

# 1 APLIKACE PRVNÍ A DRUHÉ DERIVACE

## 1.1 Lineární a kvadratická aproximace

Hlavní význam derivací spočívá v tom, že pokud existují (říkáme, že funkce jsou „dostatečně hladké“), můžeme pomocí nich funkce lokálně aproximovat. Představme si funkci  $f(x)$ , která má první i druhou derivaci. Uvažujme nějaký **pevný bod**  $x_0$ . Na jeho **malém okolí** můžeme funkci aproximovat přímkou

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (1)$$

nebo parabolou

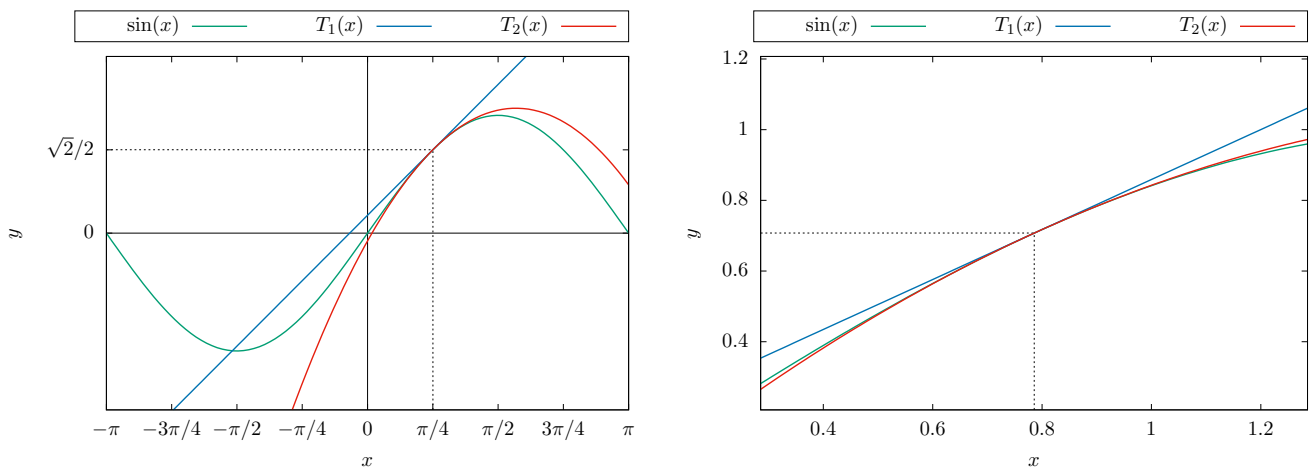
$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2. \quad (2)$$

**Příklad 1.** Aproximujme funkci  $f(x) = \sin(x)$  okolo bodu  $x_0 = \pi/4$ . Platí  $f'(x) = \cos(x)$  a  $f''(x) = -\sin(x)$ , takže  $f(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ ,  $f'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$  a  $f''(\pi/4) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ . Na nějakém malém okolí tedy můžeme aproximovat přímkou

$$T_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3)$$

anebo parabolou

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2. \quad (4)$$



**Obrázek 1:** Aproximace funkce  $\sin x$  přímkou  $T_1(x)$  a parabolou  $T_2(x)$  kolem bodu  $\frac{\pi}{4}$ .

**Příklad 2.** Pomocí aproximace spočítejme  $\sqrt{14}$ . Víme, že  $\sqrt{16} = 4$ . Zkusme proto odmocninu aproximovat kolem bodu 4. Platí

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sqrt{x})'' = -\frac{3}{2\sqrt{x}^3}. \quad (5)$$

Můžeme tedy aproximovat parabolou

$$\sqrt{x} \text{ na okolí kolem } 16 \approx \sqrt{16} + \frac{x - 16}{2\sqrt{16}} - \frac{3(x - 16)^2}{4\sqrt{16}^3} = 4 + \frac{x - 16}{8} - \frac{3(x - 16)^2}{256}. \quad (6)$$

Nyní snadno spočteme

$$\sqrt{14} = 4 - \frac{2}{8} - \frac{8}{256} = 3,72. \quad (7)$$

V porovnání se skutečnou hodnotou  $\sqrt{14} = 3,7416$  vidíme, že jsme se o spletli o pouhých 6 promile.

Můžeme samozřejmě pokračovat a rozvíjet funkce do tzv. **Taylorovova polynomu**  $T_n(x)$  pomocí vyšších a vyšších derivací. Nicméně to ve většině praktických případů není příliš potřeba, bohatě si vystačíme s parabolickou aproximací  $T_2(x)$ .

