1 ÚVOD

Definice 1 (Homogenní systém hydrodynamického typu)**.** Homogenní systém hydrodynamického typu je systém parciálních diferenciálních rovnic tvaru

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = f^{i\alpha}_j(u)\frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}\,, \quad i = 1, \ldots, N\,, \quad \alpha = 1, \ldots, d\,. \tag{1}$$

prop:transformace-A

Tvrzení 1 (Transformace $f^{i\alpha}_j$)**.** *Provedeme-li záměnu proměnných $u^i \mapsto v^a$ vztahem*

$$u^i = u^i(v^1, \cdots, v^N)\,, \tag{2}$$

pak se funkce $f^{i\alpha}_j$ transformují jako

$$f^{a\alpha}_b(v) = \frac{\partial v^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial v^b} f^{i\alpha}_j(u)\,. \tag{3}$$

Důkaz. Stačí rozepsat

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}(v) = \frac{\partial u^i}{\partial v^a}\frac{\partial v^a}{\partial t}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha}(v) = \frac{\partial u^j}{\partial v^b}\frac{\partial v^b}{\partial x^\alpha}\,, \tag{5}$$

takže

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^a}\frac{\partial v^a}{\partial t} = \frac{\partial u^j}{\partial v^b} f^{i\alpha}_j(v(u))\frac{\partial v^b}{\partial x^\alpha} \tag{6}$$

a odtud

$$\frac{\partial v^a}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial v^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial v^b} f^{i\alpha}_j(v(u))}_{f^{a\alpha}_b(v)}\frac{\partial v^b}{\partial x^\alpha}\,. \tag{7}$$

□

Označme tedy M^N prostor (varietu) s lokálními souřadnicemi $u^1, \cdots, u^N$. Pak lze na tvrzení 1 nahlížet jako na změnu souřadnic na M^N a funkce $f^{i\alpha}_j$ jsou tenzory typu (1,1) pro každé zvolené α. Pro případ, že $f^{i\alpha}_j$ jsou ve speciálním tvaru, zavedeme bohatší geometrii na M^N .

Definice 2.

1. Poissonova závorka hydrodynamického typu funkcionálů I_1 a I_2 je definována vztahem

$$\{I_1, I_2\} = \int \mathrm{d}x \left[\frac{\delta I_1}{\delta u^q(x)} f^{qp} \frac{\delta I_2}{\delta u^p(x)}\right]\,, \tag{8}$$

kde

$$A = (A^{qp}) = \left(g^{qp}(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\alpha} + b^{qp\alpha}_s(u)\frac{\partial u^s}{\partial x^\alpha}\right)\,, \tag{9}$$

přičemž $g^{ij\alpha}$ a $b^{ij\alpha}_k$ jsou dané funkce, $i, j, k = 1, \ldots, N$ a $\alpha = 1, \ldots, d$.

Speciálně

$$\left\{u^i(x), u^j(y)\right\} = g^{ij\alpha}[u(x)]\delta_\alpha(x-y) + b^{ij\alpha}_k[u(x)]u^k_\alpha(x)\delta(x-y)\,, \tag{10}$$

* **Kontakt:** miroslav@burysek.eu

2. Hamiltonián hydrodynamického typu je definován vztahem

$$H[u] = \int_{\mathbb{R}^d} h(u(x))\mathrm{d}^d x\,, \tag{11}$$

kde $h[u]$ je nezávislá na u_α, $u_{\alpha\beta}$. Funkci $h(u)$ nazýváme hamiltonovská hustota.

3. Řekneme, že systém je hamiltonovský, jestliže lze psát

$$u^i_t(x) = \left\{u^i(x), H\right\} := \left[g^{ij\alpha}[u(x)]\frac{\partial^2 h(u)}{\partial u^j \partial u^k} + b^{ij\alpha}_k[u(x)]\frac{\partial h(u)}{\partial u^j}\right] u^k_\alpha(x)\,, \quad i = 1, \dots, d\,, \tag{12}$$

kde $H[u]$ je funkcionál hydrodynamického typu a h je hamiltonovská hustota.

