), \quad i = 1, \dots, d, \quad (12)$$

kde  $H[u]$  je funkcionál hydrodynamického typu a  $h$  je hamiltonovská hustota.

## 2 JEDNODIMENZIONÁLNÍ PŘÍPAD

Uvažujme nyní jednodimenzionální případ pro pevně zvolené  $\alpha$ . Zkoumáme tedy hamiltonovský systém

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}(t, x) = \left[ g^{ij}[u(t, x)] \frac{\partial^2 h(u)}{\partial u^j \partial u^k} + b_k^{ij}[u(t, x)] \frac{\partial h(u)}{\partial u^j} \right] \frac{\partial u^k}{\partial x}(t, x) \quad (13)$$

a Poissonova závorka hydrodynamického typu má tvar

$$\{I_1, I_2\} = \int dx \left[ \frac{\delta I_1}{\delta u^q(x)} A^{qp} \frac{\delta I_2}{\delta u^p(x)} \right], \quad A^{qp} = \left( g^{qp}(u) \frac{d}{dx} + b_s^{qp}(u) \frac{\partial u^s}{\partial x} \right), \quad (14)$$

speciálně

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}[u(t, x)] \delta'(x - y) + b_k^{ij}[u(t, x)] \frac{\partial u^k}{\partial x} \delta(x - y). \quad \text{eq:Poisson1D} \quad (15)$$

**Definice 3.** Řekneme, že Poissonova závorka hydrodynamického typu je nede degenerovaná, jestliže  $\det(g^{ij}) \neq 0$ .

Podle tvrzení 2 na následující straně níže je nede degenerovanost závorky invariantní vůči záměnně proměnných.

**Definice 4.** Necht' je matice  $(g^{ij}(u))$  nede degenerovaná. Definujme funkce  $\Gamma_{jk}^i(u)$  vztahem

$$b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u), \quad i, j, k, s = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Dále uvidíme, že volba značení  $g^{ij}$  a  $\Gamma_{jk}^i$  není náhodná, ale že tyto funkce skutečně reprezentují metriku a složky afinní konexe na  $M^N$ . V důkazu mnoha tvrzení bude užitečný následující trik.

lemma:delta

**Lemma 1** (O identitě s deltami). *Platí*

$$f(y) \delta'(x - y) = f(x) \delta'(x - y) + f'(x) \delta(x - y). \quad (17)$$

*Důkaz.* Přes distribuce.

$$\begin{aligned} \langle f(x) \delta'(x - y), \psi(x) \rangle &= \langle \delta'(x - y), f(x) \psi(x) \rangle = \\ &= - \langle \delta(x - y), f'(x) \psi(x) \rangle - \langle \delta(x - y), f(x) \psi'(x) \rangle = \\ &= - f'(y) \psi(y) - f(y) \langle \delta(x - y), \psi'(x) \rangle = \\ &= - \langle f'(x) \delta(x - y), \psi(x) \rangle + f(y) \langle \delta'(x - y), \psi(x) \rangle = \\ &= \langle f(y) \delta(x - y) - f'(x) \delta'(x - y), \psi(x) \rangle, \end{aligned}$$

odtud

$$\langle f(y) \delta'(x - y), \psi(x) \rangle = \langle f'(x) \delta(x - y), \psi(x) \rangle + \langle f(x) \delta'(x - y), \psi(x) \rangle. \quad (18)$$

□

## 2.1 Geometrie prostoru $M^N$

prop: transformace

**Tvrzení 2** (O transformaci proměnných). Uvažujme transformaci  $u^i \mapsto v^i$  danou vztahem

$$v^i = v^i(u^1, \dots, u^N), \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{eq: transform (19)}$$

kteřá je diffeomorfismem třídy  $C^2$ . Pak platí následující tvrzení:

1. Třída Poissonových závorek hydrodynamického typu je invariantní vůči záměně proměnných  $u^i \mapsto v^i(u)$ .
2. Koeficienty  $g^{ij}(u)$  se transformují jako tensory typu (0,2), tj.

$$g^{pq}(v) = \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial v^q}{\partial u^j} g^{ij}[u(v)], \quad p, q = 1, \dots, N. \quad \text{eq: transformace-metrika (20)}$$

3. Koeficienty  $\Gamma_{jk}^i$  se transformují jako Christoffelovy symboly (složky afinní konexe), tj.

$$\Gamma_{qr}^p(v) = \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial v^q} \frac{\partial u^k}{\partial v^r} \Gamma_{jk}^i(u) + \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial^2 u^i}{\partial v^q \partial v^r}. \quad \text{eq: transformace-konexe (21)}$$

