Программа курса “ВЫСШАЯ АЛГЕБРА”, 1 курс ММФ, 2018/19 уч. год

Лектор – Ф. А. Дудкин

1-й семестр

Введение. Группы, кольца, поля

Математическая символика. Алгебраическая операция, алгебраическая структура, изоморфизм. Аксиоматика групп, колец, полей, примеры. Подгруппы, подкольца, подполя [3, гл. 1, § 1, 2, 3].

Поле **C** комплексных чисел: определение, единственность, существование, геометрическое описание сложения и умножения, формула Муавра, извлечение корней [3, гл. 1, § 5].

Группа подстановок: проверка аксиом, разложение на циклы, на транспозиции, декремент и четность подстановки, четность произведения, подгруппа четных подстановок [3, гл. 4, § 1, 3, 4, 6].

Кольцо квадратных матриц: проверка аксиом, алгебра матриц над полем, разложение матрицынад полем в произведение диагональной и трансвекций [3, гл. 1, § 9].

Определитель матрицы над полем: задание как функции элементов матрицы, поведение при транспонировании, полилинейность определителя как функции системы строк, определитель треугольной и полураспавшейся матриц. Определитель произведения матриц. Критерий обратимости матрицы над полем. Разложение определителя по строке. Формула для обратной матрицы и решение крамеровых систем линейных уравнений [3, гл. 2, § 4, 5].

Определитель и основные линейные группы – общая, специальная, ортогональная, унитарная [3, гл.4, § 1].

Векторные пространства

Аксиоматика, примеры [3, гл. 1, § 7]. Линейные комбинации, зависимость и независимость, эквивалентность систем векторов. Теорема о замене, базис и ранг системы векторов, равенство рангов эквивалентных сис-тем. Базис пространства, размерность. Координаты вектора, изоморфизм конечномерного векторного пространства и пространства столбцов (строк) над полем. Замена координат вектора при замене базиса [3, гл. 2, § 2].

Подпространства конечномерного пространства, их размерность, сумма, пересечение, прямая сумма, связь между их размерностями. Фактор-пространство, его базис и размерность [3, гл. 5, § 1, гл. 9, § 3].

Системы линейных уравнений

Ранг матрицы, совпадение строчного, столбцового и минорного ранга, ранг произведения матриц. Критерий совместности системы линейных уравнений. Общее решение. Связь между решениями неоднородных и соответствующих однородных систем. Фундаментальные системы решений однородной системы. Задание линейных многообразий системами линейных уравнений. Отыскание базисов суммы и пересечения подпространств и линейных многообразий. Геометрическое описание множества решений над **R** [3, гл. 2, § 3, 5; гл. 5, § 2]. Теоремы Фредгольма [9, § 85].

Кольца многочленов от одной переменной

Определение, проверка аксиом. Алгоритм деления с остатком. Корни и значения: теорема Безу, число корней и формулы Виета, производная и кратные корни, формула Тейлора, интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона [3, гл. 3, § 1; 2].

Наибольший общий делитель и алгоритм Евклида. Критерий разрешимости линейного диофантова уравнения $fu+gv=h$. Свойства взаимно простых многочленов. Общее решение уравнения $fu+gv=h$. Разложение на множители в алгебремногочленов $K[x]$. Разложение на множители в кольцах $\mathbf{Z}[x]$ и$\mathbf{Q}[x]$[3, гл. 3, § 3, 4].

Вложение целостного кольца в поле частных. Поле рациональных функций и разложение на простейшие дроби [3, гл. 3, § 10].

Гомоморфизмыи идеалы колец,фактор-кольца [3, гл. 9, § 2].Кольца вычетов и поля вычетов,характеристика поля.Фактор-алгебра алгебры многочленов, теорема о существовании корня и конечные поля [3, гл. 9, § 5].

Кольца многочленов от нескольких переменных

Определение и теорема о кольце многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены: определение, примеры и основная теорема о симметрических многочленах. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и следствие о неприводимых многочленах над **C** и **R**[3, гл. 3, § 3, 4]. *Дискриминант многочлена и формулы Ньютона для степенных сумм. Результант пары многочленов, выражение дискриминанта через результант, результант и исключение неизвестных* [3, гл. 3, § 7, 8, 9; 4, I, гл. 6, § 2].

Примечание: Темы, выделенные курсивом, читаются при наличии времени.

