POČÍTÁNÍ LIMIT FUNKCÍ

Aritmetika limit platí i pro funkce. Typově se používají podobné triky jako v příkladech pro limity posloupností. Základní limity jsou uvedeny zde:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,,\quad \lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=+\infty\,, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^k=+\infty \text{ pro jakékoli } k\in\mathbb{N}\,,\quad \lim_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & \text{pro } k \text{ sudé}\\ -\infty & \text{pro } k \text{ liché}\end{cases}\,, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\,,\quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0\,, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to0+}\ln x=-\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\,, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sin x\,,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\cos x \text{ neexistují}\,, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}\,, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccotg} x=\pi\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccotg} x=0\,. \tag{7}$$

Příklad 1. Spočteme

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-4x^2+x+1}{x^2-8x}\,. \tag{8}$$

Pokud počítáme nevlastní limitu podílu polynomů, využíváme triku vytýkání nejvyšší mocniny ve jmenovateli. Takže vytkneme x^2 a máme

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-4x^2+x+1}{x^2-8x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{8}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{8}{x}} \tag{9}$$

a do takového výrazu již můžeme dosadit. Jenom opatrně, dosazujeme $-\infty$, takže

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-4x^2+x+1}{x^2-8x}=\frac{2\cdot(-\infty)-4+0+0}{1-0}=-\infty\,. \tag{10}$$

Limity typu „$\frac{a}{0}$“.

Již víme, že $\frac{a}{0}$ není definovaný výraz. Nyní se musíme naučit vypořádat s limitami podílu polynomů ve vlastních bodech, kde se takové výrazy objeví. Využijeme k tomu následující tvrzení.

Jestliže platí

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=0\,,\quad f(x)\geq 0 \text{ na pravém okolí } P^+(x_0)\,, \tag{11}$$

pak

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{1}{f(x)}=+\infty\,. \tag{12}$$

Jestliže platí

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=0\,,\quad f(x)\leq 0 \text{ na pravém okolí } P^+(x_0)\,, \tag{13}$$

Verze: 6. listopadu 2021

pak

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{1}{f(x)} = -\infty\,. \tag{14}$$

Analogické tvrzení platí pro limitu zleva a levé okolí.

Příklad 2. Vypočítejme limity

$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2}\,,\quad \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2}\,,\quad \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\,. \tag{15}$$

Platí $\lim_{x\to 2-}(x-2) = 0 = \lim_{x\to 2+}(x-2)$. Nyní se stačí podívat na to, jaké znaménko má funkce $(x-2)$ na levém a pravém okolí dvojky.

- Na levém okolí nuly, tj. pro $x < 2$, je $x-2 < 0$. Proto podle předchozího tvrzení platí

$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty\,. \tag{16}$$

- Na pravém okolí nuly, tj. pro $x > 2$, je $x-2 > 0$. Proto podle předchozího tvrzení platí

$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = +\infty\,. \tag{17}$$

- Protože se limita zprava a zleva nerovnají,

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} \text{ neexistuje}\,. \tag{18}$$

Příklad 3. Nechť

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-4}\,. \tag{19}$$

Vypočteme

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$,

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,

(iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$,

(iv) $\lim_{x\to-2-} f(x)$,

(v) $\lim_{x\to-2+} f(x)$,

(vi) $\lim_{x\to 2-} f(x)$,

(vii) $\lim_{x\to-2+} f(x)$.

(i) Zde nemůžeme dostadit přímo, dostali bychom $\frac{\infty}{\infty}$. Můžeme si ale pomoci stejným trikem jakou u posloupností:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{+\infty-2+0}{1-0} = +\infty\,. \tag{20}$$

(ii)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{-\infty-2+0}{1-0} = -\infty\,. \tag{21}$$

(iii) Zde dosadit můžeme rovnou, nedostaneme se k nedefinovanému výrazu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4} = \frac{0 - 0 + 1}{0 - 4} = -\frac{1}{4} \,. \tag{22}$$

(iv) Kdybychom dosadili rovnou, dostali bychom

$$\lim_{x\to -2-} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4} = \frac{-8 - 8 + 1}{4 - 4} = \frac{-15}{0} \,, \tag{23}$$

což není definovaný výraz. Proto máme co do činění s limitou typu $\frac{a}{0}$. V tom případě se podíváme na to, jaké znaménko má funkce ve jmenovateli na levém okolí minus dvojky: $x^2 - 4 > 0$ pro $x < -2$. Takže

$$\lim_{x\to -2-} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty \,. \tag{24}$$

Nyní už stačí použít aritmetiku limit (čitatel má limitu konečnou):

$$\lim_{x\to -2-} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2-} (x^3 - 2x^2 + 1) \cdot \lim_{x\to -2-} \frac{1}{x^2 - 4} = -15 \cdot (-\infty) = +\infty \,. \tag{25}$$

(v) Podobně, $x^2 - 4 < 0$ pro $-2 < x < 2$, takže na pravém okolí -2 je jmenovatel záporný. Proto

$$\lim_{x\to -2+} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2+} (x^3 - 2x^2 + 1) \cdot \lim_{x\to -2+} \frac{1}{x^2 - 4} = -15 \cdot (+\infty) = -\infty \,. \tag{26}$$

(vi) Analogicky.

(vii) Analogicky.

Příklad 4. Určíme limitu

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x^2}{6 - 2x} \,. \tag{27}$$

Opět vidíme

$$\lim_{x\to 3+} 6 - 2x = 0 \,, \quad 6 - 2x < 0 \text{ pro } x > 3 \,, \tag{28}$$

tedy podle tvrzení o $\frac{a}{0}$ platí

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x^2}{6 - 2x} = 9 \cdot (+\infty) = +\infty \,. \tag{29}$$

Příklad 5. Určíme limitu

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} \,. \tag{30}$$

Pokud bychom použili tvrzení $\frac{a}{0}$ hned, dostali bychom nedefinovaný výraz

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x\to 1-} (x^2 - 2x + 1) \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x^3 - x} = 0 \cdot \infty \,. \tag{31}$$

To se stalo díky tomu, že čitatel má kořen roven 1. Stačí ho tedy rozložit do závorek a něco zkrátit:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x\to 1-} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1-} \frac{x - 1}{x(x+1)} \tag{32}$$

a můžeme klidně dosadit

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x - 1}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0 \,. \tag{33}$$