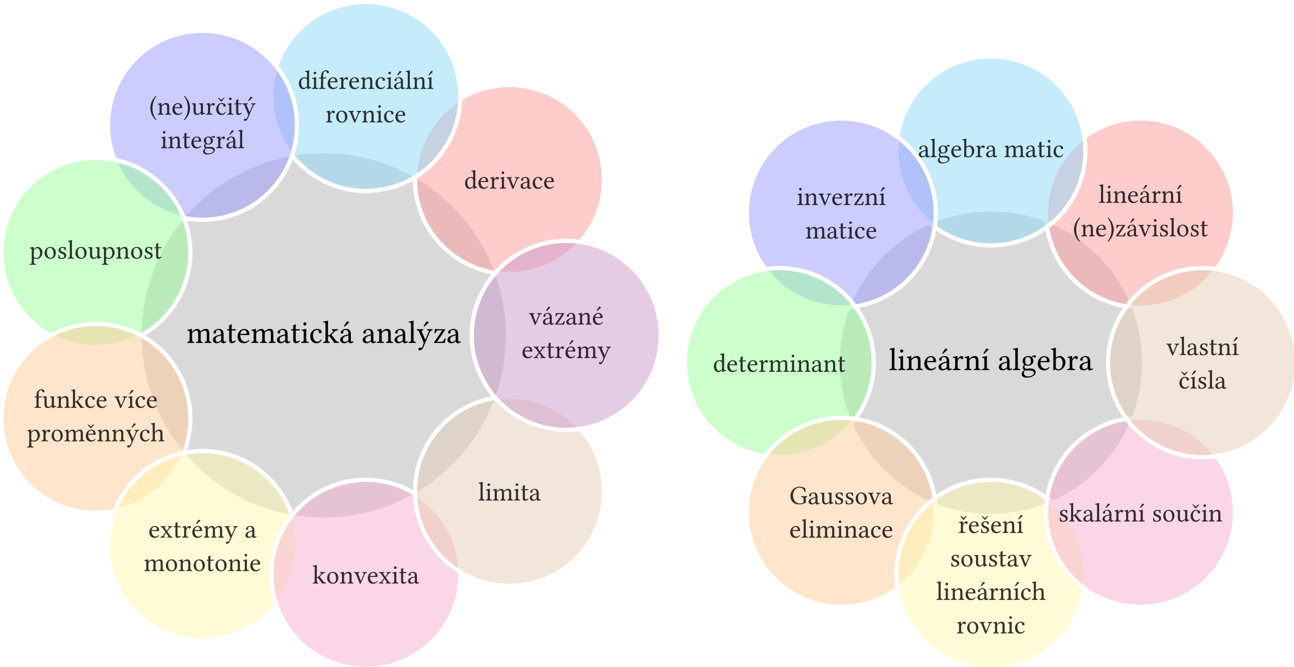


Obrázek 1: Obsah tohoto kursu v kostce.

1 ÚVOD

Modře jsou vyznačeny odkazy na konkrétní rovnici, tabulku nebo obrázek v textu. Červeně jsou vyznačeny hypertextové odkazy na webové stránky.

* **Autor:** miroslav@burysek.eu. **Verze:** 26. srpna 2021

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"'] & A_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "g_2"'] & A_2 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "g_3"'] & A_3 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "g_4"'] & A_4 \arrow[d, "g_5"'] \\
B_0 \arrow[r, "f_1'"'] & B_1 \arrow[r, "f_2'"'] & B_2 \arrow[r, "f_3'"'] & B_3 \arrow[r, "f_4'"'] & B_4
\end{tikzcd}$$

$$f(x) \xrightarrow{\text{derivace}} f'(x)$$

$$f'(x) \xleftarrow[\text{integrace}]{} f(x)$$

2 FUNKCE

2.1 Elementární funkce

Elementární funkce jsou takové, které lze složit konečným počtem operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání) z těchto funkcí: konstanta, obecná mocnina, exponenciála, logaritmus, sinus, kosinus, tangens, kontangens, arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens.

Jiné funkce než elementární v kurzu prakticky nepotkáme. Je jich ale spousta. Příklady neelementárních funkcí si ukážeme, až budeme vybaveni mocnými nástroji, jako je určitý integrál.

2.2 Definiční obor

Definiční obor $D(f)$ (též D_f) je množina takových čísel, pro která je funkce f definována.

Při určování definičního oboru elementárních funkcí se v podstatě můžeme řídit jednoduchými zásadami.

1. Nesmíme dělit nulou.
2. Sudé odmocniny jsou definované pouze pro nezáporná čísla.
3. Logaritmus je definovaný pouze pro kladná čísla.
4. Speciální pozornost si zaslouží funkce tan, cot, arcsin a arccos.

Kompletní přehled dává tabulka.

funkce	definiční obor	obor hodnot
x^k, k je sudé	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$
x^k, k je liché	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt[k]{x}$, k je sudé	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$
$\sqrt[k]{x}$, k je liché	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$(0,\infty)$	$(0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$
a^x	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$
$\log x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\sin x$, $\cos x$	$\mathbb{R}$	$[0,1]$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$

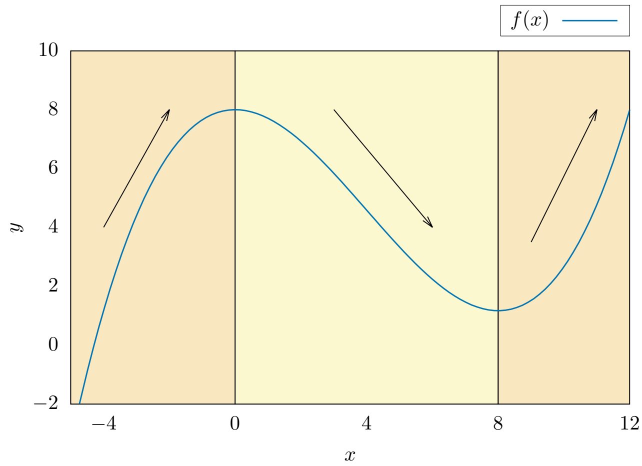
Tabulka 1: Tabulka elementárních funkcí. (Je víceméně potřeba umět ji nazpaměť.) `tab:funkce`

2.3 Růst a pokles funkce

O funkci řekneme, že je

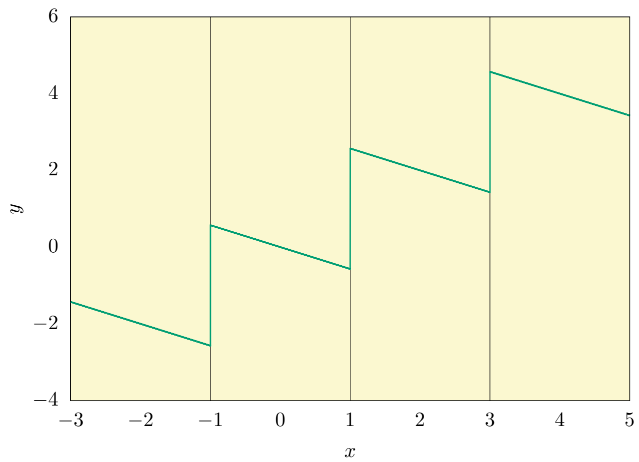
- **rostoucí** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) < f(y)$,
- **klesající** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) < f(y)$,
- **neklesající** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) \leq f(y)$,
- **nerostoucí** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) \geq f(y)$,

- **konstantní** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) = f(y)$,
- **monotónní** na intervalu I, jestliže je na něm neklesající, anebo nerostoucí.



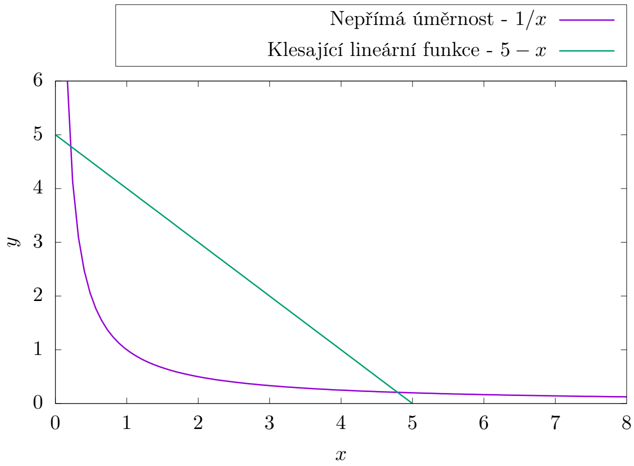
Obrázek 2: Ilustrace pojmu rostoucí a klesající funkce. Na oranžové oblasti je $f(x)$ rostoucí, na žluté oblasti je $f(x)$ klesající.

Poznámka 1. Pokud mluvíme o růstu nebo poklesu funkce, je vždy nutné uvést, na jakém intervalu se pohybujeme. Důležitost je vidět na následujícím příkladu.



Obrázek 3: Příklad funkce, která je klesající na každém intervalu $(2p-1, 2p+1)$, $p \in \mathbb{Z}$, ale není klesající na celém $\mathbb{R}$ (nesplňuje definici klesající funkce - stačí porovnat dva body v oddělených intervalech). Dokonce se jeví jako „globálně rostoucí“, ale s takovým pojmem nepracujeme. Všimněme si, že funkce je v krajních bodech intervalů nespojitá.