В конце семестра – экзамен.

2-й семестр

Линейные отображения векторных пространств

Определение, примеры. Теорема о свободе и матрица линейного отображения (оператора) в данной паре базисов (данном базисе), координаты образа вектора, замена матрицыпри замене базисов. Алгебра линейных операторов, изоморфизм с алгеброй матриц.

Образ, ядро, ранг и дефект линейного отображения. Обратимые операторы [3, гл. 3, § 3, гл. 6, § 1; 4, II, гл. 2, § 1-3].
Собственные векторы, собственные значения и характеристический многочлен линейного оператора, диагонализируемые операторы. Инвариантные подпространства, сужение на подпространстве и индуцирование оператора на фактор-пространстве [3, гл. 6, § 1, 2].
Нильпотентные операторы: определение, недиагонализируемость, классификация с точностью до подобия [16].
Ядерно-образные разложения. Корневые подпространства и корневое разложение [16; 1, гл.6, § 4, 5].
Жорданова форма матрицы и жорданов базис пространства относительно линейного оператора, спектр которого содержится в поле скаляров. Задача о подобии матриц (линейных операторов) в этом случае. Теорема Гамильтона–Кэли [16; 2, II, гл. 2, § 4]. Многочлены от матриц, вычисление через минимальный многочлен и через жорданову форму матрицы. Функции от матриц, представление многочленами и ряды от матриц [16; 1, гл. 6, § 4, 5; 2, II, гл. 2, гл. 7].

Линейные отображения евклидовых и эрмитовых пространств

Аксиоматика евклидовых и эрмитовых пространств, примеры. Длина вектора и угол между векторами: неравенство Коши--Буняковского, неравенство треугольника, тождество параллелограмма, теорема Пифагора.
Ортогональные и ортонормированные системы, процесс ортогонализации Грама--Шмидта и изоморфизмы евклидовых (эрмитовых) пространств. Ортогональное дополнение к подпространству, ортогональные разложения пространства и проекторы на подпространство, метрические пространства и расстояние от точки до подпространства в евклидовых (эрмитовых) пространствах.[3, гл. 5, § 4, 5; 4, II, гл. 3, § 1, 2].
Сопряженность линейных отображений евклидовых (эрмитовых) пространств относительно скалярного произведения, связь между их матрицами.
Симметрические и эрмитовы (самосопряженные) операторы и матрицы: определение, вещественность спектра, канонический вид, спектральное разложение иследствие для матриц.
Кососимметрические и косоэрмитовы операторы и матрицы: определение, расположение спектра, канонический вид и следствие для матриц.
Ортогональные и унитарные операторы и матрицы: определение, расположение спектра, канонический вид и следствие для матриц.
Нормальные операторы и матрицы: определение, канонический вид в и следствие для матриц. [3, гл. 6, § 3; 4, II, гл. 3, § 3].
Сингулярные числа линейного отображения и сингулярное разложение матрицы. Полярное разложение линейного оператора [9, § 78, 79; 12, гл. 3, § 16].
Норма линейного отображения: определение, простейшие свойства. Норма и сингулярные числа линейного отображения, норма и спектральный радиус нормального оператора [9, § 82–83; 14, § 87–89].
Ортогональные проекторы и серия углов между двумя подпространствами евклидова пространства .

Билинейные и квадратичные формы

Определение и примеры, матрица формы в данном базисе, замена матрицы при замене базиса, инвариантность ранга матрицы, вырожденные формы и правое (левое) ядро формы, симметрические и кососимметрические формы, разложение в их сумму, квадратичные формы, соответствие с симметрическими формами, матрицы квадратичных форм.
Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа (матричный вариант). Сигнатура, положительная (отрицательная) определенность и полуопределенность для вещественных квадратичных форм, инвариантность сигнатуры, теорема Якоби и критерий Сильвестра [3, гл. 5, § 3; 4, II, гл. 1, § 4].
Выражение квадратичной формыв евклидовом пространстве через самосопряженный оператор и приведение ее к главным осям [3, гл. 6, § 3]. Экстремумы квадратичной формы на единичной сфере евклидова пространства. Канонизация пары квадратичных форм, одна из которых знакоопределенная.

