FUNKCE

Značení

značení	**co se tím myslí**
$[a, b]$	uzavřený interval v mezích a a b
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\bigwedge$	a zároveň
$\bigvee$	anebo
$\Longrightarrow$	implikace („z toho plyne… “)
$\Longleftrightarrow$	ekvivalence („právě tehdy, když… “)

Základní pojmy

Funkcí obecně rozumíme zobrazení z nějaké množiny A do reálných čísel $\mathbb{R}$. To znamená, že nějakým prvkům z množiny A přiřazujeme reálná čísla. Symbolicky to zapisujeme jako

$$f : A \to \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

- Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je reálná funkce jedné reálné proměnné. Zapisujeme ji ve tvaru $f(x)$, kde x je nezávislá proměnná.
- Funkce $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost reálných čísel, přiřazuje hodnoty číslům $1, 2, 3, \cdots$. Namísto $a(n)$ píšeme a_n, čímž naznačujeme, že indexy probíhají přirozená čísla. Tak například $a_n = 2n - 1$ bude posloupnost, kterou můžeme zapsat jako $\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ - do vzorečku dosazujeme postupně čísla $1, 2, 3, \cdots$. (Posloupnostem se budeme věnovat od poloviny semestru.)
- Funkce $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ přiřazuje dvěma reálným číslům jiné reálné číslo, hovoříme o funkci dvou proměnných. Zapisujeme ji ve tvaru $F(x, y)$, kde x a y jsou nezávislé proměnné. Příkladem může být třeba $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy$. (Funkce dvou proměnných potkáme v poslední čtvrtině semestru.)

Nezávislé proměnné x ve funkci $f(x)$ také někdy říkáme **argument funkce**, závislé proměnné $f(x_0)$ říkáme **funkční hodnota v bodě** x_0.

Definiční obor $D(f)$, D_f je množina takových čísel, pro která je funkce definována. **Obor hodnot** $H(f)$, H_f, R_f je množina všech možných funkčních hodnot dané funkce.

Elementární funkce

Elementární funkce jsou takové, které lze složit konečným počtem operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání) z těchto funkcí: konstanta, obecná mocnina, exponenciála, logaritmus, sinus, kosinus, tangens, kotangens, arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens.

Jiné funkce než elementární v kurzu prakticky nepotkáme. Je jich ale spousta. Příklady neelementárních funkcí si ukážeme, až budeme vybaveni mocnými nástroji, jako je určitý integrál.

Prostá funkce, inverzní funkce

Označíme-li $f(x) = y$, můžeme se ptát na otázku, zda bychom mohli zpětně dopočítat argument funkce x při znalosti y. Pokud to lze, můžeme vytvořit **inverzní funkci** $f^{-1}(x)$ danou vztahem $f^{-1}(y) = x$.

(Symbol „na minus prvou“ neznamená mocnění, je to specifické označení pro inverzní funkci, tedy $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.)

Verze: 26. září 2021

Příklad 1 (Lineární funkce)**.** K funkci $f(x) = 3x - 6$ můžeme najít inverzní. Označíme si $3x - 6 = y$ a pokusíme se vyjádřit x. Zřejmě $x = \frac{1}{3}(y + 6)$. Předpis pro inverzní funkci tedy bude $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 6)$.

Příklad 2 (Potíže s kvadratickou funkcí)**.** Pokusíme-li se hledat inverzní funkci k $f(x) = x^2$, narazíme na problém. Jedné hodnotě y příslušejí dvě různé hodnoty, a to sice $\sqrt{y}$ anebo $-\sqrt{y}$. Například pokud položíme $y = 16$, pak máme možnosti $x = 4$ anebo $x = -4$. Vidíme, že na celé množině $\mathbb{R}$ nemůžeme inverzní funkci stanovit, protože potřebujeme jednoznačnost.

Předchozí příklad nás vede k podmínce, kterou musí daná funkce splňovat, abychom k ní mohli sestrojit inverzní. Řekneme, že funkce f je **prostá** na intervalu I, jestliže

