SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých nazýváme rovnice tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \tag{1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\,, \tag{2}$$
$$\vdots \tag{3}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\,. \tag{4}$$

Seřadíme-li neznámé proměnné do vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V_n$ a vytvoříme vektor z pravých stran $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m) \in V_m$, můžeme soustavu napsat také v maticovém tvaru:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,. \tag{5}$$

Existence a počet řešení

Definujeme matici soustavy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\mathbf{A}_r = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)\,. \tag{7}$$

Klíčem k úspěchu je všimnout si, že elementární řádkové úpravy (eřú), které zachovávají hodnost matice, můžeme provádět i s rovnicemi: prohodit dvě rovnice zcela jistě můžeme, vynásobit rovnici nenulovým číslem také a součet dvou platných rovnic je rovněž platná rovnice. Můžeme tedy pracovat s maticemi, protože to je pohodlnější, a kdykoli je zpátky převádět na rovnice.

Pro určení počtu řešení soustavy se používají podmínky, které se ptají na hodnost obou těchto matic:

- Jestliže $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}_r)$, pak soustava nemá žádné řešení.
- Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r) = n$, pak má soustava právě jedno řešení.
- Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení. V takovém případě můžeme $n - h(\mathbf{A})$ neznámých volit jako reálné parametry a zbylých $h(\mathbf{A})$ neznámých dopočítáme.

Jediné řešení

Příklad 1. Uvažujme soustavu

$$2x - y = 5\,, \quad x + 4y = -2\,. \tag{8}$$

Napíšeme si rozšířenou matici soustavy:

$$\mathbf{A}_r = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{array}\right)\,. \tag{9}$$

Verze: 13. října 2021

Chtěli bychom určit hodnost. Tu určíme pomocí eřú převedením matice na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -2 & -8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -9 & 9 \end{array}\right). \tag{10}$$

(V prvním kroku jsme druhý řádek vynásobili -2 a ve druhém kroku k němu přičetli první řádek.) Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r) = 2$. Počet neznámých je rovněž 2, proto má soustava právě jediné řešení.

V odstupňovaném tvaru máme dvě rovnice

$$2x - y = 5\,, \quad -9y = 9\,. \tag{11}$$

Z druhé rovnice okamžitě vidíme $y = -1$. Dosazením do první rovnice dostaneme $2x + 1 = 5$, takže $x = 2$.

Řešení můžeme zapsat ve vektorovém tvaru jako $\boldsymbol{x} = (2, -1)$.

Nekonečně mnoho řešení - jeden parametr

Příklad 2. Uvažujme soustavu

$$x + 4y + 2z = 4\,, \quad -3x + y + z = 1\,, \quad -x + 9y + 5z = 9\,. \tag{12}$$

Sestavíme matici

$$\mathbf{B}_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 5 & 9 \end{array}\right). \tag{13}$$

Opět ji pomocí eřú převedeme na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & 7 & 13 \\ 0 & 13 & 7 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{14}$$

(K druhému řádku jsme přičetli 3-násobek prvního a ke třetímu první řádek.)

Vidíme, že $h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{B}_r) = 2 < 3$. Můžeme tedy volit $3 - 2 = 1$ neznámých jako volitelné parametry. V našem případě můžeme jednu z proměnných volit jako libovolné reálné číslo, např. tu poslední:

$$z = t \in \mathbb{R}\,. \tag{15}$$

Druhá rovnice nám dává $13y + 7t = 13$, odtud

$$y = 1 - \frac{7}{13}t\,. \tag{16}$$

První rovnice nám říká $x + 4y + 2z = 4$, po dosazení

$$x + 4\left(1 - \frac{7}{13}t\right) + 2t = 4\,, \tag{17}$$

odtud

$$x = \frac{2}{13}t\,. \tag{18}$$

Proměnné x a y jsme tedy vyjádřili pomocí reálného parametru t. Řešení můžeme zapsat ve vektorovém tvaru. Pro přehlednost rozdělujeme řešení na konstantní část, která na žádném parametru nezávisí, a na proměnnou část, která je násobkem daného parametru. Zde

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{2}{13}t, 1 - \frac{7}{13}, t\right) = (0, 1, 0) + (\frac{2}{13}, -\frac{7}{13}, 1) \cdot t\,. \tag{19}$$

Žádné řešení

Příklad 3. Uvažujme soustavu

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1\,, \quad 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -6\,, \tag{20}$$
$$x_2 - x_3 - x_4 = -1\,, \quad 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7\,. \tag{21}$$

Matice soustavy je

$$\mathbf{D}_r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \end{array}\right) \tag{22}$$

Opět převádíme na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{23}$$

Vidíme, že $h(\mathbf{D}) = 2$, ale $h(\mathbf{D}_r) = 3$. Tato soustava tedy nemá žádné řešení.