**Důkaz.** 1. Leibnizova identita dává

$$\left\{ v^p(u^i(x)), v^q(u^j(y)) \right\} = \frac{\partial v^p}{\partial u^i}(x) \frac{\partial v^q}{\partial u^j}(y) \left\{ u^i(x), u^j(y) \right\} \quad (22)$$

promyslet si, proč

2. Rozepíšme transformaci závorky

$$g^{pq}(v) \delta'(x-y) + b_s^{pq} \frac{\partial v^s}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial x} \delta(x-y) = \frac{\partial v^p}{\partial u^i}(x) \frac{\partial v^q}{\partial u^j}(y) \left[ g^{ij}(u) \delta'(x-y) + b_k^{ij}(u) \frac{\partial u^k}{\partial x} \delta(x-y) \right]. \quad (23)$$

V dalším pro přehlednost označme

$$T_k^a = \frac{\partial v^a}{\partial u^k}. \quad (24)$$

Využitím lemmatu 1 na předchozí straně dostaneme

$$g^{pq}(v) \delta'(x-y) + b_n^{pq} T_j^n u_x^j \delta(x-y) = T_i^p(x) T_j^q(x) g^{ij}(u) \delta'(x-y) + \left( \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k} + T_i^p T_j^q b_k^{ij} \right) u_x^k \delta(x-y). \quad (25)$$

Porovnáním členů s  $\delta'$  dostaneme přímo vztah (20).

3. Porovnáním členů s  $\delta$  dostaneme

$$b_n^{pq}(v) T_k^n = b_k^{ij}(u) T_i^p T_j^q + g^{ij}(u) T_i^p \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k} \quad (26)$$

a po rozpisu

$$-g^{ps}(v) \Gamma_{sn}^q(v) T_k^n = -g^{il}(u) \Gamma_{lk}^j(u) T_i^p T_j^q + g^{ij}(u) T_i^p \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k}. \quad (27)$$

Na levé straně využijeme (20) a dostaneme

$$-g^{ij}(u) \Gamma_{sm}^q(v) T_i^p T_j^s T_k^m = -g^{ij}(u) \Gamma_{jk}^l(u) T_i^p T_l^q + g^{ij}(u) \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k} T_i^p \quad (28)$$

a po zkrácení  $g^{ij}(u)T_i^p$

$$\Gamma_{jk}^l(u)T_l^q = \Gamma_{sm}^q(v)T_j^s T_k^m + \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k}. \quad (29)$$

Odtud

$$\Gamma_{jk}^l(u) = \Gamma_{sm}^q(v) \frac{\partial v^s}{\partial u^j} \frac{\partial v^m}{\partial u^k} \frac{\partial u^l}{\partial v^q} + \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k} \frac{\partial u^l}{\partial v^q}, \quad (30)$$

což je hledaný transformační vztah.

□

## 2.2 Ekvivalence riemannovské a poissonovské struktury

theorem1:ekvivalence

**Věta 1** (Ekvivalence pseudoriemannovské a hamiltonovské struktury). *Nechť  $\det(g^{ij}) \neq 0$ . Pak je vztahem (15) definována Poissonova závorka splňující antisymetrii, Leibnizovo pravidlo a Jacobiho identitu právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

1.  $g^{ij}$  je symetrický tensor, tj. definuje pseudo-riemannovskou metriku na prostoru  $M^N$ .
2. Koeficienty  $\Gamma_{jk}^i$  jsou složky Levi-Civitovy konexe příslušející metrice  $g^{ij}$ .
3. Odpovídající konexe má nulovou torzi a křivost.

**Důsledek.** Existují lokální souřadnice  $w^i = w^i(u^1, \dots, u^N)$ ,  $i = 1, \dots, N$  takové, že

$$\tilde{g}^{ij}(w) = \text{konst}, \quad b_k^{ij}(w) = 0. \quad (31)$$

V těchto souřadnicích je Poissonova závorka konstantní:

$$\{w^i(x), w^j(y)\} = \tilde{g}^{ij} \delta'(x - y). \quad (32)$$

Úplný lokální invariant Poissonových závorek je signatura pseudo-eukleidovské metriky  $\tilde{g}^{ij}$ .

Co se tímhle myslí?

