

FUNKCE

Značení

značení	co se tím myslí
$[a, b]$	uzavřený interval v mezích a a b
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel

Základní pojmy

Funkcí obecně rozumíme zobrazení z nějaké množiny A do reálných čísel \mathbb{R} . To znamená, že nějakým prvkům z množiny A přiřazujeme reálná čísla. Symbolicky to zapisujeme jako

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1)$$

- Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce jedné reálné proměnné. Zapisujeme ji ve tvaru $f(x)$, kde x je nezávislá proměnná.
- Funkce $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ je posloupnost reálných čísel, přiřazuje hodnoty číslům $1, 2, 3, \dots$. Namísto $a(n)$ píšeme a_n , čímž naznačujeme, že indexy probíhají přirozená čísla. (Posloupnostem se budeme věnovat od poloviny semestru.)
- Funkce $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazuje dvěma reálným číslům jiné reálné číslo, hovoříme o funkci dvou proměnných. Zapisujeme ji ve tvaru $F(x, y)$, kde x a y jsou nezávislé proměnné. (Funkce dvou proměnných potkáme v poslední čtvrtině semestru.)

Nezávislé proměnné x ve funkci $f(x)$ také někdy říkáme **argument funkce**, závislé proměnné $f(x_0)$ říkáme **funkční hodnota v bodě** x_0 .

Definiční obor $D(f)$, D_f je množina takových čísel, pro která je funkce definována. **Obor hodnot** $H(f)$, H_f , R_f je množina všech možných funkčních hodnot dané funkce.

Elementární funkce

Elementární funkce jsou takové, které lze složit konečným počtem operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání) z těchto funkcí: konstanta, obecná mocnina, exponenciála, logaritmus, sinus, kosinus, tangens, kotangens, arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens.

Jiné funkce než elementární v kurzu prakticky nepotkáme. Je jich ale spousta. Příklady neelementárních funkcí si ukážeme, až budeme vybaveni mocnými nástroji, jako je určitý integrál.

Prostá funkce, inverzní funkce

Označíme-li $f(x) = y$, můžeme se ptát na otázku, zda bychom mohli zpětně dopočítat argument funkce x při znalosti y . Pokud to lze, můžeme vytvořit **inverzní funkci** $f^{-1}(x)$ danou vztahem $f^{-1}(y) = x$.

Příklad 1 (Lineární funkce). K funkci $f(x) = 3x - 6$ můžeme najít inverzní. Označíme si $3x - 6 = y$ a pokusíme se vyjádřit x . Zřejmě $x = \frac{1}{3}(y + 6)$. Předpis pro inverzní funkci tedy bude $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 6)$.

Příklad 2 (Potíže s kvadratickou funkcí). Pokusíme-li se hledat inverzní funkci k $f(x) = x^2$, narazíme na problém. Jedné hodnotě y přísluší dvě různé hodnoty, a to sice \sqrt{y} anebo $-\sqrt{y}$. Například pokud položíme $y = 16$, pak máme možnosti $x = 4$ anebo $x = -4$. Vidíme, že na celé množině \mathbb{R} nemůžeme inverzní funkci stanovit, protože potřebujeme jednoznačnost.

Předchozí příklad nás vede k podmínce, kterou musí daná funkce splňovat, abychom k ní mohli sestavit inverzní. Řekneme, že funkce f je **prostá** na intervalu I , jestliže

$$x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2). \quad (2)$$

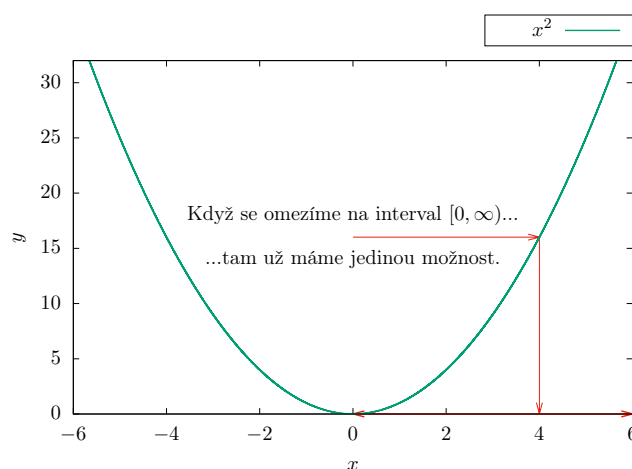
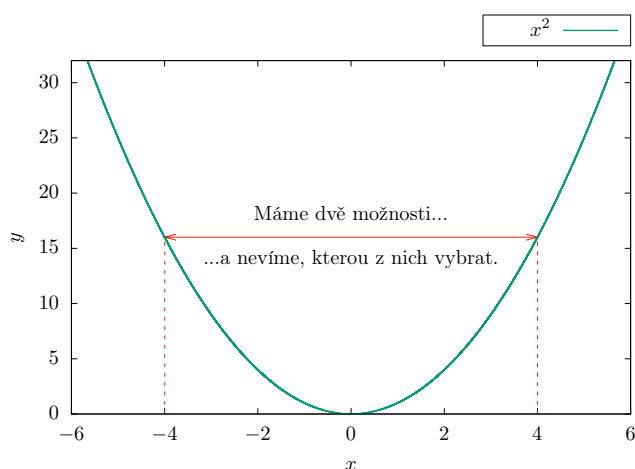
Slovně řečeno: vybereme-li si dvě různá x , nesmí se rovnat jejich funkční hodnoty $f(x)$.

