1 PRIMITIVNÍ FUNKCE

Mějme funkci $F(x)$ a $f(x)$. Jestliže platí $F'(x) = f(x)$, pak říkáme, že $F(x)$ je **primitivní funkcí** (neurčitým integrálem) k funkci $f(x)$. Zapisujeme

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x}\,. \tag{1}$$

- Symbol $\int$ se čte „integrál“. Jeho původ vychází z přepisu písmene S (suma, sčítání). Později uvidíme, že integrál představuje něco jako zobecněné sčítání.
- Za integrálem následuje funkce, kterou integrujeme. Té říkáme argument integrálu.
- Na konci integrálu píšeme běžně znak d a za něj proměnnou, přes kterou integrujeme, např. $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\omega$. Je dobré ji psát, protože v praxi integrujeme i funkce s paramatry, a je třeba vědět, přes kterou proměnnou sčítáme. (Správně typograficky se d píše bez kurzívy. Spousta odborných textů na to zapomíná a píše kurzívou dx, což je nesprávně z toho důvodu, že kurzívou se označují proměnné, operátory s něměnným významem by od nich měly být odlišeny.)
- Celkově výraz přečteme jako „integrál z funkce f od x dé x“.
- Výrazu s $\mathrm{d}x$ se také říká **diferenciál**.

Protože je integrál jenom jistým „obrácením“ derivace, má podobné vlastnosti, jako například linearitu:

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Dále si musíme všimnout, že derivace konstantní funkce je nulová. **Primitivní funkce tedy není určena jednoznačně, ale liší se o libovolnou integrační konstantu.** Bývá zvykem psát

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Tím říkáme, že C je nějaké číslo, které můžeme zvolit, ale také nemusíme.

Příklad 1. Najděme primitivní funkce k funkcím $y(x) = x^p$, kde $p \in \mathbb{R}$.
Víme, že derivace funkce $y(x) = x^\alpha$ je $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pro $\alpha \neq 0$. Proto

$$\int \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = x^\alpha + C\,. \tag{4}$$

Víme, že integrál je lineární, konstantu můžeme vytáhnout ven a celou rovnici jím vydělit:

$$\int x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^\alpha}{\alpha} + C \quad \text{pro} \quad \alpha \neq 0\,. \tag{5}$$

Nyní už stačí identifikovat $p = \alpha - 1$, takže

$$\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad \text{pro} \quad p \neq -1\,. \tag{6}$$

Pro případ $p = -1$ si vzpomeneme na to, že $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$ a $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$ pro $x < 0$. Oba vztahy spojíme do jednoho zápisem

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C\,. \tag{7}$$

* **Autor:** miroslav@burysek.eu. **Verze:** 27. srpna 2021

Příklad 2 (Varování)**.** Podobně jako neplatí $(fg)' \neq f'g'$, neplatí ani

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

Pokud na toto zapomeneme, dostaneme zřejmé nesmysly, například

$$\frac{x^3}{3} = \int x^2\,\mathrm{d}x = \int x \cdot x\,\mathrm{d}x \neq \int x\,\mathrm{d}x \cdot \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4}\,. \tag{9}$$

Proto integrování funkcí vzniklých součinem je mnohem obtížnější. Používá se k němu speciální metoda, se kterou se seznámíme.

Příklad 3. Spočítáme

$$\int \left(x^4 - 3x + 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x} - \sin x\right)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10}$$

Díky linearitě a výsledkům předchozího příkladu máme

$$\int \left(x^4 - 3x + 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x} - \sin x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + x + \frac{1}{x^2} + 5\ln x + \cos x + C\,. \tag{11}$$

C je opět libovolná konstanta.

Příklad 4. Vypočítáme

$$\int \frac{4x^2 + 12}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,. \tag{12}$$

Čitatel upravíme a dostaneme

$$\int \frac{4(x^2+1) + 8}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int 4\,\mathrm{d}x + \int \frac{8}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = 4x + 8\arctan x + C\,. \tag{13}$$

SUBSTITUČNÍ METODA

Vzpomeneme si na vztah pro derivaci složené funkce

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,. \tag{14}$$

Obě strany rovnice můžeme zintegrovat a dostáváme vztah

$$\boxed{f(g(x)) = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x}\,. \tag{15}$$

Tento vztah je jádrem tzv. metody substituce.

