0.1 Definiční obor

Při určování definičního oboru elementárních funkcí se v podstatě můžeme řídit jednoduchými zásadami.

1. Nesmíme dělit nulou.
2. Sudé odmocniny jsou definované pouze pro nezáporná čísla.
3. Logaritmus je definovaný pouze pro kladná čísla.
4. Speciální pozornost si zaslouží funkce tan, cot, arcsin a arccos.

Kompletní přehled dává tabulka **??**.

funkce	definiční obor	obor hodnot
x^k, k je sudé	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
x^k, k je liché	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt[k]{x}$, k je sudé	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$\sqrt[k]{x}$, k je liché	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
a^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\log x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\sin x$, $\cos x$	$\mathbb{R}$	$[0, 1]$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
x	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

Tabulka 1: Tabulka elementárních funkcí. (Je víceméně potřeba umět ji nazpaměť.)

0.2 Příklady na definiční obor

Příklad 1. Určíme definiční obor funkce

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x-4)(x^2+4x-5)}\,.$$

Řešení: První pravidlo nám říká, že nesmíme dělit nulou. Musíme tedy najít všechna x taková, že je jmenovatel zlomku nulový:

$$(x+1)(x-4)(x^2+4x-5) = 0\,.$$

Součin čísel (nebo výrazů, závorek) je nulový tehdy a jen tehdy, když je jedno z čísel nulové. Každou závorku tedy řešíme zvlášť:

$$\begin{cases} x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1\,, \\ x-4 = 0 \Longrightarrow x = 4\,, \\ x^2+4x-5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} = -2 \pm 3\,,\ x = -5, 1 \end{cases}.$$

Tato řešení jsou body, které musíme z definičního oboru vyloučit. Tedy

$$\boxed{D(R) = \mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 1, 4\}}\,.$$

Verze: 24. září 2021

Poznámka: někdo by snad mohl postupovat tak, že by čitatel rovněž převedl na součin závorek: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Jmenovatel lze též převést na součin: $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$. Postupoval by tedy krácením:

$$R(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)(x+5)(x-1)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{(x+1)(x-4)}\,.$$

Výraz na levé straně má jiný definiční obor: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\} \neq D(R)$. **Číselné hodnoty výrazů napravo a nalevo jsou stejné, ale definiční obor výrazů je různý!** Poučení tedy je: nejdříve nalezneme definiční obor a pak můžeme krátit.

Příklad 2. Ještě jednou upozorníme na stejný případ: funkce $f(x) = \frac{x}{x}$ odpovídá konstantní funkci $g(x) = 1$, s tím rozdílem, že do f nelze dosadit nulu. Takže

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R} = D(g)\,.$$

Příklad 3. Určíme definiční obor funkce

$$h(x) = \sqrt{\frac{\log(x-2)}{x-4}}$$

Řešení: 1. pravidlo nám vyloučí bod $x = 4$. Dále nám 3. pravidlo říká, že do log můžeme dosadit pouze kladná čísla, takže musí platit $x - 2 > 0$. To odpovídá hodnotám $x \in (2, \infty)$. Konečně nám 2. pravidlo říká, že musí být výraz pod odmocninou nezáporný, musíme tedy řešit nerovnici

$$\frac{\log(x-2)}{x-4} \geq 0\,.$$

Nejprve vyřešíme případ, kdy platí rovnost.

$$\log(x-2) = 0 \Longrightarrow x - 2 = 1 \Longrightarrow x = 3\,.$$

Nyní vyřešíme případ nerovnosti. Podíl dvou čísel je větší než nula právě tehdy, když jsou obě čísla kladná anebo obě čísla záporná (samozřejmě „minus krát minus je plus“). Stačí tedy řešit podmínky:

$$\begin{cases} [\log(x-2) > 0] \bigwedge [x-4 > 0] \Longrightarrow [x \in (3,\infty)] \bigwedge [x \in (4,\infty)] \Longrightarrow x \in (4,\infty)\,, \\ [\log(x-2) < 0] \bigwedge [x-4 < 0] \Longrightarrow [x \in (2,3)] \bigwedge [x \in (-\infty,4)] \Longrightarrow x \in (2,3) \end{cases}.$$