Poznámka 2. V některé literatuře se o různých křivkách mluví jako o „rostoucích zleva doprava“ nebo „klesajících zprava doleva“ a podobně. Matematická terminologie vždy pracuje s tím, co se děje s hodnotami $f(x)$ při rostoucích x - tedy vždy „zleva doprava“, chcete-li. Podobně se někdy říká o klesajících funkcích $y(x)$, že „y je nepřímo úměrné x“. Ale matematická terminologie říká, že pouze funkce $y(x) = C/x$ je nepřímá úměrnost, žádná jiná funkce toto nesplňuje.



Obrázek 4: Ilustrace často nesprávně použitého termínu „nepřímá úměrnost". Pouze funkce typu C/x jsou nepřímé úměrnosti.

2.4 Další charakteristiky funkce

O funkci $f(x)$ říkáme, že je

- **prostá** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$ („každému x přísluší jiná hodnota $f(x)$"),
- **omezená shora**, jestliže existuje konečné číslo K takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq K$,
- **omezená zdola**, jestliže existuje konečné číslo K takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq K$,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Jestliže je funkce f prostá na intervalu I, pak k ní existuje **inverzní funkce**, kterou označujeme f^{-1}.

Příklad 1. Funkce x^2 je prostá na intervalu $(-\infty, 0]$ a na intervalu $[0, +\infty)$. Není prostá na $\mathbb{R}$, protože $(-2)^2 = 4 = (+2)^2$. Na intervalu $[0, \infty)$ k ní existuje inverzní funkce $\sqrt{x}$. Na intervalu $(-\infty, 0]$ k ní existuje inverzní funkce $\sqrt{-x}$.

2.5 Příklady na definiční obor

Příklad 2. Určíme definiční obor funkce

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x-4)(x^2+4x-5)}\,.$$

Řešení: První pravidlo nám říká, že nesmíme dělit nulou. Musíme tedy najít všechna x taková, že je jmenovatel zlomku nulový:

$$(x+1)(x-4)(x^2+4x-5) = 0\,.$$

Součin čísel (nebo výrazů, závorek) je nulový tehdy a jen tehdy, když je jedno z čísel nulové. Každou závorku tedy řešíme zvlášť:

$$\begin{cases} x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1\,, \\ x-4 = 0 \Longrightarrow x = 4\,, \\ x^2+4x-5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} = -2 \pm 3\,,\ x = -5, 1 \end{cases}.$$

Tato řešení jsou body, které musíme z definičního oboru vyloučit. Tedy

$$\boxed{D(R) = \mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 1, 4\}}\,.$$

Poznámka: někdo by snad mohl postupovat tak, že by čitatel rovněž převedl na součin závorek: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Jmenovatel lze též převést na součin: $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$. Postupoval by tedy krácením:

$$R(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)(x+5)(x-1)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{(x+1)(x-4)}\,.$$

Výraz na levé straně má jiný definiční obor: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\} \neq D(R)$. **Číselné hodnoty výrazů napravo a nalevo jsou stejné, ale definiční obor výrazů je různý!** Poučení tedy je: nejdříve nalezneme definiční obor a pak můžeme krátit.

Příklad 3. Ještě jednou upozorníme na stejný případ: funkce $f(x) = \frac{x}{x}$ odpovídá konstantní funkci $g(x) = 1$, s tím rozdílem, že do f nelze dosadit nulu. Takže

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R} = D(g)\,.$$

Příklad 4. Určíme definiční obor funkce

$$h(x) = \sqrt{\frac{\log(x-2)}{x-4}}$$

Řešení: 1. pravidlo nám vyloučí bod $x = 4$. Dále nám 3. pravidlo říká, že do log můžeme dosadit pouze kladná čísla, takže musí platit $x - 2 > 0$. To odpovídá hodnotám $x \in (2, \infty)$. Konečně nám 2. pravidlo říká, že musí být výraz pod odmocninou nezáporný, musíme tedy řešit nerovnici

$$\frac{\log(x-2)}{x-4} \geq 0\,.$$

Nejprve vyřešíme případ, kdy platí rovnost.

$$\log(x-2) = 0 \Longrightarrow x - 2 = 1 \Longrightarrow x = 3\,.$$

Nyní vyřešíme případ nerovnosti. Podíl dvou čísel je větší než nula právě tehdy, když jsou obě čísla kladná anebo obě čísla záporná (samozřejmě „minus krát minus je plus“). Stačí tedy řešit podmínky:

$$\begin{cases} [\log(x-2) > 0] \bigwedge [x-4 > 0] \Longrightarrow [x \in (3,\infty)] \bigwedge [x \in (4,\infty)] \Longrightarrow x \in (4,\infty)\,, \\ [\log(x-2) < 0] \bigwedge [x-4 < 0] \Longrightarrow [x \in (2,3)] \bigwedge [x \in (-\infty,4)] \Longrightarrow x \in (2,3) \end{cases}\,.$$

Celkově máme

$$\boxed{D(h) = (2,3) \cup \{3\} \cup (4,\infty) = (2,3] \cup (4,\infty)}\,.$$

Příklad 5. Určíme definiční obor funkce

$$P(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{x^x}\,.$$

Řešení: jmenovatel vyloučí bod nula. Dále, definiční obor funkce arcsin je $[-1, 1]$, tedy $-1 \leq x - 1 \leq 1$, takže $x \in [0, 2]$. Nyní se podívejme na funkci ve jmenovateli. Tu můžeme přepsat

$$x^x = \left(e^{\log x}\right) = e^{x \log x}\,,$$

takže se v ní objeví logaritmus a vidíme, že $x \in (0, \infty)$. Celkově

$$\boxed{D(P) = [0,2] \cap (0,\infty) = (0,2]}\,.$$

Příklad 6. Určíme definiční obor funkce

$$m(t) = \tan(\sqrt{t+1})\,.$$

Řešení: odmocnina dává podmínku $t \in [-1, \infty)$. Dále platí $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, takže $\tan(\sqrt{t+1}) = \frac{\sin(\sqrt{t+1})}{\cos(\sqrt{t+1})}$. Protože nesmíme dělit nulou, musíme najít body

$$\cos(\sqrt{t+1}) = 0 \,.$$

Substitucí $\sqrt{t+1} = u$ dostáváme podmínku $\cos u = 0$, která odpovídá bodům $u = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$. Odtud máme

$$\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2} + k\pi \,.$$

Nyní musíme vyjádřit t, což uděláme prostým umocněním a odečtením jedničky:

$$t = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 - 1 = \frac{\pi^2}{4} + 2 \cdot k\pi \cdot \frac{\pi}{2} + k^2\pi^2 - 1 = k^2\pi^2 + k\pi^2 + \frac{\pi^2}{4} - 1 \,.$$

Definiční obor je tedy

$$D(m) = \left\{ t : t \geq -1, t \neq k^2\pi^2 + k\pi^2 + \frac{\pi^2}{4} - 1,\, k \in \mathbb{Z} \right\} \,.$$

Příklad 7. Určíme definiční obor funkce

$$g(x) = \frac{\sin^3 x + 4^{-x}}{\sqrt{|2x-1| - |x+1| - 3}} \,.$$

Funkce v čitateli mají definiční obor $\mathbb{R}$. Musíme tedy zařídit, aby odmocnina ve jmenovateli byla dobře definovaná a aby byla nenulová, to znamená zajistit

$$|2x-1| - |x+1| - 3 > 0 \,.$$

Nerovnice s absolutní hodnotou se řeší pomocí tabulek. Nejprve najdeme body, kdy je absolutní hodnota nulová. V našem případě to jsou body $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$ a $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Nyní stačí využít toho, že $|x| = +x$ pro $x > 0$ a $|x| = -x$ pro $x < 0$.

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$\|2x-1\|$	$-2x+1$	$-2x+1$	$+2x-1$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$+x+1$	$+x+1$
$\|2x-1\| - \|x+1\| - 3$	$(-2x+1) - (-x-1) - 3$	$(-2x+1) - (+x+1) - 3$	$(+2x-1) - (+x+1) - 3$
po úpravě	$-x-1$	$-3x-3$	$x-5$

Nyní musíme vyřešit tři nerovnice

$$-x - 1 > 0\,, \quad -3x - 3 > 0\,, \quad x - 5 > 0$$

a podívat se, jestli spadají do zadaného intervalu.

První rovnice odpovídá $x \in (-\infty, -1)$, což je v souladu s intervalem. Druhá rovnice odpovídá $x \in (-\infty, -1)$, který už není v souladu s intervalem. Třetí rovnice odpovídá $x \in (5, \infty)$, což je v souladu s intervalem.