Definiční obor a obor hodnot se u inverzní funkce prohazují:

$$D_{f^{-1}} = H_f, \quad H_{f^{-1}} = D_f. \quad (3)$$

Graf funkce f^{-1} lze získat z grafu f tak, že jej nakreslíme osově symetricky podle přímky $y = x$.

Příklad 3 (Odstranění potíží). Funkce z předchozího příkladu $f(x) = x^2$ je prostá na intervalu $[0, \infty)$, tam k ní existuje inverzní funkce $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, a na intervalu $(-\infty, 0]$, tam k ní existuje inverzní funkce $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.



Příklad 4 (Exponenciální funkce, přirozený logaritmus). Definujeme exponenciální funkci $\exp(x) = e^x$, kde $e = 2,718281828 \dots$ je tzv. Eulerovo číslo. (Je iracionální, stejně jako číslo π , číslice v desetinném zápisu se neopakují.) Dále definujeme funkci k ní inverzní - přirozený logaritmus $\ln(x) = \log_e(x)$. Platí

$$D(\exp(x)) = \mathbb{R}, \quad H(\exp(x)) = (0, +\infty), \quad D(\ln(x)) = (0, +\infty), \quad H(\ln(x)) = \mathbb{R}. \quad (4)$$

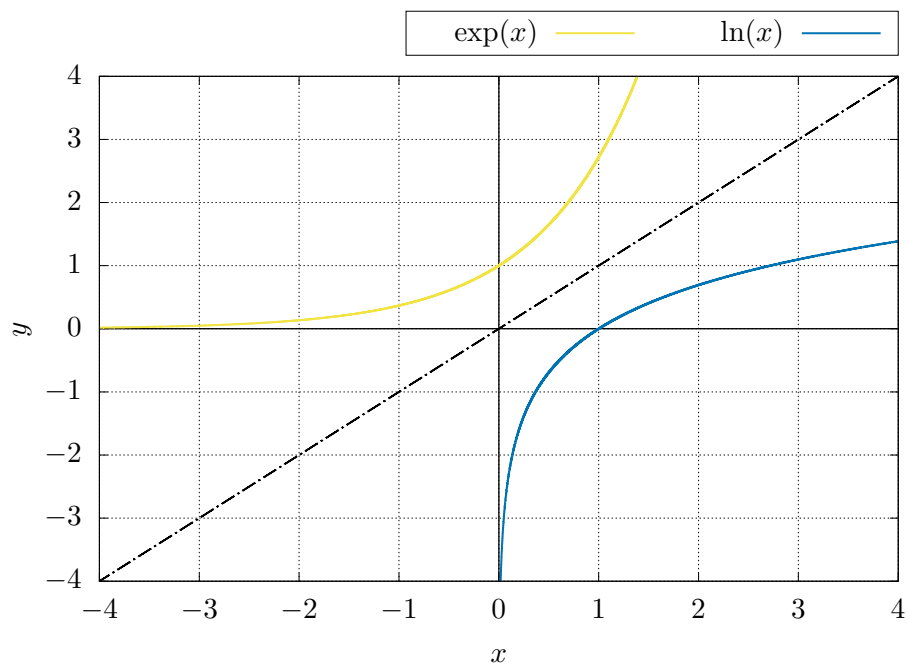
Užitečné vztahy, které se vyplatí pamatovat, jsou:

$$e^0 = 1, \quad \ln(1) = 0 \quad (5)$$

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{ax} = (e^x)^a \quad (6)$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x \quad (7)$$

Grafy obou funkcí jsou znázorněny na obrázku 1.



Obrázek 1: Grafy funkcí exponenciály a přirozeného logaritmu. Všimněme si, že jsou grafy navzájem osově symetrické podle přímky $y = x$.