

# libGeo: Popis souřadnicových systémů a transformace mezi vybranými systémy

MICHAL ELIAŠ

Verze	Dátum	Autor	Opis změn
[0.1]	2021-04-29	mel	Práce na popisu transformace ECEF2ENU a ENU2ECEF
[0.2]	2021-04-30	mel	Dokončení ECEF2ENU a ENU2ECEF; doplnění příkladů
[0.3]	2021-05-03	mel	Popis trans. kov. matíc; Popis souř. systémů; doplnění pseudokódů
[0.4]	2021-05-05	mel	Práce na popisu transformace GEOD2ECEF a ECEF2GEOD
[0.5]	2021-05-11	mel	Práce na popisu valcového zobrazení a UTM
[0.6]	2021-05-12	mel	Práce na popisu azimutálního zobrazení a Stereo projekce.

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
1.1	Rešerš literatury . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Poznámky</b>	<b>3</b>
2.1	Transformace . . . . .	3
2.2	Translace . . . . .	4
2.3	Transformace kovariančních matíc . . . . .	5
2.4	Súradnicové systémy . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Transformace souřadnic medzi vybranými souřadnicovými soustavami</b>	<b>8</b>
3.1	ECEF $\rightarrow$ ENU . . . . .	8
3.2	ENU $\rightarrow$ ECEF . . . . .	10
3.3	GEOD $\rightarrow$ ECEF . . . . .	11
3.4	ECEF $\rightarrow$ GEOD . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Vybrané kartografické zobrazení</b>	<b>15</b>
4.1	Definice a některé vlastnosti vybraných kartografického zobrazení . . . . .	15
4.2	Poznámky k valcovým zobrazením . . . . .	16
4.3	GEOD $\rightarrow$ UTM . . . . .	18
4.4	UTM $\rightarrow$ GEOD . . . . .	19
4.5	Poznámky k azimutálním zobrazením . . . . .	21
4.6	GEOD $\rightarrow$ STEREO . . . . .	23
4.7	STEREO $\rightarrow$ GEOD . . . . .	24
	<b>Appendices</b>	<b>26</b>
<b>A</b>	<b>Základní parametry zemského elipsoidu</b>	<b>26</b>

<b>B</b>	<b>Konstanty základních referenčních elipsoidů</b>	<b>27</b>
B.1	World Geodetic System 1984 (WGS84) . . . . .	27
B.2	Geodetic Reference System 1980 (GRS80) . . . . .	27
B.3	Konstanty Krasovského elipsoidu . . . . .	27
<b>C</b>	<b>Pseudokódy implementovaných transformací v Matlab package +Geo</b>	<b>27</b>
C.1	ECEF2ENU . . . . .	27
C.2	ENU2ECEF . . . . .	27
C.3	GEOD2ECEF . . . . .	28
C.4	ECEF2GEOD . . . . .	28

## Seznam obrázků

1	Zobrazení bodu v ECEF soustavě souřadnic. Obrázek je převzat z [ECEF:Wiki, ]. . . . .	6
2	Zobrazení systému souřadnic East-North-Up. Obrázek je převzat z [ENU:Wiki, ]. . . . .	7
3	Geodetické zeměpisné souřadnice. Obrázek je převzat z [Cimbalník M., Mervart L., 1997]. . . . .	7
4	Sférické polární souřadnice. Obrázek je převzat z [Weisstein, E., W., ]. . . . .	8
5	$\varphi \rightarrow (x, y)$ . Obrázek je převzat z [Cimbalník M., Mervart L., 1997]. . . . .	11
6	Prostorové pravouhlé souřadnice. Obrázek je převzat z [Cimbalník M., Mervart L., 1997]. . . . .	12
7	Geometrická azimutální projekce. Obrázek je převzat z [Buchar, P., 2002]. . . . .	23

## Seznam tabulek

## Abstrakt

*Dokument obsahuje popis transformací mezi vybranými souřadnicovými systémy.*

## Přehled důležitějších zkratk

CTP	-	Conventional Terrestrial Pole
ECEF	-	Earth-Centered Earth-Fixed. Pravoúhlý souřadnicový systém
	-	
IERS	-	International Earth Rotation Service

## Přehled důležitějších symbolů

TBA - TBA

## 1 Úvod

Dokument obsahuje základní popis transformací mezi vybranými souřadnými systémy. Konkrétně se jedná o tyto souřadné soustavy:

1. ECEF (Earth Centred Earth Fixed) je pravoúhlá geocentrická souřadnicová soustava.
2. ENU (East North Up) je pravoúhlá lokální souřadnicová soustava.
3. GEOD je soustava geodetických/elipsoidickou souřadnic definovaných na rotačním elipsoidu, např. WGS-84.
4. SPHERE je soustava sférických souřadnic

### 1.1 Rešerš literatury

#### 1.1.1 Obecná četba

TBA

#### 1.1.2 Zajímavé odkazy na literaturu ve vztahu k transformacím

TBA

## 2 Poznámky

### 2.1 Transformace

Definujme si zápis transformační matice ze souřadného systému UVW do souřadného systému XYZ například ve tvaru  $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$  [Grewal et al., 2001].

Dále, ať vektor  $\mathbf{v}$  obsahuje souřadnice systému XYZ, t.j.  $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$  a ten stejný vektor  $\mathbf{v}$  ať obsahuje souřadnice  $\mathbf{v} = [v_u, v_v, v_w]^T$  systému UVW. Pak pro obecný zápis transformace platí tento předpis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} \quad (1)$$

Systémy XYZ, respektive UVW reprezentují trojdimenzionální kartézské souřadné systémy.

Komponenty vektorů v jakémkoli souřadnicovém systému lze vyjádřit pomocí jejich jednotkových vektorů rovnoběžných s jejich příslušnými souřadnicovými osami. Například, ať souřadnicové osy systému XYZ označíme X, Y a Z a souřadnicové osy systému UVW označíme U, V a W, potom vektor  $\mathbf{v}$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_x \mathbf{1}_x + v_y \mathbf{1}_y + v_z \mathbf{1}_z \\ &= v_u \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_w,\end{aligned}\tag{2}$$

kde

- jednotkové vektory  $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$  jsou definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- skaláry  $v_x, v_y, v_z$  jsou komponenty vektoru  $\mathbf{v}$  definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- jednotkové vektory  $\mathbf{1}_u, \mathbf{1}_v, \mathbf{1}_w$  jsou definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW,
- skaláry  $v_u, v_v, v_w$  jsou komponenty vektoru  $\mathbf{v}$  definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW.

Příslušné komponenty vektoru lze vyjádřit pomocí skalárního součinu příslušných jednotkových vektorů, například ve tvaru

$$v_x = \mathbf{1}_x^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w,\tag{3}$$

$$v_y = \mathbf{1}_y^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w,\tag{4}$$

$$v_z = \mathbf{1}_z^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w,\tag{5}$$

a v maticové formě předchozí rovnice nabývají tento zápis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix}.\tag{6}$$

Tímto jsme si odvodili souřadnicovou transformační matici  $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$ . Skalární součin jednotkových ortogonálních vektorů umožňuje odvodit směrové kosiny, přičemž obecně platí, že

$$\mathbf{1}_a^T \mathbf{1}_b = \cos(\theta_{a,b}).\tag{7}$$

V důsledku toho, souřadnicová transformační matice může být vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x,u}) & \cos(\theta_{x,v}) & \cos(\theta_{x,w}) \\ \cos(\theta_{y,u}) & \cos(\theta_{y,v}) & \cos(\theta_{y,w}) \\ \cos(\theta_{z,u}) & \cos(\theta_{z,v}) & \cos(\theta_{z,w}) \end{bmatrix}.\tag{8}$$

Rovnice 8 vyjadřuje všeobecnou rotační matici v trojrozměrném prostoru.

