DEFINIČNÍ OBORY ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

Při určování definičního oboru elementárních funkcí se v podstatě můžeme řídit jednoduchými zásadami.

1. Nesmíme dělit nulou.
2. Sudé odmocniny jsou definované pouze pro nezáporná čísla.
3. Logaritmus je definovaný pouze pro kladná čísla.
4. Speciální pozornost si zaslouží funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$ a $\arccos x$.

Kompletní přehled dává tabulka 1. (Je víceméně potřeba umět ji nazpaměť.)

funkce	**definiční obor**	**obor hodnot**
x^k, k je sudé	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
x^k, k je liché	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt[k]{x}$, k je sudé	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$\sqrt[k]{x}$, k je liché	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
a^x, $a > 0$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\log_a x$, $a > 0$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[0, 1]$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[0, 1]$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

Tabulka 1: Tabulka elementárních funkcí.

PŘÍKLADY

Příklad 1. Určíme definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+6}\,. \tag{1}$$

P1 nám říká, že nesmíme dělit nulou. To vede na podmínky $x \neq 4$ a $x \neq -6$. To jsou body, které musíme vyřadit z množiny reálných čísel, abychom získali definiční obor. Množinově to lze zapsat jako

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{4, -6\}\ , \tag{2}$$

kde symbol „$\setminus$" značí množinový rozdíl. To samé můžeme napsat pomocí sjednocení intervalů

$$D_f = (-\infty, -6) \cup (-6, 4) \cup (4, +\infty)\,. \tag{3}$$

Kulaté závorky značí otevřené intervaly, to znamená, že do nich krajní body nepatří.

Verze: 26. září 2021

Příklad 2. Určíme definiční obor funkce

$$g(x) = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)(x^2-9)}\,. \tag{4}$$

Použijeme opět P1 a dostáváme rovnici

$$(x-4)(x^2-9) = 0\,. \tag{5}$$

Nyní využijeme toho, že *součin čísel je roven nule právě tehdy, když alespoň jedno z nich je rovno nule.* Dostáváme tedy podmínky:

$$x - 4 = 0 \implies x \neq 4 \tag{6}$$

$$x^2 - 9 = 0 \implies x \neq \pm 3\,. \tag{7}$$

Celkově $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 4\}$.

Příklad 3. Určíme definiční obor funkce

$$h(x) = \sqrt{1 - \frac{6}{x+1}}\,. \tag{8}$$

P1 nám dává podmínku $x \neq -1$. P2 nám říká, že celý výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tedy

$$1 - \frac{6}{x+1} \geq 0\,. \tag{9}$$

Tuto nerovnici můžeme vyřešit například tak, že převedeme oba členy na stejného jmenovatele

$$\frac{x+1}{x+1} - \frac{6}{x+1} = \frac{x-5}{x+1} \geq 0 \tag{10}$$

a poté využijeme toho, že *podíl dvou čísel je nezáporný tehdy, když čitatel i jmenovatel budou buďto oba dva kladné nebo oba dva záporné.* Samozřejmě ale musíme vyloučit možnost $x = -1$. Takže

$$[x - 5 \leq 0] \bigwedge [x + 1 > 0] \implies x \in [5, \infty) \tag{11}$$

$$[x - 5 \geq 0] \bigwedge [x + 1 < 0] \implies x \in (-\infty, -1) \tag{12}$$

Celkově $D_h = (-\infty, -1) \cup [5, \infty)$.

Příklad 4. Určíme definiční obor funkce

$$F(x) = \frac{\sqrt{4 - \ln x}}{2^x - 16}\,. \tag{13}$$

P1 vede na rovnici $2^x - 16 = 0$. Tu můžeme snadno vyřešit, když si všimneme, že $16 = 2^4$, takže $x \neq 4$. P3 vede na podmínku $x > 0$. Konečně P2 vede na nerovnici

$$4 - \ln x \geq 0\,. \tag{14}$$

Tu můžeme vyřešit tak, že logaritmus převedeme na jednu stranu rovnice

$$4 \geq \ln x\,. \tag{15}$$

Nyní můžeme na rovnici „zapůsobit exponenciálou“. Exponenciála je funkce prostá a rostoucí, nemění se tedy znaménko nerovnosti. Dostáváme

$$\exp(4) = e^4 \geq \exp(\ln x) = x\,, \tag{16}$$

takže $x \in (-\infty, e^4]$.

Celkově dostáváme $D_F = (0, 4) \cup (4, e^4]$.

