POČÍTÁNÍ LIMIT

Počítat limitu z definice nebo ukazovat, že neexistuje, je náročné. Naštěstí se ukazuje, že stačí znát několik „základních limit" a pro složitější posloupnosti je počítat pomocí nich. Platí totiž:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\,, \quad \lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n\,, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,, \tag{1}$$

pokud příslušné limity existují a i všechny výrazy mají smysl. Proč je důležitý poslední dovětek? Výrazy

$$\infty - \infty\,, \quad \frac{a}{0}\,, \quad \frac{\infty}{0}\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad 0\cdot\infty \tag{2}$$

definované nejsou.

Polynom dělený polynomem

Nejprve se zamysleme nad limitami posloupností typu

$$a_n = \frac{P_k(n)}{P_l(n)} = \frac{c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1} + \cdots + c_1 n + c_0}{d_l n^l + d_{l-1}n^{l-1} + \cdots + d_1 n + d_0}\,, \tag{3}$$

kde $P_k(n)$ je nějaký polynom stupně k a P_l je polynom stupně l, c_i a d_i jsou nějaké koeficienty.

Zde mohou nastat tři situace:

- $k < l$: jestliže polynom dole má vyšší stupeň, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $k > l$: jestliže polynom nahoře má vyšší stupeň, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. O znaménku rozhoduje koeficient c_k u nejvyššího členu.
- $k = l$: jestliže polynomy mají stejný stupeň, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{c_k}{d_k}$.

Příklad 1. Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 - n}{4n^3 + 2n^2 + 1}\,. \tag{4}$$

První, o co bychom se mohli pokusit, je dosadit ihned výraz $+\infty$ za proměnnou n. Dostali bychom

$$\frac{\infty^2 - \infty}{4\infty^3 + 2\infty^2 + 1}\,. \tag{5}$$

Ale výrazy $\infty - \infty$ ani $\frac{\infty}{\infty}$ nejsou definované!

Abychom se vyhli nedefinovaným výrazům, učiníme následující trik: **z čitatele i jmenovatele vytýkáme nejvyšší mocninu n, která se vyskytuje ve jmenovateli**. V tomto případě to je n^3, takže vytýkáme

$$\frac{n^2 - n}{4n^3 + 2n^2 + 1} = \frac{n^3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}\,. \tag{6}$$

Nyní už můžeme použít pravidlo o součtu a podílu limit:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \frac{0-0}{4+0+0} = \frac{0}{4} = 0\,. \tag{7}$$

Takže

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 - n}{4n^3 + 2n^2 + 1} = 0\,. \tag{8}$$

Verze: 6. listopadu 2021

Příklad 2. Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+9n^4}{n^4-2n^2+3}\,. \tag{9}$$

Opět provedeme trik a vytkneme n^4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+9n^4}{n^4-2n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(n+9)}{n^4(1-2\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+9}{1-2\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}} = \frac{\infty+9}{1-0+0} = \infty\,. \tag{10}$$

Takže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+9n^4}{n^4-2n^2+3} = +\infty\,. \tag{11}$$

Příklad 3. Vypočítáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^4}{1+2n^3}\,. \tag{12}$$

Stejným způsobem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^4}{1+2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(\frac{1}{n^3}-n)}{n^3(\frac{1}{n^3}+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}-n}{\frac{1}{n^3}+2} = \frac{0-\infty}{0+2} = -\infty\,. \tag{13}$$

Příklad 4. Vypočítáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-1}{1+n+n^2-n^4}\,. \tag{14}$$

Opět provádíme stejný trik. Všimněme si, že stupeň polynomu nahoře i dole je stejný, takže výsledkem bude konečné, nenulové číslo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-1}{1+n+n^2-n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(3-\frac{1}{n^4})}{n^4(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-1)} = \frac{3-0}{0+0+0-1} = -3\,. \tag{15}$$

Příklad 5. Spočteme

$$\lim_{n\to\infty} (n-n^2)\,. \tag{16}$$

Pokud bychom chtěli ihned dosadit, dostali bychom

$$\lim_{n\to\infty} (n-n^2) = +\infty-\infty\,, \tag{17}$$

což je nedefinovaný výraz! Použijeme proto opět trik, vytkneme si n^2:

$$\lim_{n\to\infty} (n-n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2(\frac{1}{n}-1) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}-1) = +\infty\cdot(0-1) = -\infty\,. \tag{18}$$

Příklad 6. Zamysleme se trochu obecněji. Vyřešme limitu

$$\lim_{n\to\infty} (c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_1 n + c_0)\,. \tag{19}$$

Po vytknutí nejvyšší mocniny n^k uvidíme, že nás zajímá pouze koeficient c_k u nejvyšší mocniny, který rozhoduje o tom, zda limita bude $+\infty$ nebo $-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} (c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_1 n + c_0) = \lim_{n\to\infty} n^k \cdot \lim_{n\to\infty} (c_k + c_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + c_1\frac{1}{n^{k-1}} + c_0\frac{1}{n^k}) = +\infty\cdot c_k\,. \tag{20}$$

Takže pokud $c_k > 0$, limita bude $+\infty$, pokud $c_k < 0$, bude limita $-\infty$.