## 2.2 Translace

V předchozí kapitole jsme se věnovali podobnostnej transformaci mezi dvěma pravoúhlými souřadnými systémy. V případě posunu (translace), počátek jedné soustavy do počátku druhé soustavy jednoznačně vyjádříme pomocí vektoru

$$\mathbf{r} = [(x - u) \quad (y - v) \quad (z - w)]^T.\tag{9}$$

### 2.3 Transformace kovariančních matic

Cílem kapitoly je navrhnout transformaci kovariančních matic souřadnic (jejích přesností) mezi uvažovanými souřadnými systémy. Princip postupu je založen na zákoně hromadění středních chyb, viz například [Kubaček, 2013] anebo [Mikhail and Ackermann, 1976].

Matematický zápis transformace kovarianční matice mezi vybranými systémy je tento:

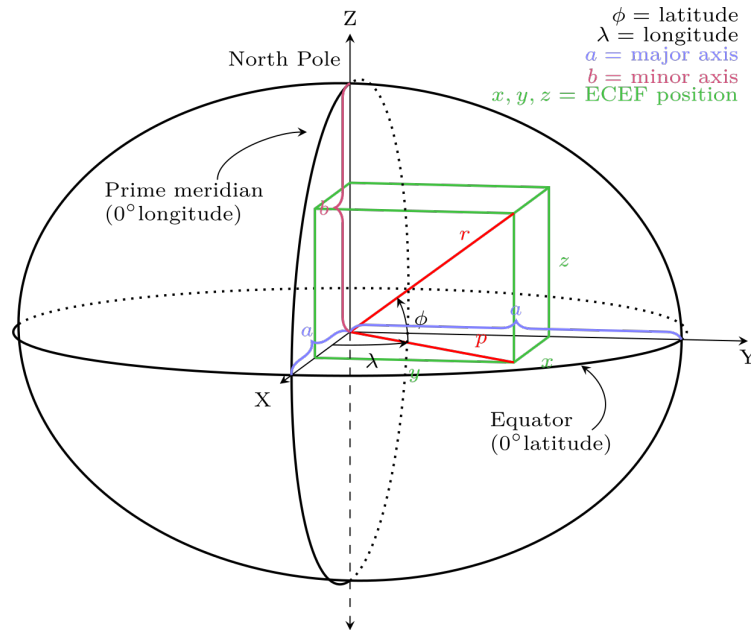
$$\mathbf{\Sigma}_{XYZ} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{UVW}\mathbf{J}^T, \quad (10)$$

kde

- $\mathbf{J}$  je Jakobi matice příslušné transformace,
- $\mathbf{\Sigma}_{UVW}$  je kovarianční matice souřadnic resp. souřadného systému, ze kterého transformujeme a
- $\mathbf{\Sigma}_{XYZ}$  je kovarianční matice souřadnic resp. souřadného systému, do kterého transformujeme.

## 2.4 Sústředné souřadnicové systémy

### 2.4.1 ECEF - Earth Centred Earth Fixed



Obrázek 1: Zobrazení bodu v ECEF soustavě souřadnic. Obrázek je převzat z [ECEF:Wiki, ].

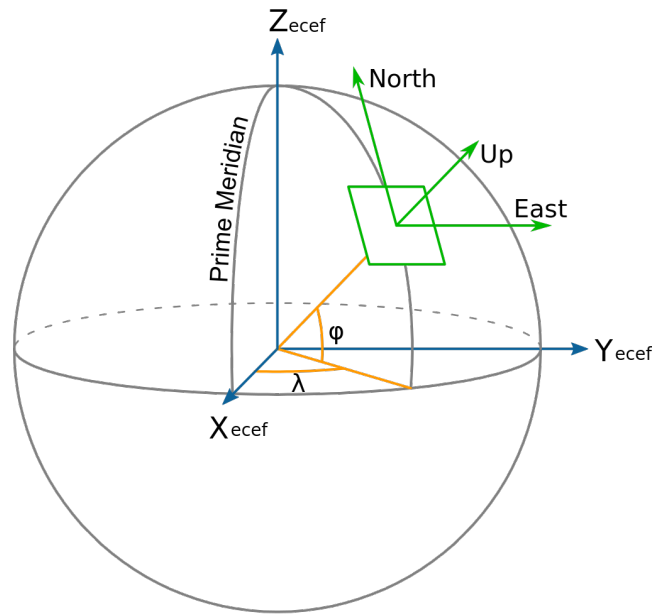
Základní kartézská pravouhlá soustava souřadnic, například tak, jako je zobrazená na obrázku 1, je definována takto [Soler and Hothem, 1988], [Kovář, 2016]:

- počátek soustavy je soustředěn v geocentre, t.j. v gravitačním středu zemského tělesa,
- osa **Z** směřuje do místa zemského severního pólu, který je definován podle IERS. Protože poloha pólu se v čase mění, používá se střední poloha zemského pólu (CTP).
- osa **X** prochází bodem nulové zeměpisné délky, t.j. Greenwich poledníkem, který je definován podle IERS a míří do průsečíku tohoto poledníku a roviny rovníku,
- osa **Y** doplňuje pravotočivý pravouhlý systém souřadnic.

### 2.4.2 ENU - East-North-Up

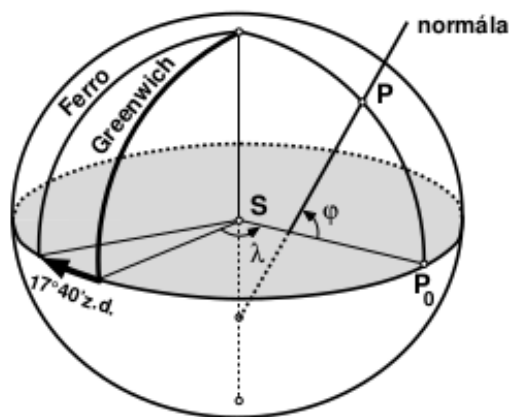
Některé výpočty souřadnic je praktičtější provádět v lokální souřadnicové soustavě například vzdálenost radarového přijímače od daného bodu atp., [Kovář, 2016], [Meyer, 2002]. ENU je lokální pravouhlá soustava souřadnic, přičemž její definice a umístění počátku soustavy a souřadnicových os, dle značení na obrázku 2, jsou:

- počátek systému soustavy souřadnic je umístěn v středě regionu záujmu a to buď na povrchu anebo blízko povrchu referenčního tělesa (elipsoid, koule),
- osa **n** (North) směřuje na sever,
- osa **e** (East) směřuje na východ a
- osa **u** (Up) je totožná s normálou referenčního tělesa (elipsoid, koule).



Obrázek 2: Zobrazení systému souřadnic East-North-Up. Obrázek je převzat z [ENU:Wiki, ].

#### 2.4.3 GEOD - Systém geodetických souřadnic



Obrázek 3: Geodetické zeměpisné souřadnice. Obrázek je převzat z [Cimbalník M., Mervart L., 1997].

V praktických úlohách se poloha bodu popisuje pomocí geodetických anebo elipsoidických souřadnic. Elipsoidických proto, protože se definuje pomocí zvoleného zemského elipsoidu. Ten slouží k aproximaci fyzického zemského tělesa. Základní matematické vzorce určené pro odvození elipsoidu jsou obsahem přílohy A a přehled konstant globálně užitých elipsoidů jsou obsahem přílohy B.

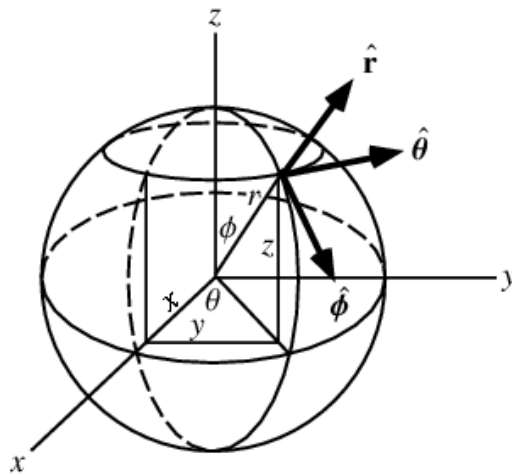
Poloha bodu **P** na obrázku 3 se vyjadřuje třemi souřadnicemi:

1. geodetickou zeměpisnou šířkou  $\varphi$ ,
2. geodetickou zeměpisnou délkou  $\lambda$ ,
3. geodetickou výškou.