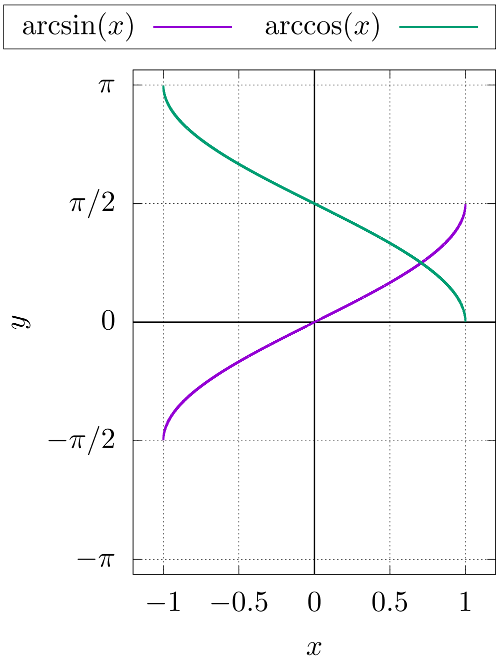
Celkově dostáváme

$$\boxed{D(g) = (-\infty, -1) \cup (5, \infty)} \,.$$

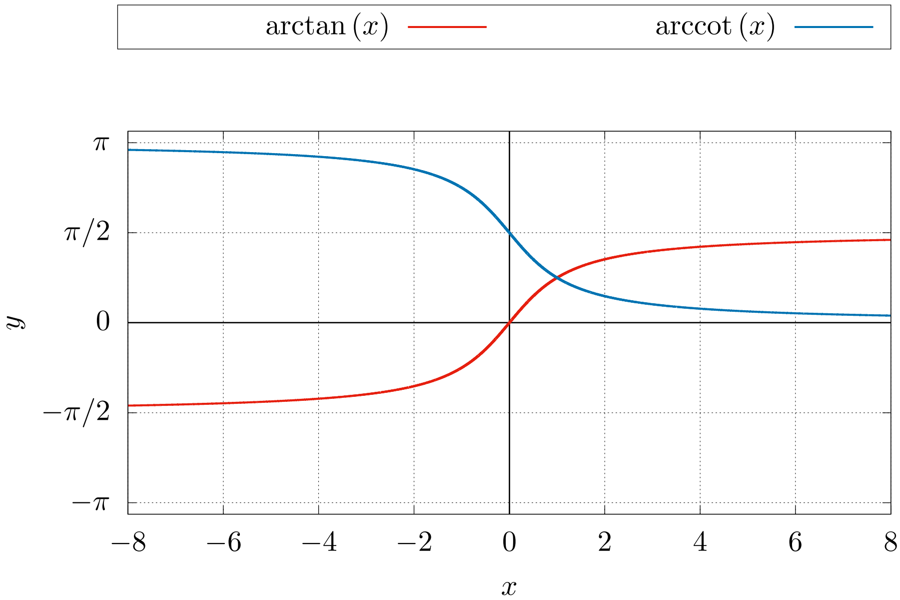
2.6 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní ke goniometrickým funkcím. V tabulce 1 již máme zakreslené jejich definiční obory a obory hodnot.

Obrázek 5: Graf funkcí arcsin a arccos.



Obrázek 6: Graf funkcí arctan a arccotg .



2.7 Návod pro zobrazování grafů funkcí

Existuje bezpočet placených i neplacených softwarů pro zobrazování funkcí. Jeden bezplatný lze nalézt na stránce `https://www.desmos.com/calculator`. Program umí počítat funkční hodnoty v jednotlivých bodech, sám vyznačí maxima a minima funkcí.

Pro symbol mocnění lze použít $\boxed{\text{Ctrl+Alt+3}}$ ve Windows na české klávesnici, $\boxed{\text{AltGr+M}}$ v Linuxu na české klávesnici, na anglické klávesnici $\boxed{\text{Shift+6}}$. Pro zapsání zlomku stačí napsat $\boxed{\text{frac}}$, pro zapsání odmocniny $\boxed{\text{sqrt}}$. Symbol klávesnice dole na obrazovce umožní psát i složitější výrazy. Program rozlišuje přirozený $\boxed{\text{ln}}$ a dekadický $\boxed{\text{log}}$ logaritmus.

Software si snadno poradí s funkcemi jedné proměnné, s implicitními funkcemi (typu $x^2 + y^2 = 1$) a nerovnicemi.

Jeden ze silných nástrojů je posuvník. Pakliže do rovnice zadáme funkci s parametrem, můžeme vytvořit posuvník a sledovat, jak se se zvětšujícím nebo zmenšujícím parametrem mění její tvar.

Cvičení 1 (Lineární a kvadratická funkce)**.** Až se dostaneme k pojmu derivace, budeme moci funkce aproximovat lineárními a kvadratickými funkcemi. Je velmi užitečné umět si takové funkce představit a vědět, kdy jsou rostoucí a klesající.

1. Zobrazte si lineární funkci $y(x) = px + q$ s posuvníky p a q.
2. Určete, pro která p je funkce rostoucí, klesající a konstantní.
3. Zjistěte, jakou roli hraje parametr q.
4. Zobrazte si kvadratickou funkci $y(x) = ax^2 + bx + c$ s posuvníky a, b, c.
5. Zjistěte, jakou roli hraje parametr a.
6. Zjistěte, jakou roli hraje parametr c.
7. Po kliknutí na graf funkce zobrazte minimum (maximum) a průsečíky s osami.
8. Zkuste zjistit, jakou roli hraje parametr b. Co se děje s extrémem funkce?

Cvičení 2 (Gaussova křivka)**.** V teorii pravděpodobnosti a statistiky je velmi důležitá tzv. Gaussova funkce (říká se jí též zvonová křivka, vlnový balík)

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi k^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2k^2}\right) . \tag{1}$$

Zobrazte si tuto funkci, měňte parametry C, k a m. Zjišťujte, co se s funkcí děje. (V jakém bodě má minimum/maximum?)

Cvičení 3 (Příliš mnoho oscilací)**.** Zobrazte funkci

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) . \tag{2}$$

Kolem počátku se nahrnuje příliš mnoho nulových bodů funkce. Zkuste je najít sami, tj. vyřešte rovnici $\sin(1/x) = 0$.

Funkce samozřejmě není definovaná v nule. V nějakém smyslu nabývá blízko nuly všech hodnot mezi -1 a $+1$. Vrátíme se k tomu, až budeme vyšetřovat limity funkcí. Tam si ukážeme, že $\sin(1/x)$ limitu v počátku nemá.

3 APLIKACE PRVNÍ A DRUHÉ DERIVACE

3.1 Lineární a kvadratická aproximace

Hlavní význam derivací spočívá v tom, že pokud pro dané funkce existují (o takových funkcích říkáme, že jsou „dostatečně hladké“), můžeme pomocí nich funkce lokálně aproximovat. Představme si funkci $f(x)$, která má první i druhou derivaci. Uvažujme nějaký **pevný bod** x_0. Na jeho **malém okolí** můžeme funkci aproximovat přímkou

$$\boxed{T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)} \tag{3}$$

anebo parabolou

$$\boxed{T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2} . \tag{4}$$

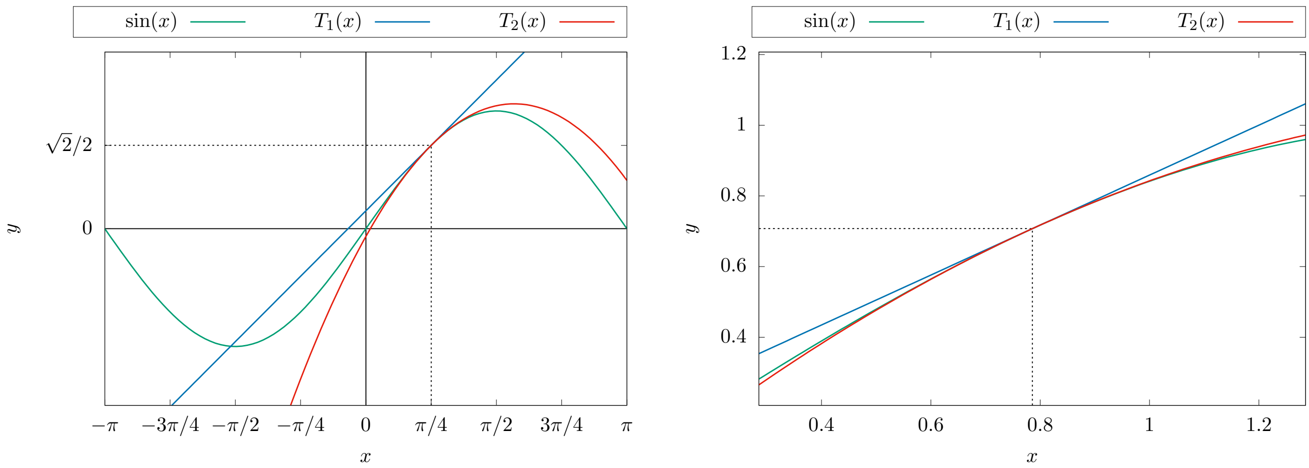
Příklad 8. Aproximujme funkci $f(x) = \sin(x)$ okolo bodu $x_0 = \pi/4$. Platí $f'(x) = \cos(x)$ a $f''(x) = -\sin(x)$, takže $f(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $f'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ a $f''(\pi/4) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. Na nějakém malém okolí tedy můžeme aproximovat přímkou

$$T_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tag{5}$$

a také parabolou

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 . \tag{6}$$

Jak je aproximace přesná, ukazuje obrázek 7.