Věta o dvou strážnících

Zamysleme se nad posloupností

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}\,. \tag{21}$$

Nemůžeme použít aritmetiku limit, protože posloupnost v čitateli $(-1)^n$ limitu nemá, viz příklad výše. Přesto ale tušíme, že limita této posloupnosti bude nulová, protože do jmenovatele vstupují větší a větší čísla.

V těchto situacích se používá tvrzení, které se nazývá **věta o sevřené posloupnosti** nebo **věta o dvou strážnících** nebo též **věta o sendviči**.

Máme-li dvě posloupnosti $\left\{s_n^{\uparrow}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{s_n^{\downarrow}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro které platí:

1. Od jistého členu n_0 platí pro všechna $n > n_0$, že $s_n^{\downarrow} \le a_n \le s_n^{\uparrow}$,
2. $\lim_{n\to\infty} s_n^{\downarrow} = \lim_{n\to\infty} s_n^{\uparrow} = A$,

pak i

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A\,. \tag{22}$$

Posloupnost $\left\{s_n^{\uparrow}\right\}_{n=1}^{\infty}$ funguje jako „horní strážník“, posloupnost $\left\{s_n^{\downarrow}\right\}_{n=1}^{\infty}$ funguje jako „spodní strážník“. Protože je mezi ně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ „vmáčknutá“ a oba strážníci mají stejnou limitu, musí ji mít i $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

V našem příkladu můžeme najít takové dva strážníky. Horní strážník bude posloupnost

$$s_n^{\uparrow} = +\frac{1}{n^2} \tag{23}$$

a spodní strážník bude

$$s_n^{\downarrow} = -\frac{1}{n^2}\,. \tag{24}$$

Určitě platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2}\,. \tag{25}$$

Zároveň jistě platí, že

$$-\frac{1}{n^2} \le \frac{(-1)^n}{n^2} \le +\frac{1}{n^2}\,. \tag{26}$$

Použijeme tedy větu o dvou strážnících a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = 0\,. \tag{27}$$

Příklad 7. Zkoumejme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{n}{4\pi}\right)}{n}\,. \tag{28}$$

(Cvičení: napište prvních deset členů takové posloupnosti a vyznačte je do grafu.)

Víme, že

$$-1 \le \sin(kn) \le +1 \quad \text{pro libovolné } k \in \mathbb{R}\,. \tag{29}$$

Můžeme proto najít dva strážníky. Spodní strážník bude posloupnost $s_n^{\downarrow} = -\frac{1}{n}$ a horní strážník bude $s_n^{\uparrow} = +\frac{1}{n}$. Obě dvě posloupnosti mají limitu 0, takže

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{n}{4\pi}\right)}{n} = 0\,. \tag{30}$$

Příklad 8 (Malinko obtížnější)**.** Zkoumejme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + \cos^2 n}{n + \sin n}\,. \tag{31}$$

Opět tušíme, že díky n ve jmenovateli bude limita nulová. Kvůli goniometrickým funkcím musíme opět najít dva strážníky. Čitatel snadno můžeme omezit:

$$-2 \le \sin n + \cos^2 n \le 2 \tag{32}$$

a jmenovatel též:

$$n - 1 \le n + \sin n \le n + 1 \tag{33}$$

Takže můžeme vzít strážníky $s_n^{\uparrow} = \frac{+2}{n-1}$ a $s_n^{\downarrow} = \frac{-2}{n+1}$ (horní strážník je „největší čitatel ku nejmenšímu jmenovateli" a spodní strážník je „nejmenší čitatel ku největšímu jmenovateli"). Oba dva strážníci mají nulovou limitu, takže opět

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + \cos^2 n}{n + \sin n} = 0\,. \tag{34}$$

Limity s odmocninami

Příklad 9. Určíme

$$\lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n^2+4})\,. \tag{35}$$

Cvičení: zobrazte si graf funkcí x a $\sqrt{x^2+4}$. Dá se něco říci o chování pro $x \to +\infty$?

