MATICOVÉ ROVNICE

Příklad 1. Řešme rovnici

$$\mathbf{XA}-\mathbf{B}=2\mathbf{X}+\mathbf{J}\,,\quad \text{kde } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&5\\1&4\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix},\ \mathbf{X} \text{ je neznámá}\,. \tag{1}$$

Postupujeme podobně, jako bychom řešili obyčejnou lineární rovnici. Musíme však dbát na to, že násobené matic není komutativní - musíme rozlišovat násobení rovnic zprava a zleva.

V prvním kroku přesuneme všechny $\mathbf{X}$ na levou stranu:

$$\mathbf{XA}-2\mathbf{X}=\mathbf{J}+\mathbf{B}\,. \tag{2}$$

Symbol $2\mathbf{X}$ lze také číst jako $\mathbf{X}\cdot 2\mathbf{J}$. Můžeme proto vytknout před závorku $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}-2\mathbf{J})=\mathbf{J}+\mathbf{B}\,. \tag{3}$$

Jestliže existuje matice $(\mathbf{A}-2\mathbf{J})^{-1}$, mohli bychom touto maticí vynásobit celou rovnici zprava:

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}-2\mathbf{J})(\mathbf{A}-2\mathbf{J})^{-1}=(\mathbf{J}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-2\mathbf{J})^{-1} \tag{4}$$

a dostaneme řešení

$$\mathbf{X}=(\mathbf{J}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-2\mathbf{J})^{-1}\,. \tag{5}$$

Spočítejme tedy matici $\mathbf{A}-2\mathbf{J}$:

$$\mathbf{A}-2\mathbf{J}=\begin{pmatrix}5&5\\1&4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Tato matice je regulární, proto k ní můžeme inverzi najít. To učiníme Jordanovou metodou:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&5&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}3&5&1&0\\0&-1&1&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}3&0&6&-15\\0&1&-1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-5\\0&1&-1&3\end{array}\right) \tag{7}$$

Takže

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{J})^{-1}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Nyní už řešení najdeme jednoduchým násobením:

$$\mathbf{X}=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-6\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Příklad 2. Řešme maticovou rovnici

$$2\mathbf{XK}=\mathbf{X}+\mathbf{B}\,,\quad \text{kde } \mathbf{K}=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&3\\0&-2\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Ukážeme si alternativní způsob řešení takové rovnice. Tento způsob se používá hlavně v případě, když narazíme na součin neznámé matice s jinou, která není regulární, a nemá proto inverzi. Tento postup lze použít vždy, ale je trochu časově náročnější.

Rozepíšeme si neznámou matici $\mathbf{X}$ do složek a budeme hledat rovnice pro jednotlivé složky (označíme je postupně):

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Verze: 14. října 2021

Dostáváme rovnici

$$2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Spočítáme levou stranu:

$$\begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 & 4x_1 - 2x_2 \\ 4x_3 - 2x_4 & 4x_3 - 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

a odečteme první matici na pravé straně

$$\begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 & 4x_1 - 3x_2 \\ 3x_3 - 2x_4 & 4x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

To je ekvivalentní soustavě rovnic

$$3x_1 - 2x_2 = 0\,, \quad 4x_1 - 3x_2 = 3\,, \quad 3x_3 - 2x_4 = 0\,, \quad 4x_3 - 3x_4 = -2\,. \tag{15}$$

Tuto soustavu nyní vyřešíme standartně Gaussovou metodou.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 12 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 9 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 12 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \tag{16}$$

Takže vidíme, že $x_4 = 6$, $x_2 = -9$, dále máme dvě rovnice

$$12x_3 - 48 = 0 \implies x_3 = 4\,, \quad 12x_1 + 72 = 0 \implies x_1 = -6\,. \tag{17}$$

Výsledná matice je rovna

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Můžeme se přesvědčit o správnosti: levá strana je

$$\begin{pmatrix} -12 & -18 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \tag{19}$$

a pravá strana je

$$\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

takže všechno vychází.

Příklad 3. Hledejme všechny matice, které komutují s maticí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Hledanou matici si označíme jako $\mathbf{X}$. Řešíme maticovou rovnici

$$\mathbf{XF} = \mathbf{FX}\,. \tag{22}$$

Rozepišme si $\mathbf{X}$ do složek:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Obě strany upravíme:

$$\begin{pmatrix} -2x_2 & 2x_1 \\ -2x_4 & 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 & 2x_4 \\ -2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} . \tag{24}$$

Porovnáním jednotlivých složek dostáváme čtyři rovnice

$$-2x_2 = 2x_3 , \quad 2x_1 = 2x_4 , \quad -2x_4 = -2x_1 , \quad 2x_3 = -2x_2 \tag{25}$$

a hned vidíme, že nebude ani potřeba psát velké matice: dvě rovnice jsou identické a máme

$$x_1 = x_4 = t \in \mathbb{R} , \quad -x_2 = x_3 = s \in \mathbb{R} , \tag{26}$$

takže

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} s . \tag{27}$$

(Výsledek je dosti intuitivní: s maticí komutují násobky jednotkové matice a násobky matice samotné.)

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí inverzní matice

Soustavu lineárních rovnic lze zapsat ve tvaru $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde na $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{b}$ lze pohlížet jako na sloupcové vektory. Máme-li n rovnic pro n neznámých, jsou $\boldsymbol{x} \in V_n$, $\boldsymbol{b} \in V_n$ a matice $\mathbf{A}$ je řádu n. Jestliže je $\mathbf{A}$ regulární (její hodnost je n, tzn. má všechny řádky/sloupce lineárně nezávislé), pak můžeme rovnici vynásobit zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a dostáváme okamžitě řešení

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b} . \tag{28}$$

Tento vztah platí, pokud matice $\mathbf{A}^{-1}$, to odpovídá případu, kdy má soustava právě jedno řešení. Pokud bychom měli soustavu s nekonečně mnoha řešeními nebo žádným řešením, pak by inverze neexistovala a rovnice by samozřejmě neplatila.

Protože hledání inverzní matice je v podstatě ekvivalentní Jordanově metodě, pro počítání na papíře se příliš nehodí. Užitečné je například v situacích, kdy máme více soustav se stejnou maticí $\mathbf{A}$ a rozdílnými vektory pravých stran $\boldsymbol{b}$.

Poznámky

- Maticové rovnice nemají velké uplatnění v praxi. Slouží hlavně k procvičování vlastností maticové algebry.
- Přestože spolu matice běžně nekomutují, existují velmi speciální třídy matic, které spolu komutují. Jednu takovou třídu jsme našli v příkladu výše. Takovým maticím se říká **normální** a mají velké uplatnění. Například mají zásadní úlohu v kvantové fyzice nebo v odvětví tzv. lineárního programování.
- Každá matice komutuje s jednotkovou maticí a sama se sebou (a samozřejmě s libovolnými násobky.)
- Jestliže matice $\mathbf{A}$ komutuje s $\mathbf{B}$ a současně i s $\mathbf{C}$, pak komutuje i s jejich součtem:

  $$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA} = (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} \tag{29}$$

  i součinem:

  $$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{B}(\mathbf{CA}) = (\mathbf{BC})\mathbf{A} . \tag{30}$$

- Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^T$ spolu běžně nekomutují.