Линейные алгебры и группы

Разложение группы на смежные классы ее подгруппы. Действие группы на множестве – орбиты, стабилизаторы, теорема о мощности орбиты, действие на орбите и теорема Бернсайда о числе орбит. Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы и фактор-группы, простые группы. Центры, коммутаторы и коммутанты, прямые произведения. *Матричное и геометрическое описание групп $\boldsymbol{SO_2}$ и $\boldsymbol{SU_2}$. Простота группы $\boldsymbol{SO_3}$ поворотов трехмерного евклидова пространства. [3, гл. 4, § 5, 6; 14, гл. 10, § 1, 2, 3, 5]*
Алгебра кватернионов $\boldsymbol{H}$: определение, матричное представление, норма кватерниона и обратный кватернион, мультипликативность нормы и тождество Эйлера, связь с группой $\boldsymbol{SU_2}$. Связь умножения кватернионов со скалярным и векторным произведением в $\boldsymbol{R^3}$.Централизатор кватерниона и центр алгебры кватернионов. Характеризация чисто мнимых кватернионов. Параметризация группы $\boldsymbol{SO_3}$ поворотов $\boldsymbol{R^3}$с помощью кватернионов. [3, гл. 11, § 6].
<u>Примечание:</u> Темы, выделенные курсивом, читаются при наличии времени.

В конце семестра – потоковая контрольная работа и экзамен.

Темы и типичные задачи семинаров
1-й семестр
Группы, кольца, поля

0. Множества и отображения [18, № 2.1, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.11а, б, 1.5].
1. Алгебраические операции, группы, подгруппы, порядок элемента [18, № 54.1, 55.1-55.3, 56.1, 56.7, 56.14, 56.8, 56.15а] или [19, № 1634 1)-10), 1636, 1635, 1639, 1642, 1649, 1650, 1646, 1647].
2. Кольца и поля, кольцо вычетов по модулю n [18, № 63.1, 63.3, 63.31, 63.12, 66.19, 63.11а] или [19, № 1734, 1735, 1736, 1741, 1742, 1743, 1754, 1755, 1756].
3. Поле комплексных чисел, квадратные и кубические уравнения [18, № 20.1а, 20.11б, г, 21.1а-ж, 21.9а, 28.2з (все корни), 22.8а] или [19, № 3, 4, 15а, 17а, 43, 49].
4. Группы подстановок, разложение на циклы и транспозиции [18, № 3.1а, 3.2а, 3.3а, 3.4а, 56.3а, 56.32а, 3.6а, 3.7а, 3.12, 3.14, 3.17, 3.22] или [19, № 170, 178, 153, 164, 177, 182, 184, 1658].
5. Кольцо матриц, разложение в произведение диагональной матрицы и трансвекций [18, № 18.1а, 17.1а–в, 17.4, 17.12–17.15, 17.20, 19.2, 17.22, разложить матрицу из № 18.8к] или [19, № 790, 802–805, 811, 814–818, 820–822, разложить матрицы из № 790].
6. Определитель матрицы: способы вычислений [18, № 9.1а, 9.2а, 10.1а, 10.2, 10.3, 10.4а, б, 13.1а, 13.2а] или [19, № 45, 197, 200–204, 279, 280].
7. Определитель матрицы: применение к системам линейных уравнений и обращению матриц [18, № 14.1, 8.6б, г, 18.8в, з, 18.9д, 18.10а, 18.12] или [19, № 75, 289, 299, 305, 843, 935, 864].
8. Определитель, след и матрицы специального вида [18, № 7.16, 18.13, 18.14, 19.6, 19.5, 19.7, 19.26, 19.27, 19.14, 19.19] или [19, № 839, 873, 216, 217, 888, 889, 538, 893, 894, 896, 911, 912].
9. Контрольная работа.

Векторные пространства и линейные уравнения

10. Векторные пространства, линейная зависимость, подпространства [18, № 34.1, 34.2, 34.3, 34.10а, 34.11, 34.14б, 35.1–35.4, 6.11, 6.14] или [19, № 1821, 1277, 1280, 1290–1293, 1301–1305, 651, 666, 1284, 1824, 1828].
11. Ранг матрицы, линейные оболочки систем векторов [18, № 7.1а, 7.2г, 35.11б, 7.5–7.8] или [19, № 608, 619, 1311, 626, 627, 629, 631, 633, 635].
12. Решения системы линейных уравнений. Обратная задача [18, № 8.1а, 8.2е, 8.4а, 35.16а, 49.10а] или [19, № 690, 712, 724, 1312, 1330, 1877].
13. Применения: базисы суммы и пересечения подпространств, прямые суммы, целочисленные системы [18, № 35.15а, 35.18, 35.21, 8.24б] или [19, № 1320, 1328, 1329, 578 (найти все целочисленные решения)].
14. Коллоквиум.