2 JEDNODIMENZIONÁLNÍ PŘÍPAD

Uvažujme nyní jednodimenzionální případ pro pevně zvolené α. Zkoumáme tedy hamiltonovský systém

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}(t,x) = \left[g^{ij}[u(t,x)]\frac{\partial^2 h(u)}{\partial u^j \partial u^k} + b^{ij}_k[u(t,x)]\frac{\partial h(u)}{\partial u^j}\right] \frac{\partial u^k}{\partial x}(t,x) \tag{13}$$

a Poissonova závorka hydrodynamického typu má tvar

$$\{I_1, I_2\} = \int \mathrm{d}x \left[\frac{\delta I_1}{\delta u^q(x)} A^{qp} \frac{\delta I_2}{\delta u^p(x)}\right]\,, \quad A^{qp} = \left(g^{qp}(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + b^{qp}_s(u)\frac{\partial u^s}{\partial x}\right)\,, \tag{14}$$

speciálně

eq:Poisson1D

$$\left\{u^i(x), u^j(y)\right\} = g^{ij}[u(t,x)]\delta'(x-y) + b^{ij}_k[u(t,x)]\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x-y)\,. \tag{15}$$

Definice 3. Řekneme, že Poissonova závorka hydrodynamického typu je nedegenerovaná, jestliže $\det(g^{ij}) \neq 0$.

Podle tvrzení 2 na následující straně níže je nedegenerovanost závorky invariantní vůči záměnně proměnných.

Definice 4. Nechť je matice $(g^{ij}(u))$ nedegenerovaná. Definujme funkce $\Gamma^i_{jk}(u)$ vztahem

eq:definice-Gamma

$$b^{ij}_k(u) = -g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u)\,, \quad i,j,k,s = 1, \dots, N\,. \tag{16}$$

Dále uvidíme, že volba značení g^{ij} a Γ^i_{jk} není náhodná, ale že tyto funkce skutečně reprezentují metriku a složky afinní konexe na M^N. V důkazu mnoha tvrzení bude užitečný následující trik.

lemma:delta

Lemma 1 (O identitě s deltami)**.** *Platí*

$$f(y)\delta'(x-y) = f(x)\delta'(x-y) + f'(x)\delta(x-y)\,. \tag{17}$$

Důkaz. Přes distribuce.

$$\begin{aligned}
\left\langle f(x)\delta'(x-y), \psi(x)\right\rangle &= \left\langle \delta'(x-y), f(x)\psi(x)\right\rangle = \\
&= -\left\langle \delta(x-y), f'(x)\psi(x)\right\rangle - \left\langle \delta(x-y), f(x)\psi'(x)\right\rangle = \\
&= -f'(y)\psi(y) - f(y)\left\langle \delta(x-y), \psi'(x)\right\rangle = \\
&= -\left\langle f'(x)\delta(x-y), \psi(x)\right\rangle + f(y)\left\langle \delta'(x-y), \psi(x)\right\rangle = \\
&= \left\langle f(y)\delta(x-y) - f'(x)\delta'(x-y), \psi(x)\right\rangle\,,
\end{aligned}$$

odtud

$$\left\langle f(y)\delta'(x-y), \psi(x)\right\rangle = \left\langle f'(x)\delta(x-y), \psi(x)\right\rangle + \left\langle f(x)\delta'(x-y), \psi(x)\right\rangle\,. \tag{18}$$

$\square$

2.1 Geometrie prostoru M^N

V tomto paragrafu si povšimneme, že na prostoru M^N lze zavést tensorová pole a afinní konexi, což nám dále umožní formulovat tvrzení o ekvivalenci hamiltonovské a riemannovské struktury.

prop:transoformace

Tvrzení 2 (O transformaci proměnných). *Uvažujme transformaci $u^i \mapsto v^i$ danou vztahem*

eq:transform

$$v^i = v^i(u^1, \ldots, u^N)\,, \quad i = 1, \ldots, N\,, \tag{19}$$

která je diffeomorfismem třídy C^2. Pak platí následující tvrzení:

