Упражнение 1. *Убедиться, что алгебраическая система* $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}, +, \cdot)$ *— кольцо, где*

$$(z_1, z_2) + (z_3, z_4) = (z_1 + z_3, z_2 + z_4);$$

$$(z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4) = (z_1 \cdot z_3, z_2 \cdot z_4), z_i \in \mathbb{C}.$$

Найти все делители нуля этого кольца.

Упражнение 2. *Доказать, что* $\mathbb{Z}_n$ *— поле* $\Leftrightarrow$ n *— простое число.*

Упражнение 3. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x + 2z = 1, \\ y + 2z = 2, \\ 2x + z = 1: \end{cases}$$

а) в поле $\mathbb{Z}_3$*; б) в поле* $\mathbb{Z}_5$.

Упражнение 4. *Доказать, что порядок единицы поля в группе по сложению либо бесконечен, либо просто число.*

Упражнение 5. *Доказать, что группа положительных рациональных чисел по умножению не изоморфна группе всех рациональных чисел по сложению.*

Упражнение 6. *Доказать, что группа положительных рациональных чисел по умножению не изоморфна группе всех рациональных чисел по сложению.*

Упражнение 7. *Доказать, что в кольце с единицей* e *коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом кольца. Подсказка: рассмотрите выражение* $(a + b)(e + e)$.

Упражнение 8. *Доказать, что любое подполе поля* $\mathbb{C}$ *содержит подполе рациональных чисел. Подсказка: найдите в этом подполе единицу.*