Celkově máme

$$\boxed{D(h) = (2,3) \cup \{3\} \cup (4,\infty) = (2,3] \cup (4,\infty)}\,.$$

Příklad 4. Určíme definiční obor funkce

$$P(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{x^x}\,.$$

Řešení: jmenovatel vyloučí bod nula. Dále, definiční obor funkce arcsin je $[-1, 1]$, tedy $-1 \leq x - 1 \leq 1$, takže $x \in [0, 2]$. Nyní se podívejme na funkci ve jmenovateli. Tu můžeme přepsat

$$x^x = \left(e^{\log x}\right) = e^{x \log x}\,,$$

takže se v ní objeví logaritmus a vidíme, že $x \in (0, \infty)$. Celkově

$$\boxed{D(P) = [0,2] \cap (0,\infty) = (0,2]}\,.$$

Příklad 5. Určíme definiční obor funkce

$$m(t) = \tan(\sqrt{t+1})\,.$$

Řešení: odmocnina dává podmínku $t \in [-1, \infty)$. Dále platí $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, takže $\tan(\sqrt{t+1}) = \frac{\sin(\sqrt{t+1})}{\cos(\sqrt{t+1})}$. Protože nesmíme dělit nulou, musíme najít body

$$\cos(\sqrt{t+1}) = 0\,.$$

Substitucí $\sqrt{t+1} = u$ dostáváme podmínku $\cos u = 0$, která odpovídá bodům $u = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$. Odtud máme

$$\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2} + k\pi\,.$$

Nyní musíme vyjádřit t, což uděláme prostým umocněním a odečtením jedničky:

$$t = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 - 1 = \frac{\pi^2}{4} + 2\cdot k\pi\cdot\frac{\pi}{2} + k^2\pi^2 - 1 = k^2\pi^2 + k\pi^2 + \frac{\pi^2}{4} - 1\,.$$

Definiční obor je tedy

$$D(m) = \left\{t : t \geq -1, t \neq k^2\pi^2 + k\pi^2 + \frac{\pi^2}{4} - 1,\, k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

Příklad 6. Určíme definiční obor funkce

$$g(x) = \frac{\sin^3 x + 4^{-x}}{\sqrt{|2x-1| - |x+1| - 3}}\,.$$

Funkce v čitateli mají definiční obor $\mathbb{R}$. Musíme tedy zařídit, aby odmocnina ve jmenovateli byla dobře definovaná a aby byla nenulová, to znamená zajistit

$$|2x-1| - |x+1| - 3 > 0\,.$$

Nerovnice s absolutní hodnotou se řeší pomocí tabulek. Nejprve najdeme body, kdy je absolutní hodnota nulová. V našem případě to jsou body $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$ a $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Nyní stačí využít toho, že $|x| = +x$ pro $x > 0$ a $|x| = -x$ pro $x < 0$.

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$+2x-1$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$+x+1$	$+x+1$
$\lvert 2x-1\rvert - \lvert x+1\rvert - 3$	$(-2x+1)-(-x-1)-3$	$(-2x+1)-(+x+1)-3$	$(+2x-1)-(+x+1)-3$
po úpravě	$-x-1$	$-3x-3$	$x-5$

Nyní musíme vyřešit tři nerovnice

$$-x-1 > 0\,,\quad -3x-3 > 0\,,\quad x-5 > 0$$

a podívat se, jestli spadají do zadaného intervalu.

První rovnice odpovídá $x \in (-\infty, -1)$, což je v souladu s intervalem. Druhá rovnice odpovídá $x \in (-\infty, -1)$, který už není v souladu s intervalem. Třetí rovnice odpovídá $x \in (5, \infty)$, což je v souladu s intervalem.

Celkově dostáváme

$$\boxed{D(g) = (-\infty, -1) \cup (5, \infty)}\,.$$