Кольца многочленов

15. Деление с остатком, схема Руффини–Горнера, простые и кратные корни, формулы Виета, формула Тейлора, интерполяция [18, № 25.1а, 26.1б, 26.2а, 26.3а, 30.1а, 30.2, 30.3, 30.9, 30.10] или [19, № 546а, 549а, 551а, б, 570, 631а, 632а, 643].
16. Целочисленные многочлены: рациональные корни, разложение на множители над полями рациональных чисел и над полями вычетов [18, № 28.1, 28.2а, 28.8, 28.9б, г, 28.22а; разложить$x^4+4x^3+3x^2-2x-1$] или [19, № 649, 650а, 654, 658, 666d].
17. Алгоритм Евклида и НОД, решение линейных диофантовых уравнений. [18, № 25.1а, 25.3а, 25.5б, 25.7а, 25.7г].
18. Разложение на множители и в сумму простейших дробей [18, № 25.8б, 29.1б, 29.2а, 29.3, 29.5].
19. Распределение вещественных корней (теорема Штурма) [18, № 33.1а, 33.4, 33.1ж] или [19, № 773а, 774b, 785].
20. Многочлены от нескольких переменных, симметрические многочлены, формулы Ньютона [18, № 31.3а, 31.9а, 31.10в, 31.15, 31.21, 31.25а] или [19, № 693а, 693h, 699, 706, 707b].
21. Дискриминант, результант, исключение неизвестных [18, № 32.1а, 32.2а, 32.3а, 32.7а, б] или [19, № 723а, 724а, 725а, 726а].
22. Гомоморфизмы колец, идеалы и фактор-кольца [18, № 64.1а, б, 64.37, 6435, 64.41в, 64.42] или [19, № 1795, 1789, 1799].
23. Контрольная работа.

2-й семестр
Линейные отображения и операторы

1. Линейные отображения, операторы и их матрицы [18, № 39.1, 39.4, 39.15, 39.16, 39.22, 39.20, 39.17] или [19, № 1456, 1434, 1435, 1436, 1445, 1450, 1449, 1453, 1458].
2. Образ и ядро линейного отображения [18, № 41.10б (найти образ и ядро), 39.5, 39.6, 39.7, 39.10, 39.11] или [19, № 1531 (найти образ и ядро), 1833, 1834, 1490–1493].
3. Собственные векторы, собственные значения и характеристический многочлен [18, № 40.1а, б, 40.10, 40.15б, 40.16а, 40.6, 40.1в, 40.3, 40.19, 40.11, 40.12, 40.8] или [19, № 1070, 1466, 1475–1479, 1495, 1484, 1487].

4. Примеры прикладных задач на собственные векторы и значения: марковские процессы, колебания и т. п. (см., например, Г. Стренг, *Линейная алгебра и ее применения*. М.: Мир, 1980, гл. 5). [18, № 42.34а, в, г, 42.32]
5. Нильпотентные операторы [18, № 41.8, 41.1ж, 41.17, 39.1ж, 41.10б] или [19, № 1531, 1536, 1108, 1123].
6. Инвариантные подпространства. Ядерные и корневое разложения [18, № 40.23, 40.22, 4029, 40.35а, 41.27б] или [19, № 1496, 1500, 1501, 1519, 1520, 1509, 1537, 1538, 1485, 1524, 1504].
7. Жорданов базис и задача о подобии [18, № 41.1а, б, 41.10, 41.2, 41.3б, 41.30] или [19, № 1530, 1532, 1120, 1067, 1535].
8. Применения: функции от матриц, коммутирующие матрицы и матричные уравнения [18, № 41.22а, 41.27б, 41.21а, 17.10а, 17.11а, 42.8, 42.9, 42.10] или [19, № 1164, 1169, 1172, 1171], [21, № 4.17].
9. Контрольная работа, коллоквиум.