1. *Poissonovy závorky se transformují jako tensory typu (2,0), tj.*

   eq:transformace-zavorka

   $$\left\{v^p(u^i(x)), v^q(u^j(y))\right\} = \frac{\partial v^p}{\partial u^i}(x)\frac{\partial v^q}{\partial u^j}(y)\left\{u^i(x), u^j(y)\right\}\,. \tag{20}$$

2. *Koeficienty $g^{ij}(u)$ se transformují jako tensory typu (0,2), tj.*

   eq:transformace-metrika

   $$g^{pq}(v) = \frac{\partial v^p}{\partial u^i}\frac{\partial v^q}{\partial u^j} g^{ij}[u(v)]\,, \quad p, q = 1, \ldots, N\,. \tag{21}$$

3. *Koeficienty Γ^i_{jk} se transformují jako Christoffelovy symboly (složky afinní konexe), tj.*

   eq:transformace-konexe

   $$\Gamma^p_{qr}(v) = \frac{\partial v^p}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial v^q}\frac{\partial u^k}{\partial v^r}\Gamma^i_{jk}(u) + \frac{\partial v^p}{\partial u^i}\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^q \partial v^r}\,. \tag{22}$$

Důkaz. 1. Přímým dosazením do definice

$$\left\{v^p(u^i(x)), v^q(u^j(y))\right\} = \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}y' \underbrace{\frac{\delta v^p}{\delta u^i(x')}}_{\frac{\partial v^p}{\partial u^i}(x')\delta(x-x')} \left\{u^i(x'), u^j(y')\right\} \underbrace{\frac{\delta v^q}{\delta u^j(y')}}_{\frac{\partial v^q}{\partial u^j}(y')\delta(y-y')} = \tag{23}$$

$$= \frac{\partial v^p}{\partial u^i}(x)\frac{\partial v^q}{\partial u^j}(y)\left\{u^i(x), u^j(y)\right\}\,. \tag{24}$$

2. Rozepišme transformaci závorky (20) pomocí (15)

$$g^{pq}[v(u(x))]\delta'(x-y) + b^{pq}_s[v(u(x))]\frac{\partial v^s}{\partial u^k}(x)\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x-y) = \frac{\partial v^p}{\partial u^i}(x)\frac{\partial v^q}{\partial u^j}(y)\left[g^{ij}[u(x)]\delta'(x-y) + b^{ij}_k[u(x)]\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x-y)\right]\,. \tag{25}$$

eq:dosad

V dalším pro přehlednost označme

$$T^a_k(x) := \frac{\partial v^a}{\partial u^k}(x)\,. \tag{26}$$

Na pravé straně rovnice (25) vyjádříme $T^q_j(y)\delta'(x-y)$ pomocí lemmatu 1 na předchozí straně. Tím převedeme všechny funkce do proměnné x, což už dále nebudeme explicitně vypisovat. Dostaneme

$$g^{pq}(v)\delta'(x-y) + b^{pq}_n(v)T^n_j\frac{\partial u^j}{\partial x}\delta(x-y) = T^p_i T^q_j g^{ij}(u)\delta'(x-y) + \left(\frac{\partial^2 v^q}{\partial u^j \partial u^k} + T^p_i T^q_j b^{ij}_k\right)\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x-y)\,. \tag{27}$$

Porovnáním členů s δ' dostaneme vztah pro transformaci metriky (21).

3. Porovnáním členů s δ dostaneme

$$b^{pq}_n(v)T^n_k = b^{ij}_k(u)T^p_i T^q_j + g^{ij}(u)T^p_i \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k} \tag{28}$$

a po rozpisu pomocí (16)

$$-g^{ps}(v)\Gamma^q_{sn}(v)T^n_k = -g^{il}(u)\Gamma^j_{lk}(u)T^p_i T^q_j + g^{ij}(u)T^p_i \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k}\,. \tag{29}$$

