POSLOUPNOSTI

Zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ přiřazuje přirozeným číslům reálná čísla. To znamená, že číslům $1, 2, 3, \cdots$ přiřazuje nějaká čísla $a_1, a_2, a_3, \cdots$. Tomuto zobrazení říkáme **posloupnost**. Jako celek ji označujeme symbolem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. (Někdy též může začínat nulou.)

Řekneme, že posloupnost je:

- **rostoucí**, jestliže $a_m > a_n$ pro všechna $m > n$,
- **klesající**, jestliže $a_m < a_n$ pro všechna $m > n$,
- **neklesající**, jestliže $a_m \geq a_n$ pro všechna $m > n$,
- **nerostoucí**, jestliže $a_m \leq a_n$ pro všechna $m > n$.

Limita posloupnosti a její výpočet přímo z definice

Chtěli bychom definovat, co to znamená, že se „členy posloupnosti blíží nějaké hodnotě A s rostoucím n“. Učiníme to následovně:

1. Zvolíme si číslo $\epsilon > 0$ a kolem hodnoty A vytvoříme tzv. ϵ-okolí. To bude interval $(A - \epsilon, A + \epsilon)$, který bude mít šířku 2ϵ.
2. Podíváme se, zda od nějakého členu a_{n_0} budou již všechny členy posloupnosti ležet v tomto zvoleném okolí. To znamená, pro všechna $n > n_0$ musí platit rovnice
$$A - \epsilon < a_n < A + \epsilon \,. \tag{1}$$
3. Pakliže je tato podmínka splněna, zmenšíme ϵ a znova podmínku ověříme.
4. Jestliže je podmínka splněna pro **libovolně malé** ϵ (ale stále nenulové, to by totiž nikdy nefungovalo), řekneme, že A **je vlastní limitou posloupnosti** a_n **pro** n **jdoucí do nekonečna** a píšeme
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \,. \tag{2}$$

Obdobně můžeme definovat tzv. nevlastní limitu v $+\infty$. Místo okolí nějaké hodnoty zvolíme číslo L a vytvoříme L-okolí bodu $+\infty$, což bude interval $(L, +\infty)$. Bude nás tedy zajímat, zda od nějakého členu a_{n_0} padnou všechny členy posloupnosti do takového okolí, tzn. pro všechna $n > n_0$ musí platit

$$L < a_n \,. \tag{3}$$

Jestliže se to povede, L zvýšíme a proces opakujeme. Jestliže nerovnost bude splněna pro (tentokrát) **libovolně velké** L, řekneme, že $+\infty$ **je nevlastní limitou posloupnosti** a_n **pro** n **jdoucí do nekonečna** a píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \,. \tag{4}$$

Analogicky definujeme limitu v $-\infty$.

Příklad 1 (Vlastní limita z definice). Dokažme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1 \,. \tag{5}$$

Verze: 31. října 2021

- Kolem jedničky budeme konstruovat okolí. Zkusme nejprve vzít nějaké konkrétní ϵ, např $\epsilon = 1$. Potřebovali bychom pak splnit nerovnici
$$1 - 1 < \frac{n+2}{n} < 1 + 1\,, \tag{6}$$
tedy
$$0 < \frac{n+2}{n} < 2\,. \tag{7}$$
První nerovnost bude splněna vždy, protože dělíme dvě kladná čísla. Druhou nerovnost převedeme na tvar
$$n + 2 < 2n \implies n > 2\,. \tag{8}$$
Všechny členy počínaje třetím členem už tedy vyhovují podmínce: jsou v 1-okolí bodu 1. Hledané n_0 je tedy v tomto případě 3.
- Zkusme ϵ zmenšit a vyzkoušejme $\epsilon = 1/2$. Řešíme tedy nerovnici
$$\frac{1}{2} < \frac{n+2}{n} < \frac{3}{2}\,. \tag{9}$$
Z první nerovnice dostáváme podmínku $2n + 4 > n$, tj. $n > -4$. Z druhé nerovnice dostáváme podmínku $3n > 2n + 4$, tedy $n > 4$. Zvolíme-li $n_0 = 5$, pak pro všechna vyšší n je podmínka splněna.
- Takhle bychom mohli pokračovat dál a volit postupně menší a menší ϵ. Ale my podmínku potřebujeme ověřit pro libovolně malé ϵ. Proto pojďme řešit naprosto obecnou nerovnici:
$$1 - \epsilon < \frac{n+2}{n} < 1 + \epsilon\,. \tag{10}$$
Z první nerovnice dostáváme
$$(1-\epsilon)n < n + 2 \implies \epsilon n > -2 \implies n > -\frac{2}{\epsilon}\,, \tag{11}$$
takže ta je splněna pro všechna přirozená n. Z druhé nerovnice dostáváme
$$(1+\epsilon)n > n + 2 \implies \epsilon n > 2 \implies n > \frac{2}{\epsilon}\,. \tag{12}$$
Jakmile si tedy vybereme konkrétní ϵ, najdeme k němu dostatečně vysoké n_0 tak, že nerovnice $1 - \epsilon < \frac{n+2}{n} < 1 + \epsilon$ bude pro všechna $n > n_0$ splněna.