Obrázek 7: Aproximace funkce $\sin x$ přímkou $T_1(x)$ a parabolou $T_2(x)$ kolem bodu $\frac{\pi}{4}$. `fig:aproximace`

Příklad 9. Pomocí aproximace spočítejme $\sqrt{14}$. Víme, že $\sqrt{16} = 4$. Zkusme proto odmocninu aproximovat kolem bodu 4. Platí

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sqrt{x})'' = -\frac{3}{2\sqrt{x^3}} . \tag{7}$$

Můžeme tedy aproximovat parabolou

$$\sqrt{x} \overset{\text{na okolí kolem 16}}{\approx} \sqrt{16} + \frac{x-16}{2\sqrt{16}} - \frac{3\cdot(x-16)^2}{4\sqrt{16^3}} = 4 + \frac{x-16}{8} - \frac{3\cdot(x-16)^2}{256} . \tag{8}$$

Nyní snadno spočteme

$$\sqrt{14} = 4 - \frac{2}{8} - \frac{8}{256} = 3{,}72 . \tag{9}$$

V porovnání se skutečnou hodnotou $\sqrt{14} = 3{,}7416$ vidíme, že jsme se o spletli o pouhých 6 promile.

Můžeme samozřejmě pokračovat a rozvíjet funkce do tzv. **Taylorovova polynomu** $T_n(x)$ pomocí vyšších a vyšších derivací. Nicméně to ve většině praktických případů není příliš potřeba, bohatě si vystačíme s parabolickou aproximací $T_2(x)$.

3.2 Rostoucí, nebo klesající?

Podle lineární aproximace $T_1(x)$ snadno poznáme, jestli je funkce na daném okolí rostoucí nebo klesající. V aproximaci totiž $f'(x_0)$ **zastupuje lineární koeficient přímky**. Je-li tedy $f'(x_0) > 0$, pak se jedná o rostoucí lineární aproximaci a tedy i o rostoucí funkci. Obdobně, je-li $f'(x_0) < 0$, pak je aproximace klesající přímka a funkce je jistě klesající.

3.3 Minimum a maximum

Z rozvojů $T_1(x)$ a $T_2(x)$ také snadno můžeme rozpoznat minimum a maximum funkce. Jestliže je nějaký bod x_0 extrémem funkce $f(x)$, pak musí být $f'(x_0) = 0$, protože jinak bychom měli lineární aproximaci $T_1(x)$ s nenulovou směrnicí, tj. rostoucí nebo klesající přímku. To znamená, že nějaký bod na okolí by měl jistě nižší anebo vyšší funkční hodnotu, takže by bod x_0 jistě nebyl extremální. **Chceme-li tedy hledat minimum a maximum hladkých funkcí, jedinými kandidáty jsou tzv. stacionární body, tj. body x_0, ve kterých je $f(x_0)$.**

Teď se podívejme na kvadratický rozvoj $T_2(x)$. Jestliže $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, pak se jedná o parabolu

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \tag{10}$$

s kladným kvadratickým koeficientem, takže bude „typu $\cup$". Tím pádem je v x_0 minimum, protože parabola od něj „roste napravo i nalevo".

Podobně, představme si, že $f''(x_0) < 0$. Pak se jedná o parabolu „typu $\cap$" a x_0 tedy musí být maximum, protože parabola „napravo i nalevo klesá".

3.4 Konkavita, konvexita, inflexní bod

Matematická definice těchto pojmů je složitější, nicméně se dají názorně představit. Uvažujme funkci f a nějaké dva libovolné body x_1 a x_2. Představme si, že spojíme body na grafu $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ úsečkou. **Jestliže celá tato úsečka leží nad grafem funkce, nazývá se funkce konvexní. Jestliže leží úsečka celá pod grafem funkce, nazývá se funkce konkávní.**

Představíme-li si paraboly x^2 a $-x^2$, pak je jasné, že x^2 je konvexní a $-x^2$ je konkávní. U parabol tedy o konkávitě nebo konvexitě rozhoduje znaménko kvadratického koeficientu.

Ale my již víme, že i složitější funkce umíme kvadraticky aproximovat do paraboly $T_2(x)$ s kvadratickým koeficientem $f''(x_0)$. Jestliže je tedy $f''(x_0) > 0$, pak je jistě funkce konkávní, jestliže je $f''(x_0) < 0$, pak je funkce konvexní.

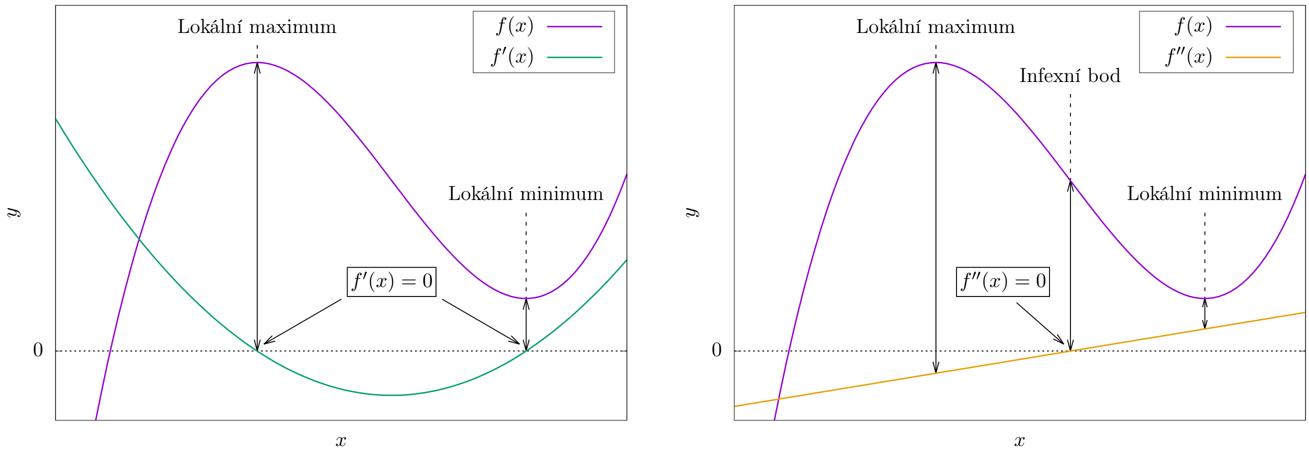
Inflexní bod je takový, kde $f''(x_0) = 0$. Tam žádný kvadratický koeficient není a funkce se lokálně chová jako obyčejná přímka.

3.5 Sedlový bod

Může samozřejmě nastat případ, kdy najdeme stacionární bod x_0 splňující nejen $f'(x_0)$, ale i $f''(x_0) = 0$. V takovém případě nemůžeme pomocí tohoto přístupu rozhodnout, zda se jedná o minimum, maximum, nebo sedlový bod. Sedlový bod je takový, kde se lokálně funkce chová jako konstanta, ale nejedná se ani o minimum nebo maximum.

Příklad 10. Funkce $g(x) = x^3$ má zjevně stacionární bod $x_0 = 0$. V tomto bodě první i druhá derivace g jsou rovny nule. Jedná se o sedlový bod, ale to „na papíře" nepoznáme, pokud nepoužijeme nějaké další techniky. (Samozřejmě to ihned poznáme z grafu.)

3.6 Shrnutí



Obrázek 8: Ilustrace průběhu funkce, její první a druhé derivace.

vlastnost funkce	první derivace	druhá derivace
rostoucí	$+$	jakákoli
klesající	$-$	jakákoli
konvexní	jakákoli	$+$
konkávní	jakákoli	$-$

Tabulka 2: Charakterizace funkce podle první a druhé derivace.

speciální bod	první derivace	druhá derivace
lokální minimum	0	$+$
lokální maximum	0	$-$
sedlový bod	0	0
inflexní bod	jakákoli	0

Tabulka 3: Charakterizace speciálních bodů funkcí. (U sedlového bodu nejsou podmínky postačující.)

4 PŘÍKLADY

Příklad 11.

5 APLIKOVANÉ PŘÍKLADY

Příklad 12 (Maximální profit). Dejme tomu, že náklady TC na výrobu produktu o množství Q jsou dány funkcí

$$TC(Q) = 2Q^3 - 3Q^2 + 400Q + 5000 \tag{11}$$

a cena produktu P je dána funkcí

$$P(Q) = 4000 - 33Q\,. \tag{12}$$

Profitová funkce Π (čti „velké pí“) je dána rozdílem celkového příjmu a celkového nákladu

$$\Pi = TR - TC\,, \quad \text{kde} \quad TR = P \cdot Q\,. \tag{13}$$

Určeme maximální profit.

Platí

$$\Pi(Q) = 4\,000Q - 33Q^2 - 2Q^3 + 3Q^2 - 400Q - 5\,000 = -2Q^3 - 30Q^2 + 3\,600Q - 5\,000\,. \tag{14}$$

Naším úkolem je nalézt maxima a minima takové funkce. K tomu spočteme derivaci

$$\Pi'(Q) = -6Q^2 - 60Q + 3\,600 \tag{15}$$

a určíme její nulové body Q_0. Musíme tedy vyřešit rovnici

$$Q_0^2 + 10Q_0 - 600 = 0\,, \tag{16}$$

což není žádný problém:

$$Q_0 = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 2\,400}}{2} = -5 \pm 25 = -30\,,\ +20\,. \tag{17}$$

Zjevně nás zajímá bod $Q_0 = 20$. Pomocí druhé derivace ověříme, o jaký stacionární bod se jedná.

$$\Pi''(Q) = -12Q - 60\,, \quad \Pi''(Q_0) = -12 \cdot 20 - 60 < 0\,, \tag{18}$$

takže se jedná o lokální maximum.

