GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

Jedna z nejpoužívanějších posloupností je tzv. geometrická posloupnost, která je zadaná předpisem

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \,. \tag{1}$$

Bývá zvykem ji zadávat „od nuly“, tedy zadáním členu a_0. Číslu q říkáme **kvocient**. Takže její první členy vypadají následovně

$$a_0 = \text{zadané}\,, \quad a_1 = qa_0\,, \quad a_2 = q(qa_0) = q^2 a_0\,, \quad a_3 = q^3 a_0\,, \cdots \tag{2}$$

a snadno přijdeme na to, jak spočítat n-tý člen:

$$a_n = q^n a_0 \,. \tag{3}$$

Jakou má taková posloupnost limitu? Může nastat několik případů:

- Případ $q > 1$. Jestliže stále násobíme číslem vyšším než jedna, dostaneme se časem libovolně vysoko. Kdybychom se ptali na limitu, vidíme, že nerovnice

  $$L < a_0 q^n \tag{4}$$

  má řešení $n > \log_q \frac{L}{a_0}$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_0 q^n = +\infty$.
- Případ $q = 1$. Ten je jednoduchý: $a_n = a_0$, takže $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$.
- Případ $0 < q < 1$. Zde se zase dostaneme libovolně blízko k nule. nerovnice

  $$-\epsilon < a_0 q^n < +\epsilon \tag{5}$$

  má opět řešení $n > \log_q \frac{\epsilon}{a_0}$ (logaritmus bereme se základem menší než 1, takže je to klesající funkce a znaménko nerovnosti se obrací). Takže $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Případ $q = -1$. Zde se nám členy střídají: $a_n = (-1)^n a_0$. Už víme, že taková posloupnost limitu nemá.
- Případ $-1 < q < 0$. Členy sice oscilují, ale stále více se přibližují k nule. K výpočtu limity můžeme použít větu o dvou strážnících (viz dále) - strážníky budou posloupnosti $b_n = +a_0(-q)^n$ a $c_n = -a_0(-q)^n$. Obě tyto posloupnosti mají nulovou limitu, takže $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Případ $q < -1$. Členy posloupnosti se vzdalují od nuly a posloupnost osciluje. Takže limitu nemá.

Uvedené poznatky se dají shrnout do zápisu

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \text{neexistuje} & q < -1 \end{cases}}\,. \tag{6}$$

Příklad 1 (Složený úrok)**.** Označme D_0 počáteční dluh a u úrokovou míru vyjádřenou v procentech ($1\% = 0.01$). Nechť se úrok přičítá každý další rok.

Po prvním roce bude celková dlužná částka $D_1 = D_0 + D_0 u = D_0(1+u)$, po druhém roce $D_2 = D_1 + D_1 u = D_0(1+u)^2$, atd. Je jasné, že máme co do činění s geometrickou posloupností a výsledná dlužná částka po n-letech bude

$$D_t = D_0(1+u)^n \,. \tag{7}$$

Kvocient je v tomto případě $q = 1 + u$.

Verze: 31. října 2021

Příklad 2 (Každé procento je důležité - podle Mankiwa)**.** Mnoho lidí má tendenci podceňovat rozdíl mezi malými čísly v tendenci růstu nějaké veličiny. Jaký je rozdíl mezi 1% a 3%, vždyť rozdíl činí pouhá 2%?

S nabytými znalostmi o geometrické posloupnosti na tuto otázku snadno odpovíme. Představme si počáteční úrok $D_0 = 100\,000$ a dvě úrokové míry $u_1 = 1\% = 0.01$ a $u_2 = 3\% = 0.03$. Jaké budou dlužné částky po třiceti letech?

$$D_{30}(u_1) = D_0 \cdot (1+u_1)^{10} = 100\,000 \cdot (1+0.01)^{30} = 100\,000 \cdot 1.01^{30} = 100\,000 \cdot 1.348 = 134\,800\,, \tag{8}$$

$$D_{30}(u_2) = D_0 \cdot (1+u_2)^{30} = 100\,000 \cdot (1+0.03)^{30} = 100\,000 \cdot 1.03^{30} = 100\,000 \cdot 2.427 = 242\,700\,. \tag{9}$$

To je více než dvojnásobný rozdíl!

Příklad 3 (Pravidlo sedmdesáti I)**.** Akumulačním efektům procent se dá porozumět pomocí poučky, která se nazývá **pravidlo sedmdesáti**. Zní takto: *„vzroste-li nějaká veličina o x procent ročně, pak se zdvojnásobí přibližně za $\frac{70}{x}$ let“*. Jestliže je tedy úrok 1%, pak se dlužná částka zdvojnásobí za 70 let. Jestliže je však úrok 3%, pak se dlužná částka zdvojnásobí za pouhých $70/3 = 23$ let. Stejně tak je třeba dívat se na tempa růstu HDP a podobně.