  Kdyby nám někde vyšlo, že n je omezené nějakou horní hodnotou, tak by to znamenalo, že nějaké členy posloupnosti jsou mimo okolí, tím pádem není splněna podmínka pro existenci limity. Nic takového se ale nestalo, n je omezené pouze zdola (číslem $2/\epsilon$).
- Protože to lze udělat **pro každé (libovolně malé)** $\epsilon > 0$, dokázali jsme, že skutečně $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$.

Příklad 2 (Nevlastní limita z definice)**.** Dokažme, že
$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty\,. \tag{13}$$
Zvolme si číslo L. Potřebujeme splnit nerovnici
$$L < n^2\,. \tag{14}$$
Zjevně stačí zvolit $n > \sqrt{L}$. Číslo L může být libovolně velké, stejně najdeme člen n_0 takový, že pro všechna vyšší n už bude nerovnice splněna. Proto jsme splnili podmínku a ověřili jsme, že $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Příklad 3 (Limita je určena jednoznačně)**.** Pokud limita posloupnosti existuje, pak je určena jednoznačně. To je jasné, představme si, že máme dvě limity $A \neq B$. Kolem nich si můžeme udělat dvě různá okolí. Je jasné, že při dostatečně malých ϵ se tato dvě okolí nebudou protínat. To znamená, pokud všechny členy posloupnosti leží v jednom okolí, nemůžou ležet v druhém okolí. Tím pádem může být limita právě jedna.

Podposloupnosti

Mějme nějakou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která má limitu A. Jestliže z posloupnosti odstraníme konečný počet členů, její limita se nemůže změnit. To je jasné, protože v definici limity podmínka zněla tak, že nekonečně mnoho členů leží v okolí, pokud z nekonečného množství ubereme konečný počet členů, stále jich bude nekonečně mnoho.

Můžeme si ale vzít i nekonečný počet členů. Například si můžeme vytvořit novou posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že vezmeme z původní posloupnosti každý sudý člen, tzn. $b_1 = a_2$, $b_2 = a_4$, $\dots$, $b_n = a_{2n}$, atd. O posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ pak říkáme, že je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo také, že je **podposloupností**. Píšeme $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Platí následující tvrzení: jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ pro jakoukoli podposloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad 4. Kdybychom vybrali každý třetí člen posloupnosti $a_n = \frac{n+2}{n}$, dostali bychom podposloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ danou předpisem

$$b_n = a_{3n} = \frac{(3n)+2}{(3n)} = \frac{3n+2}{3n}\,. \tag{15}$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{3n}\,. \tag{16}$$

Příklad 5. Tvrzení o podposloupnosti se dá využít k důkazu toho, že nějaká limita posloupnosti neexistuje. Například lze snadno ukázat, že posloupnost $a_n = (-1)^n$ nemá limitu. Vybereme-li si totiž jenom sudé členy, dostaneme posloupnost $\{b_n\}$, $b_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1^n = 1$. Vybereme-li si naopak jenom liché členy, dostaneme posloupnost $\{c_n\}$, $c_n = a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \cdot (-1)^{2n} = -1$. Protože

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} c_n\,, \tag{17}$$

nemůže mít původní posloupnost $\{a_n\}$ limitu.