Maximální profit tedy nastává při množství $Q_0 = 20$ a je roven

$$\Pi_{\max} = \Pi(Q_0) = -2 \cdot 20^3 - 30 \cdot 20^2 + 3600 \cdot 20 - 5\,000 = 39\,600\,. \tag{19}$$

6 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Rovnice tvaru

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0\,, \tag{20}$$

kde $y(x)$ je neznámá funkce, se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice** n-tého řádu.

Rovnice tvaru

$$F(\boldsymbol{x}, y(\boldsymbol{x}), \mathrm{D}^\lambda y(\boldsymbol{x}))\,, \tag{21}$$

kde $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y(\boldsymbol{x})$ je neznámá funkce n proměnných a D^λ označuje její parciální derivace, se nazývá **parciální diferenciální rovnice**.

Je snad na tomto místě vhodné zdůraznit, že diferenciální rovnice se svou povahou naprosto liší od rovnic lineárních, kvadratických, exponenciálních a podobně. Hledat neznámé funkce je totiž řádově těžší, než hledat obyčejná čísla. Proč? Pro většinu algebraických rovnic máme numerické metody, které jsou dnes velmi přesné a rychlé. Navíc máme většinou záruku, že existují. Řešení obyčejných diferenciálních rovnic (a hlavně jejich soustav) je zpravidla nemožné nalézt analyticky a časová náročnost řešení numericky je daleko větší. Nejhůře na tom jsou parciální diferenciální rovnice, o nich často nevíme, zda vůbec nějaké řešení mají, a pokud ho mají, je velmi obtížné ho hledat numericky. Kdybychom to uměli rychle, mohli bychom lépe porozumět mnoha jevům v mnoha vědeckých oblastech: například bychom porozuměli turbulencím, stavěli kvantové počítače, mohli bychom přesně předpovídat počasí i situaci na trhu na měsíce dopředu, projektovali bychom stavby, které by přežily tisíciletí, …

Typ rovnice	**Neznámý objekt**	**Náročnost** (na stupnici $1-10$)
lineární	jediné číslo x	1
kvadratická	dvě čísla $x_{1,2}$	2
algebraická (jakkoli ošklivá)	jedno nebo několik čísel x_k	$3-5$
obyčejná diferenciální (bez podmínek)	soubor funkcí $\{y_\lambda(x)\}$	8+
obyčejná diferenciální (s počáteční podmínkou)	jediná funkce $y(x)$	8
obyčejná diferenciální (s okrajovou podmínkou)	jediná funkce $y(x)$	10+
parciální diferenciální (s podmínkou či bez)	funkce více proměnných $y(x_1, \cdots, x_N)$	20+

Diferenciální rovnice typicky řešíme na nějaké vybrané množině a můžeme je doplnit o takzvané počáteční nebo okrajové podmínky. Řešením rovnic bez podmínek jsou soubory (množiny, třídy, …) funkcí.

6.1 Lineární diferenciální rovnice

Nejjednodušší diferenciální rovnice jsou lineární diferenciální rovnice

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_1(x)y(x) = f(x)\,, \tag{22}$$

kde $y(x)$ je neznámá funkce, $a_k(x)$ a $f(x)$ jsou známé funkce.

Lineární se jim říká proto, že se tak trochu chovají jako vektory. Součet dvou různých řešení je zase řešení. Stejně tak libovolný násobek řešení je zase řešení.

Ještě jednodušší jsou rovnice, kde funkce $a_k(x)$ jsou pouhé konstanty. Těm se říká rovnice s konstantními koeficienty:

$$c_n y^{(n)}(x) + c_{n-1}y^{(n-1)}(x) + c_{n-2}y^{(n-2)}(x) + \cdots + c_1 y(x) + a_0 = f(x)\,. \tag{23}$$

My se naučíme řešit lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)\,. \tag{24}$$

6.2 Homogenní (zkrácená) rovnice

Začneme s řešením rovnic, které na pravé straně obsahují nulu, tj.

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0\,. \tag{25}$$

Tuto rovnici vždy totiž řeší exponenciální funkce $y(x) = e^{\lambda x}$ pro nějaké konkrétní λ, které nyní určíme. Zkusme tuto funkci do rovnice dosadit. Dostaneme

$$a(e^{\lambda x})'' + b(e^{\lambda x})' + c = a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = e^{\lambda x}[a\lambda^2 + b\lambda + c] = 0\,. \tag{26}$$

Součin bude roven nule právě tehdy, když hranatá závorka bude nule. Tím jsme dostali obyčejnou algebraickou rovnici

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,. \tag{27}$$

Tato rovnice má obecně dvě řešení v oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$. Je potřeba rozlišit tři případy:

1. Oba kořeny λ_1, λ_2 jsou různé a reálné. Pak je řešení homogenní rovnice

   $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\,, \tag{28}$$

   kde C_1 a C_2 jsou **libovolné volitelné koeficienty** (vzpomeňme si, že součet dvou řešení a číselný násobek řešení je zase řešení).

2. Získáme-li dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$, pak je řešení homogenní rovnice

   $$y(x) = (Ax + B)e^{\lambda x}\,, \tag{29}$$

   kde A a B jsou opět volitelné koeficienty.

3. Získáme-li komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = p \pm iq$, pak je řešení homogenní rovnice

   $$y(x) = e^{px}\left(C_1 \sin(qx) + C_2 \cos(qx)\right)\,, \tag{30}$$

   kde C_1 a C_2 jsou volitelné koeficienty.

6.3 Aplikované příklady

Příklad 13 (Množení populace)**.** Uvažujme populaci (např. bakterií), jejíž jedinci neumírají a stále se množí. Populace v čase bude narůstat tím víc, čím více obsahuje jedinců. To matematicky můžeme vyjádřit vztahem

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP(t)\,, \quad k > 0\,. \tag{31}$$

Zkusme tedy vyřešit diferenciální rovnici $P'(t) = kP(t)$ a podívat se, za jak dlouho populace vzroste na desetinásobek.

Charakteristická rovnice je $\lambda - k = 0$, odtud $\lambda = k$. Řešení této rovnice je tedy $P(t) = Ce^{kt}$, kde C je nějaká konstanta.

Předpokládejme nyní, že v čase $t = 0$ obsahuje populace P_0 jedinců. Abychom tuto podmínku splnili, stačí dosadit do řešení nulu:

$$P(0) = Ce^{k\cdot 0} = P_0\,, \quad \text{takže} \quad C = P_0 \tag{32}$$

a máme řešení

$$P(t) = P_0 e^{kt}\,. \tag{33}$$

Populace se bude množit exponenciálně! Za jaký čas t_{10} vzroste populace na $10P_0$? Stačí vyřešit rovnici

$$10P_0 = P(t_{10}) = P_0 e^{kt_{10}}\,. \tag{34}$$

Její řešení je $t_{10} = \frac{1}{k}\log(10) \approx \frac{2{,}30}{k}$. Čím větší bude k, tím rychleji se populace bude množit.

Závěrečné poznámky

- Řešení diferenciálních rovnic nemusí být jednoznačné ani při zadání konkrétní počáteční podmínky. Například rovnici

  $$y'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y(x)}\,, \quad \text{s počáteční podmínkou } y(0) = 0 \tag{35}$$

  řeší jak funkce $y(x) = (2x)^{3/2}$, tak $y(x) = 0$. Tomuto jevu se říká **bifurkace** a je velmi důležité ho zkoumat, např. při konstrukci laseru nebo nanočipů.

- Někdy malá změna počátečních podmínek vede ke kvalitativní změně řešení (řešení se začne chovat úplně jinak). Například rovnice

  $$y'(x) = 1 - y^2(x) \tag{36}$$

  řeší pro podmínku $y(0) = -1$ konstantní funkce $y(x) = -1$. Změníme-li ale počáteční podmínku o chloupeček, řekněme na $y(0) = -0.999$, pak dostaneme řešení, která buďto rostou do $+1$ anebo utíkají z minus nekonečna.

  Tento jev se nazývá **efekt motýlích křídel** (butterfly effect) a je zodpovědný za to, že nemůžeme přesně předpovědět počasí na více než dva dny dopředu („zamávání křídla motýla v Texasu vyvolá tornádo v Číně“). Máme sice správné rovnice (a umíme je řešit), ale kvůli nepřesné znalosti počátečních podmínek (tlaku vzduchu, teploty, složení ovzduší, atd...) si nemůžeme být jisti, která varianta nastane. Podobný problém samozřejmě nastává i u předpovědí finančního trhu, chování společnosti a dokonce i u solárního systému (stále nevíme s jistotou, zda je naše Sluneční soustava stabilní - přitáhne nás jednoho krásného dne Jupiter?). Obecněji se těmito problémy zabývá **teorie chaosu** a teorie **fraktálů**. Více lze nalézt např. ve výborné, populárně naučné knížce HRAJE BŮH KOSTKY? od Iana Stewarta.