Na levé straně využijeme transformaci metriky (21) a dostaneme

$$-g^{ij}(u)\Gamma^q_{sm}(v)T^p_i T^s_j T^m_k = -g^{ij}(u)\Gamma^l_{jk}T^p_i T^q_l + g^{ij}(u)\frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k}T^p_i \tag{30}$$

a po zkrácení $g^{ij}(u)T^p_i$

$$\Gamma^l_{jk}(u)T^q_l = \Gamma^q_{sm}(v)T^s_j T^m_k + \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k}\,. \tag{31}$$

V posledním kroku přenásobíme inverzní maticí $(T^{-1})^a_q$ a dostaneme

$$\Gamma^a_{jk}(u) = \Gamma^q_{sm}(v)\frac{\partial v^s}{\partial u^j}\frac{\partial v^m}{\partial u^k}\frac{\partial u^a}{\partial v^q} + \frac{\partial^2 v^q}{\partial u^i \partial u^k}\frac{\partial u^a}{\partial v^q}\,, \tag{32}$$

což je hledaný transformační vztah (22).

□

2.2 Ekvivalence riemannovské a poissonovské struktury

theorem1:ekvivalence

Věta 1 (Ekvivalence pseudoriemannovské a hamiltonovské struktury). *Nechť* $\det(g^{ij}) \neq 0$. *Pak je vztahem (15) definována Poissonova závorka splňující antisymetrii, Leibnizovo pravidlo a Jacobiho identitu právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

1. *g^{ij} je symetrický tensor, tj. definuje pseudo-riemannovskou metriku na prostoru M^N.*
2. *Koeficienty Γ^i_{jk} jsou složky Levi-Civitovy konexe příslušející metrice g^{ij}.*
3. *Odpovídající konexe má nulovou torzi a křivost.*

Důsledek. *Existují lokální souřadnice $w^i = w^i(u^1, \dots, u^N)$, $i = 1, \dots, N$ takové, že*

$$\tilde{g}^{ij}(w) = \text{konst}\,, \quad b^{ij}_k(w) = 0\,. \tag{33}$$

V těchto souřadnicích je Poissonova závorka konstantní:

$$\left\{w^i(x), w^j(y)\right\} = \tilde{g}^{ij}\delta'(x-y)\,. \tag{34}$$

Úplný lokální invariant Poissonových závorek je signatura pseudo-eukleidovské metriky $\tilde{g}^{ij}$.

Co se tímhle myslí?

Důkaz věty 1. **Krok 1: Antisymetrie Poissonovy závorky implikuje symetrii metriky a kompatibilitu s Γ^i_{jk}**

Poissonova závorka je antisymetrická, tj.

$$\left\{u^i(x), u^j(y)\right\} + \left\{u^j(y), u^i(x)\right\} = 0\,. \tag{35}$$

Rozepišme druhou závorku

$$\left\{u^j(y),u^i(x)\right\} = g^{ji}[u(y)]\delta'(y-x) + b^{ji}_k[u(y)]\frac{\partial u^k}{\partial y}\delta(y-x)\,. \tag{36}$$

Využijeme vztahů

$$\delta(y-x) = \delta(x-y)\,, \quad \delta'(y-x) = -\delta'(x-y) \tag{37}$$

a lemmatu 1 na straně 2 aplikovaného na $g^{ji}[u(y)]\delta'(y-x)$. Dostaneme

$$\left\{u^j(y),u^i(x)\right\} = -g^{ji}[u(x)]\delta'(x-y) - \frac{\partial g^{ji}}{\partial u^k}[u(x)]\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x-y) + b^{ji}_k[u(x)]\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x-y)\,. \tag{38}$$

Celkově

$$0 = \left\{u^i(x),u^j(y)\right\} + \left\{u^j(y),u^i(x)\right\} = \left[g^{ij}[u(x)] - g^{ji}[u(x)]\right]\delta'(x-y) + \left[b^{ij}_k - \frac{\partial g^{ji}}{\partial u^k} + b^{ji}_k\right]\frac{\partial u^k}{\partial x}\delta(x-y)\,. \tag{39}$$

Výraz na pravé straně bude nulový právě tehdy, jestliže

eq:Th.Novikov-symetrie

$$g^{ij} = g^{ji}\,, \tag{40}$$

eq:Th.Novikov-konexe

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b^{ij}_k + b^{ji}_k\,. \tag{41}$$

Rovnice (40) říká, že g^{ij} je symetrický tenzor, dle předpokladu $\det g^{ij} \neq 0$ je nedegenerovaný, tj. definuje metriku na varietě M^N. Rovnice (41) dává

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} + g^{is}\Gamma^j_{sk} + g^{sj}\Gamma^i_{sk} = 0\,, \tag{42}$$

takže Γ^k_{ij} dává konexi kompatibilní s metrikou g^{ij}.

