GONIOMETRICKÉ A CYKLOMETRICKÉ FUNKCE

Goniometrické (též trigonometrické) funkce jsou $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$. Funkce k nim inverzní, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme **cyklometrické**. Souhrnné grafy cyklometrických funkcí jsou na obrázcích 5 a 6.

Arkussinus

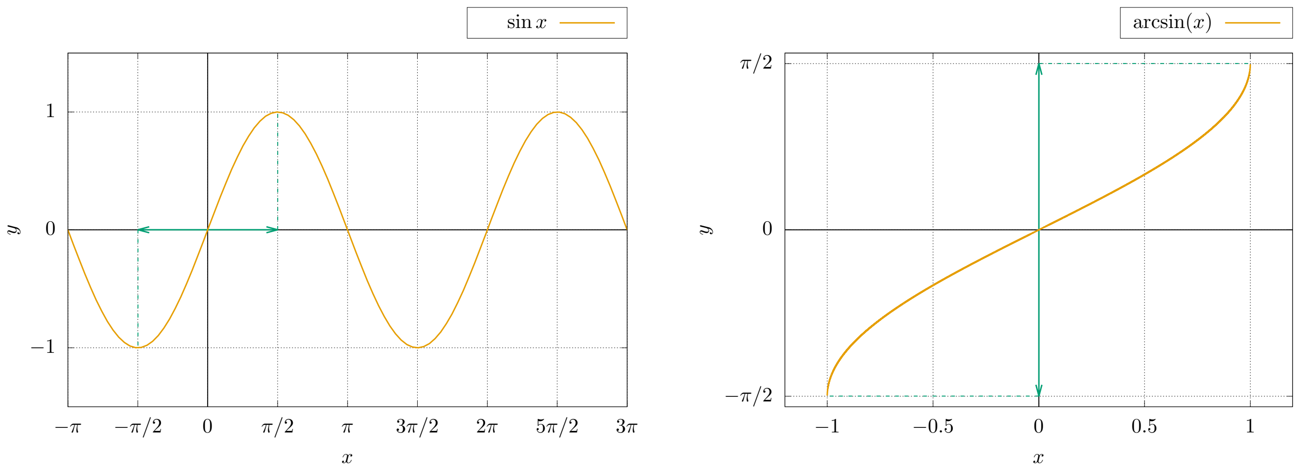
Graf funkce $\sin x$ je na obrázku 1 vlevo. Platí $D(\sin x) = \mathbb{R}$ a $H(\sin x) = [-1, 1]$. Nyní potřebujeme vybrat interval, na kterém je tato funkce prostá, abychom k ní mohli nalézt inverzní. Zároveň chceme pokrýt „co největší obor hodnot". Nabízí se interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Definujeme tedy funkci **arkussinus** $\arcsin x$ jako funkci inverzní, takže

$$\arcsin(x) = y \Longleftrightarrow x = \sin y\,. \tag{1}$$

Definiční obor a obor hodnot se prohazují:

$$D(\arcsin x) = H(\sin x) = [-1, 1]\,, \quad H(\arcsin x) = [-\pi/2, \pi/2]\,. \tag{2}$$

Graf funkce $\arcsin x$ je na obrázku 1 vpravo.



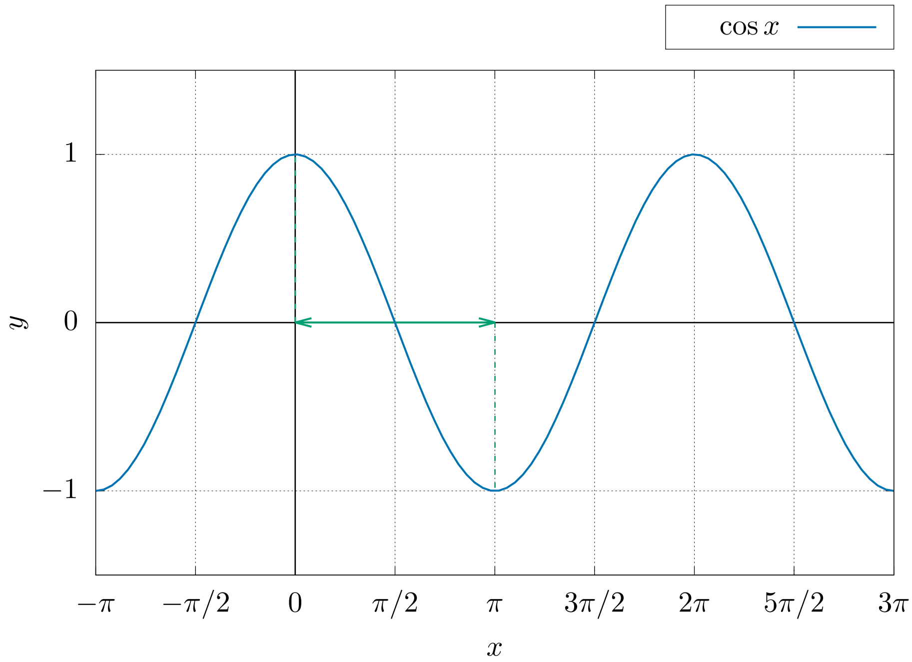
Obrázek 1: Vlevo: graf funkce sinus. Zeleně je vyznačen interval, kde je funkce prostá. Ten zvolíme jako obor hodnot funkce arkussinus. Vpravo: graf funkce arkussinus. Definiční obor a obor hodnot se prohazují. Grafy funkcí sinus a arkussinus jsou osově symetrické podle osy $y = x$.