- Řešení jedné parciální diferenciální rovnice bylo zařazeno mezi Sedm problémů tisíciletí. Tento problém (jeho formulace) je ze všech nejjednodušší na pochopení. Odměna za jeho řešení je jeden milion dolarů! Stále není pozdě připojit se k matematikům a pokračovat v jejich marném celoživotním boji. Motivací ale nejsou peníze, jak dokládá Grigorij Perelman, který jeden z těchto problémů vyřešil.

- Další důležitá třída rovnic jsou tzv. **diferenční rovnice**, jejichž cílem je nalézt z předpisu

$$F(n, a_n, a_{n-1}, \cdots, a_{n-k}) = 0 \tag{37}$$

neznámou posloupnost $\{a_n\}$. Typickým příkladem je rovnice

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \quad a_0 = a_1 = 1\,, \tag{38}$$

jejímž řešením jsou Fibonacciho čísla $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$. Náročnost diferenčních rovnic je pro člověka zhruba stejná jako náročnost diferenciálních, nicméně počítače je řeší mnohem snáze. Hodí se například k počítání úroků.

-

7 PRŮBĚH FUNKCE

7.1 Kuchařka pro vyšetřování průběhu funkce

1. Určíme definiční obor $D(f)$.
2. Zkusíme zjistit, zda je funkce symetrická:
   - Pro sudou funkci platí $f(x) = f(-x)$.
   - Pro lichou funkci platí $-f(x) = -f(-x)$.
3. Spočítáme průsečíky funkce s osami P_x a P_y:
   - Bod P_x nalezneme řešením rovnice $f(x) = 0$.
   - Bod P_y nalezneme prostým dosazením bodu 0 do funkce, tj. spočteme $f(0)$.
4. Určíme limity v bodech nespojitosti funkce a limity v bodech $\pm\infty$ (pokud existují).
5. Vyšetříme lokální minima a maxima:
   - Spočteme $f'(x)$, $f''(x)$ a najdeme stacionární body x_0, které odpovídají rovnici $f'(x_0) = 0$.
   - Jestliže $f''(x_0) < 0$, pak má f v x_0 lokální maximum.
   - Jestliže $f''(x_0) > 0$, pak má f v x_0 lokální minimum.
   - Nalezneme funkční hodnoty $f(x_0)$, případně je mezi sebou porovnáme.
6. Nalezneme inflexní body řešením rovnice $f''(x_{\text{flex}}) = 0$.
7. Určíme intervaly, na kterých $f'(x)$ a $f''(x)$ nemění znaménko.
   - Na intervalu, kde platí $f'(x) > 0$, je f rostoucí.
   - Na intervalu, kde platí $f'(x) < 0$, je f klesající.
   - Na intervalu, kde platí $f''(x) > 0$, je f konvexní.
   - Na intervalu, kde platí $f''(x) < 0$, je f konkávní.
8. Někdy můžeme vyšetřovat asymptotické chování funkce.
   - Lineární asymptoty jsou přímky $u(x) = px + q$, kde

   $$p = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - px\,.$$

   Samozřejmě nemusí existovat.

- Můžeme také limitní chování porovnávat s mocninnými funkcemi typu x^α, tj. nalézt takové α, aby

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} \quad \text{byla vlastní a nenulová}\,.$$

V takovém případě pak píšeme $f(x) = O(x^\alpha)$ pro $x \to \pm\infty$.

9. Nakreslíme graf funkce $f(x)$.

Příklad 14. Vyšetříme průběh funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

1. Definiční obor funkce: jmenovatel nesmí být nulový, tedy řešíme rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$. Jejím řešením jsou body 3 a 2, tedy

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3, 2\}\ .$$

2. Funkce zjevně není ani symetrická, ani antisymetrická.
3. Průsečík s osou x: řešíme rovnici $x^2 - 1 = 0$. Řešením jsou body ± 1. Průsečík s osou y: stačí spočítat $f(0) = -\frac{1}{6}$. Průsečíky jsou tedy

$$P_x^{(1)} = [-1; 0]\,, \quad P_x^{(2)} = [1; 0]\,, \quad P_y = [0; -1/6]\,.$$

4. Určíme limity funkce v $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = 1\,, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = 1\,.$$

Také nesmíme zapomenout na limity v bodech nespojitosti:

$$\lim_{x\to 2_-} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 2_+} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 3_-} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 3_+} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = +\infty\,.$$

7.2 Definice determinantu

7.3 Cramerovo pravidlo

Determinant můžeme použít k řešení soustav lineárních rovnic. Mějme soustavu $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Je-li matice $\mathbf{A}$ regulární (její determinant je nenulový), pak má soustava právě jedno řešení ve tvaru

$$\boxed{x_k = \frac{\det \mathbf{A}_k}{\det \mathbf{A}}}\,, \tag{39}$$

kde $\mathbf{A}_k$ je matice, která vznikne tak, že nahradíme k-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ sloupcem pravé strany $\boldsymbol{b}$.

Příklad 15. Pomocí Cramerova pravidla najdeme řešení soustavy

$$2x - y = 1 \tag{40}$$
$$x + 4y = 14\,. \tag{41}$$

Soustavu převedeme na maticový problém

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}\,. \tag{42}$$

Determinant matice je roven $2 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) = 9 \neq 0$, můžeme proto Cramerovo pravidlo použít. Pro výpočet x dosadíme sloupec pravé strany do prvního sloupce a dostaneme

$$x = \frac{1}{9} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot (1 \cdot 4 - 14 \cdot (-1)) = \frac{1}{9} \cdot 18 = 2\,. \tag{43}$$

Pro výpočet y dosadíme sloupec pravé strany do druhého sloupce matice:

$$y = \frac{1}{9} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot (2 \cdot 14 - 1 \cdot 1) = \frac{1}{9} \cdot 27 = 3\,. \tag{44}$$

Cramerovo pravidlo používáme hlavně v situacích:

1. když nás nezajímají všechny neznámé proměnné, ale jenom některé - nemusíme eliminovat celou soustavu, ale stačí relativně málo výpočtů
2. při výpočtu soustav s parametrem - je poměrně pracné takovou soustavu eliminovat

Příklad 16. V závislosti na hodnotě parametru p určete řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & 1-p & 0 \\ 0 & 2 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1-p \end{pmatrix} \tag{45}$$

7.4 Vlastní čísla, diagonalizace

Příklad 17 (Umocňování matic I)**.** Často se setkáváme s problémem mocnění matic, tj. počítání $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ atd. Při počítání mocnin obyčejným násobením matic bychom brzo zjistili, že to je velmi pomalý způsob. Můžeme ale využít diagonalizaci. Diagonální matice $\mathbf{D}$ se totiž umocňují velmi snadno (stačí umocnit jednotlivé členy na diagonále). Dále, jestliže existuje rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$, kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice, pak

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{D}^2\mathbf{V}^{-1} \tag{46}$$

a obdobně

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{V}\mathbf{D}^k\mathbf{V}^{-1}\,. \tag{47}$$

Příklad 18 (Umocňování matic II)**.** Vypočítejme třetí mocninu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\,. \tag{48}$$

Řešení: Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory. Charakteristický polynom je $(2-\lambda)^2 - 36 = \lambda^2 - 4\lambda - 32$, vlastní čísla jsou tedy $\lambda = -2 \pm 7$

8 URČITÝ INTEGRÁL

Představme si funkci $f(x)$, která má primitivní funkci $F(x)$ (neboli $F'(x) = f(x)$). Reálné číslo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)} \tag{49}$$

se nazývá **určitý integrál** z funkce $f(x)$ v mezích od a do b.

Určitý integrál udává obsah plochy pod křivkou funkce $f(x)$**.** Pokud pracujeme s funkcemi, které nabývají záporných hodnot, musíme dát pozor. „Plocha pod křivkou“ bude v takovém případě záporná. Pokud nás tedy zajímá plocha ohraničená nulou a danou funkcí, musíme nejdříve nalézt intervaly, na kterých je funkce kladná (tam se určitý integrál přičítá), a intervaly, na kterých je záporná (tam se odčítá).

Příklady

Příklad 19 (Obsah pravoúhlého trojúhelníka)**.** Pomocí určitého integrálu spočítáme obsah pravoúhlého trojúhelníka. Představme si takový objekt jako plochu mezi osami x a y a vhodnou lineární funkcí. Jestliže mají odvěsny délky a a b, můžeme třeba zvolit funkci $y(x) = b(1 - x/a)$ (ověřte její průsečíky). Obsah pak bude roven

$$S = \int_0^a b\left(1 - \frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x = \left[bx - \frac{bx^2}{2a}\right]_0^a = ba - \frac{ba^2}{2a} - b\cdot 0 - \frac{b\cdot 0^2}{2a} = ab - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}\,. \tag{50}$$

Samozřejmě, obsah trojúhelníka je „základna krát výška děleno dvěma“, v případě pravoúhlého trojúhelníka polovina součinu délek odvěsen.

