GEOMETRICKÁ OPTIKA

MIROSLAV BURÝŠEK*

1 ROVNICE EIKONÁLU

Geometrická optika popisuje šíření světla pomocí *paprsků světla*. Paprsek lze intuitivně chápat, jak ho však zavést přesněji? Lze ho chápat jako jistou limitu vlnové optiky v případě, že vlnová délka světla λ bude velmi malá, tj. $\lambda \to 0$.

Vycházíme z Maxwellových rovnic doplněných o materiálové vztahy v izotropním dielektriku

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,, \tag{1}$$

eq:Maxwell

$$\boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{x}) = \varepsilon(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) = \mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})\,. \tag{2}$$

Představme si šíření harmonické rovinné vlny zapsané v komplexní symbolice

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)\right]\,. \tag{3}$$

Pro prostorovou fázi platí

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = k_0(n\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}) = k_0 d\,, \tag{4}$$

kde n je index lomu homogenního, izotropního prostředí, k_0 by bylo vlnové číslo vlny ve vakuu, $\boldsymbol{\sigma}$ je jednotkový vektor ve směru šíření vlny a d je tzv. **optická dráha světla**.

Nyní si představme o něco obecnější vlnu

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x}) \exp\left[ik_0 S(\boldsymbol{x})\right] \exp\left[-i\omega t\right]\,, \tag{5}$$

eq:E

$$\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x}) \exp\left[ik_0 S(\boldsymbol{x})\right] \exp\left[-i\omega t\right]\,, \tag{6}$$

eq:H

$$\tag{7}$$

kde $\boldsymbol{E}_0$ a $\boldsymbol{H}_0$ představují amplitudy, které se mění pomalu na vzdálenosti odpovídající vlnové délce, a $S(\boldsymbol{x})$ je nová skalární funkce, kterou nazveme **eikonálem** (z řečtiny: eikos = obraz).

Nyní odvodíme rovnici pro vlnu, kde bude vystupovat pouze eikonál. Jako první trik využijeme vektorové identity pro rotaci součinu

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{A}\,. \tag{8}$$

Aplikací rotace na rovnici pro magnetickou intenzitu (7) a použitím Maxwellky (2) dostaneme

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}_0)e^{ik_0 S} + ik_0(\boldsymbol{\nabla} S \times \boldsymbol{H}_0)e^{ik_0 S} = -i\omega\varepsilon(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})e^{ik_0 S}\,. \tag{9}$$

Ve členu napravo objevíme

$$\omega = ck = \frac{c_0}{n} n k_0 = c_0 k_0 \tag{10}$$

a navíc můžeme vyhodit exponenciální faktor. Rovnice se zjednoduší na

$$\frac{1}{k_0}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}_0) + i(\boldsymbol{\nabla} S \times \boldsymbol{H}_0) = -ic_0\varepsilon(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})\,. \tag{11}$$

* **Kontakt:** miroslav@burysek.eu

Nyní provedeme geometrickou limitu: pokud $\lambda \to 0+$, tak to znamená, že $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \to +\infty$, takže první člen můžeme zanedbat. Potom dostaneme rovnici ve tvaru

eq:rotH0
$$\boxed{\nabla S \times \boldsymbol{H}_0 = -c_0 \varepsilon(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})} . \tag{12}$$

Analogicky bychom pro rotaci elektrické intenzity dostali vztah

eq:rotE0
$$\boxed{\nabla S \times \boldsymbol{E}_0 = +c_0 \mu(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x})} . \tag{13}$$

Z rovnice (13) lze vyjádřit $\boldsymbol{H}_0$, dosazením do (13) a zkrácením časového faktoru dostaneme

$$\nabla S \times \left(\frac{1}{c_0 \mu(\boldsymbol{x})} \nabla S \times \boldsymbol{E}_0 \right) = -c_0 \varepsilon \boldsymbol{E}_0 . \tag{14}$$