Proč tomu tak je? Třetí řádek nám vlastně dává rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -4$. Takovou rovnici nikdy nebudeme schopni splnit. To nám říká, že jedna z původních rovnic „je tam navíc“, nemůžeme ji splnit nikdy.

Nekonečně mnoho řešení - více parametrů

Příklad 4. Řešme soustavu

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 4\,, \quad x_1 - x_3 + 2x_4 = 0\,. \tag{24}$$

Sestavíme matici

$$\mathbf{C}_r = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{25}$$

a dál to známe:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right) \tag{26}$$

Zde jsme druhý řádek vynásobili -1 a přičetli k němu první řádek. Platí $h(\mathbf{C}) = h(\mathbf{C}_r) = 2 < 5$, máme tedy k dispozici $5 - 2 = 3$ parametrů, které můžeme volit.

Při volbě více parametrů postupujme odzadu. Označme tedy

$$x_5 = t_5 \in \mathbb{R}\,, x_4 = t_4 \in \mathbb{R}\,:, x_3 = t_3 \in \mathbb{R}\,. \tag{27}$$

Druhá rovnice říká

$$x_2 + 2t_3 - 3t_4 - 2t_5 = 4 \implies x_2 = 4 - 2t_3 + 3t_4 + 2t_5\,. \tag{28}$$

První rovnice říká

$$x_1 + (4 - 2t_3 + 3t_4 + 2t_5) + t_3 - t_4 - 2t_5 = 4 \implies x_1 = t_3 - 2t_4\,. \tag{29}$$

Nyní už je snad lépe vidět výhoda vektorového zápisu, který rozdělíme na čtyři části:

$$\boldsymbol{x} = (0,4,0,0,0) + (1,-2,1,0,0)t_3 + (-2,3,0,1,0)t_4 + (0,2,0,0,1)t_5\,. \tag{30}$$

Dodatek: jaké proměnné mohou býti volitelné?

Příklad 5. Uvažujme soustavu (napišme ji rovnou v maticovém tvaru)

$$\mathbf{K}_r = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \end{array} . \tag{31}$$

Hodnost matice $\mathbf{K} = \mathbf{K}_r = 3$, máme k dispozici $9 - 3 = 6$ volitelných parametrů. Jak je vybrat? Stačí se řídit dvěma zásadami:

- Jako parametry volíme proměnné postupně „směrem odzadu".
- V jednom řádku (rovnici) nemohou vystupovat samé volitelné proměnné. První nenulové číslo tedy musí příslušet závislé proměnné.

Podívejme se na třetí řádek. To je rovnice

$$x_7 + x_8 + 2x_9 = 4 . \tag{32}$$

Postupujeme směrem odzadu a označíme volitelné parametry $x_9 = t_9 \in \mathbb{R}$, $x_8 = t_8 \in \mathbb{R}$. Nemůžeme ovšem jako volitelný parametr označit x_7, protože pak bychom dostali rovnici

$$t_7 + t_8 + 2t_9 = 4 , \tag{33}$$

která zjevně nemůže být splněna pro všechna reálná čísla! Z toho plyne, že x_7 musí být závislé na t_8 a t_9, konkrétně

$$x_7 = 4 - t_8 - 2t_9 . \tag{34}$$

Teď se podívejme na druhý řádek, který říká:

$$2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + 2(4 - t_8 - 2t_9) - t_8 = 1 . \tag{35}$$

Řídíme se pravidlem a můžeme opět označit $x_6 = t_6 \in \mathbb{R}$, $x_5 = t_5 \in \mathbb{R}$, $x_4 = t_4 \in \mathbb{R}$. Ale opět nesmí být x_3 volitelné, protože bychom dostali rovnici se samými volitelnými parametry, která by nebyla platná. Úplně stejně v první rovnici označíme x_2 jako volitelnou proměnnou, ale x_1 musí být závislá proměnná. Situace je tedy následující (symbolem $\checkmark$ označuji proměnnou, kterou lze volit jako parametr, symbolem $\times$ proměnnou, která musí být závislá na ostatních):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccccc|c} \times & \checkmark & \times & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \times & \checkmark & \checkmark & \end{array} \end{array} . \tag{36}$$