Krok 2: Jacobiho identita je ekvivalentní nulové torzi a křivosti

Abychom dokázali, že je nulová křivost a torze, využijeme Jacobiho identity. Položme

$$J^{ijk}(x,y,z) = \left\{\left\{u^i(x),u^j(y)\right\},u^k(z)\right\} + \left\{\left\{u^j(y),u^k(z)\right\},u^i(x)\right\} + \left\{\left\{u^k(z),u^i(x)\right\},u^j(y)\right\}\,. \tag{43}$$

Musíme ukázat, že je $J^{ijk}(x,y,z) = 0$ ve smyslu distribucí, tedy

$$\left\langle J^{ijk}(x,y,z), p_i(x)q_j(y)r_k(z)\right\rangle = 0 \quad \text{pro } p_i,q_j,r_k \in \mathcal{D}'(R) \tag{44}$$

a protože se jedná o regulární distribuci, ověřujeme

$$\int_{\mathbb{R}^3} J^{ijk}(x,y,z)p_i(x)q_j(y)r_k(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0\,. \tag{45}$$

Takový integrál lze převést na jednodimenzionální integrál

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{\sigma,\tau=0}^{2} A^{ijk}_{\sigma\tau}p_i q^{(\sigma)}_j r^{(\tau)}_k\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{46}$$

kde koeficienty $A^{ijk}_{\sigma\tau}$ jsou nezávislé na p,q,r. Obdržíme tedy systém rovnic

$$A^{ijk}_{\sigma\tau} = 0 \quad \forall i,j,k = 1,\ldots,N\,; \quad 0 \leq \sigma,\tau \leq 2\,. \tag{47}$$

Rád bych si funkce napsal explicitně, určitě se v nich objeví derivace druhého řádu někde? Ale nedaří se mi to sestavit.

Přepišme tyto rovnice explicitně. Jedna z těchto rovnic dává

$$A_{02}^{ijk} = b_s^{ij} g^{sk} - b_s^{kj} g^{si} = -g^{ip}\Gamma^j_{ps} g^{sk} + g^{km}\Gamma^j_{ms} g^{si} = 0\,, \tag{48}$$

odtud (po přenásobení $g_{ai}g_{bk}$)

$$\Gamma^j_{ab} - \Gamma^j_{ba} = 0\,. \tag{49}$$

Tento vztah říká, že jsou koeficienty afinní konexe symetrické, tj. příslušná konexe má nulovou torzi.

Další z rovnic dává

$$A_{00}^{ijk} = B_p^{ijk}(u)u^p_{xx} + C^{ijk}_{pq}(u)u^p_x u^q_x = 0\,, \tag{50}$$

kde

Je v původním článku typo??

$$B_p^{ijk} = (b^{jk}_{s,p} - b^{jk}_{p,s})g^{si} + b_s^{ij} b_p^{sk} - b_s^{ik} b_p^{sj}\,. \tag{51}$$

