1 FUNKCE

1.1 Elementární funkce

Elementární funkce jsou takové, které lze složit konečným počtem operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání) z těchto funkcí: konstanta, obecná mocnina, exponenciála, logaritmus, sinus, kosinus, tangens, kontangens, arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens.

Jiné funkce než elementární v kurzu prakticky nepotkáme. Je jich ale spousta. Příklady neelementárních funkcí si ukážeme, až budeme vybaveni mocnými nástroji, jako je určitý integrál.

1.2 Definiční obor

Definiční obor $D(f)$ (též D_f) je množina takových čísel, pro která je funkce f definována.

Při určování definičního oboru elementárních funkcí se v podstatě můžeme řídit jednoduchými zásadami.

1. Nesmíme dělit nulou.
2. Sudé odmocniny jsou definované pouze pro nezáporná čísla.
3. Logaritmus je definovaný pouze pro kladná čísla.
4. Speciální pozornost si zaslouží funkce tan, cot, arcsin a arccos.

Kompletní přehled dává tabulka.

funkce	definiční obor	obor hodnot
x^k, k je sudé	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$
x^k, k je liché	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt[k]{x}$, k je sudé	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$
$\sqrt[k]{x}$, k je liché	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$(0,\infty)$	$(0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$
a^x	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$
$\log x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\sin x$, $\cos x$	$\mathbb{R}$	$[0,1]$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$

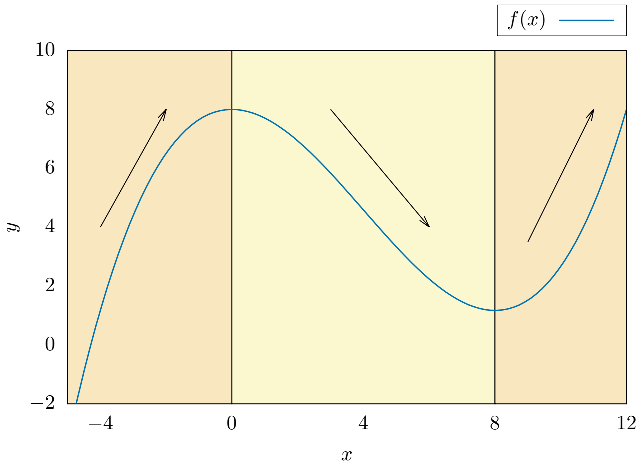
1.3 Růst a pokles funkce

O funkci řekneme, že je

- **rostoucí** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) < f(y)$,
- **klesající** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) < f(y)$,
- **neklesající** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) \leq f(y)$,
- **nerostoucí** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) \geq f(y)$,

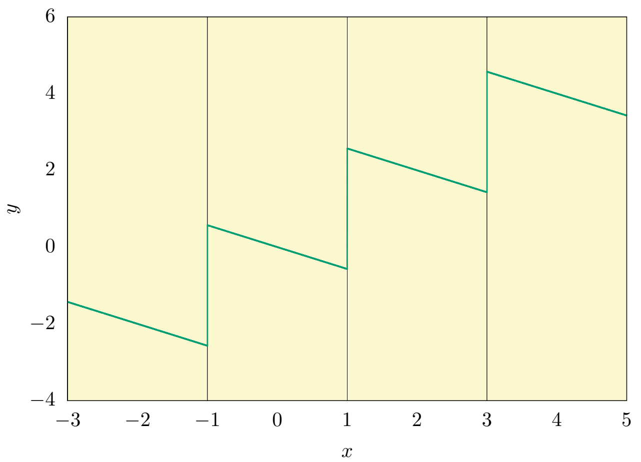
* **Autor:** miroslav@burysek.eu. **Verze:** 2. srpna 2021

- **konstantní** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x < y$ platí $f(x) = f(y)$,
- **monotónní** na intervalu I, jestliže je na něm neklesající, anebo nerostoucí.



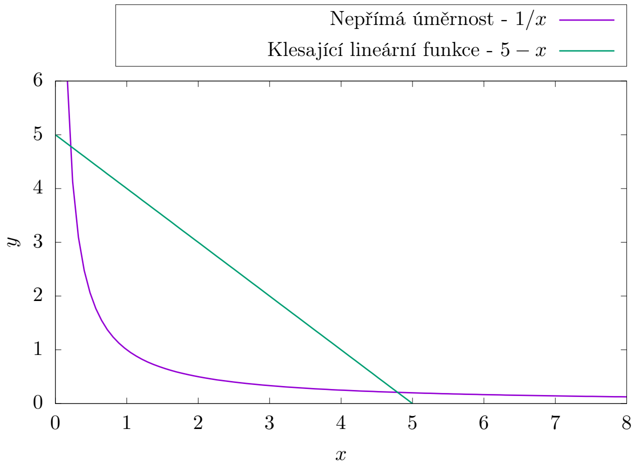
Obrázek 1: Ilustrace pojmu rostoucí a klesající funkce. Na oranžové oblasti je $f(x)$ rostoucí, na žluté oblasti je $f(x)$ klesající.