Линейные операторы евклидовых и эрмитовых пространств

10. Скалярные произведения, процесс ортогонализации, расстояния, углы [18, № 43.28а, 43.33, 43.15а, 43.16а, 43.19а, 43.25, 43.41, 43.45] или [19, № 1394, 1395, 1363, 1360, 1369, 1370, 1376, 1415, 1427, 1385, 1420, 1421].
11. Сопряженность линейных отображений относительно скалярного произведения [18, № 36.11, 44.3--44.8, 44.9а] или [19, № 1852, 1845, 1540, 1541, 1544, 1546–1548, 1555].
12. Симметрические, эрмитовы, кососимметрические и косоэрмитовы операторы [18, № 45.4б, 45.5, 45.7б, 45.17, 44.30, 44.31, 44.32, 46.19] или [19, № 1585, 1588, 1601, 1611, 1612, 1844, 1843].
13. Ортогональные, унитарные и нормальные операторы [18, № 46.3, 46.5, 46.6а, 46.7а, б, 46.8, 46.11, 46.30] или [19, № 1564, 1574, 1842, 1590].
14. Сингулярное разложение и норма линейного отображения (матрицы), полярное разложение оператора, углы между подпространствами евклидова пространства [18, № 46.16а (найти сингулярное, полярное разложение, геометрическое описание и норму), № 46.26, 43.42,43.43] или [19, № 1598] (то же самое), [19, № 1405, 1406].
15. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа (матричный вариант) и приведение к главным осям. Эквивалентность квадратичных форм [18, № 38.15а, 38.18а, 38.17а, 38.19б, 45.19г].
16. Сигнатура, положительная (отрицательная) определенность для вещественных квадратичных форм и канонизация пары квадратичных форм, одна из которых знакоопределенная [18, № 38.11а, 38.14в, 38.9, задача на канонизацию пары кв. форм]
17. Контрольная работа.

Линейные группы и алгебры

18. Группы: действие на множестве, орбиты, стабилизаторы, классы сопряженности [18, № 56.34в, б, 57.1, 57.3, 57.5, 57.9, 57.14, 57.12, 57.13, 57.22, 57.35] или [19, № 1659б, в, 1662]; [21, № 6.1–6.5, 6.7].
19. Группы: гомоморфизмы, нормальные подгруппы и фактор-группы, центры, коммутанты, прямые произведения [18, № 58.27а, б, 58.2, 58.3, 58.23а, д, 58.24, 58.29, 60.1, 60.4, 62.1а, 62.7а, б] или [19, № 1681б, д, 1690]; [16, № 6.6, 6.8а, 6.9].
20. Алгебра кватернионов и группа поворотов $\mathbf{R}^3$[18, № 63.23а, г; 14, № 6.17], найти неподвижную ось и угол поворота линейного оператора $q \longrightarrow sqs^{-1}$, где $q \in \mathbf{R}^3$, $s=\sqrt{2}+ i + j - 2k$[18, № 73.11а, б].
21. Контрольная работа.

Библиографический список

1. Васильев А. В., Мазуров В.Д. Высшая алгебра. Часть I. Новосибирск: Издательство НГУ, 2010.
2. Васильев А. В., Мазуров В.Д. Высшая алгебра. Часть II. Новосибирск: Издательство НГУ, 2016.
3. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2011.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. I. Основы алгебры, II. Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2009.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2007.
6. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2009.
7. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. СПб.: Лань, 2007.
8. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Физматлит, 2004.
9. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
11. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.
12. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, Физматлит, 1996.
13. Прасолов В.В., Многочлены. М.: МЦНМО, 2000.
14. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.
15. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
16. Чуркин В. А. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1991. (см. также методическую разработку Чуркина В.А. "Задача о подобии линейных операторов" на сайте mmf.nsu.ruв разделе Учебные пособия кафедры алгебры и математической логики НГУ).

17. Чуркин В. А. Базисы Гребнера(методическая разработка), на сайте сайтеmmf.nsu.ruв разделе Учебные пособия кафедры алгебры и математической логики НГУ, 2001.
18. Сборник задач по алгебре /Под ред. Кострикина А. И. М.: МЦНМО, 2009.
19. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2009.
20. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. СПб.: Лань, 2008.
21. Чуркин В. А. Задания по алгебре для 1 курса ММФ / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1994.
22. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О., Линейная алгебра и геометрия, М., Физматлит, 2009.