$$x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)\,. \tag{2}$$

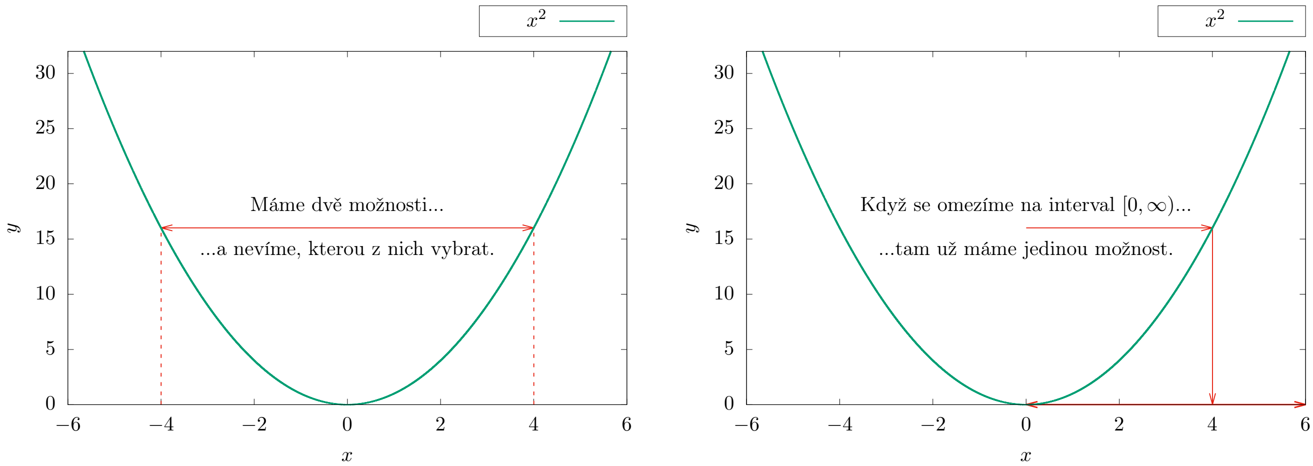
Slovně řečeno: vybereme-li si dvě různá x, nesmí se rovnat jejich funkční hodnoty $f(x)$. Pakliže je tato podmínka splněna, můžeme na intervalu I najít inverzní funkci k f.

Definiční obor a obor hodnot se u inverzní funkce prohazují:

$$D_{f^{-1}} = H_f\,, \quad H_{f^{-1}} = D_f\,. \tag{3}$$

Graf funkce f^{-1} lze získat z grafu f tak, že jej nakreslíme osově symetricky podle přímky $y = x$.

Příklad 3 (Odstranění potíží)**.** Funkce z předchozího příkladu $f(x) = x^2$ je prostá na intervalu $[0, \infty)$, tam k ní existuje inverzní funkce $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, a na intervalu $(-\infty, 0]$, tam k ní existuje inverzní funkce $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.



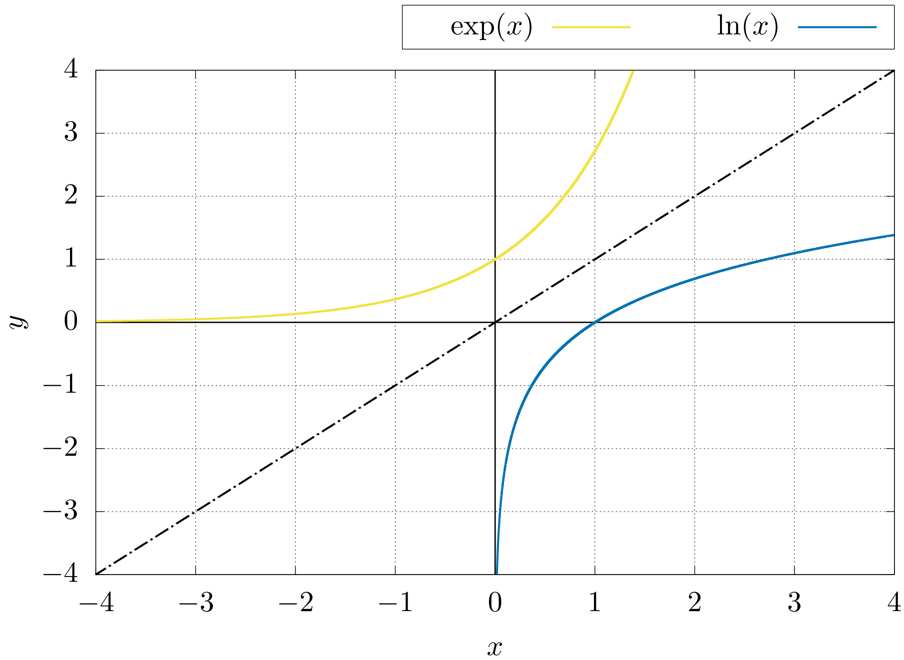
Příklad 4 (Exponenciální funkce, přirozený logaritmus)**.** Definujeme exponenciální funkci $\exp(x) = e^x$, kde $e = 2{,}718281828\cdots$ je tzv. Eulerovo číslo. (Je iracionální, stejně jako číslo π, číslice v desetinném zápisu se neopakují.) Dále definujeme funkci k ní inverzní - přirozený logaritmus $\ln(x) = \log_e(x)$. Platí

$$D(\exp(x)) = \mathbb{R}\,, \quad H(\exp(x)) = (0, +\infty)\,, \quad D(\ln(x)) = (0, +\infty)\,, \quad H(\ln(x)) = \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Užitečné vztahy, které se vyplatí pamatovat, jsou:

$$e^0 = 1\,, \quad \ln(1) = 0 \tag{5}$$
$$e^{x+y} = e^x e^y\,, \quad e^{ax} = (e^x)^a \tag{6}$$
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y\,, \quad \ln(x^a) = a \ln x \tag{7}$$

Grafy obou funkcí jsou znázorněny na obrázku 1.



Obrázek 1: Grafy funkcí exponenciály a přirozeného logaritmu. Všimněme si, že jsou grafy navzájem osově symetrické podle přímky $y = x$.