Příklad 4 (Pravidlo sedmdesáti II - odvození)**.** Zákon sedmdesáti se dá matematicky odvodit pomocí derivací. Pro zájemce ho sem připisuji a doporučuji se k němu vrátit později.

Ptáme-li se, za jak dlouho se daná částka zdvojnásobí, řešíme rovnici pro neznámou n:

$$2A = A\left(1+\frac{x}{100}\right)^n\,, \tag{10}$$

kde A je počáteční částka, x je růst v % a n je počet let. Vidíme, že rovnice na A vůbec nezávisí:

$$2 = \left(1+\frac{x}{100}\right)^n\,, \tag{11}$$

takže

$$\ln 2 = n \cdot \ln\left(1+\frac{x}{100}\right)\,. \tag{12}$$

Dostáváme vztah, který je přesný:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}\,. \tag{13}$$

Je ale poněkud komplikovaný a moc z něho není vidět. Zkusme ho zjednodušit. Podívejme se na funkci

$$g(x) = \ln\left(1+\frac{x}{100}\right)\,. \tag{14}$$

Zkusme využít toho, že x není příliš velké. Udělejme aproximaci této funkce kolem nuly. Víme, že

$$g(x) \approx g(0) + g'(0)\cdot x\,. \tag{15}$$

Takže potřebujeme derivaci složené funkce:

$$g'(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{100}}\frac{1}{100} \tag{16}$$

V nule je

$$g'(0) = \frac{1}{100}\,. \tag{17}$$

Takže

$$\ln\left(1+\frac{x}{100}\right) = \ln 1 + \frac{1}{100}x = \frac{x}{100}\,. \tag{18}$$

Dosazením do vzorečku pro n máme

$$n \approx \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}} = \frac{\ln 2\cdot 100}{x} \tag{19}$$

a ještě využijeme toho, že $\ln 2 \approx 0.693 \approx 0.7$, tedy $\ln 2\cdot 100 \approx 70$. Dostáváme vzoreček

$$n \approx \frac{70}{x} \tag{20}$$

a tím jsme dokázali, že pravidlo sedmdesáti skutečně funguje, alespoň pro x, které nejsou příliš velké.

Dodatek: geometrická řada

Ještě více než geometrickou posloupnost jako takovou nás zajímá, kolik dostaneme, když budeme jednotlivé členy sčítat. Součet takových členů symbolicky zapisujeme pomocí symbolu $\sum$, který pochází z řeckého písmena „sigma" Σ.

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n \,. \tag{21}$$

Napišme si, jak bude vypadat geometrická suma:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \cdots + a_0 q^n \,. \tag{22}$$

Vidíme, že ze všech členů můžeme vytknout a_0 a zajímá nás tedy jenom součet

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \,. \tag{23}$$

Součet této řady se dá nalézt pomocí následující triku. Celou rovnici vynásobme q

$$q s_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q \cdot q^n \tag{24}$$

a odečtěme je:

$$q s_n - s_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q \cdot q^n - 1 - q - q^2 - \cdots - q^n \,. \tag{25}$$

Skoro všechny členy napravo se odečtou! Zůstane tam pouze

$$(q-1) s_n = q \cdot q^n - 1 = q^{n+1} - 1 \,. \tag{26}$$

Odtud dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} q^j = s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \tag{27}$$

a součet geomerické řady je

$$\sum_{j=1}^{n} a_0 q^j = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \,. \tag{28}$$

Představme si, že bychom sčítání prováděli dál a dál. K jaké hodnotě by se součet blížil? Jinými slovy, jaká je limita takové geometrické řady? Platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_0 q^j = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} a_0 q^j = \lim_{n \to \infty} a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \,. \tag{29}$$

Z předchozího víme, že pro $q > 1$ je limita rovna $a_0 \infty$ a pro $q < -1$ neexistuje, jediný zajímavý případ je $-1 < q < 1$. V tom případě

$$\boxed{\sum_{j=1}^{\infty} a_0 q^j = a_0 \frac{0 - 1}{q - 1} = a_0 \frac{1}{1 - q}} \,. \tag{30}$$

Příklad 5. Spočtěme řadu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \,. \tag{31}$$

Kvocient je $q = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$, takže

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \,. \tag{32}$$