Věta o limitě složené funkce

Jestliže limita vnitřní funkce je $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$ a limita vnější funkce je $\lim_{x\to A} f(x) = B$, pak limita složené funkce je

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{y\to A} f(y) = B\,. \tag{1}$$

Toto tvrzení nám umožňuje počítat komplikované limity, které vzniknou skládáním spojitých funkcí.

1. Nejdříve spočítáme limitu vnitřní funkce $g(x)$ v daném bodě x_0. Vyjde nám hodnota A.
2. Hodnotu A vezmeme jako bod, ve kterém počítáme limitu vnější funkce $f(x)$.
3. Proměnnou ve vnější funkci přeznačíme na nějaké jiné písmenko (třeba y) pro lepší čitelnost.
4. Spočítáme limitu vnější funkce $f(y)$ pro $y \to A$. Vyjde nám nějaká hodnota B.
5. Hodnota B je limitou složené funkce $f[g(x)]$ v původním bodě x_0.

Příklad 1. Určíme

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^4}\,. \tag{2}$$

Pracujeme zde se složenou funkcí, kde vnitřní funkce je $g(x) = -x^4$ a vnější funkce je $f(y) = e^y$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} (-x^4) = -\infty\,, \qquad \lim_{y\to-\infty} e^y = 0\,, \tag{3}$$

takže

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^4} = 0\,. \tag{4}$$

Příklad 2. Určíme

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{\sin x}{x}}\,. \tag{5}$$

Vnitřní funkce je $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, vnější je $f(y) = e^y$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \ \text{(podle věty o dvou strážnících)}\,, \qquad \lim_{y\to 0} e^y = 1\,, \tag{6}$$

takže

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{\sin x}{x}} = 1\,. \tag{7}$$

Příklad 3. Určíme

$$\lim_{x\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2\pi}{x^3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)\right]\,. \tag{8}$$

Podíváme se na jednotlivé sčítance a nakonec zkusíme použít aritmetiku limit. Platí

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2\pi}{x^3} = 0\,, \quad \lim_{y\to 0} \operatorname{arctg} y = 0 \quad \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-2\pi}{x^3}\right) = 0\,, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\pi^2} = +\infty\,, \quad \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\pi^2}\right) = \frac{\pi}{2}\,. \tag{10}$$

Celkově

$$\lim_{x\to-\infty} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2\pi}{x^3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\pi^2}\right)\right] = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{11}$$

Verze: 6. listopadu 2021

Příklad 4. Určíme

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(1-x^2)\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) . \tag{12}$$

Limitu zkusíme převést na součin dvou limit:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(1-x^2)\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(1-x^2) \cdot \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) . \tag{13}$$

Napřed vypočítáme první limitu. Vnitřní funkce je $g(x) = (1-x^2)$ a vnější $f(y) = \operatorname{arctg}(y)$. Platí

$$\lim_{x\to\infty}(1-x^2) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(1-x^2) = \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arctg}(y) = -\frac{\pi}{2} . \tag{14}$$

Nyní vypočítáme druhou limitu. Vnitřní funkce je $g(x) = \frac{x-2}{x}$, vnější $f(y) = \ln y$. Takže

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim_{y\to 1} \ln y = \ln 1 = 0\,. \tag{15}$$

Celkově máme

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(1-x^2)\ln\left(\frac{x-2}{x}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 0 = 0\,. \tag{16}$$

Příklad 5. Spočítáme

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}} . \tag{17}$$

Vnitřní funkce je $g(x) = \frac{1-x^3}{1-x}$ a vnější $f(y) = \sqrt{y}$. Takže

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(\frac{1}{x}-x^2)}{x(\frac{1}{x}-1)} = \frac{0-\infty}{0-1} = +\infty\,, \tag{18}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1-x^3}{1-x}} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty\,. \tag{19}$$