**Důkaz věty 1. Krok 1: Antisymetrie Poissonovy závorky implikuje symetrii metriky a kompatibilitu s  $\Gamma_{jk}^i$**   
Poissonova závorka je antisymetrická, tj.

$$\{u^i(x), u^j(y)\} + \{u^j(y), u^i(x)\} = 0. \quad (33)$$

Rozepíšme druhou závorku

$$\{u^j(y), u^i(x)\} = g^{ji}[u(y)]\delta'(y - x) + b_k^{ji}[u(y)]\frac{\partial u^k}{\partial y}\delta(y - x). \quad (34)$$

Využijeme vztahů

$$\delta(y - x) = \delta(x - y), \quad \delta'(y - x) = -\delta'(x - y) \quad (35)$$

a lemmatu 1 na straně 2 aplikovaného na  $g^{ji}[u(y)]\delta'(y - x)$ . Dostaneme

$$\{u^j(y), u^i(x)\} = -g^{ji}[u(x)]\delta'(x - y) - \frac{\partial g^{ji}}{\partial u^k}[u(x)]\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x - y) + b_k^{ji}[u(x)]\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x - y). \quad (36)$$

Celkově

$$0 = \{u^i(x), u^j(y)\} + \{u^j(y), u^i(x)\} = [g^{ij}[u(x)] - g^{ji}[u(x)]]\delta'(x - y) + \left[b_k^{ij} - \frac{\partial g^{ji}}{\partial u^k} + b_k^{ji}\right]\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x - y). \quad (37)$$

Výraz na pravé straně bude nulový právě tehdy, jestliže

$$g^{ij} = g^{ji}, \quad \text{eq:Th.Novikov-symetrie} \quad (38)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b_k^{ij} + b_k^{ji}. \quad \text{eq:Th.Novikov-konexe} \quad (39)$$

Rovnice (38) říká, že  $g^{ij}$  je symetrický tenzor, dle předpokladu  $\det g^{ij} \neq 0$  je nedegenerovaný, tj. definuje metriku na varietě  $M^N$ . Rovnice (39) dává

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} + g^{is} \Gamma_{sk}^j + g^{sj} \Gamma_{sk}^i = 0, \quad (40)$$

takže  $\Gamma_{ij}^k$  dává konexi kompatibilní s metrikou  $g^{ij}$ .

### Krok 2: Jacobiho identita je ekvivalentní nulové torzi a křivosti

Abychom dokázali, že je nulová křivost a torze, využijeme Jacobiho identity. Položme

$$J^{ijk}(x, y, z) = \left\{ \left\{ u^i(x), u^j(y) \right\}, u^k(z) \right\} + \left\{ \left\{ u^j(y), u^k(z) \right\}, u^i(x) \right\} + \left\{ \left\{ u^k(z), u^i(x) \right\}, u^j(y) \right\}. \quad (41)$$

Musíme ukázat, že je  $J^{ijk}(x, y, z) = 0$  ve smyslu distribucí, tedy

$$\left\langle J^{ijk}(x, y, z), p_i(x) q_j(y) r_k(z) \right\rangle = 0 \quad \text{pro } p_i, q_j, r_k \in \mathcal{D}'(R) \quad (42)$$

a protože se jedná o regulární distribuci, ověřujeme

$$\int_{\mathbb{R}^3} J^{ijk}(x, y, z) p_i(x) q_j(y) r_k(z) dx dy dz = 0. \quad (43)$$

Takový integrál lze převést na jednodimenzionální integrál

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{\sigma, \tau=0}^2 A_{\sigma\tau}^{ijk} p_i q_j^{(\sigma)} r_k^{(\tau)} dx = 0, \quad (44)$$

kde koeficienty  $A_{\sigma\tau}^{ijk}$  jsou nezávislé na  $p, q, r$ . Obdržíme tedy systém rovnic

$$A_{\sigma\tau}^{ijk} = 0 \quad \forall i, j, k = 1, \dots, N; \quad 0 \leq \sigma, \tau \leq 2. \quad (45)$$

Rád bych si funkce napsal explicitně, určitě se v nich objeví derivace druhého řádu někde? Ale nedaří se mi to sestavit.

Přepíšme tyto rovnice explicitně. Jedna z těchto rovnic dává

$$A_{02}^{ijk} = b_s^{ij} g^{sk} - b_s^{kj} g^{si} = -g^{ip} \Gamma_{ps}^j g^{sk} + g^{km} \Gamma_{ms}^j g^{si} = 0, \quad (46)$$

odtud (po přenásobení  $g_{ai} g_{bk}$ )

$$\Gamma_{ab}^j - \Gamma_{ba}^j = 0. \quad (47)$$

Tento vztah říká, že jsou koeficienty afinní konexe symetrické, tj. příslušná konexe má nulovou torzi.

