

Задача 1. Пусть $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \alpha \cdot)$ — векторное пространство функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} над полем \mathbb{R} . Доказать линейную независимость следующих систем векторов этого пространства:

- (1) $1, \sin x, \cos x$ (1 — функция, принимающая на всём \mathbb{R} значение 1),
- (2) $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx$ (докажите базу индукции, в потом продифференцируйте линейную комбинацию два раза и грамотно примените предположение индукции).

Задача 2. При каких значениях λ из линейной независимости векторов u и v следует линейная независимость векторов $\lambda u + v$ и $v + \lambda u$.

Задача 3. Найти все значения λ при которых вектор $(5, 9, \lambda)$ совпадает с какой-нибудь линейной комбинацией векторов:

$$(4, 4, 3), (7, 2, 1), (4, 1, 6).$$