Příklad 5.

$$\int (2x - 22)^{18}\,\mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Využijeme toho, že umíme integrovat funkci x^{18}. Označíme celou závorku jako pomocnou proměnnou u. Musíme nyní určit $\mathrm{d}x$ pomocí diferenciálu $\mathrm{d}u$. K tomu stačí napsat derivaci:

$$u = 2x - 22\,, \quad \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u\,. \tag{17}$$

Proto

$$\int (2x-22)^{18}\,\mathrm{d}x = \int u^{18}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{19}}{19}+C = \frac{u^{19}}{38}+C\,. \tag{18}$$

Nyní zpětně musíme za u dosadit výraz s x a dostaneme výsledek:

$$\boxed{\int (2x-22)^{18}\,\mathrm{d}x = \frac{(2x-22)^{19}}{38}+C}\,. \tag{19}$$

Příklad 6.

$$\int \sin\left(\frac{2\pi}{3}t+1\right)\,\mathrm{d}t\,. \tag{20}$$

Využijeme toho, že umíme integrovat $\sin x$, který má primitivní funkci $-\cos x$. Označíme si proto argument $\left(\frac{2\pi}{3}t+1\right)$ jako nějaké u. Nyní však ještě musíme vyjádřit ono dt pouze pomocí proměnné u. To dělá jednoduše tak, že výraz zderivujeme:

$$u = \frac{2\pi}{3}t+1\,,\quad \mathrm{d}u = \frac{2\pi}{3}\mathrm{d}t\,,\quad \mathrm{d}t = \frac{3}{2\pi}\mathrm{d}u\,. \tag{21}$$

Proto můžeme psát

$$\int \sin\left(\frac{2\pi}{3}t+1\right)\,\mathrm{d}t = \int \sin u\cdot\frac{3}{2\pi}\,\mathrm{d}u = -\frac{3}{2\pi}\cos u + C\,. \tag{22}$$

Nyní zpětně dosadíme za u a máme výsledek:

$$\boxed{\int \sin\left(\frac{2\pi}{3}t+1\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t+1\right)+C}\,. \tag{23}$$

Příklad 7.

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{24}$$

Víme, že umíme integrovat e^{-x}, proto zvolíme substituci $w=-x^2$ a vyjádříme $\mathrm{d}w = -2x\,\mathrm{d}x$. Tento člen můžeme „vecpat“ do integrálu:

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^{w}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}\cdot e^{w}+C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\,. \tag{25}$$

Příklad 8.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{26}$$

Všimneme si, že v čitateli se vyskytuje derivace $\sin x$, takže položíme $\sin x = z$ a máme $\mathrm{d}z = \cos x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^3} = -\frac{2}{z^2}+C = -\frac{2}{\sin^2 x}+C\,. \tag{27}$$

Integrály typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$

Typický příklad, kde použít metodu substituce, jsou integrály typu

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\,. \tag{28}$$

Zde totiž stačí položit $f(x)=u$, $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$, takže

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u|+C = \ln|f(x)|+C\,. \tag{29}$$

Příklad 9. Spočítáme

$$\int \frac{3x^5}{12 - x^6}\,\mathrm{d}x\,. \tag{30}$$

Vidíme, že v čitateli se nachází derivace jmenovatele (až na konstanty). Proto položíme $u = 12 - x^6$, $\mathrm{d}u = -6x^5\,\mathrm{d}x$ a dosadíme:

$$\int \frac{3x^5}{12 - x^6}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{-6x^5}{12 - x^6}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|12 - x^6| + C\,. \tag{31}$$

Metoda substituce - shrnutí

Viděli jsme, že metoda substituce potřebuje „zkušené oko" - k jejímu ovládnutí je potřeba propočítat mnoho typových úloh.

1. Podíváme se, zda vystupuje v integrálu součin dvou funkcí.
2. Zjistíme, zda jedna z nich není derivací nějakého výrazu v druhé funkci.
3. Jestliže ano, můžeme ji položit jako substituci.
4. Často je potřeba vynásobit celý integrál nějakým číslem, aby všechno sedělo.
5. Spočítáme substituovaný integrál.
6. Do výsledného výrazu dosadíme zpětnou substituci, abychom měli výsledek v původních proměnných.

Poznámky

- Každá spojitá funkce má primitivní funkci.
- Nespojité funkce nemusejí primitivní funkci mít. Například funkce

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{32}$$

  nemá primitivní funkci. Primitivní funkcí k ní nemůže být $|x|$, protože ta nemá v bodě 0 derivaci definovanou.
- Doposud jsme v matematické analýze postupovali tak, že jsme z předpisu pro zadanou funkci uměli vyšetřit její lokální chování na nějakém intervalu, určit extrémy, limity v nekonečnu a podobně. To všechno umožňuje operace derivování.

  Častější situace však je, že známe předpis pro to, jak se daná funkce mění (například nám někdo zadá derivaci) a my ji potřebujeme nalézt. To nám právě umožňuje integrování.