Další z rovnic dává

$$A_{00}^{ijk} = B_p^{ijk}(u) u_{xx}^p + C_{pq}^{ijk}(u) u_x^p u_x^q = 0, \quad (48)$$

kde

Je v původním článku typo??

$$B_p^{ijk} = (b_{s,p}^{jk} - b_{p,s}^{jk}) g^{si} + b_s^{ij} b_p^{sk} - b_s^{ik} b_p^{sj}. \quad (49)$$

Nulovost  $B_p^{ijk}$  dává nulovou křivost, jak plyne z rozpisu

$$B_p^{ijk} = -g^{is} \left( g_{,p}^j \Gamma_{ms}^k + g^{jm} \Gamma_{ms,p}^k - g_{,s}^m \Gamma_{mp}^k - g^{jm} \Gamma_{mp,s}^k \right) + g^{im} \Gamma_{ms}^j g^{sn} \Gamma_{np}^k - g^{im} \Gamma_{ms}^k g^{sn} \Gamma_{np}^j = \quad (50)$$

$$= g^{is} g^{jn} \left( \Gamma_{np}^m \Gamma_{ms}^k - \Gamma_{ns}^m \Gamma_{mp}^k + \Gamma_{mp,s}^k - \Gamma_{ms,p}^k \right) + g^{is} g^{nm} \left( \Gamma_{np}^j \Gamma_{ms}^k - \Gamma_{ns}^j \Gamma_{mp}^k \right) + g^{im} g^{sn} \left( \Gamma_{ms}^j \Gamma_{np}^k - \Gamma_{ms}^k \Gamma_{np}^j \right) = \quad (51)$$

$$= -g^{is} g^{jn} \left( \Gamma_{ns}^m \Gamma_{mp}^k - \Gamma_{np}^m \Gamma_{ms}^k + \Gamma_{ms,p}^k - \Gamma_{mp,s}^k \right) = \quad (52)$$

$$= -g^{is} g^{jn} R_{nps}^k. \quad (53)$$

Takže křivost metriky  $g^{ij}$  je nulová. Tím jsme dokázali, že pokud je vztahem (15) definována Poissonova závorka, jsou splněny podmínky 1-3.

### Krok 3: Souřadnice, ve kterých je závorka triviální, dávají postačitelnost

Jestliže mají koeficienty afinní konexe  $\Gamma_{ij}^k$  nulovou torzi i křivost, existují souřadnice  $w^i = w^i(u^1, \dots, u^N)$  pro  $i = 1, \dots, N$  takové, že  $g^{ij} = \text{konst}$  a  $b_k^{ij} = 0$ . V těchto souřadnicích je Poissonova závorka konstantní

$$\{w^i(x), w^j(y)\} = \tilde{g}^{ij} \delta'(x - y). \quad (54)$$

Jacobiho identita, antisymetrie i Leibnizovo pravidlo jsou pro tuto závorku triviálně splněny. Tím jsme ukázali postačitelnost podmínek (1)-(3) pro vlastnosti Poissonovy závorky.  $\square$

## 2.3 Kdy je hydrodynamický systém hamiltonovský?

Nyní můžeme explicitně přepsat podmínky, při kterých je obecný systém hydrodynamických rovnic hamiltonovský vůči nějaké nede degenerované Poissonově závorce. Nejprve si povšimneme, že funkce  $f_j^i(u)$  lze přepsat pomocí Laplaceova–Beltramiho operátoru.

**Tvrzení 3** (O zápisu pomocí Laplaceova–Beltramiho operátoru). *Mějme hamiltonovský systém rovnic*

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = f_k^i(u) \frac{\partial u^k}{\partial x}, \quad f_k^i(u) = g^{ij}(u) \frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^k} - g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u) \frac{\partial h}{\partial u^j}. \quad \text{eq:hamiltonovsky-system} \quad (55)$$

Pak lze psát

$$f_k^i(u) = \nabla^i \nabla_k h(u), \quad (56)$$

kde  $\nabla_j$  je Levi-Civitova kovariantní derivace metriky  $g_{ij}$  a  $\nabla^i = g^{is} \nabla_s$ .

*Důkaz.* Přímým dosazením

$$\nabla_k h(u) = \frac{\partial h}{\partial u^k}, \quad (57)$$

$$\nabla^i \nabla_k h(u) = g^{is} \nabla_s \frac{\partial h}{\partial u^k} = g^{is} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u^s \partial u^k} - \Gamma_{sk}^j \frac{\partial h}{\partial u^j} \right) = f_k^i(u). \quad (58)$$

$\square$

Pomocí tohoto zápisu snadno můžeme sepsat postačující podmínky hamiltonovskosti. Důkaz plyne ihned z teoremu 1 na straně 4.