Geodetická zeměpisná šířka  $\varphi$  bodu  $\mathbf{P}$  je úhel, který svírá normála v bodě  $\mathbf{P}$  k povrchu elipsoidu, s rovinou rovníku. Geodetická zeměpisná délka  $\lambda$  je úhel, který svírá rovina poledníku tohoto bodu s rovinou nultého poledníku. Za nultý poledník je mezinárodně volen ten, který prochází stabilizovaným bodem na astronomické observatoři v Greenwich. Geodetická výška se měří podél normály mezi referenčním elipsoidem a bodem  $\mathbf{P}$ .

#### 2.4.4 SPHERE - Systém sférických (polárných) souřadnic

Koule je základní a nejjednodušší aproximace zemského tělesa. Sférické souřadnice tvoří systém souřadnic, které popisují polohu bodu na sféře. Referenční koule je pak definovaná sférickým poloměrem. Pro praktické výpočty se jeho hodnota často počítá jako střední poměr křivosti (a to z důvodu zachování objemu elipsoidu během jeho zobrazení na kouli, t.j. v místě lokální aproximace - viz příloha A).



Obrázek 4: Sférické polární souřadnice. Obrázek je převzat z [Weisstein, E., W., ].

Dle situace zobrazené na obrázku 4, poloha bodu na sféře je vyjádřena soustavou tří souřadnic:

- $\theta$  hodnota azimutu v rovině rovníka. Pokud je úhel značený symbolem  $\lambda$ , pak poukazuje na zeměpisnou délku,
- $\phi$  hodnota polárního úhla počítaná od zenitu (také zenitový úhel). Pokud je úhel značený symbolem  $\varphi'$ , pak poukazuje na doplněk zeměpisné délky od zenitu, t.j.  $\varphi = 90 - \varphi'$  a
- $r$ , je střední polomer Zeme.

### 3 Transformace souřadnic mezi vybranými souřadnicovými soustavami

#### 3.1 ECEF $\rightarrow$ ENU

Předpokládejme, že v tomto příkladu je uvažovaný rotační elipsoid (například WGS-84 nebo GRS-80) geocentrický, to znamená, že střed elipsoidu se nachází ve středu zemského tělesa. Transformace souřadnic pak mezi zemským geocentrickým systémem souřadnic ( $xyz$ ) a lokálním topocentrickým (nebo také lokálním geodetickým - enu) systémem může být vyjádřený předpisem [Soler, 1998]



$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{enu}^{xyz} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Pro popis transformace mezi uvedenými systémy si potřebujeme odvodit transformační matici, v tomto případě takzvanou rotační matici. Vycházejme z rovnice 8. Rotační matici pak zostavíme pro rotaci v prostoru a to pomocí jednoduchých rotací v každé ose samostatně.

Rotační matice kolem osy  $z$  ve směru hodinových ručiček nabude tvar

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

příčemž rotace kolem osy  $z$  je  $\cos(\theta_{z,w}) = \cos(0) = 1$ , protože úhel mezi osama  $z$  a  $w$ , které jsou v tomto případě totožné, je roven nule. Dále platí, že kosinus úhlu  $\cos(\theta_{z,u}) = \cos(90) = 0$ , protože  $z$  a  $u$  jsou na sebe kolmé. Stejně tento předpoklad platí i pro  $\cos(\theta_{z,v})$ ,  $\cos(\theta_{x,w})$  a  $\cos(\theta_{y,w})$ .

Analogicky postup bude platit i pro ostatní dvě rotace a tedy rotace kolem osy  $x$  je

$$\mathbf{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

a kolem osy  $y$

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

Vyjádření transformační matice  $\mathbf{C}_{enu}^{xyz}$  mezi dvěma pravoúhlými kartézskými souřadnicovými systémy ECEF a ENU je založen na součinu dvou rotací, konkrétně:

1. rotaci kolem osy  $z$  o úhel  $\pi/2 + \lambda$  a
2. rotaci kolem osy  $y$  o úhel  $\pi/2 - \varphi$ ,

kde úhlové stupně  $\lambda$ , respektive  $\varphi$  geograficky představují stupeň otočení jedné soustavy od druhé ve směru zeměpisné délky ( $\lambda$ ) a ve směru zeměpisné šířky ( $\varphi$ ).

Potom transformace mezi systémy se dá vyjádřit ve tvaru

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1(\pi/2 - \varphi) \mathbf{R}_3(\pi/2 + \lambda) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Z předchozího zápisu plyne, že během rotace pravoúhlých souřadnicových soustav předpokládáme, že počátky souřadnic jsou shodné. V případě, že počátek, například soustavy ENU umístíme na povrch referenčního tělesa (elipsoid případně sféry), je zapotřebí doplnit posun mezi soustavami. Potom rovnice 15 nabude tvar

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

### 3.1.1 Příklad transformace z ECEF $\rightarrow$ ENU

Nechť bod A je vyjádřen v souřadnicích souřadného systému ECEF a hodnoty souřadnic jsou:

- $x = 4198944.6161$  m
- $y = 174747.2383$  m
- $z = 4781886.8769$  m

Mějme bod B, jehož geodetické souřadnice jsou  $\varphi = 48.8862deg$ ,  $\lambda = 2.3343deg$  a geodetická výška je  $h = 174.5217m$ . Úhlové souřadnice použijeme jednak k natočení souřadných soustav (viz rotační matice v rovnici 15) a společně se zadanou elipsoidickou výškou, k umístění počátku ENU soustavy, který umístíme nad povrch rotačního elipsoidu. Úkolem je vyjádřit souřadnice bodu A v soustavě ENU a s přihlédnutím definovaného počátku ENU soustavy v bodě B.

Vektor pravoúhlých souřadnic bodu B, tj.  $(x_0, y_0, z_0)$  získáme transformací GEOD2ECEF(). ENU souřadnice bodu A s přihlédnutím k umístění počátku ENU soustavy v bodě B a vypočítané podle 16, jsou:

- $e = 3579.4232$  m
- $n = -688.3514$  m
- $u = -51.0524$  m.

Pseudokód Matlab funkce ecef2enu(), která je implementována v package +Geo je stručně popsána v příloze C.1.

### 3.2 ENU $\rightarrow$ ECEF

Jednou z vlastností rotačních matic je tá, podle které  $\mathbf{R}(\theta)^{-1} = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}(\theta)^T$ . Z toho plyne, že zápis pro inverzní transformaci je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(-(\pi/2 + \lambda)) \mathbf{R}_1(-(\pi/2 - \varphi)) \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ \cos(\lambda) & -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}. \quad (17)$$

a po doplnění předpokladu translace počátku souřadné soustavy, rovnici 17 doplníme do tvaru

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}, \quad (18)$$

kde pravoúhlé souřadnice vektoru  $\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$  získáme transformací zeměpisných souřadnic posunutého počátku například ENU soustavy  $(\varphi, \lambda, h_{el})$  do systému geocentrických kartézských souřadnic (například systému ECEF).

#### 3.2.1 Příklad transformace z ENU $\rightarrow$ ECEF

V tomto příkladě bude naší úlohou prezentovat inverzní transformaci, no vycházejme z výsledků výpočtu polohy bodu v ENU soustavě souřadnic, t.j. souřadnic pro bod B v předcházejícím příkladě. Jeho souřadnice jsou:

- $e = 3579.4232$  m

- $n = -688.3514$  m
- $u = -51.0524$  m.