Poznámka 1. Pokud mluvíme o růstu nebo poklesu funkce, je vždy nutné uvést, na jakém intervalu se pohybujeme. Důležitost je vidět na následujícím příkladu.



Obrázek 2: Příklad funkce, která je klesající na každém intervalu $(2p-1, 2p+1)$, $p \in \mathbb{Z}$, ale není klesající na celém $\mathbb{R}$ (nesplňuje definici klesající funkce - stačí porovnat dva body v oddělených intervalech). Dokonce se jeví jako „globálně rostoucí“, ale s takovým pojmem nepracujeme. Všimněme si, že funkce je v krajních bodech intervalů nespojitá.

Poznámka 2. V některé literatuře se o různých křivkách mluví jako o „rostoucích zleva doprava“ nebo „klesajících zprava doleva“ a podobně. Matematická terminologie vždy pracuje s tím, co se děje s hodnotami $f(x)$ při rostoucích x - tedy vždy „zleva doprava“, chcete-li. Podobně se někdy říká o klesajících funkcích $y(x)$, že „y je nepřímo úměrné x“. Ale matematická terminologie říká, že pouze funkce $y(x) = C/x$ je nepřímá úměrnost, žádná jiná funkce toto nesplňuje.



Obrázek 3: Ilustrace často nesprávně použitého termínu „nepřímá úměrnost". Pouze funkce typu C/x jsou nepřímé úměrnosti.

1.4 Další charakteristiky funkce

O funkci $f(x)$ říkáme, že je

- **prostá** na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ splňující $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$ („každému x přísluší jiná hodnota $f(x)$"),
- **omezená shora**, jestliže existuje konečné číslo K takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq K$,
- **omezená zdola**, jestliže existuje konečné číslo K takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq K$,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Jestliže je funkce f prostá na intervalu I, pak k ní existuje **inverzní funkce**, kterou označujeme f^{-1}.

Příklad 1. Funkce x^2 je prostá na intervalu $(-\infty, 0]$ a na intervalu $[0, +\infty)$. Není prostá na $\mathbb{R}$, protože $(-2)^2 = 4 = (+2)^2$. Na intervalu $[0, \infty)$ k ní existuje inverzní funkce $\sqrt{x}$. Na intervalu $(-\infty, 0]$ k ní existuje inverzní funkce $\sqrt{-x}$.

1.5 Příklady na definiční obor

Příklad 2. Určíme definiční obor funkce

$$R(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)(x-4)(x^2+4x-5)}\,.$$

Řešení: První pravidlo nám říká, že nesmíme dělit nulou. Musíme tedy najít všechna x taková, že je jmenovatel zZákladní vlastnosti funkcílomku nulový:

$$(x+1)(x-4)(x^2+4x-5) = 0\,.$$

Součin čísel (nebo výrazů, závorek) je nulový tehdy a jen tehdy, když je jedno z čísel nulové. Každou závorku tedy řešíme zvlášť:

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \implies x = -1\,,\\ x-4 &= 0 \implies x = 4\,,\\ x^2+4x-5 &= 0 \implies \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = -2 \pm 3\,,\ x = -5, 1\,. \end{aligned}$$

Tato řešení jsou body, které musíme z definičního oboru vyloučit. Tedy

$$\boxed{D(R) = \mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 1, 4\}}\,.$$

Poznámka: někdo by snad mohl postupovat tak, že by čitatel rovněž převedl na součin závorek: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Jmenovatel lze též převést na součin: $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$. Postupoval by tedy krácením:

$$R(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)(x+5)(x-1)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{(x+1)(x-4)}\,.$$

Výraz na levé straně má jiný definiční obor: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\} \neq D(R)$. **Číselné hodnoty výrazů napravo a nalevo jsou stejné, ale definiční obor výrazů je různý!** Poučení tedy je: nejdříve nalezneme definiční obor a pak můžeme krátit.

Příklad 3. Ještě jednou upozorníme na stejný případ: funkce $f(x) = \frac{x}{x}$ odpovídá konstantní funkci $g(x) = 1$, s tím rozdílem, že do f nelze dosadit nulu. Takže

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R} = D(g)\,.$$

Příklad 4. Určíme definiční obor funkce

$$h(x) = \sqrt{\frac{\log(x-2)}{x-4}}$$

Řešení: 1. pravidlo nám vyloučí bod $x = 4$. Dále nám 3. pravidlo říká, že do $\log$ můžeme dosadit pouze kladná čísla, takže musí platit $x - 2 > 0$. To odpovídá hodnotám $x \in (2, \infty)$. Konečně nám 2. pravidlo říká, že musí být výraz pod odmocninou nezáporný, musíme tedy řešit nerovnici

$$\frac{\log(x-2)}{x-4} \geq 0\,.$$

Nejprve vyřešíme případ, kdy platí rovnost.

