Пусть X, Y — множества. `Функция (отображение)` f из множества X в множество Y — правило, в соответствии с которым всякому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие `единственный` элемент $y \in Y$. Здесь X — область определения; Y — область значений.

Обозначение. $f : X \to Y$ *или* $X \xrightarrow{f} Y$; $f(x) = y$ *или* $f : x \mapsto y$.

Если $f(x) = y$, то y — образ x относительно f, а x — прообраз y относительно f.

Если $U \subseteq X$, то множество $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subseteq B$ называется `образом` множества U относительно f.

Если $V \subseteq Y$, то $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ — `полный прообраз` множества Y относительно f.

Функция $f : X \to Y$ называется `инъекцией`, если $\forall x_1, x_2 \in X$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Функция $f : X \to Y$ называется `сюръекцией`, если $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

Функция $f : X \to Y$ называется `биекцией`, если f — сюръекция и инъекция.

Упражнение. Приведите пример функции, которая

(1) не является ни сюръекцией, ни инъекцией;
(2) является сюръекцией, но не является инъекцией;
(3) является инъекцией, но не является сюръекцией;
(4) является биекцией.

Пусть X — множество, $n \in \mathbb{N}$. `Алгебраической операцией` на множестве X называется любая функция вида $f : X^n \to X$. Здесь n — местность (арность) алгебраической операции f.

Примеры алгебраических операций:

(1) $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$+ : (m, n) \mapsto m + n$,
(2) $\times : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$\times : (m, n) \mapsto mn$,
(3) $f : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}$,
$f : (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) \mapsto 4(n_1 + n_2 + n_3)n_4 + n_5$,

(4) $\mathrm{Mass} : V^3 \to V$, где V — плоскость

$\mathrm{Mass} : (A, B, C) \mapsto D$, где центр масс треугольника с вершинами A, B и C (веса точек одинаковы).

`Алгебраической системой` на множестве X называется упорядоченный набор $(X, f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots)$, где f_i — алгебраическая операция на множестве X местности n_i.

Примеры алгебраических систем:

(1) $(\mathbb{N}, +)$,
(2) $(\mathbb{R}, +)$,
(3) $(\mathbb{Q}^*, \times)$,
(4) $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$,

`Изоморфизмом алгебраических систем` $(X, f_1, \ldots, f_k, \ldots)$, $(Y, g_1, \ldots, g_k, \ldots)$ называется функция $\varphi : X \to Y$ такая, что

(1) φ — биекция,
(2) функция φ сохраняет операции:

$$\forall i \ \forall x_1, x_2, \ldots, x_{n_i} \in X \ \varphi(f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})) = g_i(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n_i})).$$

Алгебраические системы изоморфны, если между ними можно установить изоморфизм.

Пример изоморфных алгебраических систем: $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$,

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},$$
$$\varphi : x \mapsto 2^x,$$
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ \ \varphi(x_1 + x_2) = 2^{x_1 + x_2} = 2^{x_1} 2^{x_2} = \varphi(x_1)\varphi(x_2).$$