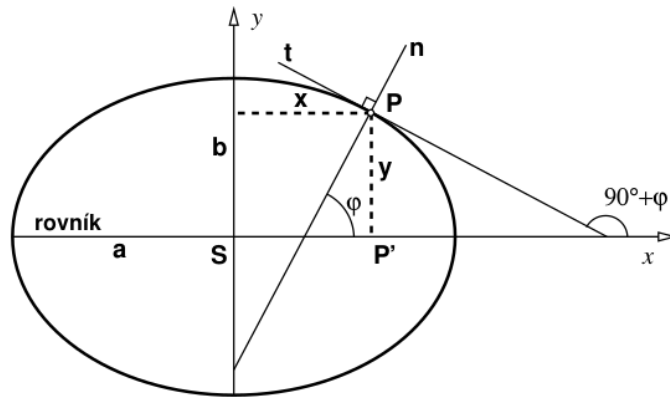
Dle rovnice 18, ECEF XYZ souřadnice bodu A jsou:

- $x = 4198944.6161$  m
- $y = 174747.2383$  m
- $z = 4781886.8769$  m.

Pseudokód Matlab funkce `enu2ecef()`, která je implementována v package `+Geo Package` je obsahem přílohy C.2

### 3.3 GEOD $\rightarrow$ ECEF

Aby sme odvodili základní vzorce pro transformaci geodetických souřadnic na geocentrické pravouhlé kartézské souřadnice, je potřeba si vysvětlit základní geometrii mezi těmito souřadnicovými soustavami. V textu se budeme držet kompletního odvození a prepisu tak, jak je prezentován v kapitole 1.2 skriptu [Cimbalník M., Mervart L., 1997].



Obrázek 5:  $\varphi \rightarrow (x, y)$ . Obrázek je převzat z [Cimbalník M., Mervart L., 1997].

Na obr. 5 svírá normála  $n$  v bode  $\mathbf{P}$  k elipse s velkou poloosou  $a$  (s osou  $x$ ) úhel  $\varphi$  (geodetická šířka bodu  $\mathbf{P}$ ). Odpovídající tečna  $t$  svírá s kladným směrem osy  $x$  úhel  $90^\circ + \varphi$  a její směrnice  $k$  je dána vzorcem

$$k = \frac{dy}{dx} = \tan(90^\circ + \varphi) = -\cot(\varphi). \quad (19)$$

Diferencováním rovnice meridiánové elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (20)$$

dostaneme

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0 \quad (21)$$

a odtud

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad (22)$$

Z předchádzejících rovnic vyplývá

$$\cot(\varphi) = \frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}. \quad (23)$$

Po umocnění a úpravě

$$b^4 x^2 \sin^2(\varphi) - a^4 y^2 \cos^2(\varphi) = 0 \quad (24)$$

a dále víme, že

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0. \quad (25)$$

Řešením těchto dvou (pro  $x^2, y^2$  lineárních) rovnic dostaneme

$$x = \frac{a^2 \cos(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (26)$$

a

$$y = \frac{b^2 \sin(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}}. \quad (27)$$

Do jmenovatelů dosadíme  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , potom po úpravě dostaneme

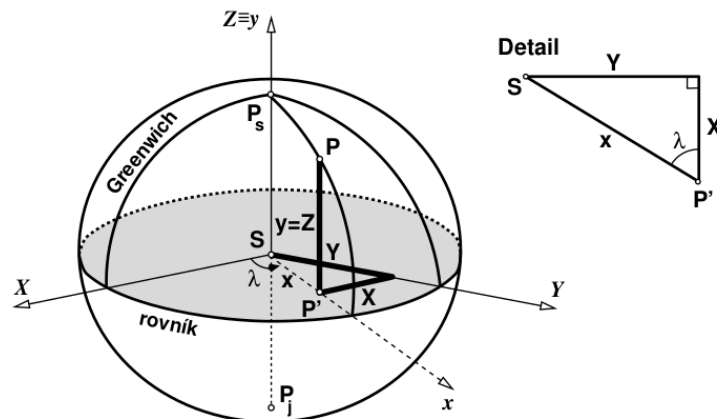
$$x = \frac{a \cos(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{a \cos(\varphi)}{W} \quad (28)$$

a

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{a(1 - e^2) \sin(\varphi)}{W}, \quad (29)$$

kde  $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}$  je první geodetická funkce.

Polohu bodu  $P$  na rotačním elipsoidu vyjádříme v pravouhlé soustavě souřadnic. Její počátek je v středu elipsoidu  $S$ , osa  $Z$  v ose rotace, osa  $X$  v průsečnicku roviny rovníku s rovinou nultého poledníku, osa  $Y$  v rovině rovníku kolmá na osu  $X$  - tak jak je to znázorněno na obrázku 6.



Obrázek 6: Prostorové pravouhlé souřadnice. Obrázek je převzat z [Cimbalník M., Mervart L., 1997].

Bodem  $P(\varphi, \lambda)$  prochází poledník  $P_s - P - P_j - P_s$  o geodetické délce  $\varphi$ . V rovině tohoto poledníku má bod  $P$  pravouhlé souřadnice  $x, y$ , odvozené vzorci 28, 29.

Podle obrázka 6 napíšeme pro souřadnice  $X, Y, Z$  bodu  $P$  vztahy

$$X = x \cos(\lambda) \quad (30)$$

$$Y = x \sin(\lambda) \quad (31)$$

$$Z = y. \quad (32)$$

Dosadíme-li do předchozích vztahů za  $x$  a  $y$  rovnice 28 a 29, dostaneme

$$X = \frac{a}{W} \cos(\varphi) \cos(\lambda) \quad (33)$$

$$Y = \frac{a}{W} \cos(\varphi) \sin(\lambda) \quad (34)$$

$$Z = \frac{a}{W} (1 - e^2) \sin(\varphi). \quad (35)$$

Uvažme-li vztah pro příčný poloměr křivosti

$$N = \frac{a}{W}, \quad (36)$$

potom geocentrické pravouhlé souřadnice bodu  $P$  budou mít vztahy

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ N \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ N (1 - e^2) \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

V případě, že bod  $P$  leží ve směru normály k elipsoidu ve výšce  $H$  nad elipsoidem, pak předchozí rovnice budou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + H) \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ (N + H) \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ (N [1 - e^2] + H) \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

### 3.3.1 Příklad transformace z GEOD $\rightarrow$ ECEF

Ukážme si příklad transformace z geodetických souřadnic do prostorových pravouhlých souřadnic.

Bod  $P$  ležící na elipsoidu má geodetické souřadnice:

- $\varphi = 48.8562^\circ$
- $\lambda = 2.3508^\circ$
- $h = 0.0674m$ .

Po aplikování rovnice 38 (uvažujeme rotační elipsoid WGS-84 tak jak je definován v B.1), prostorové geocentrické souřadnice bodu  $P$  jsou:

- $X = 4200952.53m$
- $Y = 172458.50m$
- $Z = 4780052.13m$ .

Pseudokód Matlab funkce `geod2ecef()`, která je implementována v package `+Geo Package` je obsahem přílohy C.3.

### 3.4 ECEF → GEOD

Existuje celá řada metod, které se zaměřují na inverzní transformaci souřadnic z pravoúhlého prostorového systému souřadnic na systém geodetických zeměpisných souřadnic. Práce se speciálně zaměřují na převod geodetické šířky  $\varphi$  a to hlavně z důvodu přesnosti jejího odhadu (víme, že z důvodu zploštění referenčního tělesa, v našem případě elipsoidu, geodetická šířka není definována na spojnici středu elipsoidu a bodu  $P$  na povrchu elipsoidu a proto nastávají problémy řešení rovnice pro odhad geodetické šířky ze vstupních parametrů, které jsou pravoúhlé geocentrické souřadnice) nebo z důvodu výpočetního (geodetická šířka se počítá buď iterativními metodami nebo neiterativními). Z odborných článků, které se věnují tomuto problému bychom mohli citovat například [Bowring, 1976], [Borkowski, 1989] nebo z aktuálních prací [Fukushima, 2006] či [Vermeille, 2011] (implementován v `+ Geo package`). Autoři, v práci [Fok and Iz, 2003] se věnovali vzájemnému srovnání vybraných (do toho roku známých) algoritmů.

