NÁSOBENÍ MATIC

Matice $\mathbf{A}$ typu $n \times m$ a $\mathbf{B}$ typu $m \times k$ lze spolu vynásobit. Výsledná matice $\mathbf{AB}$ je typu $n \times k$ a získáme ji pomocí pravidla „řádek na sloupec".

Příklad 1 (Násobení pomocí tabulky)**.** Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Matice můžeme vynásobit pomocí pravidla řádek na sloupec. Výsledná matice bude zřejmě typu 2×3. Zápis, který může být užitečný, je sepsat si do tabulky **vlevo první matici** a **nahoru druhou matici**:

$$\begin{array}{cccc|ccc} & & & & -1 & 1 & 2 \\ & & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -2 & -1 \\ & & & & -4 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 4 & -1 & 0 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -2 & 10 & -7 & -1 \end{array} \tag{2}$$

Například člen $1,1$ jsme získali součtem součinů:

$$2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-4) = 9\,. \tag{3}$$

Takže

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 10 & -7 & -5 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Matice v opačném pořadí vůbec vynásobit nelze, protože by neseděly rozměry.

Příklad 2 (Nekomutativita matic)**.** Ačkoli například čtvercové matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ můžeme násobit v obou směrech, neplatí, že by $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BA}$ byly stejné matice! Například

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Přesvědčte se sami, že násobit v obou směrech lze i matice typu $m \times n$ a $n \times m$. Rozměr výsledné matice ale bude pokaždé jiný!

Musíme proto přísně rozlišovat mezi násobením matic zleva a zprava.

Pro násobení matic platí

- **nekomutativita**: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- **asociativita**: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
- **distributivita** (zprava a zleva): $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

INVERZNÍ MATICE

Čtvercové matice typu $n \times n$ označujeme jako matice řádu n.

Verze: 14. října 2021

Definujeme **jednotkovou matici J** řádu n (v literatuře se pro ni používá též značení $\mathbf{E}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{Id}$) jako čtvercovou matici řádu n, která má na hlavní diagonále samé jedničky a jinde nuly. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice řádu n, pak zjevně platí $\mathbf{AJ} = \mathbf{JA} = \mathbf{A}$.

Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ je čtvercová matice stejného řádu n, která splňuje $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{J}$. Pokud inverzní matice existuje, je definována jednoznačně. Není ale definována pro všechny čtvercové matice.

Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ řádu n je **regulární**, jestliže $h(\mathbf{A}) = n$, v opačném případě řekneme, že je **singulární**. Pouze pro regulární matice existuje matice inverzní.

Hledání inverzní matice Jordanovou metodou

Pro výpočet inverzní matice lze použít metodu, kterou jsme zmiňovali u řešení soustavy lineárních rovnic. Matici $\mathbf{A}$ rozšíříme o jednotkovou matici $\mathbf{J}$ a pomocí elementárních řádkových úprav se ji pokusíme převést na tvar, kde bude na levé straně vystupovat jednotková matice $\mathbf{J}$. Na pravé straně pak získáme inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{J}) \to \text{eřú} \to (\mathbf{J}|\mathbf{A}^{-1}) \tag{6}$$

Příklad 3. Určíme inverzní matici k

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Tato matice má $h(\mathbf{B}) = 3$, je proto regulární a inverzní matice k ní existuje. Napíšeme si tvar

$$(\mathbf{B}|\mathbf{J}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{8}$$

Nyní začneme provádět eřú. Nejprve se snažíme vynulovat členy pod diagonálou, stejně jako u Gaussovy eliminace. Začneme standartně prvním sloupcem a pokračovat budeme druhým sloupcem.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right). \tag{9}$$

Nyní chceme vynulovat členy nad diagonálou. Začneme posledním sloupcem a pokračovat budeme prostředním. Poslední řádek rovnou vydělíme pěti.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2+\frac{1}{5} & 1-\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \tag{10}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{9}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{array}\right). \tag{11}$$

Nalevo máme jednotkovou matici. Napravo jsme získali matici inverzní:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{9}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -9 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Můžeme se přesvědčit o tom, že je to správná inverzní matice:

$$\mathbf{BB}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -9 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \mathbf{J} \tag{13}$$

a obdobně v opačném pořadí.

Příklad 4. Matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

nemá k sobě inverzní, protože $h(\mathbf{M}) = 1$. Pokud bychom se pokusili hledat ji Jordanovou metodou, narazili bychom na potíže:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) . \tag{15}$$

Na levé straně se nám žádným způsobem nepovede vynulovat dvojku nad diagonálou.

Poznámky

- Asi nejsnáze se určuje regularita/singularita matice pomocí determinantu.
- K hledání inverzní matice řádu 2 se používá často triku, který je v českých zemích pojmenován „Čihákovo pravidlo“ na počest profesora Čiháka, který přednášel dlouhá léta na MATFYZu. Seznámíme se s ním v jednom pozdějším domácím úkolu.
- Další vlastnost maticové algebry je, že $(\mathbf{AB})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$. Ve skutečnosti $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, což si ověříme rovněž v domácím úkolu.
- Stejně tak platí $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.