1 PŘEHLED DŮLEŽITĚJŠÍCH OZNAČENÍ

$\mathbf{T}_{\mathrm{do}}^{\mathrm{z}}$ - Označení transformační matice ze systému, do systému.

2 ÚVOD

Dokument obsahuje záklaný opis transformácií medzi vybranými súradnými systémami. Konkrétne sa jedná o tieto súradné sústavy:

1. ECEF (Earth Centred Earth Fixed) je pravouhlá geocentrická súradná sústava.
2. ENU (East North Up) je pravouhlá lokálna súradná sústava.
3. GEOD je súradná sústava geodetických/elipsoidických súradníc definovaných na rotačnom elipsoide, napr. WGS-84.
4. SPHERE Sústava sférických súradníc.

3 POZNÁMKY

3.1 *Transformace*

Definujme si zápis transformačnej matice zo súradného systému UVW do súradného systému XYZ napríklad v tvare $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$ [Grewal et al., 2001].

Ďalej, nech vektor $\mathbf{v}$ obsahuje súradnice súradného systému XYZ, t.j. $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ a rovnaký vektor $\mathbf{v}$ nech obsahuje súradnice $\mathbf{v} = [v_u, v_v, v_w]^T$ súradného systému UVW, potom pre obecný zápis transformácie platí predpis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} \tag{1}$$

Systémy *XYZ*, respektíve *UVW* reprezentujú tridimenzionálne kartézianské súradné systémy.

Komponenty vektorov v akoko?vek súradnom systéme je mo?né vyjadri? pomocou ich jednotkových vektorov rovnobe?ných s ich príslu?nými súradnicovými osami. Napríklad, nech súradnicové osi systému XYZ ozna?íme X, Y a Z a súradnícové osi systému UVW ozna?íme U, V a W, potom vektor $\mathbf{v}$ mô?eme vyjadri? v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \mathbf{1}_x + v_y \mathbf{1}_y + v_z \mathbf{1}_z \\ &= v_u \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_w, \end{aligned} \tag{2}$$

kde

- jednotkové vektory $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ sú definované pozd?? súradných osí X, Y a Z systému XYZ,
- skaláry v_x, v_y, v_z sú komponenty vektoru $\mathbf{v}$ definované pozd?? súradných osí X, Y a Z systému XYZ,
- jednotkové vektory $\mathbf{1}_u, \mathbf{1}_v, \mathbf{1}_w$ sú definované pozd?? súradných osí U, V a W systému UVW,
- skaláry v_u, v_v, v_w sú komponenty vektoru $\mathbf{v}$ definované pozd?? súradných osí U, V a W systému UVW.

Príslu?né komponenty vektoru je mo?né ?alej vyjadri? skalárneho sú?inu príslu?ných jednotkových vektorov, napríklad v tvare

$$
\begin{aligned}
v_x &= \mathbf{1}_x^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w, & (3)\\
v_y &= \mathbf{1}_y^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w, & (4)\\
v_z &= \mathbf{1}_z^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w, & (5)
\end{aligned}
$$

a v maticovej forme predchádzajúce rovnice nadobúdnu tento zápis

$$
\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\mathsf{XYZ}}^{\mathsf{UVW}} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix}, \tag{6}
$$

?ím sme si odvodili súradnícovú transforma?nú maticu $\mathbf{C}_{\mathsf{XYZ}}^{\mathsf{UVW}}$. Skalárný sú?in jednotkových ortogonálnych vektor umo??uje odvodi? smerové kosíny, pri?om obecne platí, ?e

$$
\mathbf{1}_a^T \mathbf{1}_b = \cos(\theta_{a,b}). \tag{7}
$$

V dôsledku toho, súradnicová transforma?ná matica mô?e by? vyjadrená v tvare

$$
\mathbf{C}_{\mathsf{XYZ}}^{\mathsf{UVW}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x,u}) \cos(\theta_{x,v}) \cos(\theta_{x,w}) \\ \cos(\theta_{y,u}) \cos(\theta_{y,v}) \cos(\theta_{y,w}) \\ \cos(\theta_{z,u}) \cos(\theta_{z,v}) \cos(\theta_{z,w}) \end{bmatrix}. \tag{8}
$$

3.2 *Súradnicové systémy*

3.2.1 *ECEF - Earth Centred Earth Fixed*

TBD - obrázok s nakreslenými osami, súradnice, m?no jednotkove vektory a opis

3.2.2 *ENU - East-North-Up*

TBD - obrázok s nakreslenými osami, súradnice, m?no jednotkove vektory a opis

3.2.3 *GEOD - Systém geodetických súradníc*

TBD - obrázok s nakreslenými osami, súradnice, m?no jednotkove vektory a opis

3.2.4 *SPHERE - Systém sférických súradníc*

TBD - obrázok s nakreslenými osami, súradnice, m?no jednotkove vektory a opis

4 ECEF → ENU & ENU → ECEF

PredpoklĂˇdajme, Ĺľe v tomto prĂklade uvaĹľovanĂ˝ rotaÄŤnĂ˝ elipsoid (naprĂklad WGS-84 alebo GRS-80) je geocentrickĂ˝, to znamenĂˇ, Ĺľe stred elipsoidu sa nachĂˇdza v strede zemskĂ©ho telesa, potom transformĂˇcia sĂşradnĂc medzi zemskĂ˝m geocentrickĂ˝m systĂ©mom sĂşradnĂc (xyz) a lokĂˇlnym topocentrickĂ˝m (alebo tieĹľ lokĂˇlnym geodetickĂ˝m - enu) mĂ´Ĺľe byĹĄ vyjadrenĂˇ predpisom [**?**]

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{enu}^{xyz} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Pre vyjadrenie tranformĂˇcie medzi uvedenĂ˝mi systĂ©mami si potrebujeme vyjadriĹĄ transformaÄŤnĂş maticu, v tomto prĂpade tzv. rotaÄŤnĂş maticu. VychĂˇdzajme z rovnice **??**, zostavĂme rotaÄŤnĂş maticu pre rotĂˇciu v priestore a to pomocou jednoduchĂ˝ch rotĂˇcii v kaĹľdej osi samostatne.

RotaÄŤnĂˇ matica okolo osi z v smere hodinovĂ˝ch ruÄŤiÄŤiek nadobĂşdne tvar

$$\mathbf{R_1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

priÄŤom rotĂˇcia okolo osi z je $\cos(\theta_{z,w}) = 1$,

REFERENCE

[Grewal et al., 2001] Grewal, M. S., Andrews, A. P., and Bartone, C. G. (2001). *Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration*. Wiley-Interscience.