CRAMEROVO PRAVIDLO

Cramerovo pravidlo nám umožňuje řešit soustavu n rovnic o n neznámých

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\,. \tag{1}$$

Je-li matice $\mathbf{A}$ regulární, pak má soustava právě jedno řešení. Jednotlivé neznámé x_j (složky vektoru $\boldsymbol{x}$) lze napočítat vztahem

$$\boxed{x_j = \frac{\det \mathbf{A}_j}{\det \mathbf{A}}}\,, \tag{2}$$

kde matice $\mathbf{A}_j$ vznikne tak, že na j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ dosadíme vektor pravých stran $\boldsymbol{b}$.

Příklad 1. Pomocí Cramerova pravidla řešme soustavu

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 3\,, \tag{3}$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 1\,, \tag{4}$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6\,. \tag{5}$$

Sestavíme si matici soustavy a vektor pravých stran

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\,. \tag{6}$$

Nyní můžeme sestavit dílčí matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}\,. \tag{7}$$

Spočítáme determinanty

$$\det \mathbf{A} = -28\,, \quad \det \mathbf{A}_1 = -28\,, \quad \det \mathbf{A}_2 = 0\,, \quad \det \mathbf{A}_3 = -56 \tag{8}$$

a můžeme psát jednotlivé složky:

$$x_1 = \frac{-28}{-28} = 1\,, \quad x_2 = 0\,, \quad x_3 = \frac{-56}{-28} = 2\,, \tag{9}$$

nebo chceme-li vektorově

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\,. \tag{10}$$

- Cramerovo pravidlo lze použít pouze v případě, že soustava má právě jedno řešení. Jinak bychom měli matici $\mathbf{A}$ singulární.
- Výpočetně není Cramerovo pravidlo příliš výhodné. Hodí se nám ale v situacích, kde máme velkou soustavu, ale potřebujeme znát pouze některé proměnné a zbylé ne. Pak se možná vyplatí spočítat pár determinantů namísto Gaussovy eliminace. Rovněž se Cramerovo pravidlo může hodit pro soustavy s parametrem.

Verze: 23. října 2021