Ekvivalentní kritéria plochosti prostoročasu

Tomáš Tesař, Miroslav Burýšek

October 23, 2022

1

- 1) Afinní konexe je integrabilní
- 2) existuje vektorové pole T^μ takové, že $T^\mu{}_{,\kappa} = 0$ a $T^\mu(x_1) = T_1^\mu$
- 3) Riemannův tenzor $R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} = 0$
- 4) Riemannův prostoročas je plochý

Afinní konexe je geometrický objekt na varietě, který propojuje vzájemně blízké tečné prostory.

Integrabilita afinní konexe znamená,

Afinní konexe je integrabilní pro nějakou oblast když platí $\forall x_1, x_2$: pro $\forall T$ vektor z tečného prostoru x_1 platí, že po paralelním přenosu do bodu x_2 po křivkách K a K' vzniklé vektory T_2 a T_2' respektive splňují.

$$\boxed{\Delta T = T_2' - T_2 = 0} \tag{1}$$

$$1 \implies 2$$

Jestliže platí integrabilita affiní konexe, stačí znát vektor v jednom bodě a jeho přenosem dostaneme vektorové pole $T(x)$ již nezávislé na cestě.

Jestliže toto pole křižuje jakákoliv křivka $x = x(u)$, lze vektor $T(x(u))$ z bodu x_1 přenést přímo na vybraný bod na křivce $x(u)$, lze ho však také přenést na začátek křivky $x(u)$ a poté podél této křivky na tentýž bod na křivce. Čili vektory podél každé takové křivky jsou paralelní.

$$\frac{DT^\iota}{\partial u} = \frac{dT^\iota}{du} + \Gamma^\iota_{\rho\kappa} T^\rho \frac{\partial x^\kappa}{\partial u} = [T^\iota_{,\kappa} + \Gamma^\iota_{\rho\kappa} T^\rho]_{x(u)} \frac{\partial x^\kappa}{\partial u} = [T^\iota_{;\kappa}]_{x(u)} \frac{\partial x^\kappa}{\partial u} = 0$$

Uvažujme libovolný bod $x(u_2)$. Vedeme-li skrz něj sérii křivek $x = x(u)$ všemi směry $[\frac{dx^\kappa}{du}]_{u_2}$. Z výše uvedené rovnice je vidět, že musí platit $[T^\iota_{;\kappa}]_{x(u)} = 0$. Jelikož $x(u_2$ a T je libovolné, musí platit implikace $1 \implies 2$.

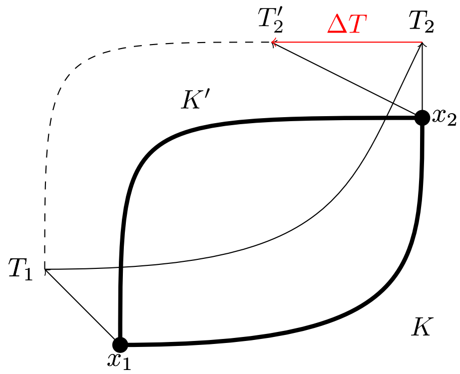

Figure 1: Caption

$$2 \implies 3$$

Vycházíme z toho, že $[T^{\iota}_{;\kappa}] = 0$ na celém zkoumaném prostoru.
z minulého semestru víme, že:

$$T_{\iota;[\lambda\mu]} = -\frac{1}{2} T_\sigma R^\sigma{}_{\iota\lambda\mu}$$

Druhá kovariantní derivace libovolného vektoru T^κ:

$$T^{\kappa}_{;[\lambda\mu]} = g^{\kappa\iota} T_{\iota\;;[\lambda\mu]} = -\frac{1}{2} g^{\kappa\iota} T_\sigma R^\sigma{}_{\iota\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\iota} T_\sigma R_\iota{}^\sigma{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} T^\sigma R^\kappa{}_{\sigma\lambda\mu}$$

vyhodnotíme-li tedy $T_1^\kappa{}_{;[\lambda\mu]}$ v libovolném bodě a pro libovolné T_1 vidíme, že musí platit 3

$$3 \implies 1$$

Vycházíme z toho, že Riemannův tenzor je nulový v celé vyšetřované oblasti a budeme zkoumat rozdíl z rovnice (1). V jednoduše souvislé oblasti můžeme body x_1 x_2 z obrázku 1 spojíme nyní celou jednoparametrickou soustavou křivek, které spojitě převádí krajní křivku K na křivku K' vyplňující dvourozměrnou plochu viz obr.2. Parametr u běží podél všech křivek z intervalu $< u_{(1)}, u_{(2)} >$, kdežto parametr $v \in < v_{(1)}, v_{(2)} >$ odlišuje jednotlivé křivky soustavy. Parametrické rovnice plochy proložené křivkami K a K' mají tvar

$$x^\iota = x^\iota(u, v)$$

$$x^\iota(u_{(1)}, v) = x^\iota_{(1)} \quad , \quad x^\iota(u_{(2)}, v) = x^\iota_{(2)} \tag{2}$$

a parametrické rovnice křivek K a K' tedy jsou

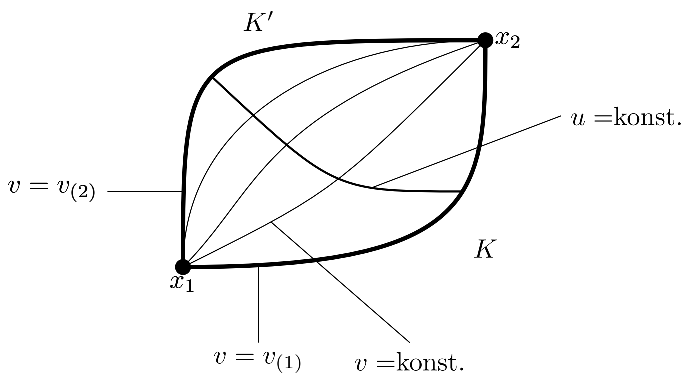

Figure 2: obr 2.

$$K : x^\iota = x^\iota(u, v_{(1)}) \equiv x^{\iota\prime}(u) \ \ , \ \ K' : x^\iota = x^\iota(u, v_{(2)}) \equiv x^{\iota\prime}(u) \tag{3}$$

Derivujeme-li (2) podle v dostáváme:

$$\frac{\partial x^\iota}{\partial v}|_{u_{(1)}} = \frac{\partial x^\iota}{\partial v}|_{u_{(2)}} = 0 \tag{4}$$