## 1.2 Rostoucí, nebo klesající?

Podle lineární aproximace  $T_1(x)$  snadno poznáme, jestli je funkce na daném okolí rostoucí nebo klesající. V aproximaci totiž  $f'(x_0)$  **zastupuje lineární koeficient přímky**. Je-li tedy  $f'(x_0) > 0$ , pak se jedná o rostoucí lineární aproximaci a tedy i o rostoucí funkci. Obdobně, je-li  $f'(x_0) < 0$ , pak je aproximace klesající přímka a funkce je jistě klesající.

## 1.3 Minimum a maximum

Z rozvoju  $T_1(x)$  a  $T_2(x)$  také snadno můžeme rozpoznat minimum a maximum funkce. Jestliže je nějaký bod  $x_0$  extrémem funkce  $f(x)$ , pak musí být  $f'(x_0) = 0$ , protože jinak bychom měli lineární aproximaci  $T_1(x)$  s nenulovou směrnicí, tj. rostoucí nebo klesající přímku. To znamená, že nějaký bod na okolí by měl jistě nižší anebo vyšší funkční hodnotu, takže by bod  $x_0$  jistě nebyl extrémní. **Chceme-li tedy hledat minimum a maximum hladkých funkcí, jedinými kandidáty jsou tzv. stacionární body, tj. body  $x_0$ , ve kterých je  $f'(x_0) = 0$ .**

Teď se podívejme na kvadratický rozvoj  $T_2(x)$ . Jestliže  $f'(x_0) = 0$  a  $f''(x_0) > 0$ , pak se jedná o parabolu

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \quad (8)$$

s kladným kvadratickým koeficientem, takže bude „typu  $\cup$ “. Tím pádem je v  $x_0$  minimum, protože parabola od něj „roste napravo i nalevo“.

Podobně, představme si, že  $f''(x_0) < 0$ . Pak se jedná o parabolu „typu  $\cap$ “ a  $x_0$  tedy musí být maximum, protože parabola „napravo i nalevo klesá“.

## 1.4 Konkavita, konvexita, inflexní bod

Matematická definice těchto pojmů je složitější, nicméně se dají názorně představit. Uvažujme funkci  $f$  a nějaké dva libovolné body  $x_1$  a  $x_2$ . Představme si, že spojíme body na grafu  $[x_1, f(x_1)]$  a  $[x_2, f(x_2)]$  úsečkou. **Jestliže celá tato úsečka leží nad grafem funkce, nazývá se funkce konvexní. Jestliže leží úsečka celá pod grafem funkce, nazývá se funkce konkávní.**

Představíme-li si paraboly  $x^2$  a  $-x^2$ , pak je jasné, že  $x^2$  je konvexní a  $-x^2$  je konkávní. U parabol tedy o konkávnitě nebo konvexitě rozhoduje znaménko kvadratického koeficientu.

Ale my již víme, že i složitější funkce umíme kvadraticky aproximovat do paraboly  $T_2(x)$  s kvadratickým koeficientem  $f''(x_0)$ . Jestliže je tedy  $f''(x_0) > 0$ , pak je jistě funkce konkávní, jestliže je  $f''(x_0) < 0$ , pak je funkce konvexní.

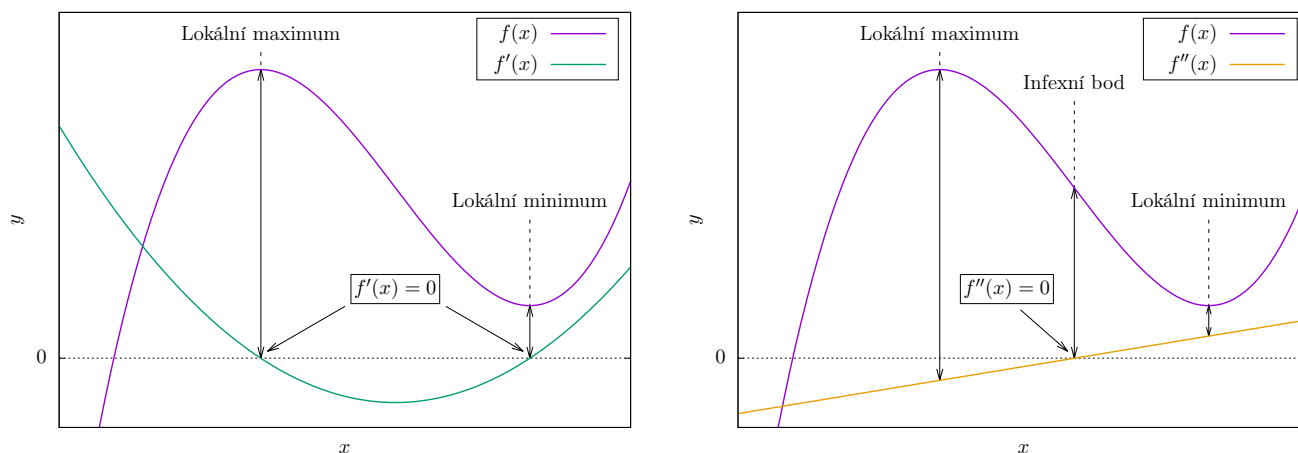
**Inflexní bod je takový, kde  $f''(x_0) = 0$ .** Tam žádný kvadratický koeficient není a funkce se lokálně chová jako obyčejná přímka.