Pokud bychom dosadili, dostali bychom opět $\infty - \infty$, což není definované. Musíme proto použít další trik, kterému se říká **rozšíření sdruženým výrazem**. Potkáme-li někde výraz typu „$(\text{něco}) - \sqrt{\text{odmocnina}}$", rozšíříme ho výrazem s opačným znaménkem „$(\text{něco}) + \sqrt{\text{odmocnina}}$". V našem případě

$$n - \sqrt{n^2+4} = \left(n - \sqrt{n^2+4}\right) \cdot \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{n + \sqrt{n^2+4}} \tag{36}$$

a podívejme se, co se stane:

$$\left(n - \sqrt{n^2+4}\right) \cdot \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{n + \sqrt{n^2+4}} = \frac{n^2 - n\sqrt{n^2+4} + n\sqrt{n^2+4} - (n^2+4)}{n + \sqrt{n^2+4}} = \frac{n^2 - (n^2+4)}{n + \sqrt{n^2+4}} = \frac{-4}{n + \sqrt{n^2+4}}\,. \tag{37}$$

Kouzelně jsme se zbavili odmocniny v čitateli a dostali jsme konečné číslo. Ve jmenovateli nám zbyly dva výrazy, do kterých už ovšem můžeme dosadit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-4}{n + \sqrt{n^2+4}} = \frac{-4}{\infty + \infty} = 0\,. \tag{38}$$

Takže

$$\lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n^2+4}) = 0\,. \tag{39}$$

Příklad 10.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}\,. \tag{40}$$

Po dosazení by nám vyšlo ∞/∞, což není definované. Použijeme tedy jiný trik: vytkneme n^2 ve jmenovateli (do odmocniny ho převedeme jako $\sqrt{\frac{1}{n^4}}$). Pak už dostaneme konečný výraz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n^4}}\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}} = 1\,. \tag{41}$$

Limity s mocninnými funkcemi

Příklad 11. Vypočítejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3\cdot 5^n}{4 - 8\cdot 2^n + 3^n}\,. \tag{42}$$

Tak jako jsme u polynomů vytýkali nejvyšší mocninu ve jmenovateli, zde budeme vytýkat **mocninu s nejvyšším základem ve jmenovateli**. Zde máme 3^n, takže vytýkáme

$$\frac{2^n + 3\cdot 5^n}{4 - 8\cdot 2^n + 3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n}{4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n - 8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{3}\right)^n} \tag{43}$$

a nyní můžeme dosadit. Vzpomeňme si na geometrickou posloupnost, viz výše.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3\cdot 5^n}{4 - 8\cdot 2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n}{4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n - 8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{3}\right)^n} = \frac{0 + 3\cdot\infty}{0 - 0 + 1} = +\infty\,. \tag{44}$$

Příklad 12. Vypočítejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3\cdot 2^n + 4}\,. \tag{45}$$

Opět vytkneme 2^n a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3\cdot 2^n + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 + \frac{4}{2^n}} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}\,. \tag{46}$$

Příklad 13. Vypočítejme (používáme zde desetinnou tečku namísto desetinné čárky)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(0.04)^{n+1} - 2}{(0.2)^{2n} + 4}\,. \tag{47}$$

Výpočet je jednoduchý, jen si musíme vzpomenout na pravidla pro počítání s mocninami:

$$\frac{(0.04)^{n+1} - 2}{(0.2)^{2n} + 4} = \frac{0.04\cdot(0.04)^n - 2}{(0.2^2)^n + 4} = \frac{0.04\cdot(0.04)^n - 2}{(0.04)^n + 4}\,, \tag{48}$$

takže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(0.04)^{n+1} - 2}{(0.2)^{2n} + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{0.04\cdot(0.04)^n - 2}{(0.04)^n + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{0-2}{0+4} = -\frac{1}{2}\,. \tag{49}$$

Shrnutí a závěrečné poznámky

Typické příklady na limity posloupností spadají do jedné ze čtyř kategorií:

- **Limity typu „polynom/polynom“**. Zde je situace jednoduchá, vytkneme člen s nejvyšší mocninou ve jmenovateli. Mohou nastat tři situace, které se odvíjejí od stupňů jednotlivých polynomů.
- **Limity s mocninnými funkcemi**. Zde se vytýká mocnina s nejvyšším základem ve jmenovateli. Jinak všechno stojí na pochopení geometrické posloupnosti.
- **Limity s periodickými funkcemi a $(-1)^n$**. Zde se používá věta o dvou strážnících. Důležité je nalézt správně horního a spodního strážníka.
- **Limity s odmocninou**. Zde se vyplatí většinou rozšiřovat sdruženým výrazem. Vyžadují asi nejvíce cviku.

Později se seznámíme s tzv. l'Hospitalovým pravidlem, které nám umožní počítat některé limity daleko rychleji. Vyžaduje ale umění derivací.