**Věta 2** (Postačující podmínka hamiltonovskosti systému). *Systém  $u_t^i = f_j^i(u) u_x^j$  je hamiltonovský právě tehdy, když existuje nede degenerovaná metrika  $g^{ij}(u)$ , jejíž afinní konexe má nulovou křivost a splňuje*

$$g_{ij} f_j^k = g_{jk} f_i^k, \quad \text{eq:gfgf} \quad (59)$$

$$\nabla_i f_j^k = \nabla_j f_i^k. \quad \text{eq:nabla f} \quad (60)$$

Speciálně vztah (60) říká, že  $\nabla_i$  má nulovou torzi.

## 2.4 Rekonstrukce metriky z $f_j^i(u)$ ?

Máme-li zadaný hamiltonovský systém s maticí  $f_j^i(u)$ , lze metriku  $g^{ij}(u)$  zkonstruovat jednoznačně? Tuto otázku nyní vyřešíme pro  $N \geq 3$ .

Označme  $\lambda_\alpha$  vlastní čísla matice  $f_j^i(u)$ . (Mohou být komplexní.) Předpokládejme, že jsou navzájem různá. Označme odpovídající bázi vlastních vektorů  $e_\alpha(u)$ . Definujme koeficient  $c_{\alpha\beta}^\gamma(u)$  vztahem

$$[e_\alpha, e_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \quad (61)$$

kde  $[\cdot, \cdot]$  značí obyčejný komutátor funkcí. Předpokládejme dále, že pro navzájem různé  $\alpha, \beta, \gamma$  je  $c_{\alpha\beta}^\gamma$  různé od nuly.

**Definice 5.** Matici  $f_j^i(u)$  splňující podmínky výše nazveme hamiltonovskou maticí.

**Věta 3** (O rekonstrukci metriky). *Nechť  $N \geq 3$ . Nechť je dána hamiltonovská matice  $f_j^i(u)$ . Pak lze zkonstruovat nedegenerovanou metriku  $g^{ij}(u)$  s nulovou křivostí jednoznačně až na násobek konstantou.*

Tomuhle nerozumím a myslím si, že v článku mají typo.

*Důkaz.* Z rovnice (59) je vidět, že v bázi  $e_\alpha$  je metrika  $g^{ij}$  diagonální.

Opravdu?

V této bázi pak bude mít rovnice (60) tvar (zde se nesčítá přes opakované indexy)

$$\partial_\alpha \lambda_\beta \delta_\beta^\gamma - \partial_\beta \lambda_\alpha \delta_\alpha^\gamma + (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma) \lambda_\gamma + \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma (\lambda_\beta - \lambda_\alpha) = 0. \quad (62)$$

Zde  $\partial_\alpha$  je derivace ve směru  $e_\alpha$  a konexe  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  jsou definované rovnostmi

$$\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \sum \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma. \quad (63)$$

Normalizujme nyní vlastní vektory  $e_\alpha$  tak, aby v této bázi byla metrika jednotková matice, tj.  $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ .

Výraz  $c_{\alpha\beta}^\gamma$  má význam torze (z definice) a platí

$$c_{\beta\alpha}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma. \quad (64)$$

□

## 3 VÍCEROZMĚRNÝ PŘÍPAD

Ve vícerozměrném případě máme lineární bundle metrik a s nimi spojených konexí. Pro každou záměnu prostorových proměnných  $x^\alpha \mapsto c_\beta^\alpha x^\beta$  pro  $\alpha = 1, \dots, d$  splňující  $\det c_\beta^\alpha = 1$  se metrika  $g^{ij\alpha}$  a konexe  $b_k^{ij\alpha}$  transformují jako komponenty vektoru.

**Definice 6.** Řekneme, že bundle metrik  $g^{ij\alpha}$  je silně nedegenerovaný, jestliže pro nějakou sadu  $c_\alpha$  je lineární kombinace  $c_\alpha g^{ij\alpha}$  nedegenerovaná matice.

**Věta 4.** *Nechť je hamiltonovský systém silně nedegenerovaný.*

1. Pro  $N = 1$  lze Poissonovu závorku redukovat na konstantní formu

$$g^{ij}(u) = \tilde{g}^{ij}(u). \quad (65)$$

2. Pro  $N \geq 2$  lze Poissonovu závorku redukovat na lineární formu

$$g^{ij\alpha}(u) = g_k^{ij\alpha} u^k + \tilde{g}^{ij\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, d, \quad (66)$$

$$(67)$$

kde koeficienty  $g_k^{ij\alpha} = b_k^{ij\alpha} + b_k^{ij\alpha}$ ,  $\tilde{g}^{ij\alpha}$  a  $b_k^{ij\alpha}$  jsou konstantní.