Příklad 20 (Obsah obecnějšího trojúhelníka)**.** Uvažujme trojúhelník, který vznikne jako plocha ohraničená lineárními funkcemi $y = x$, $y = 1 - x$ a $y = x/2$. Spočítáme jeho obsah. TODO: obrázek

Nejdříve najdeme vrcholy trojúhelníku. Zřejmě to jsou body $[0,0]$, $[1/2,1/2]$ a $[2/3,1/3]$. Nyní počítáme plochu integrálem

$$S = \int_0^{1/2}[x - x/2]\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2/3}[1 - x - x/2]\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} x/2\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2/3}[1 - 3x/2]\,\mathrm{d}x = \tag{51}$$

$$= [x^2/4]_0^{1/2} + [x - 3x^2/2]_{1/2}^{2/3} = [\frac{1}{4\cdot 2^2} - 0] + [\frac{2}{3} - 3\cdot\frac{2^2}{3^2\cdot 2} - \frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2\cdot 2^2}] = \frac{1}{48}\,. \tag{52}$$

Příklad 21 (Obsah kruhu)**.** Pomocí určitého integrálu spočítáme obsah kruhu. Kružnice je definovaná jako množina bodů, které mají od středu stejnou vzdálenost. Jestliže umístíme střed do počátku souřadnic, je vzdálenost bodu (x,y) dána Pythagorovou větou $x^2 + y^2$, tato vzdálenost je stále konstantní a je rovna R^2. Proto rovnice kružnice bude $x^2 + y^2 = R^2$. Položme pro jednoduchost $R = 1$. Z tohoto vztahu můžeme zkusit vyjádřit křivku jako funkci $y(x)$. Zřejmě máme dvě možnosti: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Zamyslíme-li se nad obrázkem, bude nám stačit uvažovat čtvrtkruh - spočítáme obsah pod křivkou $y = \sqrt{1 - x^2}$ v intervalu $[0,1]$ a výsledek vynásobíme čtyřmi.

Je tedy třeba spočítat

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{53}$$

Můžeme postupovat například metodou per-partes s využitím jedničky: $u = \sqrt{1 - x^2}$, $u' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $v' = 1$, $v = x$. Tedy

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left[x\sqrt{1 - x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\cdot x\,\mathrm{d}x = 0 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{54}$$

Nyní využijeme šikovného rozpisu $x^2 = x^2 - 1 + 1 = -(1 - x^2) + 1$. Dostaneme

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \tag{55}$$

$$= -\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} + [\arcsin x]_0^1 = -I + [\arcsin 1 - \arcsin 0] = -I + \frac{\pi}{2}\,. \tag{56}$$

Dostali jsme rovnici $I = -I + \frac{\pi}{2}$. Odtud

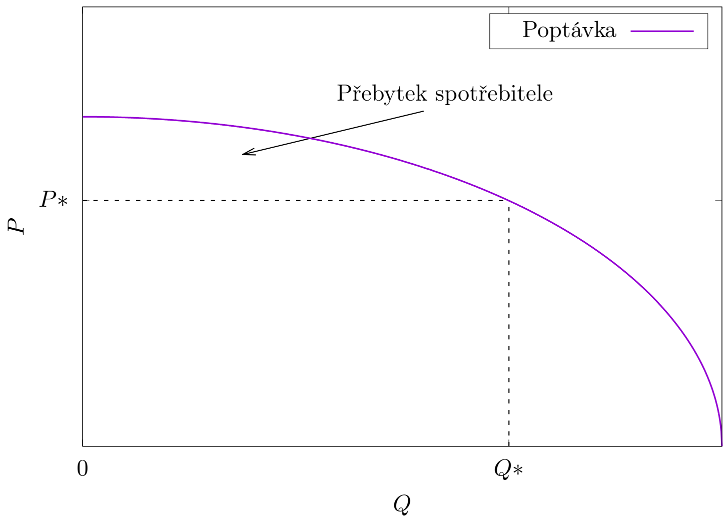
$$I = \frac{\pi}{4}\,. \tag{57}$$

To je obsah jedné čtvrtiny kruhu. Celý kruh má proto obsah $S = \pi$.

Aplikace

Příklad 22 (Přebytek spotřebitele)**.** Uvažujme křivku poptávky $D(Q)$ a úrovní ceny $P^\star$, které se protínají v bodě $Q^\star$. Přebytek spotřebitele (total consumer surplus) TCS udává rozdíl mezi tím, kolik by byl ochoten kupující zaplatit, a kolik zaplatí ve skutečnosti. V grafu ho představuje plocha pod poptávkovou křivkou a nad úrovní ceny, neboli

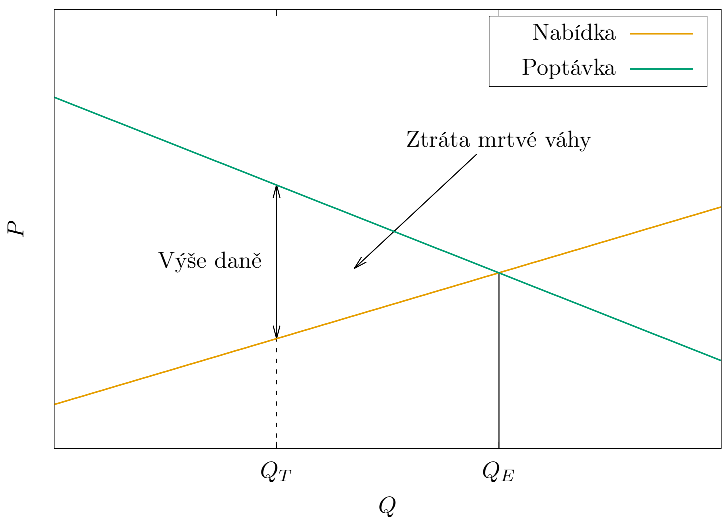
$$\mathsf{TCS} = \int_0^{Q^\star}[D(Q) - P^\star]\,\mathrm{d}Q = \int_0^{Q^\star} D(Q)\,\mathrm{d}Q - P^\star Q^\star\,. \tag{58}$$



Obrázek 9: Přebytek spotřebitele je dán plochou mezi křivkou poptávky a danou úrovní ceny $P^{\star}$.

Příklad 23 (Ztráta mrtvé váhy)**.** Uvažujme křivku nabídky $S(Q)$ a poptávky $D(Q)$, které se protínají v bodě Q_E. Pokud vláda uvalí na daný statek daň, sníží se prodávané množství na Q_T. Výsledkem tohoto snížení je, že část potenciálního prospěchu z obchodu mezi kupujícím a prodávajícím se nerealizuje. Tento ztracený prospěch z obchodu tvoří ztrátu mrtvé váhy (deadweight loss) DL. V grafu nabídky a poptávky se jedná o plochu mezi funkcemi $D(Q)$ a $S(Q)$ ohraničenou body Q_T a Q_E, neboli

$$\mathsf{DL} = \int_{Q_T}^{Q_E} [D(Q) - S(Q)] \, \mathrm{d}Q \,. \tag{59}$$



Obrázek 10: Ztráta mrtvé váhy je dána plochou mezi křivkami nabídky a poptávky mezi rovnovážnou cenou a cenou po zdanění.

NEVLASTNÍ INTEGRÁL

Někdy se setkáváme se situacemi, kde lze spočítat plochu grafu funkce i na neomezeném intervalu („od nějakého čísla do nekonečna“). Nebo se lze setkat s funkcemi, které jsou neomezené na okolí nějakého bodu, a přesto lze definovat obsah pod grafem. V takovém případě mluvíme o **nevlastních integrálech**. Strategie je jednoduchá: zvolíme si konečné číslo jako mez tak, aby v integrálu nebyl žádný problém, potom integrál vypočítáme na tomto intervalu a nakonec zkusíme provést limitní přechod.

Příklad 24. Spočítejme integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x\,. \tag{60}$$

Zvolíme si (velké) číslo a, spočítáme integrál v mezích $[1, a]$ a nakonec pošleme a do nekonečna.

$$\int_1^a \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4x^4}\right]_1^a = \left[-\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4a^4} \tag{61}$$

a po limitním přechodu

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4a^4}\right] = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}\,. \tag{62}$$

Příklad 25. Spočítejme integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{63}$$

Problém máme v nule, protože nulou nemůžeme dělit a funkce v tomto bodě není definovaná. Opět si zvolíme (malé) číslo b, spočítáme integrál v mezích $[b, 1]$ a pak pošleme b k nule.

$$\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_b^1 = 2 - 2\sqrt{b}\,, \tag{64}$$

takže

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 0+} 2 - 2\sqrt{b} = 2\,. \tag{65}$$

Příklad 26. Pokusme se spočítat

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{66}$$

Opět zvolíme (velké) číslo a,

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\log x]_1^a = \log a - \log 1 = \log a\,. \tag{67}$$

Pokud provedeme limitní přechod, dostaneme

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty\,. \tag{68}$$

V tomto případě říkáme, že **integrál diverguje**.