Soustavy s parametry

Příklad 6. V závislosti na α, β určíme řešení soustavy rovnic

$$x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 4 , \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 , x_1 + x_2 + \beta x_3 = 3 . \tag{37}$$

Soustavu přepíšeme do matice a určíme její hodnost převedením na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \beta & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 4 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - 2 & -1 \end{array}\right) . \tag{38}$$

Nyní musíme rozlišit případy, kdy budeme mít nějaký nulový člen na hlavní diagonále.

- Případ $\beta - 2 = 0$, tj $\beta = 2$: soustava má tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 4 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \tag{39}$$

  takže hodnost původní a rozšířené matice jsou různé. Soustava nemá žádné řešení.

- Případ $\beta \neq 2$, $\alpha - 1 = 0$, tj $\alpha = 1$: soustava má tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right). \tag{40}$$

  Opět vidíme, že hodnosti jsou různé, proto soustava nemá žádné řešení.

- Případ $\beta \neq 2$, $\alpha \neq 1$. Nyní soustava nemá nuly na diagonále a je ve tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 4 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - 2 & -1 \end{array}\right). \tag{41}$$

  Hodnost původní a rozšířené matice jsou stejné a jsou stejné jako počet neznámých, máme proto jediné řešení. To snadno určíme. Třetí řádek nám říká

$$(\beta - 2)x_3 = -1 \implies x_3 = -\frac{1}{\beta - 2}. \tag{42}$$

  Druhý řádek říká

$$(\alpha - 1)x_2 + \frac{1}{\beta - 2} = 0 \implies x_2 = -\frac{1}{(\alpha - 1)(\beta - 2)}. \tag{43}$$

  První řádek Je

$$x_1 - \frac{\alpha}{(\alpha - 1)(\beta - 2)} - \frac{4}{\beta - 2} = 4 \implies x_1 = 4 + \frac{\alpha}{(\alpha - 1)(\beta - 2)} + \frac{4}{\beta - 2}. \tag{44}$$

  Povšimněme si, že nulou v tomto případě nikdy nedělíme, protože tyto speciální případy jsme právě vyřešili výše.

Závěr: pro $\beta = 2$ anebo $\alpha = 1$ nemá soustava řešení. Pro $\alpha \neq 1$ a $\beta \neq 2$ má soustava jediné řešení.

Homogenní soustavy

Homogenní soustavy jsou ve tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \tag{45}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \tag{46}$$
$$\vdots \tag{47}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \tag{48}$$

Takové soustavě přísluší matice s nulovým sloupcem pravé strany

$$\mathbf{A}_r = (\mathbf{A}|\mathbf{0}). \tag{49}$$

Hodnost matice se nezmění, přidáme-li k ní nulový sloupec, proto je vždy splněna podmínka $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r)$. Soustava má vždy řešení - je to řešení ze samých nul! Řešení ve tvaru $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ se nazývá **triviální řešení**. Samozřejmě nemusí být jediné, to bychom opět určili pomocí $h(\mathbf{A})$.

Závěrečné poznámky

- Postup, který provádíme při řešení rovnic pomocí matic, se nazývá **Gaussova eliminace**.
- Drobnou modifikací tohoto postupu je **Jordanova metoda**, která spočívá v tom, že po převedení matice na odstupňovaný tvar se ji ještě snažíme vynulovat nad diagonálou, opět pomocí eřú. Získáme tak diagonální matici (kterou můžeme ještě převést na jednotkovou) a z ní můžeme přímo určit hodnoty neznámých. Protože je ale časově náročná, pro praktické počítání soustav se jí nepoužívá, bohatě si vystačíme s Gaussovou eliminací.
- Gaussova eliminace je praktická pro počítání na papíře, pokud chceme znát hodnoty všech neznámých proměnných. Seznámíme se později ještě s Cramerovým pravidlem, které je praktičtější v situacích, kdy nám stačí znát jenom některé neznámé, ale nepotřebujeme všechny.