Arkuskosinus

Stejným způsobem postupujeme u funkce $\cos x$. Graf této funkce je na obrázku 2. Platí $D(\cos x) = \mathbb{R}$ a $H(\cos x) = [-1, 1]$. Opět se chceme omezit na interval, kde je funkce prostá. Správný interval bude $[0, \pi]$. Definujeme funkci **arkuskosinus** $\arccos x$ předpisem

$$D(\arccos x) = H(\cos x) = [-1, 1]\,, \quad H(\arccos x) = [0, \pi]\,, \quad \arccos(x) = y \Longleftrightarrow x = \cos y\,. \tag{3}$$

Verze: 26. září 2021

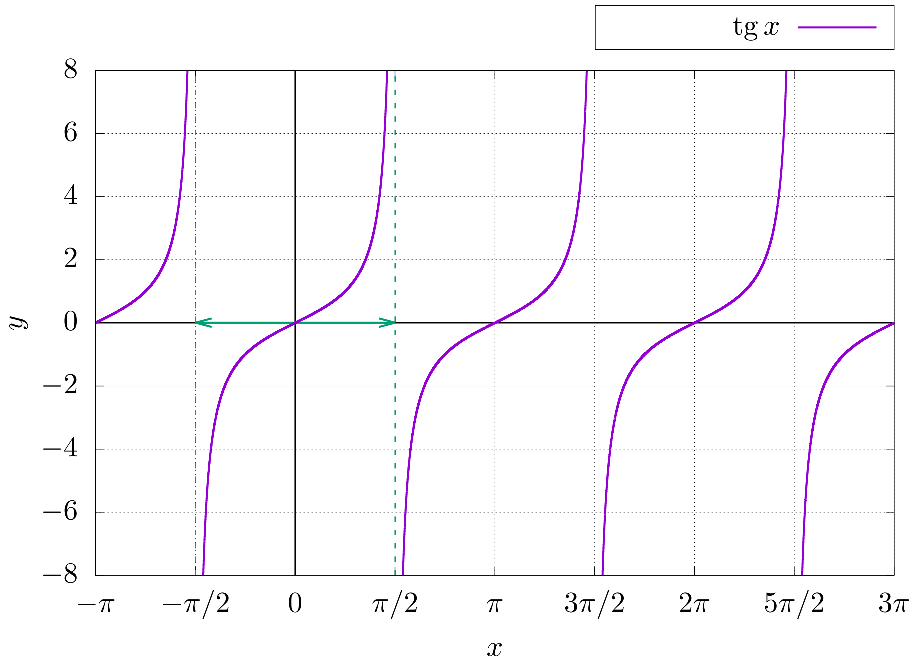


Obrázek 2: Graf funkce kosinus. Zeleně je vyznačen interval, kde je funkce prostá. Ten zvolíme opět jako obor hodnot funkce arkuskosinus.

Arkustangens

Graf funkce $\operatorname{tg} x$ je na obrázku 3. Platí $D(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $H(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$. Interval, na kterém je funkce prostá, je $(-\pi/2, \pi/2)$. Definujeme funkci **arkustangens** $\operatorname{arctg} x$ předpisem

$$D(\operatorname{arctg} x) = H(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}\,, \quad H(\operatorname{arctg} x) = (-\pi/2, \pi/2)\,, \quad \operatorname{arctg}(x) = y \Longleftrightarrow x = \operatorname{tg} y\,. \tag{4}$$