Jeden ze základních algoritmů (bez ověření přesnosti či výpočetní rychlosti) na odhad geodetických souřadnic  $(\varphi, \lambda, h)$  počítaných z pravoúhlých kartézských souřadnic  $X, Y, Z$  je tento [Grewal et al., 2001]:

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{Y}{X} \right), \quad (39)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{Z + \frac{e^2 a^2 \sin^3(\zeta)}{b}}{\xi - e^2 a \cos(\zeta)} \right), \quad (40)$$

a

$$h = \frac{\xi}{\cos(\varphi)} - N, \quad (41)$$

kde

$$\zeta = \tan^{-1} \left( \frac{aZ}{b\xi} \right) \quad (42)$$

$$\xi = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (43)$$

a  $N$  je příčný poloměr křivosti,  $a$  je hlavní poloosa meridiánové elipsy,  $b$  je vedlejší poloosa meridiánové elipsy a  $e$  je její excentricita.

#### 3.4.1 Příklad transformace z ECEF → GEOD

Příklad transformace z prostorových pravouhlých souřadnic do systému geodetických souřadnic.

Bod  $P$  ležící na elipsoidu má tentokrát prostorové souřadnice:

- $X = 4200952.53m$
- $Y = 172458.50m$
- $Z = 4780052.13m$ .

Po aplikování algoritmu například [Vermeille, 2011] (uvažujeme rotační elipsoid WGS-84 tak jak je definován v B.1), pak prostorové geocentrické souřadnice bodu  $P$  jsou:

- $\varphi = 48.8562^\circ$
- $\lambda = 2.3508^\circ$

- $h = 0.0674m$ .

Pseudokód Matlab funkce `ecef2geod()`, která je implementována v package `+Geo Package` je obsahem přílohy C.4.

## 4 Vybrané kartografické zobrazení

Z hlediska zkreslení zobrazení rozlišujeme na:

1. konformní - stejnouhlá,
2. ekvidistantní - stejnodelná,
3. ekvivalentní - stejnoplochá,
4. kompenzační - vyrovnávací.

Z pohledu k třídění zobrazovací plochy, pomocí které si můžeme představit vznik obrazu referenční plochy rozlišujeme:

1. zobrazení na kulovou plochu,
2. jednoduchá zobrazení (kuželová, válcová, azimutální),
3. nepravá zobrazení (pseudokonická, pseudocylindrická, pseudoazimutální),
4. polykónická,
5. polyederická,
6. obecná.

My popíšeme jenom vybrané jednoduchá zobrazení a to konkrétně válcová (UTM) a azimutální (stereografická projekce).

### 4.1 Definice a některé vlastnosti vybraných kartografického zobrazení

Kartografickým zobrazením je podle [Buchar, P., 2002] vzájemné přiřazení polohy bodů na dvou různých referenčních plochách. V některých případech, kdy je možno vztah realizovat geometrickou cestou (promítáním), podle [Buchar, P., 2002] budeme takové zobrazení nazývat projekcí neboli prospektivním zobrazením.

Zobrazení je jednoznačně matematicky definováno vtažením mezi souřadnicemi bodů na obou referenčních plochách, kterému říkáme zobrazovací rovnice. Například zobrazení elipsoidu do roviny budou zobrazovací rovnice v explicitním tvaru

$$X = f(\varphi, \lambda), \quad (44)$$

$$Y = g(\varphi, \lambda), \quad (45)$$

kde funkce  $f$ ,  $g$  v určitém místě považujeme za spojité, obecně na sobě mezívislé, diferencovatelné apod. Výjimky představují singulární body (např. póly), kde uvedená vlastnost není obecně splněna.

#### 4.1.1 Poznámky k jednoduchým zobrazením

Pro naše účely nás budou zajímat jenom jednoduchá zobrazení. Jednoduchá zobrazení jsou taková zobrazení, pro něž je možno zapsat zobrazovací rovnice, podle nichž každá z rovinných souřadnic (polárních nebo pravoúhlých) a výrazy pro zkreslení (závislé proměnné) se dají vyjádřit funkcemi pouze jedné souřadnice (nezávislé proměnné) na referenční ploše. Důsledkem takové jednoduché volby je pak i jednoduchý obraz poledníků a rovnoběžek, které jsou pak na mapě znázorněny jako svazek přímek čí osnova rovnoběžných přímek (u poledníku) a soustava rovnoběžných kružnic čí osnova rovnoběžných přímek (u rovnoběžek). Jednoduchá zobrazení jsou ortogonální (viz [Buchar, P., 2002], str. 51).

#### 4.2 Poznámky k válcovým zobrazením

Válcová zobrazení v normální poloze mají tyto vlastnosti [Buchar, P., 2002]:

1. rovník a rovnoběžky se zobrazují jako osnova rovnoběžných přímek,
2. obrazy poledníků tvoří osnovu přímek vzájemně stejně odlehklých rovnoběžných a kolmých na obrazy rovnoběžek,
3. obraz základního poledníku volíme jako osu  $Y$ ,
4. zobrazovací rovnice pro  $Y$  je veličina  $Y$  funkcí pouze  $(\varphi)$ .
5. do obrazu rovníku vkládáme osu  $X$  (u souřadnicových systému používaných v geodézii je orientace opačná),
6. zobrazovací rovnice pro  $X$  je  $X$  lineární funkcí zeměpisné délky  $(\lambda)$ .

Zkreslení v poledníku a rovnoběžce jsou:

$$m_p = \frac{dY}{M d\varphi} \quad (46)$$

$$m_r = \frac{dX}{N \cos(\varphi) d\lambda} = \frac{a}{N \cos(\varphi)}, \quad (47)$$

kde  $M$ ,  $N$  jsou meridiánový a příčný poloměr křivosti,  $a$  je hlavní poloosa meridiánové elipsy a  $\varphi$  je zeměpisná šířka.

Protože poledník a rovnoběžka tvoří u válcových zobrazení hlavní paprsky, je pro konformitu jedinou a postačující podmínkou

$$m_p = m_r,$$

a při referenční ploše elipsoidické a nezkresleném rovníku bude pro dosazení 46 a 47, platit:

$$\frac{dY}{M d\varphi} = \frac{a}{N \cos(\varphi)}. \quad (48)$$

Po separaci proměnných dostaneme

$$dY = a \frac{M}{N \cos(\varphi)} d\varphi, \quad (49)$$

kde na pravé straně rovnice se vyskytuje výraz pro tzv. izometrickou šířku.

Izometrická šířka  $q$ , která je funkcí zeměpisné šířky  $\varphi$ , je definována:

$$q = \int_0^\varphi \frac{M}{N \cos(\varphi)} d\varphi \quad (50)$$



a po dosazení za  $M$  a  $N$  dostaneme

$$\begin{aligned}
 q &= \int_0^\varphi \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2(\varphi)) \cos(\varphi)} d\varphi \\
 &= \int_0^\varphi \frac{(1-e^2 \sin^2(\varphi) - e^2 \cos^2(\varphi)) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2(\varphi)) \cos(\varphi)} \\
 &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)} - \int_0^\varphi \frac{e \cos(\varphi) d\varphi}{1-e^2 \sin^2(\varphi)} \\
 &= \ln \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - e \int_0^\varphi \frac{d(e \sin(\varphi))}{1-e^2 \sin^2(\varphi)},
 \end{aligned} \tag{51}$$

a po proložení  $x = e \sin(\varphi)$  v posledním integrálu, z něhož plyne, že

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+e \sin(\varphi)}{1-e \sin(\varphi)}\right) \tag{52}$$

a pro izometrickou šířku pak platí

$$q = \ln \left[ \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1-e \sin(\varphi)}{1+e \sin(\varphi)}\right)^{\frac{e}{2}} \right]. \tag{53}$$

Po dosazení 53 do 49 dostaneme [Buchar, P., 2002], [Snyder, J., P., 1987]:

$$Y = a \ln \left[ \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1-e \sin(\varphi)}{1+e \sin(\varphi)}\right)^{\frac{e}{2}} \right]. \tag{54}$$

Protože  $X$  je lineární funkce zeměpisné délky, pro vyjádření souřadnice  $X$  platí:

$$X = a(\lambda - \lambda_0). \tag{55}$$

Inverzní vzorec pro veličinu  $\varphi$  v případě spětné transformace vyžaduje počítání přes iterační proces a základní rovnice je definována ve tvaru [Snyder, J., P., 1987]

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} \left\{ t \left[ \frac{1-e \sin(\varphi)}{1+e \sin(\varphi)} \right]^{\frac{e}{2}} \right\}, \tag{56}$$

kde

$$t = e^{-\frac{Y}{a}}$$

a iterační proces začíná výpočtem

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1}(t)$$

a pokračuje pokud není dosažení zvolená konvergenční hranice.