Nulovost B_p^{ijk} dává nulovou křivost, jak plyne z rozpisu

$$B_p^{ijk} = -\,g^{is}\left(g^{jm}_{,p}\Gamma^k_{ms} + g^{jm}\Gamma^k_{ms,p} - g^{jm}_{,s}\Gamma^k_{mp} - g^{jm}\Gamma^k_{mp,s}\right) + g^{im}\Gamma^j_{ms} g^{sn}\Gamma^k_{np} - g^{im}\Gamma^k_{ms} g^{sn}\Gamma^j_{np} = \tag{52}$$

$$= g^{is} g^{jn}\left(\Gamma^m_{np}\Gamma^k_{ms} - \Gamma^m_{ns}\Gamma^k_{mp} + \Gamma^k_{mp,s} - \Gamma^k_{ms,p}\right) + g^{is} g^{nm}\left(\Gamma^j_{np}\Gamma^k_{ms} - \Gamma^j_{ns}\Gamma^k_{mp}\right) + g^{im} g^{sn}\left(\Gamma^j_{ms}\Gamma^k_{np} - \Gamma^k_{ms}\Gamma^j_{np}\right) = \tag{53}$$

$$= -\,g^{is} g^{jn}\left(\Gamma^m_{ns}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^m_{np}\Gamma^k_{ms} + \Gamma^k_{ms,p} - \Gamma^k_{mp,s}\right) = \tag{54}$$

$$= -\,g^{is} g^{jn} R^k_{nps}\,. \tag{55}$$

Takže křivost metriky g^{ij} je nulová. Tím jsme dokázali, že pokud je vztahem (15) definována Poissonova závorka, jsou splněny podmínky 1-3.

Krok 3: Souřadnice, ve kterých je závorka triviální, dávají postačitelnost

Jestliže mají koeficienty afinní konexe Γ^k_{ij} nulovou torzi i křivost, existují souřadnice $w^i = w^i(u^1, \ldots, u^N)$ pro $i = 1, \ldots, N$ takové, že $g^{ij} = \text{konst}$ a $b^{ij}_k = 0$. V těchto souřadnicích je Poissonova závorka konstantní

$$\left\{w^i(x), w^j(y)\right\} = \tilde{g}^{ij}\delta'(x-y)\,. \tag{56}$$

Jacobiho identita, antisymetrie i Leibnizovo pravidlo jsou pro tuto závorku triviálně splněny. Tím jsme ukázali postačitelnost podmínek (1)-(3) pro vlastnosti Poissonovy závorky. □

2.3 Kdy je hydrodynamický systém hamiltonovský?

Nyní můžeme explicitně přepsat podmínky, při kterých je obecný systém hydrodynamických rovnic hamiltonovský vůči nějaké nedegenerované Poissonově závorce. Nejprve si povšimneme, že funkce $f^i_j(u)$ lze přepsat pomocí Laplaceova–Beltramiho operátoru.

Tvrzení 3 (O zápisu pomocí Laplaceova–Beltramiho operátoru)**.** *Mějme hamiltonovský systém rovnic*

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = f^i_k(u)\frac{\partial u^k}{\partial x}\,, \quad f^i_k(u) = g^{ij}(u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^k} - g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u)\frac{\partial h}{\partial u^j}\,. \tag{57}$$

eq:hamiltonovsky-system

Pak lze psát

$$f^i_k(u) = \nabla^i\nabla_k h(u)\,, \tag{58}$$

kde ∇_j je Levi-Civitova kovariantní derivace metriky g_{ij} a $\nabla^i = g^{is}\nabla_s$.

Důkaz. Přímým dosazením

$$\nabla_k h(u) = \frac{\partial h}{\partial u^k}\,, \tag{59}$$

$$\nabla^i \nabla_k h(u) = g^{is}\nabla_s \frac{\partial h}{\partial u^k} = g^{is}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^s \partial u^k} - \Gamma^j_{sk}\frac{\partial h}{\partial u^j}\right) = f^i_k(u)\,. \tag{60}$$

□

Pomocí tohoto zápisu snadno můžeme sepsat postačující podmínky hamiltonovskosti. Důkaz plyne ihned z teorému 1 na straně 4.

Věta 2 (Postačující podmínka hamitonovskosti systému)**.** *Systém $u^i_t = f^i_j(u)u^j_x$ je hamiltonovský právě tehdy, když existuje nedegenerovaná metrika $g^{ij}(u)$, jejíž afinní konexe má nulovou křivost a splňuje*

eq:gf=gf

$$g_{ij}f^k_j = g_{jk}f^k_i\,, \tag{61}$$

eq:nablaf

$$\nabla_i f^k_j = \nabla_j f^k_i\,. \tag{62}$$

Speciálně vztah (62) říká, že ∇_i má nulovou torzi.