$$\log(x-2) = 0 \Longrightarrow x - 2 = 1 \Longrightarrow x = 3\,.$$

Nyní vyřešíme případ nerovnosti. Podíl dvou čísel je větší než nula právě tehdy, když jsou obě čísla kladná anebo obě čísla záporná (samozřejmě „minus krát minus je plus“). Stačí tedy řešit podmínky:

$$\begin{aligned}
&[\log(x-2) > 0] \bigwedge [x-4 > 0] \Longrightarrow [x \in (3,\infty)] \bigwedge [x \in (4,\infty)] \Longrightarrow x \in (4,\infty)\,,\\
&[\log(x-2) < 0] \bigwedge [x-4 < 0] \Longrightarrow [x \in (2,3)] \bigwedge [x \in (-\infty,4)] \Longrightarrow x \in (2,3)\,.
\end{aligned}$$

Celkově máme

$$\boxed{D(h) = (2,3) \cup \{3\} \cup (4,\infty) = (2,3] \cup (4,\infty)}\,.$$

Příklad 5. Určíme definiční obor funkce

$$P(x) = \frac{\arcsin(x-1)}{x^x}\,.$$

Řešení: jmenovatel vyloučí bod nula. Dále, definiční obor funkce arcsin je $[-1, 1]$, tedy $-1 \geq x - 1 \geq 1$, takže $x \in [0, 2]$. Nyní se podívejme na funkci ve jmenovateli. Tu můžeme přepsat

$$x^x = \left(e^{\log x}\right) = e^{x \log x}\,,$$

takže se v ní objeví logaritmus a vidíme, že $x \in (0, \infty)$. Celkově

$$\boxed{D(P) = [0,2] \cap (0,\infty) = (0,2]}\,.$$

Příklad 6. Určíme definiční obor funkce

$$m(t) = \tan(\sqrt{t+1})\,.$$

Řešení: odmocnina dává podmínku $t \in [-1, \infty)$. Dále platí $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, takže $\tan(\sqrt{t+1}) = \frac{\sin(\sqrt{t+1})}{\cos(\sqrt{t+1})}$. Protože nesmíme dělit nulou, musíme najít body

$$\cos(\sqrt{t+1}) = 0\,.$$

Substitucí $\sqrt{t+1} = u$ dostáváme podmínku $\cos u = 0$, která odpovídá bodům $u = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$. Odtud máme

$$\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2} + k\pi\,.$$

Nyní musíme vyjádřit t, což uděláme prostým umocněním a odečtením jedničky:

$$t = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 - 1 = \frac{\pi^2}{4} + 2\cdot k\pi\cdot\frac{\pi}{2} + k^2\pi^2 - 1 = k^2\pi^2 + k\pi^2 + \frac{\pi^2}{4} - 1\,.$$

Definiční obor je tedy

$$D(m) = \left\{t : t \geq -1, t \neq k^2\pi^2 + k\pi^2 + \frac{\pi^2}{4} - 1,\, k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

Příklad 7. Určíme definiční obor funkce

$$g(x) = \frac{\sin^3 x + 4^{-x}}{\sqrt{|2x-1| - |x+1| - 3}}\,.$$

Funkce v čitateli mají definiční obor $\mathbb{R}$. Musíme tedy zařídit, aby odmocnina ve jmenovateli byla dobře definovaná a aby byla nenulová, to znamená zajistit

$$|2x-1| - |x+1| - 3 > 0\,.$$

Nerovnice s absolutní hodnotou se řeší pomocí tabulek. Nejprve najdeme body, kdy je absolutní hodnota nulová. V našem případě to jsou body $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$ a $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Nyní stačí využít toho, že $|x| = +x$ pro $x > 0$ a $|x| = -x$ pro $x < 0$.

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$\|2x-1\|$	$-2x+1$	$-2x+1$	$+2x-1$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$+x+1$	$+x+1$
$\|2x-1\| - \|x+1\| - 3$	$(-2x+1)-(-x-1)-3$	$(-2x+1)-(+x+1)-3$	$(+2x-1)-(+x+1)-3$
po úpravě	$-x-1$	$-3x-3$	$x-5$

Nyní musíme vyřešit tři nerovnice

$$-x-1 > 0\,, \quad -3x-3 > 0\,, \quad x-5 > 0$$

a podívat se, jestli spadají do zadaného intervalu.

První rovnice odpovídá $x \in (-\infty, -1)$, což je v souladu s intervalem. Druhá rovnice odpovídá $x \in (-\infty, -1)$, který už není v souladu s intervalem. Třetí rovnice odpovídá $x \in (5, \infty)$, což je v souladu s intervalem.

Celkově dostáváme

$$\boxed{D(g) = (-\infty, -1) \cup (5, \infty)}\,.$$