Inverzní zeměpisná délka se vypočte podle rovnice:

$$\lambda = \frac{X}{a} + \lambda_0. \tag{57}$$

### Konformní transversální válcové zobrazení

Konformní transversální válcové zobrazení nazývané také Gaussovo (pro elipsoidickou referenční plochu) nebo transversální Mercatorovo, je specifické tím, že válec se dotýka referenční koule (elipsoidu) podél základního poledníku, procházejícího středem území. Kartografické poledníky a rovnoběžky se pak zobrazují jako zeměpisné polidníky a rovnoběžky v normální poloze.

Uplatnění našlo také konformní válcové zobrazení v obecné poloze (v literatuře Oblique Mercator Projection). Délkově zachovává zvolený kartografický rovník.

### Universální transversální zobrazení v poledníkových pásech, zobrazení systému UTM

V zobrazeních, v kterých má být užito v poloze jiné než normální, zobrazuje se nejdřív elipsoid na kouli a pak terpe s koule na zobrazovací plochu, [Buchar, P., 2002]. V případě Gauss (Gauss-Krügerova) zobrazení, elipsoid je zobrazován přímo do roviny, tedy bez zprostředkující koule a to tak, že meridiální pruhy stejné šířky se zobrazují samostatně. Určující podmínkou je konformita a nezkreslený základní (střední) poledník pásu.

### 4.3 GEOD → UTM

V knize [Buchar, P., 2002] se uvádí podrobné odvození zobrazovacích rovnic. Z pohledu programátorského je možná výhodnější popsat algoritmus, který se nachází v knize [Snyder, J., P., 1987] (vzorce platí pro elipsoid).

$$x = k_0 N \left[ A + (1 - T + C) \frac{A}{6} + \left( 5 - 18T + T^2 + 72C - 58e'^2 \right) \frac{A^5}{120} \right] \quad (58)$$

$$y = k_0 \left\{ B - B_0 + N \tan(\varphi) \left[ \frac{A^2}{2} + (5 - T + 9C + 4C^2) \frac{A^4}{24} + \left( 61 - 58T + T^2 + 600C - 330e'^2 \right) \frac{A^6}{720} \right] \right\} \quad (59)$$

$$k = k_0 \left[ 1 + (1 + C) \frac{A^2}{2} + \left( 5 - 4T + 42C + 13C^2 - 28e'^2 \right) \frac{A^4}{24} + (61 - 148T + 16T^2) \frac{A^6}{720} \right], \quad (60)$$

kde

- $k_0$  je multiplikační konstanta  $k_0 = 0.9996$ ,
- $e'^2$  je druhá excentricita rotačního elipsoidu definovaná také pomocí  $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$ ,
- $N$  je příčný poloměr křivosti rotačního elipsoidu,
- $T = \tan^2(\varphi)$ ,
- $C = e'^2 \cos^2(\varphi)$ ,
- $A = (\lambda - \lambda_0) \cos(\varphi)$  předpokládajíc, že  $\lambda$  a  $\lambda_0$  jsou v radiánech,

- $B$  je délka oblouku meridiánu od rovníku po  $\varphi$ .  $B_0 = B$  zpočtená pro  $\varphi_0$  a platí

$$\begin{aligned}
 B = & a \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \dots \right) \varphi \\
 & - a \left( \frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} - \dots \right) \sin(2\varphi) \\
 & + a \left( \frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} + \dots \right) \sin(4\varphi) \\
 & - a \left( \frac{35e^6}{3072} + \dots \right) \sin(6\varphi)
 \end{aligned} \tag{61}$$

- $\varphi$  je zeměpisná délka v radiánech.

Pokud  $\varphi \pm \pi/2$ , pak  $x = 0$ ,  $y = k_0 (B - B_0)$  a  $k = k_0$ .

Jednotlivé osi souřadnic jsou dané takto: Yová osa leží v obraze základnáho poledníku  $\lambda_0$  a  $y$  roste směrem na sever. Xová osa je kolmá na  $Y$  a  $x$  roste směrem na východ.

#### 4.4 UTM → GEOD

Pro inverzní vzorce podle [Snyder, J., P., 1987] platí:

$$\begin{aligned}
 \varphi = \varphi_1 & - G \left[ \frac{D^2}{2} - \left( 5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9e'^2 \right) \frac{D^4}{24} \right] \\
 & - G \left[ \left( 61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252e'^2 - 3C_1^2 \right) \frac{D^6}{720} \right],
 \end{aligned} \tag{62}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{D - (1 + 2T_1 + C_1) \frac{D^3}{6} + \left( 5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8e'^2 + 24T_1^2 \right) \frac{D^5}{120}}{\cos(\varphi_1)}, \tag{63}$$

kde

- $G = \left( \frac{N_1 \tan(\varphi_1)}{R_1} \right)$
- $\varphi_1$  je zeměpisná šířka charakteristická pro centrální meridián a která má stejnou  $y$  souřadnici jako bod, kterého polární souřadnice jsou  $(\varphi, \lambda)$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 = \mu & + \left( \frac{3e_1}{2} - \frac{27e_1^3}{32} + \dots \right) \sin 2\mu \\
 & + \left( \frac{21e_1}{16} - \frac{55e_1^4}{32} + \dots \right) \sin 4\mu \\
 & + \left( \frac{151e_1^3}{96} + \dots \right) \sin 6\mu \\
 & + \left( \frac{1097e_1^4}{512} - \dots \right) \sin 8\mu
 \end{aligned}$$

- $e_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$

- $\mu = \frac{B}{a \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \dots \right)}$
- $B_0$  je spočtená pomocí rovnice 61 pro vstupní  $\varphi_0$ ,
- $B = B_0 + \frac{y}{k_0}$ ,
- $e'^2 = \frac{e^2}{(1 - e^2)}$ ,
- $C_1 = e'^2 \cos^2(\varphi_1)$ ,
- $T_1 = \tan^2(\varphi_1)$ ,
- $N_1 = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2(\varphi_1))}}$ ,
- $R_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2(\varphi_1))^{3/2}}$ ,
- $D = \frac{x}{N_1 k_0}$ .

### Meridiánová konvergence

Meridiánová konvergence je podle [Meridiánová konvergence, ] úhel určitém bodu referenční plochy mezi tečnami k místnímu poledníku a ke křivce rovnoběžné se základním poledníkem; může být elipsoidická meridiánová konvergence, sférická meridiánová konvergence a rovinná meridiánová konvergence.

V knize [Buchar, P., 2002], vzorec pro výpočet meridiánové konvergence  $\gamma$  je (bez odvození)

$$\begin{aligned} \tan(\gamma) &= \lambda \sin(\varphi) + \frac{\lambda^3}{3} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) (1 + \tan^2(\varphi) + 3\eta^2 + 2\eta^4) \\ &+ \frac{\lambda^5}{15} \sin(\varphi) \cos^4(\varphi) (2 + 4 \tan^2(\varphi) + 2 \tan^4(\varphi)) + \dots, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\text{kde } \eta^2 = \frac{e^2 \cos^2(\varphi)}{1 - e^2}.$$

### Délkové zkreslení

Délkové zkreslení je funkcí zeměpisných souřadnic a pro jeho výpočet platí [Buchar, P., 2002]:

$$m = 1 + \frac{\lambda}{2} \cos^2(\varphi). \quad (65)$$

Chceme-li délkové zkreslení zpočítat z pravouhlých souřadnic, pak vzorec pro výpočet je tento:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \dots, \quad (66)$$

avšak  $R = \sqrt{MN}$  je funkcí zeměpisné šířky  $\varphi$ .