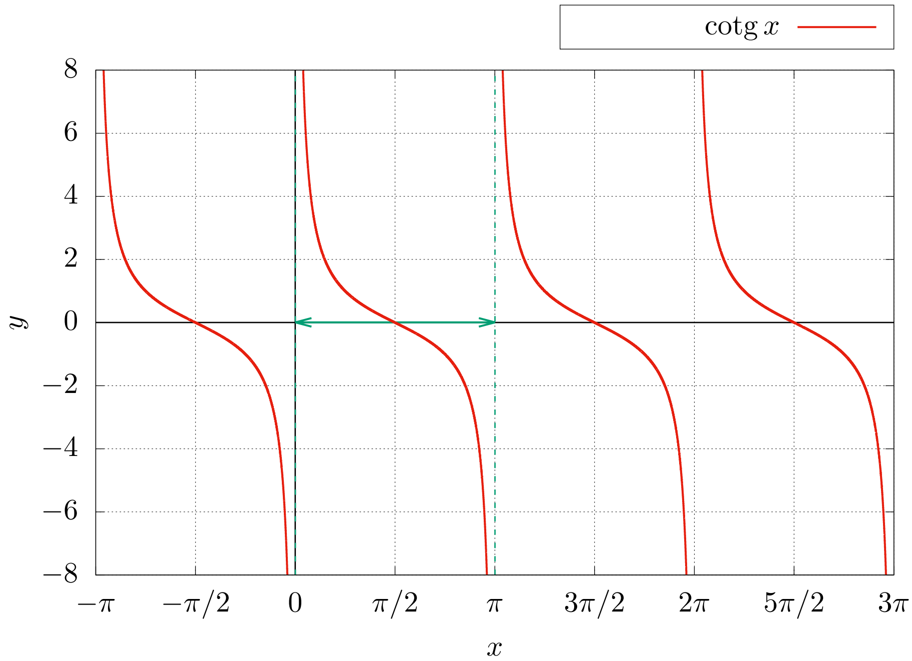


Obrázek 3: Graf funkce tangens. Zeleně je vyznačen interval, kde je funkce prostá. Ten zvolíme jako obor hodnot funkce arkustangens. Povšimněme si, že v bodech $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ jsou svislé asymptoty. Z nich se stanou vodorovné asymptoty funkce arkustangens.

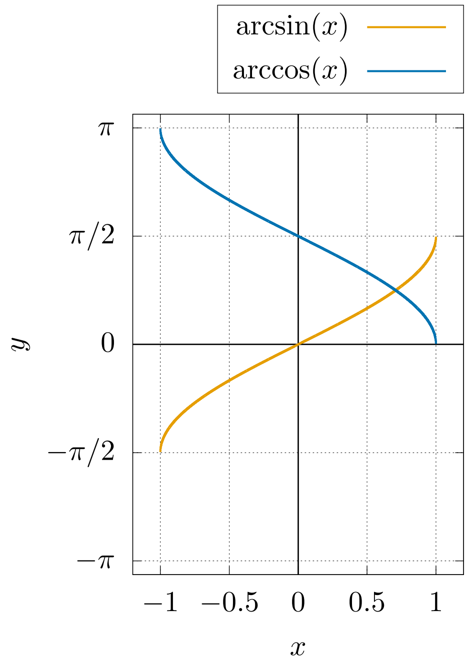
Arkuskotangens

Graf funkce $\operatorname{cotg} x$ je na obrázku 4. Platí $D(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ a $H(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R}$. Interval, na kterém je funkce prostá, je $(0, \pi)$. Definujeme funkci **arkuskotangens** $\operatorname{arccotg} x$ předpisem

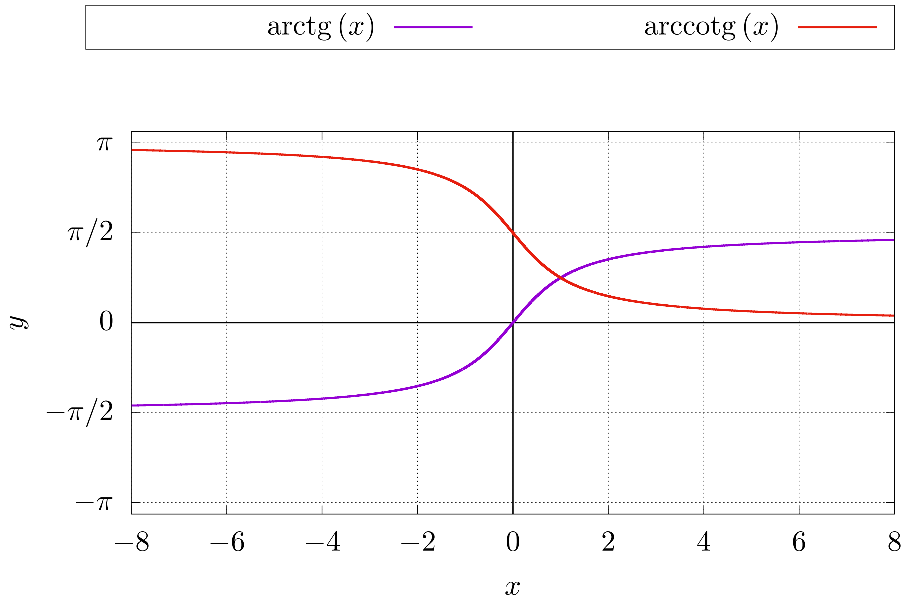
$$D(\operatorname{arccotg} x) = H(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R}\,, \quad H(\operatorname{arccotg} x) = (0, \pi)\,, \quad \operatorname{arccotg}(x) = y \Longleftrightarrow x = \operatorname{cotg} y\,. \tag{5}$$



Obrázek 4: Graf funkce kotangens. Zeleně je vyznačen interval, kde je funkce prostá. Ten zvolíme jako obor hodnot funkce arkustangens. Povšimněme si, že v bodech 0 a π jsou svislé asymptoty. Z nich se stanou vodorovné asymptoty funkce arkuskotangens.



Obrázek 5: Graf funkcí arkussinus a arkuskosinus.



Obrázek 6: Graf funkcí arkustangens a arkuskotangens.