Příklad 5. Určíme definiční obor funkce

$$G(t) = \arcsin(\ln t)\,. \tag{17}$$

P3 nám říká, že $t > 0$. Nyní se podíváme na pravidlo P4. To nám říká, že argument („vnitřek“) arkussinu musí být v mezích $[-1, 1]$. Odtud dostáváme podmínku

$$-1 \leq \ln t \leq +1\,. \tag{18}$$

Tyto nerovnice můžeme vyřešit opět tak, že zapůsobíme exponenciálou:

$$e^{-1} \leq t \leq e^{1}\,. \tag{19}$$

Celkově tedy $D_G = [e^{-1}, e]$.

Příklad 6. Určíme definiční obor funkce

$$y(x) = \ln\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin x\right)\,. \tag{20}$$

P4 nám říká, že $x \in [-1, 1]$. P3 nám dává nerovnici

$$\frac{\pi}{6} - \arcsin x > 0\,. \tag{21}$$

Takovou nerovnici opět vyřešíme tak, že arkussinus převedeme na druhou stranu rovnice

$$\frac{\pi}{6} > \arcsin x \tag{22}$$

a na rovnici „zapůsobíme“ funkcí sinus. Ta je opět rostoucí, takže nezmění znaménko nerovnosti. Dostáváme

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sin(\arcsin(x)) = x\,, \tag{23}$$

takže máme $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$.

Celkově $D_y = [-1, \frac{1}{2})$.

Příklad 7 (Náročnější)**.** Určíme definiční obor funkce

$$T(z) = \ln\left(\ln(\ln z)\right)\,. \tag{24}$$

Aplikujeme pravidlo P3, postupovat budeme od funkce uvnitř. Dostaneme podmínky

$$z > 0\,, \quad \ln(z) > 0\,, \quad \ln(\ln z) > 0\,. \tag{25}$$

Druhá z nerovnic nám dává podmínku $z > 1$. Na třetí nerovnici aplikujeme exponenciálu a dostaneme

$$\ln z > \exp 0 = 1\,. \tag{26}$$

Nyní znova zapůsobíme exponenciálou a dostaneme

$$z > \exp 1 = e\,. \tag{27}$$

Takže $D_T = (e, \infty)$.

Příklad 8 (S absolutní hodnotou)**.** Určíme definiční obor funkce

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+2| - |x+4|}}\,. \tag{28}$$

P1 a P2 vedou na podmínku

$$|x+2| - |x+4| > 0\,. \tag{29}$$

Absolutních hodnot se zbavíme tak, že se podíváme na jednotlivé intervaly. Nulové body v absolutních hodnotách jsou -2 a -4. Dostáváme tak tři intervaly, na kterých budeme absolutní hodnoty řešit:

interval	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,\infty)$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$-x-2$	$x+2$
$\|x+4\|$	$-x-4$	$x+4$	$x+4$
$\|x+2\|-\|x+4\|$	$(-x-2)-(-x-4)=2$	$(-x-2)-(x+4)=-2x-6$	$(x+2)-(x+4)=-2$

Na intervalu $(-\infty,-4)$ se tedy suma absolutních hodnot chová jako konstanta 2, která je zřejmě větší než nula.
Na intervalu $(-4,-2)$ musíme vyřešit nerovnici $-2x-6>0$, která vede na $x<-3$.
Na intervalu $(-2,\infty)$ už je chování zase konstantní, $-2<0$.
Celkově vyhovují pouze x z intervalu $(-\infty,-4]$ a ještě z intervalu $[-4,-3)$. Takže $D_A=(-\infty,-3)$.

Závěrečné poznámky

- Časté chyby, na které je dobré dát zvláštní pozor:
  - Záporná mocnina kladného čísla je stále kladné číslo! Například $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}>0$.
    To je rozdíl oproti $2^{-4}\neq -2^4=-16$!
  - Násobíme-li nerovnici záporným číslem, obrací se znaménko nerovnosti! Například nerovnici $-2x^2>-4x$ můžeme vydělit -2 a dostaneme $x^2<2x$.
  - Definiční obor musíme určit z původního výrazu, ještě předtím, než ho začneme dále upravovat. Tak například funkce

    $$f(x)=1\,,\quad g(x)=\frac{x(x+1)}{x(x+1)} \tag{30}$$

    dávají pro všechna přípustná x stejné hodnoty, ale definiční obor funkcí je různý!
    $D_f=\mathbb{R}$, zatímco $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.