Jako druhý trik nyní použijeme b(ác)-c(áb) pravidlo pro dvojný vektorový součin a máme

$$\nabla S (\nabla S \cdot \boldsymbol{E}_0) - \boldsymbol{E}_0 (\nabla S \cdot \nabla S) + c_0^2 \epsilon(\boldsymbol{x}) \mu(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{E}_0 = 0 . \tag{15}$$

Ovšem protože $\boldsymbol{E}_0$ je dle rovnice (12) vektorový součin $\boldsymbol{\sigma}$ s $\boldsymbol{H}_0$, musí být $\boldsymbol{E}_0$ kolmé na ∇S a proto je první člen opět nulový. Dostaneme tak

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x}) \left[\nabla S \cdot \nabla S - c_0^2 \varepsilon(\boldsymbol{x}) \mu(\boldsymbol{x}) \right] = 0 . \tag{16}$$

Má-li tato podmínka být splněna pro nenulová $\boldsymbol{E}_0$, musí být nutně

$$|\nabla S|^2 = c_0^2 \varepsilon(\boldsymbol{x}) \mu(\boldsymbol{x}) . \tag{17}$$

Nyní ještě snadno nahlédneme, že

$$c_0^2 \varepsilon(\boldsymbol{x}) \mu(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_r(\boldsymbol{x}) = n^2(\boldsymbol{x}) , \tag{18}$$

a konečně dostáváme rovnici eikonálu

$$\boxed{|\nabla S(\boldsymbol{x})|^2 = n^2(\boldsymbol{x})} . \tag{19}$$

Je třeba zdůraznit, že výraz

$$|\nabla S|^2 \neq \tag{20}$$

1.1 Význam eikonálové rovnice

Rovnici chápeme tak, že **místo bodů s konstantní hodnotou eikonálu určuje vlnoplochy**. Jednotkový vektor $\boldsymbol{\sigma}$ ve směru šíření paprsku se nazývá **paprskový vektor** a je určen rovnicí

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n(\boldsymbol{x})} \nabla S(\boldsymbol{x})} , \tag{21}$$

protože

$$|\boldsymbol{\sigma}|^2 = \frac{|\nabla S|^2}{|n^2|} = 1 . \tag{22}$$

Zadá-li nám někdo prostorové rozložení indexu lomu $n(\boldsymbol{x})$ v kartézských souřadnicích, pak vlastně řešíme Poissonovu rovnici

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = n^2(x, y, z) . \tag{23}$$

Konečně, z rovnic pro rotaci (6) a (7) je vidět, že $\boldsymbol{E}_0$ i $\boldsymbol{H}_0$ musejí být kolmé na $\boldsymbol{\sigma}$, což odpovídá lokální aproximaci rovinnými vlnoplochami. **Paprsek se šíří podél směru gradientu eikonálu**, protože směr středovaného Poyntingova vektoru

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{E} \rangle \times \langle \boldsymbol{H} \rangle = \frac{1}{2} \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0 = \frac{1}{2\mu c_0} |\boldsymbol{E}_0|^2 \nabla S = c \langle w \rangle \boldsymbol{s} , \tag{24}$$

kde w je elektromagnetická hustota energie.

1.2 Zákon lomu pro paprsky

Pro vektor $n\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\nabla} S$ platí zřejmě $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} S = 0$, což odpovídá podle Stokesovy věty formuli

$$\int_\gamma n\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \quad \text{podél uzavřené křivky } \gamma\,. \tag{25}$$

Tato rovnice se nazývá Lagrangeův invariant.