## 4.5 Poznámky k azimutálním zobrazením

Azimutální zobrazení si můžeme představit tak, že obraz referenčního tělesa vzniká již přímo v rovině [Buchar, P., 2002], str. 99. V tomto zobrazení je rovina kolmá ke spojnici kartografického pólu se středem referenční koule (pozor na projekci z elipsoidu). Následující text se týká odvození zobrazení vývozené z referenční koule. V knize [Snyder, J., P., 1987] se diskutuje algoritmus respektive vzorce platné pro elipsoid.

Z azimutálního zobrazení jsou známá některé vlastnosti, například:

- Obrazem poledníků je svazek přímek s vrcholem v kartografickém pólu a které svírají stejné úhly jako na kouli.
- Základní poledník se zobrazí jako osa X.
- Obrazem rovnoběžek jsou kružnice se středem v kartografickém pólu. Poloměr těchto rovnoběžek závisí na kartografické šířce.

Zobrazovací rovnice jsou:

$$\rho = f(\psi), \quad (67)$$

kde  $\psi = 90^\circ - \varphi$ , kde v tomto případě  $\varphi$  je kartografická šířka (odvozená na kouli a ne na elipsoidu).

$$\varepsilon = \lambda, \quad (68)$$

kde  $\lambda$  v tomto případě reprezentuje kartografickou délku.

Funkci  $f$  v případě první zobrazovací rovnice definujeme na základě požadavků, nejčastěji z ekvivalence, ekvivalence či konformity. Nás bude zajímat konformní zobrazení, protože stereografická projekce zachovává konformitu úhlů.

V azimutálním zobrazení můžeme zavést pravouhlou rovinnou soustavu, kde pravoúhlé souřadnice X, Y získáme transformací polárních souřadnic na pravouhlé souřadnice. Počátek takové souřadnicové soustavy je potom někdy vhodné pomocí aditačních konstant přesunout do libovolného místa vzhledem k středu zobrazovaného území a to tak, aby souřadnice v tomto území měly kladnou hodnotu.

K transformaci polárních souřadnic do soustavy pravouhlých souřadnic použijeme výrazy:

$$X = \rho \cos(\varepsilon), \quad (69)$$

$$Y = \rho \sin(\varepsilon), \quad (70)$$

resp. pro inverzní případ platí:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (71)$$

a

$$\varepsilon = \tan^{-1} \left( \frac{Y}{X} \right). \quad (72)$$

Jak už bylo nastíněno, nás bude zajímat konformní zobrazení. Pro konformní azimutální zobrazení je podmínkou a postačující podmínkou

$$\frac{d\rho}{R d\psi} = \frac{\rho}{R \sin(\psi)}. \quad (73)$$

Po separaci proměnných

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\psi}{\sin(\psi)} \quad (74)$$

a po integraci dostaneme

$$\ln(\rho) = \ln\left(\tan\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) + \ln(C), \quad (75)$$

kde  $C$  je libovolná integrační konstanta a z poslední rovnice plyne, že

$$\rho = C \tan\left(\frac{\psi}{2}\right). \quad (76)$$

Pokud zavedeme podmínku, aby pro střed mapy (pro pól) platilo  $m = 1$ , pak (bez odvození - viz [Buchar, P., 2002]),  $C = 2R$ , takže zobrazovací rovnice jsou

$$\rho = 2R \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (77)$$

a

$$\varepsilon = \lambda. \quad (78)$$

Výraz pro zkreslení  $m$  je

$$m = \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}. \quad (79)$$

Pokud chceme stanovit v pólu konkrétní délkové zkreslení různé od jedné, je možné, podobně jako v případě UTM zobrazení, zavést multiplikační konstantu, jejíž velikost udává délkové zkreslení v pólu. Platí

$$C = k2R. \quad (80)$$

Vedle konformity má zobrazení důležitou vlastnost, že každá kružnice na referenční ploše kulové se zobrazuje opět jako kružnice. Tedy obrazy geografické sítě se skládá ze samých kružnic respektive přímk (kružnice s nulovou křivostí).

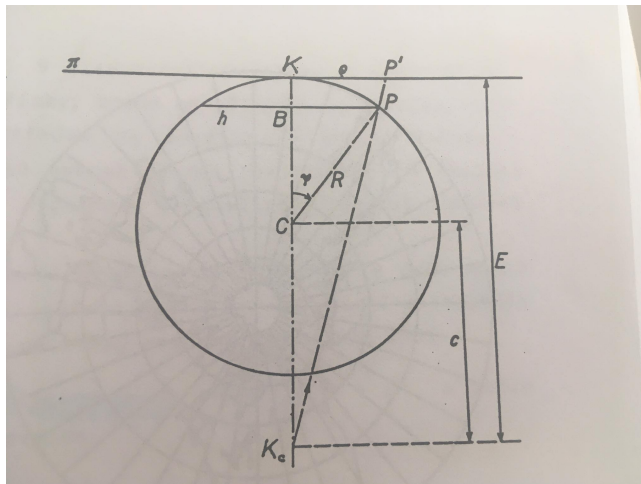
Výraz pro délkové zkreslení je možné vyjádřit i za použití rovinných souřadnic a to v tvaru

$$m = 1 + \frac{X^2 + Y^2}{4R^2}, \quad (81)$$

kde  $R$  je poloměr koule.

## 4.6 GEOD $\rightarrow$ STEREO

Azimutální (geometrické) projekce vznikají promítnutím povrchu referenční koule o poloměru  $R$  z libovolného bodu  $K_c$  na rovinu  $\pi$ , kolmou ke spojnici středu promítání  $K_c$  se středem koule  $C$ . Podle předchozího obrázku, který znázorňuje osový řez rovinou promítacího paprsku bodu  $P$ , je obraz bodu  $P'$  určen v rovině  $\pi$  polárními souřadnicemi  $\rho, \varepsilon$ .



Obrázek 7: Geometrická azimutální projekce. Obrázek je převzat z [Buchar, P., 2002].

Z obrázku plyne tato nerovnost

$$\frac{\rho}{R \sin(\psi)} = \frac{E}{c + R \cos(\psi)}, \quad (82)$$

kde  $E = K_c K$  a  $c = K_c C$ , kde  $C$  je střed koule. Takže zobrazovací rovnice azimutálních zobrazení budou

$$\rho = \frac{RE \sin(\psi)}{c + R \cos(\psi)} \quad (83)$$

a

$$\varepsilon = \lambda. \quad (84)$$

Vztahy pro výpočet pravouhlých souřadnic transformované z polárních souřadnic, resp. přímo ze zeměpisných souřadnic jsou (porovnej s [Weisstein, Eric W., ], kde je přehozené značení souřadnicových os).

$$X = \frac{RE(-\cos(\varphi_K)\sin(\varphi) + \sin(\varphi_K)\cos(\varphi)\cos(\Delta\lambda))}{c + R(\sin(\varphi_K)\sin(\varphi) + \cos(\varphi_K)\cos(\varphi)\cos(\Delta\lambda))}, \quad (85)$$

a

$$Y = \frac{RE(\cos(\varphi) \sin(\Delta\lambda))}{c + R(\sin(\varphi_K) \sin(\varphi) + \cos(\varphi_K) \cos(\varphi) \cos(\Delta\lambda))}, \quad (86)$$

$$\text{kde } \Delta\lambda = (\lambda - \lambda_K).$$

Rovnice platí pro všechny azimutální projekce. Jedina neznáma konstanta  $c$  rozhoduje výběr projekce ze sady případů, z nichž užívané jsou:

- gnomická projekce, při  $c = 0$ ;
- **stereografická projekce**, při  $c = R$ ;
- externí projekce, při  $c > R$ ;

- ortografická projekce, při  $c = \infty$ .

