VLASTNÍ ČÍSLA

Zjistili jsme, že násobení vektoru maticí je poměrně početně náročná záležitost. Nyní bychom chtěli nalézt speciální vektory, pro které takové maticové násobení bude jednoduchou záležitostí.

Mějme matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$. Mezi všemi vektory $v \in V_n$ zkusme nalézt speciální u, pro které se násobení maticí $\mathbf{A}$ chová jako obyčejné násobení číslem λ. Vyřešme proto rovnici

$$\mathbf{A}u = \lambda u\,. \tag{1}$$

Tato rovnice představuje soustavu lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{J})u = \mathbf{0}\,. \tag{2}$$

Jedná se o homogenní soustavu. O ní víme, že má určitě jedno triviální řešení $u = \mathbf{0}$. Nulový vektor ale není žádný zázrak. Zkusme najít nějaké další.

Představme si, že matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{J}$ je regulární. Pak bychom mohli rovnici vynásobit inverzí a dostali bychom

$$u = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{J})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}\,, \tag{3}$$

protože násobení nulového vektoru libovolnou maticí je stále nulový vektor. My ale chceme hledat nenulové vektory. Proto požadujeme, aby $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{J}$ byla singulární matice!

Požadavek na singularitu vede na nulovost determinantu:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{J}) = 0\,. \tag{4}$$

Na tuto rovnici se musíme koukat následovně: máme zadánu matici $\mathbf{A}$ a hledáme speciální čísla λ, které této rovnici vyhovují. Rovnici říkáme **vlastní (charakteristická) rovnice** pro matici $\mathbf{A}$ a sepciálním číslům λ říkáme **vlastní (charakteristická) čísla** matice $\mathbf{A}$. (Výraz vlastní, charakteristický pochází z německého „eigen“ - vlastnit. V angličtině se vlastním číslům říká „eigenvalues“.) Vektorům u, které splňují rovnici $\mathbf{A}u = \lambda u$ říkáme vlastní vektory. Výpočtem vlastních vektorů se nebudeme zabývat. Výpočet vlastních čísel si ovšem ukážeme.

Příklad 1. Určíme vlastní čísla matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\,. \tag{5}$$

Sestavíme matici

$$\mathbf{D} - \lambda \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 \\ 6 & 8-\lambda \end{pmatrix} \tag{6}$$

a spočteme její determinant:

$$\det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{J}) = (7-\lambda)(8-\lambda) - 5 \cdot 6 = 56 - 7\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 30 = \lambda^2 - 15\lambda + 26\,. \tag{7}$$

Potřebujeme tedy vyřešit rovnici

$$\lambda^2 - 15\lambda + 26 = 0\,. \tag{8}$$

Jejím řešením jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 26}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 104}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{15 \pm 11}{2} = 2, 13\,. \tag{9}$$

Nalezli jsme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 13$. Každému z těchto čísel přísluší nějaký vlastní vektor, ten ale hledat nebudeme.

- Matice $n \times n$ má n vlastních čísel. Ne všechna ale musejí být různá, stejně třeba jako kořeny kvadratické rovnice. Některá vlastní čísla se mohou objevit vícekrát, říkáme o nich, že mají **algebraickou násobnost** větší než 1.
- **Jakmile je matice singulární, je** 0 **jejím vlastním číslem.** To plyne ihned z charakteristické rovnice: $\det(\mathbf{A}) = 0$, tedy $\det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{J}) = 0$.
- O matici řekneme, že je symetrická, jestliže $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. **Vlastní čísla symetrické matice jsou vždy reálná.** Pokud matice není symetrická, může mít i **komplexní vlastní čísla**.

Verze: 23. října 2021

Dodatek: vlastní vektory

Příklad 2. Jak bychom v předchozím příkladu hledali vlastní vektory? Pro každé vlastní číslo λ máme rovnici $(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{J})\boldsymbol{u} = 0$.

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ tedy máme rovnici $(\mathbf{D} - 2\mathbf{J})\boldsymbol{u} = 0$. Označíme-li $= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, pak řešíme rovnici

$$\begin{pmatrix} 7-2 & 5 \\ 6 & 8-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Tomu odpovídá soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{array} \right) , \tag{11}$$

stačí tedy vzít $u_2 = t \in \mathbb{R}$ a $u_1 = -u_2 = -t$. Vlastní vektor

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \tag{12}$$

je tedy libovolný násobek vektoru $(-1, 1)$. Skutečně, můžeme si ověřit, že maticové násobení pro tento vektor je skutečně stejné jako násobení číslem:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t + 5t \\ -6t + 8t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 2t \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{u}_1 . \tag{13}$$

Obdobně bychom našli vlastní vektor $\boldsymbol{u}_2$ k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 13$.