Aplikací této rovnice na malý obdélník podél rozhraní dvou prostředí o různých indexech lomů dostaneme Snellův zákon:

$$\int_\gamma n\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = n_1 D \sin\theta_1 - n_2 D \sin\theta_2 = 0 \implies n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2\,. \tag{26}$$

1.3 Fermatův princip

Z rovnice pro Lagrangeův invariant lze také nahlédnout jiný princip. Uvažujme dvě blízké vlnoplochy S_i a S_f a uzavřenou křivku začínající na S_i v bodě A_i, pokračující do bodu A_f na S_f podél skutečné dráhy paprsku a jiný bod B na S_f. Pak platí

$$\int_{A_i}^{A_f} n\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{A_f}^{B} n\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{B}^{A_i} n\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\,, \tag{27}$$

prostřední integrál je nulový, protože vede po vlnoploše. Proto

$$\int_{A_i}^{A_f} n\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{A_i}^{B} n\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\,. \tag{28}$$

Uvažujeme-li plochy opravdu blízko sebe, zle první integrál aproximovat prostě $n\mathrm{d}l$, kde $\mathrm{d}l$ je vzdálenost vlnoploch. Druhý integrál pak bude $n\mathrm{d}l\frac{1}{\cos\alpha}$, kde α je úhel odklonu od směru paprsku. Proto

$$(n\mathrm{d}l)_{\text{po paprsku}} = (n\mathrm{d}l\frac{1}{\cos\alpha})_{\text{po libovolné křivce}} \leq (n\mathrm{d}l)_{\text{po libovolné křivce}}\,, \tag{29}$$

což lze po zavedení optické dráhy $d = n|\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{l}|$ číst jako vztah

$$\boxed{d_{\text{po paprsku}} \leq d_{\text{po libovolné křivce}}}\,. \tag{30}$$

To je formulace **Fermatova principu**: světlo se šíří tak, aby se minimalizovala délka optické dráhy. Nicméně obecněji lze tento formulovat tak, že optická dráha má být extremální, nemusí jít nutně o minimum. Ovšem zde se připojuje do hry zase nějaká stabilita a tak, ale v optice to nikdo moc neřeší, takže kdo ví...

2 PAPRSKOVÁ ROVNICE

Kromě eikonálové rovnice je užitečné zformulovat rovnici, která přímo popisuje paprsek. Dráhu paprsku popíšeme křivkou $\boldsymbol{r}(p)$ (nevolíme parametr s, protože toto písmenko už znamená tři různé věci). Jednotkový tečný vektor ke křivce bude

$$\boldsymbol{\sigma}(p) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}p}\,. \tag{31}$$

Nyní odvodíme paprskovou rovnici

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}p}\right) = \boldsymbol{\nabla} n}\,. \tag{32}$$

eq:paprsek

Platí totiž

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}p}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(n\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{\nabla} S = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} S = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\nabla} S \cdot \boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{\nabla} S = \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} S)^2\right] = \frac{1}{2n}\boldsymbol{\nabla}(n\boldsymbol{\sigma})^2 = \frac{1}{2n}(2n\boldsymbol{\nabla} n) = \boldsymbol{\nabla} n\,. \tag{34}$$

Paprskovou rovnici (32) používáme tak, že při zadaném rozložení indexu lomu $n(x, y, z)$ hledáme křivku $\boldsymbol{r}(p) = (x(p), y(p), z(p))$, jejíž jednotlivé složky splňují rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(n(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}\right) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\,, \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(n(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\right) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\,, \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(n(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p}\right) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\,. \tag{37}$$

Příklad 1. V prostředí s konstantním indexem lomu n řešíme soustavu

$$n\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}p^2} = n\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}p^2} = n\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}p^2} = 0\,, \tag{38}$$

jejím řešením je

$$\boldsymbol{x}(p) = \boldsymbol{a}p + \boldsymbol{x}_0\,, \tag{39}$$

což je rovnice přímky.

Pro lineární změnu indexu lomu $n(x, y) = \alpha x + n_0$ máme rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left((\alpha x + n_0)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}\right) = \alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left((\alpha x + n_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\right) = 0\,, \tag{40}$$

odkud dostaneme

$$\alpha x^2 + 2n_0 x - (\alpha p^2 + C_x) = 0 \tag{41}$$

a pak můžeme rovnici vyřešit.

[TODO: Abbeův invariant]