2.4 Rekonstrukce metriky z $f^i_j(u)$?

Máme-li zadaný hamiltonovský systém s maticí $f^i_j(u)$, lze metriku $g^{ij}(u)$ zkonstruovat jednoznačně? Tuto otázku nyní vyřešíme pro $N \geq 3$.

Označme λ_α vlastní čísla matice $f^i_j(u)$. (Mohou být komplexní.) Předpokládejme, že jsou navzájem různá. Označme odpovídající bázi vlastních vektorů $e_\alpha(u)$. Definujme koeficient $c^\gamma_{\alpha\beta}(u)$ vztahem

$$[e_\alpha, e_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}e_\gamma\,, \tag{63}$$

kde $[\cdot,\cdot]$ značí obyčejný komutátor funkcí. Předpokládejme dále, že pro navzájem různé α, β, γ je $c^\gamma_{\alpha\beta}$ různé od nuly .

Definice 5. Matici $f^i_j(u)$ splňující podmínky výše nazveme hamiltonovskou maticí.

Věta 3 (O rekonstrukci metriky)**.** *Nechť $N \geq 3$. Nechť je dána hamiltonovská matice $f^i_j(u)$. Pak lze zkonstruovat nedegenerovanou metriku $g^{ij}(u)$ s nulovou křivostí jednoznačně až na násobek konstantou.*

Tomuhle nerozumím a myslím si, že v článku mají typo.

Důkaz. Z rovnice (61) je vidět, že v bázi e_α je metrika g^{ij} diagonální.

Opravdu?

V této bázi pak bude mít rovnice (62) tvar (zde se nesčítá přes opakované indexy)

$$\partial_\alpha \lambda_\beta \delta^\gamma_\beta - \partial_\beta \lambda_\alpha \delta^\gamma_\alpha + (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha})\lambda_\gamma + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) = 0\,. \tag{64}$$

Zde ∂_α je derivace ve směru e_α a konexe $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ jsou definované rovnostmi

$$\nabla_{e_\beta} e_\alpha = \sum \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma\,. \tag{65}$$

Normalizujme nyní vlastní vektory e_α tak, aby v této bázi byla metrika jednotková matice, tj. $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$.
Výraz $c^\gamma_{\alpha\beta}$ má význam torze (z definice) a platí

$$c^\gamma_{\beta\alpha} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\,. \tag{66}$$

□

3 VÍCEROZMĚRNÝ PŘÍPAD

Ve vícerozměrném případě máme lineární bundle metrik a s nimi spojených konexí. Pro každou záměnu prostorových proměnných $x^\alpha \mapsto c^\alpha_\beta x^\beta$ pro $\alpha = 1, \cdots, d$ splňující $\det c^\alpha_\beta = 1$ se metrika $g^{ij\alpha}$ a konexe $b^{ij\alpha}_k$ transformují jako komponenty vektoru.

Definice 6. Řekneme, že bundle metrik $g^{ij\alpha}$ je silně nedegenerovaný, jestliže pro nějakou sadu c_α je lineární kombinace $c_\alpha g^{ij\alpha}$ nedegenerovaná matice.

Věta 4. *Nechť je hamiltonovský systém silně nedegenerovaný.*

1. *Pro $N = 1$ lze Poissonovu závorku redukovat na konstantní formu*

$$g^{ij}(u) = \tilde{g}^{ij}(u)\,. \tag{67}$$

2. *Pro $N \geq 2$ lze Poissonovu závorku redukovat na lineární formu*

$$g^{ij\alpha}(u) = g^{ij\alpha}_k u^k + \tilde{g}^{ij\alpha}\,, \quad \alpha = 1, \cdots, d\,, \tag{68}$$

(69)

kde koeficienty $g^{ij\alpha}_k = b^{ij\alpha}_k + b^{ij\alpha}_k$, $\tilde{g}^{ij\alpha}$ a $b^{ij\alpha}_k$ jsou konstantní.