## 1.5 Sedlový bod

Může samozřejmě nastat případ, kdy najdeme stacionární bod  $x_0$  splňující nejen  $f'(x_0) = 0$ , ale i  $f''(x_0) = 0$ . V takovém případě nemůžeme pomocí tohoto přístupu rozhodnout, zda se jedná o minimum, maximum, nebo sedlový bod. Sedlový bod je takový, kde se lokálně funkce chová jako konstanta, ale nejedná se ani o minimum nebo maximum.

**Příklad 3.** Funkce  $g(x) = x^3$  má zjevně stacionární bod  $x_0 = 0$ . V tomto bodě první i druhá derivace  $g$  jsou rovny nule. Jedná se o sedlový bod, ale to „na papíře“ nepoznáme, pokud nepoužijeme nějaké další techniky. (Samozřejmě to ihned poznáme z grafu.)

## 1.6 Shrnutí



**Obrázek 2:** Ilustrace průběhu funkce, její první a druhé derivace.

vlastnost funkce	první derivace	druhá derivace
rostoucí	+	jakákoli
klesající	–	jakákoli
konvexní	jakákoli	+
konkávní	jakákoli	–

**Tabulka 1:** Charakterizace funkce podle první a druhé derivace.

speciální bod	první derivace	druhá derivace
lokální minimum	0	+
lokální maximum	0	–
sedlový bod	0	0
inflexní bod	jakákoli	0

**Tabulka 2:** Charakterizace speciálních bodů funkcí. U sedlového bodu nejsou podmínky postačující.

## 2 PŘÍKLADY

### Příklad 4.

## 3 APLIKOVANÉ PŘÍKLADY

**Příklad 5** (Maximální profit). Dejme tomu, že náklady  $TC$  na výrobu produktu o množství  $Q$  jsou dány funkcí

$$TC(Q) = 2Q^3 - 3Q^2 + 400Q + 5000 \quad (9)$$

a cena produktu  $P$  je dána funkcí

$$P(Q) = 4000 - 33Q. \quad (10)$$

Profitová funkce  $\Pi$  (čti „velké pí“) je dána rozdílem celkového příjmu a celkového nákladu

$$\Pi = TR - TC, \quad \text{kde } TR = P \cdot Q. \quad (11)$$

Určeme maximální profit.

Platí

$$\Pi(Q) = 4\,000Q - 33Q^2 - 2Q^3 + 3Q^2 - 400Q - 5\,000 = -2Q^3 - 30Q^2 + 3\,600Q - 5\,000. \quad (12)$$

Naším úkolem je nalézt maxima a minima takové funkce. K tomu spočteme derivaci

$$\Pi'(Q) = -6Q^2 - 60Q + 3\,600 \quad (13)$$

a určíme její nulové body  $Q_0$ . Musíme tedy vyřešit rovnici

$$Q_0^2 + 10Q_0 - 600 = 0, \quad (14)$$

což není žádný problém:

$$Q_0 = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 2\,400}}{2} = -5 \pm 25 = -30, +20. \quad (15)$$

Zjevně nás zajímá bod  $Q_0 = 20$ . Pomocí druhé derivace ověříme, o jaký stacionární bod se jedná.

$$\Pi''(Q) = -12Q - 60, \quad \Pi''(Q_0) = -12 \cdot 20 - 60 < 0, \quad (16)$$

takže se jedná o lokální maximum.

Maximální profit tedy nastává při množství  $Q_0 = 20$  a je roven

$$\Pi_{\max} = \Pi(Q_0) = -2 \cdot 20^3 - 30 \cdot 20^2 + 3\,600 \cdot 20 - 5\,000 = 39\,600. \quad (17)$$