Příklad 27. Pokusme se spočítat

$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x\,. \tag{69}$$

Obvyklým postupem spočteme

$$\int_0^a \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^a = \sin a\,. \tag{70}$$

Vidíme, že limitní přechod $a \to \infty$ nemůžeme provést. Je to dáno tím, že funkce $\sin x$ **osciluje**. Nemůžeme určit plochu pod grafem až do nekonečna, protože se zvětšujícím se a se plocha nejprve zvětšuje, pak zase zmenšuje, pak zase zvětšuje, …

Poznámky

- V tomto kurzu mluvíme o neurčitém integrálu (primitivní funkci) a určitém integrálu (čísle, které vyjadřuje plochu pod grafem). Ve skutečnosti se dá pojem obsahu (objemu) zavést různými způsoby. Matematikové rozlišují tři hlavní typy integrálů: Newtonův, Riemannův a Lebesgueův. Každý z nich se vyznačuje drobnými zvláštnostmi (např. Newtonův si neumí poradit s velkým počtem nespojitostí, Riemannův si neporadí s neomezenými intervaly a Lebesgueův si neporadí s oscilujícími funkcemi). Jedná se však spíše o teoretickou záležitost. V praxi se integrály počítají všechny stejným způsobem.
- Počítačové algoritmy umějí integrovat numericky (tzv. kvadratura). Nejjednodušší metoda je rozdělit si interval na dostatečně malé obdélníčky a sčítat jejich obsahy.
- Integrál se dá zobecnit do více dimenzí. Pro funkce dvou proměnných se dá definovat **dvojný integrál** $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, který reprezentuje objem ohraničený funkcí $f(x,y)$ na nějaké množině M (obdélník, kruh, složitější obrazec). Je to naprosto zásadní technika pro výpočet všemožných obsahů, povrchů, objemů, těžiště, setrvačných vlastností a celkově je potřeba všude, kde se bere v potaz nějaká úhrnná veličina.
- Na obdélníku $O = [a,b] \times [c,d]$ se dá počítat dvojný integrál z $f(x,y)$ jednoduše - nejprve se integruje podle jedné proměnné a poté podle druhé proměnné (dokonce nezáleží na pořadí):

$$\iint_O f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y\,. \tag{71}$$

- Matematická oblast zabývající se integrálem se nazývá **teorie míry**. Jde ruku v ruce s **teorií pravděpodobnosti a statistiky**. Myšlenka je založená na tom, že pravděpodobnost má stejné vlastnosti jako objem. Jakýkoli problém z pravděpodobnosti lze tedy geometrizovat - převést na problém výpočtu nějakého „zobecněného objemu“. Koho zajímá pravděpodobnost, musí umět dobře rozumět integrálům!

9 PRIMITIVNÍ FUNKCE

Mějme funkci $F(x)$ a $f(x)$. Jestliže platí $F'(x) = f(x)$, pak říkáme, že $F(x)$ je **primitivní funkcí** (neurčitým integrálem) k funkci $f(x)$. Zapisujeme

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x}\,. \tag{72}$$

- Symbol $\int$ se čte „integrál“. Jeho původ vychází z přepisu písmene S (suma, sčítání). Později uvidíme, že integrál představuje něco jako zobecněné sčítání.
- Za integrálem následuje funkce, kterou integrujeme. Té říkáme argument integrálu.
- Na konci integrálu píšeme běžně znak d a za něj proměnnou, přes kterou integrujeme, např. $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\omega$. Je dobré ji psát, protože v praxi integrujeme i funkce s paramatry, a je třeba vědět, přes kterou proměnnou sčítáme. (Správně typograficky se d píše bez kurzívy. Spousta odborných textů na to zapomíná a píše kurzívou dx, což je nesprávně z toho důvodu, že kurzívou se označují proměnné, operátory s něměnným významem by od nich měly být odlišeny.)
- Celkově výraz přečteme jako „integrál z funkce f od x dé x“.
- Výrazu s $\mathrm{d}x$ se také říká **diferenciál**.

Protože je integrál jenom jistým „obrácením“ derivace, má podobné vlastnosti, jako například linearitu:

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{73}$$

Dále si musíme všimnout, že derivace konstantní funkce je nulová. **Primitivní funkce tedy není určena jednoznačně, ale liší se o libovolnou integrační konstantu.** Bývá zvykem psát

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{74}$$

Tím říkáme, že C je nějaké číslo, které můžeme zvolit, ale také nemusíme.

Příklad 28. Najděme primitivní funkce k funkcím $y(x) = x^p$, kde $p \in \mathbb{R}$.

Víme, že derivace funkce $y(x) = x^\alpha$ je $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pro $\alpha \neq 0$. Proto

$$\int \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = x^\alpha + C\,. \tag{75}$$

Víme, že integrál je lineární, konstantu můžeme vytáhnout ven a celou rovnici jím vydělit:

$$\int x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^\alpha}{\alpha} + C \quad \text{pro} \quad \alpha \neq 0\,. \tag{76}$$

Nyní už stačí identifikovat $p = \alpha - 1$, takže

$$\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad \text{pro} \quad p \neq -1\,. \tag{77}$$

Pro případ $p = -1$ si vzpomeneme na to, že $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, tedy

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C\,. \tag{78}$$

Příklad 29 (Varování)**.** Podobně jako neplatí $(fg)' \neq f'g'$, neplatí ani

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{79}$$

Pokud na toto zapomeneme, dostaneme zřejmé nesmysly, například

$$\frac{x^3}{3} = \int x^2\,\mathrm{d}x = \int x \cdot x\,\mathrm{d}x \neq \int x\,\mathrm{d}x \cdot \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4}\,. \tag{80}$$

Proto integrování funkcí vzniklých součinem je mnohem obtížnější. Používá se k němu speciální metoda, se kterou se seznámíme.

Příklad 30. Spočítáme

$$\int \left(x^4 - 3x + 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x} - \sin x\right)\,\mathrm{d}x\,. \tag{81}$$

Díky linearitě a výsledkům předchozího příkladu máme

$$\int \left(x^4 - 3x + 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x} - \sin x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + x + \frac{1}{x^2} + 5\ln x + \cos x + C\,. \tag{82}$$

C je opět libovolná konstanta.

Příklad 31. Vypočítáme

$$\int \frac{4x^2 + 12}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,. \tag{83}$$

Čitatel upravíme a dostaneme

$$\int \frac{4(x^2+1) + 8}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int 4\,\mathrm{d}x + \int \frac{8}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = 4x + 8\arctan x + C\,. \tag{84}$$

SUBSTITUČNÍ METODA

Vzpomeneme si na vztah pro derivaci složené funkce

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,. \tag{85}$$

Obě strany rovnice můžeme zintegrovat a dostáváme vztah

$$\boxed{f(g(x)) = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x}\,. \tag{86}$$

Tento vztah je jádrem tzv. metody substituce.

Příklad 32.

$$\int (2x-22)^{18}\,\mathrm{d}x\,. \tag{87}$$

Využijeme toho, že umíme integrovat funkci x^{18}. Označíme celou závorku jako pomocnou proměnnou u. Musíme nyní určit $\mathrm{d}x$ pomocí diferenciálu $\mathrm{d}u$. K tomu stačí napsat derivaci:

$$u = 2x - 22\,, \quad \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u\,. \tag{88}$$

Proto

$$\int (2x-22)^{18}\,\mathrm{d}x = \int u^{18} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{19}}{19} + C = \frac{u^{19}}{38} + C\,. \tag{89}$$

Nyní zpětně musíme za u dosadit výraz s x a dostaneme výsledek:

$$\boxed{\int (2x-22)^{18}\,\mathrm{d}x = \frac{(2x-22)^{19}}{38} + C}\,. \tag{90}$$

Příklad 33.

$$\int \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + 1\right)\,\mathrm{d}t\,. \tag{91}$$

Využijeme toho, že umíme integrovat $\sin x$, který má primitivní funkci $-\cos x$. Označíme si proto argument $\left(\frac{2\pi}{3}t+1\right)$ jako nějaké u. Nyní však ještě musíme vyjádřit ono $\mathrm{d}t$ pouze pomocí proměnné u. To dělá jednoduše tak, že výraz zderivujeme:

$$u = \frac{2\pi}{3}t + 1\,, \quad \mathrm{d}u = \frac{2\pi}{3}\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}t = \frac{3}{2\pi}\mathrm{d}u\,. \tag{92}$$

Proto můžeme psát

$$\int \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + 1\right)\,\mathrm{d}t = \int \sin u \cdot \frac{3}{2\pi}\,\mathrm{d}u = -\frac{3}{2\pi}\cos u + C\,. \tag{93}$$

Nyní zpětně dosadíme za u a máme výsledek:

$$\boxed{\int \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + 1\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t + 1\right) + C}\,. \tag{94}$$

Příklad 34.

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{95}$$

Víme, že umíme integrovat e^{-x}, proto zvolíme substituci $w = -x^2$ a vyjádříme $\mathrm{d}w = -2x\,\mathrm{d}x$. Tento člen můžeme „vecpat“ do integrálu:

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} \cdot (-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^{w}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2} \cdot e^{w} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\,. \tag{96}$$

Příklad 35.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{97}$$

Všimneme si, že v čitateli se vyskytuje derivace $\sin x$, takže položíme $\sin x = z$ a máme $\mathrm{d}z = \cos x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^3} = -\frac{2}{z^2} + C = -\frac{2}{\sin^2 x} + C\,. \tag{98}$$

Vidíme, že metoda substituce potřebuje „zkušené oko“ - je potřeba propočítat mnoho typových úloh, aby se s ní člověk smířil.

1. Podíváme se, zda vystupuje v integrálu součin dvou funkcí.
2. Zjistíme, zda jedna z nich není derivací nějakého výrazu v druhé funkci.
3. Jestliže ano, můžeme ji položit jako substituci.
4. Často je potřeba vynásobit celý integrál nějakým číslem, aby všechno sedělo.