Poznamenejme, že rovnice stereografické projece, která zobrazuje referenční těleso elipsoid do roviny jsou obsahem knihy [Snyder, J., P., 1987].

#### 4.7 STEREO → GEOD

Inverzní vzorce pro odhad zeměpisných souřadnic z pravouhlých rovinných souřadnic jsou [Weisstein, Eric W., ] (pozor na přehozené značení souřadnicových os):

$$\varphi = \sin^{-1} \left( \cos(c) \sin(\varphi_K) \frac{Y \sin(c) \cos(\varphi_K)}{\rho} \right), \quad (87)$$

a

$$\lambda = \lambda_0 + \tan^{-1} \left( \frac{X \sin(c)}{\rho \cos(\varphi_K) \cos(c) - Y \sin(\varphi_K) \sin(c)} \right), \quad (88)$$

kde

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (89)$$

a

$$c = 2 \tan^{-1} \left( \frac{\rho}{2R} \right). \quad (90)$$

## Reference

- [Borkowski, 1989] Borkowski, K. M. (1989). Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates. *Bulletin Geodesique*, 63(1):50–56.
- [Bowring, 1976] Bowring, B. (1976). Transformation from spatial to geographical coordinates. *Survey Review*, 23:323–327.
- [Buchar, P., 2002] Buchar, P. (2002). *Matematická kartografie*. Vydavatelství ČVUT, Praha.
- [Cimbalník M., Mervart L., 1997] Cimbalník M., Mervart L. (1997). *Vyšší geodézie 1*. Ediční středisko ČVUT, Praha.
- [ECEF:Wiki, ] ECEF:Wiki. Ecef coordinates in relation to latitude and longitude — Wikipedia, the free encyclopedia.
- [ENU:Wiki, ] ENU:Wiki. The east north up (enu) local tangent plane is similar to ned, except for swapping 'down' for 'up' and x for y. — Wikipedia, the free encyclopedia.
- [Fok and Iz, 2003] Fok, H. and Iz, H. (2003). A comparative analysis of the performance of iterative and non-iterative solutions to the cartesian to geodetic coordinate transformation. volume 5, pages 61–74.
- [Fukushima, 2006] Fukushima, T. (2006). Transformation from Cartesian to Geodetic Coordinates Accelerated by Halley's Method. *Journal of Geodesy*, 79(12):689–693.
- [Grewal et al., 2001] Grewal, M. S., Andrews, A. P., and Bartone, C. G. (2001). *Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration*. Wiley-Interscience.
- [Kovář, 2016] Kovář, P. (2016). *Družicová navigace. Od teorie k aplikacím v softwarovém přijímači*. České vysoké učení technické v Praze. Česká technika - nakladatelství ČVUT.
- [Kubaček, 2013] Kubaček, L. (2013). *Statistical Theory of Geodetic Network*. VÚGTK, Zdiby.



- [Meridiánová konvergence, ] Meridiánová konvergence. Definice meridiánovej konvergence. terminologický slovník zeměměřictví a katastru nemovitostí.
- [Meyer, 2002] Meyer, T. (2002). Grid, ground, and globe: Distances in the gps era. *Surveying and Land Information Systems*, 62:179–202.
- [Mikhail and Ackermann, 1976] Mikhail, E. and Ackermann, F. (1976). *Observations and Least Squares*. IEP-A Dun-Donnelley Publisher, New York.
- [Snyder, J., P., 1987] Snyder, J., P. (1987). Map projections: A working manual.
- [Soler, 1998] Soler, T. (1998). A compendium of transformation formulas useful in gps work. *Journal of Geodesy*, 72:482–490.
- [Soler and Hothem, 1988] Soler, T. and Hothem, L. (1988). Coordinate systems used in geodesy: Basic definitions and concepts. *Journal of Surveying Engineering-asce - J SURV ENG-ASCE*, 114:84–97.
- [Vermeille, 2011] Vermeille, H. (2011). An analytical method to transform geocentric into geodetic coordinates. *Journal of Geodesy*, 85(2):105–117.
- [Weisstein, E., W., ] Weisstein, E., W. Spherical coordinates. from mathworld—a wolfram web resource.
- [Weisstein, Eric W., ] Weisstein, Eric W. Stereographic projection. from mathworld. a wolfram web resource.

# Appendices

## A Základní parametry zemského elipsoidu

a	hlavní poloosa meridiánové elipsy
b	vedlejší poloosa meridiánové elipsy
f	zploštění (první)
n	zploštění (druhé)
e	excentricita (první)
$e'$	excentricita (druhá)
c	pólový poloměr křivosti
M	meridiánový poloměr křivosti
N	příčný poloměr křivosti
R	střední poloměr křivosti
r	poloměr rovnoběžky
$\varphi$	zeměpisná šířka
$B_0^\varphi$	délka oblouku meridiánu od rovníku po $\varphi$
W	první geodetická funkce
V	druhá geodetická funkce
F	pomocná geodetická funkce

$$f = (a - b)/a. \quad (91)$$

$$n = (a - b)/(a + b). \quad (92)$$

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2. \quad (93)$$

$$e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2. \quad (94)$$

$$c = a^2/b. \quad (95)$$

$$M = a(1 - e^2)/W^3. \quad (96)$$

$$N = a/W. \quad (97)$$

$$R = \sqrt{MN} \quad (98)$$

$$r = N \cos(\varphi). \quad (99)$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)} \quad (100)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2(\varphi)} \quad (101)$$

$$F = \sqrt{1 + n \cos(2\varphi) + n^2} \quad (102)$$

## B Konstanty základních referenčních elipsoidů

### B.1 World Geodetic System 1984 (WGS84)

$$a = 6378137m \quad b = 6356752,31425m \quad f = 0,003352810664747$$

### B.2 Geodetic Reference System 1980 (GRS80)

$$a = 6378137m \quad b = 6356752,31414m \quad f = 0,003352810681182$$

### B.3 Konstanty Krasovského elipsoidu

$$a = 6378245m \quad b = 6356863,01877m \quad f = 0,003352329869259$$

## C Pseudokódy implementovaných transformací v Matlab package +Geo

### C.1 ECEF2ENU

**Data:** x, y, z,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , hel, RT, ELL

**Result:** e, n, u

výpočet rotační matice  $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$ ;

**if**  $RT == \text{elipsoid}$  **then**

$[x_0, y_0, z_0] = \text{geod2ecef}(\varphi, \lambda, \text{hel}, \text{ELL})$ ;

**else**

$[x_0, y_0, z_0] = \text{sphere2ecef}(\varphi, \lambda, \text{hel}^*)$ ;

**end**

Výpočet podle rovnice 16

**Algorithm 1:** Transformácia ECEF2ENU

### C.2 ENU2ECEF

**Data:** e, n, u,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , hel, RT, ELL

**Result:** x, y, z

výpočet rotační matice  $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$ ;

**if**  $RT == \text{elipsoid}$  **then**

$[x_0, y_0, z_0] = \text{geod2ecef}(\varphi, \lambda, \text{hel}, \text{ELL})$ ;

**else**

$[x_0, y_0, z_0] = \text{sphere2ecef}(\varphi, \lambda, \text{hel}^*)$ ;

**end**

Výpočet podle rovnice 18

**Algorithm 2:** Transformácia ENU2ECEF

### C.3 GEOD2ECEF

**Data:**  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ , ELL

**Result:**  $x$ ,  $y$ ,  $z$

výpočet potřebných parametrů rotačního elipsoidu ( $a$ ,  $b$ ,  $N$ )

Výpočet podle rovnice [38](#)

**Algorithm 3:** Transformácia GEOD2ECEF

### C.4 ECEF2GEOD

**Data:**  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ELL

**Result:**  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$

výpočet potřebných parametrů rotačního elipsoidu (například  $a$ ,  $e$ )

Výpočet podle algoritmu diskutovaný např. [\[Vermeille, 2011\]](#).

**Algorithm 4:** Transformácia ECEF2GEOD