DETERMINANT

Determinant je číslo definované pro čtvercovou matici, které nám pomůže určit, jestli je matice regulární nebo singulární. Označujeme jej symbolem $\det \mathbf{A}$ anebo $|\mathbf{A}|$.

Platí následující tvrzení:

$$\boxed{\text{čtvercová matice } \mathbf{A} \text{ je singulární} \iff \det \mathbf{A} = 0}\,. \tag{1}$$

Jak ho spočítat?

- **řád 1:** matice $\mathbf{A} = (a_{11})$ má determinant $\det \mathbf{A} = a_{11}$.
- **řád 2:** matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ má determinant $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Takže od součinu prvků na hlavní diagonále odečítáme součin prvků na vedlejší diagonále.
- **řád 3:** matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ má determinant, který je složen z šesti členů. Namísto obecného vzorečku si představíme mnemotechnickou pomůcku, podle které se počítá. Nazývá se **Sarrusovo pravidlo**:

  1. Pod matici si napíšeme ještě jednou její první dva řádky.
  2. Tři součiny se znaménkem plus bereme podél hlavní diagonály.
  3. Tři součiny se znaménkem minus bereme podél vedlejší diagonály.

  Příklad 1. Spočteme

  $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}\,. \tag{2}$$

  Napíšeme si schéma

  $$\begin{matrix} |3 & -2 & 6| \\ |1 & -1 & 1| \\ |0 & 4 & 1| \\ 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \tag{3}$$

  a budeme počítat:

  $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 6 + 0 \cdot (-2) \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 = \tag{4}$$

  $$= -3 + 24 + 0 - 0 - 12 + 2 = 11\,. \tag{5}$$

- **vyšší řády:** pro počítání determinantů matic vyšších řádů se používá nejčastěji tzv. **Laplaceův rozvoj** (rozvoj podle řádku/sloupce). Opět si napíšeme místo obecného vztahu princip, kterým se provádí:

  1. Vybereme si určitý řádek nebo sloupec (nejčastěji takový, ve kterém je nejvíce nul).
  2. Elementy v řádku označíme znaménky. Prvek a_{ij} dostane znaménko rovné $(-1)^{i+j}$, tzn. $+1$ je-li součet sloupce a řádku sudé číslo, -1, je-li liché.

Verze: 23. října 2021

3. Sestavíme tzv. minory matice. Minor získáme vždy tak, že vynecháme právě zvolený řádek i sloupec.
4. Spočítáme determinanty jednotlivých minorů.
5. Výsledný determinant získáme tak, že projíždíme všechny členy v řádku (sloupci) a sčítáme součiny „prvek krát znaménko krát determinant minoru“.

Na první pohled to vypadá složitě, ale není tomu tak.

Příklad 2. Spočítejme determinant

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \tag{6}$$

1. Vybereme si řádek s nejvíce nulami, v našem případě čtvrtý.
2. Každému elementu v řádku přiřadíme znaménko podle výše uvedeného pravidla. Například člen a_{14} má součet $1 + 4 = 5$, což je liché číslo, takže mu přiřadíme -1. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} . \tag{7}$$

3. Sestavíme minory, které budeme označovat symbolem $\mathbf{M}_i$. Vždy budeme vynechávat čtvrtý řádek. Jako první vynecháme první sloupec a dostaneme matici

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Pak vynecháme druhý sloupec a dostaneme matici

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Pak vynecháme třetí sloupec a dostaneme matici

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Nakonec vynecháme čtvrtý sloupec a dostaneme

$$\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

4. Všem těmto minorům spočteme determinanty. Ve skutečnosti nás ale budou zajímat pouze $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_4$, protože je nakonec budeme násobit daným prvkem, který je u $\mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}_3$ nula.

$$\det \mathbf{M}_1 = -31 , \quad \det \mathbf{M}_4 = 69 . \tag{12}$$

5. Nyní můžeme psát:

$$\det \mathbf{B} = 1 \cdot (-1) \cdot (-31) + 0 \cdot (+1) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (+1) \cdot 69 = 31 + 69 = 100 . \tag{13}$$

Příklad 3. Určíme

$$\det \mathbf{K} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -9 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \tag{14}$$

Máme mnoho možností. Zvolme například rozvoj podle třetího sloupce. Takže máme schéma

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix} \tag{15}$$

a počítáme

$$\det \mathbf{K} = (+1) \cdot (-9) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (+1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -9 \cdot \det \mathbf{M}_3 + 3 \cdot \det \mathbf{M}_5 \,. \tag{16}$$

Musíme spočítat oba dva determinanty. Pro $\det \mathbf{M}_3$ můžeme ihned použít rozvoj podle prvního sloupce:

$$\det \mathbf{M}_3 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -14 \,. \tag{17}$$

Pro $\det \mathbf{M}_5$ můžeme použít rozvoj podle druhého sloupce:

$$\det \mathbf{M}_5 = (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -28 + (-9) = -37 \,. \tag{18}$$

Celkově

$$\det \mathbf{K} = (-9) \cdot (-14) + 3 \cdot (-37) = 126 - 111 = 15 \,. \tag{19}$$

Determinant pomocí řádkových (sloupcových úprav)

Výpočet determinantu můžeme provádět i tak, že provádíme podobné řádkové (nebo sloupcové) úpravy v matici. Využíváme přitom tvrzení, že **determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále**. Je však třeba dát si obrovský pozor, neboť řádkové úpravy nemůžeme provádět „bezmyšlenkovitě“, jako např. u Gaussovy eliminace.

- Při prohození dvou řádků (sloupců) se změní znaménko determinantu.
- Při násobení řádku (sloupce) číslem α musíme determinant vydělit číslem α.
- Libovolné dva řádky můžeme sečíst, determinant pak zůstává stejný.

Příklad 4. Spočteme

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{20}$$

pomocí řádkových úprav.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -4 & -8 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \tag{21}$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 9 & -12 \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \cdot 4 \cdot (-9) \cdot (-10) = 15\,. \tag{22}$$

Příklad 5. Spočteme determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & -1 \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Můžeme opět postupovat Sarrusovým pravidlem:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 6 - 0 - 0 + 8 = 0\,. \tag{24}$$

Nebo můžeme postupovat řádkovými úpravami:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{25}$$

Determinant je nulový, to odpovídá tomu, že je původní matice singulární.