libGeo: Popis souřadnicových systémů a transformace mezi vybranými systémy

MICHAL ELIAŠ

Verze	Dátum	Autor	Opis změn
[0.1]	2021-04-29	mel	založení souboru.
[0.2]	2021-04-30	mel	Popis transformace ECEF2ENU a ENU2ECEF

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Abstrakt

Dokument obsahuje popis transformací mezi vybranými souřadnicovými systémy.

Přehled důležitějších označení

$\mathbf{T}_{do}^{z}$ - označení.

1 Úvod

Dokument obsahuje základní popis transformací mezi vybranými souřadný systémy. Konkrétně se jedná o tyto souřadné soustavy:

1. ECEF (Earth Centred Earth Fixed) je pravoúhlá geocentrická souřadnicová soustava.
2. ENU (East North Up) je pravoúhlá lokální souřadnicová soustava.
3. GEOD je soustava geodetických/elipsoidickou souřadnic definovaných na rotačním elipsoidu, např. WGS-84.
4. SPHERE je soustava sférických souřadníc

2 Poznámky

2.1 Transformace

Definujme si zápis transformační matice ze souřadného systému UVW do souřadného systému XYZ například ve tvaru $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$ [Grewal et al., 2001].

Dále, ať vektor $\mathbf{v}$ obsahuje souřadnice systému XYZ, t.j. $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ a ten stejný vektor $\mathbf{v}$ ať obsahuje souřadnice $\mathbf{v} = [v_u, v_v, v_w]^T$ systému UVW. Pak pre obecný zápis transformace platí tento předpis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} \tag{1}$$

Systémy XYZ, respektive UVW reprezentují trojdimenzionální kartézské souřadné systémy.

Komponenty vektorů v jakémkoli souřadnícovém systému lze vyjádřit pomocí jejich jednotkových vektorů rovnoběžných s jejich příslušnými souřadnicovými osami. Například, ať souřadnicové osy systému XYZ označíme X, Y a Z a souřadnicové osy systému UVW označíme U, V a W, potom vektor $\mathbf{v}$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \mathbf{1}_x + v_y \mathbf{1}_y + v_z \mathbf{1}_z \\ &= v_u \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_w, \end{aligned} \tag{2}$$

kde

- jednotkové vektory $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ jsou definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- skaláry v_x, v_y, v_z jsou komponenty vektoru $\mathbf{v}$ definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- jednotkové vektory $\mathbf{1}_u, \mathbf{1}_v, \mathbf{1}_w$ jsou definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW,
- skaláry v_u, v_v, v_w jsou komponenty vektoru $\mathbf{v}$ definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW.

Příslušné komponenty vektoru lze vyjádřit pomocí skalárního součinu příslušných jednotkových vektorů, například ve tvaru

$$
\begin{aligned}
v_x &= \mathbf{1}_x^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w, && (3)\\
v_y &= \mathbf{1}_y^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w, && (4)\\
v_z &= \mathbf{1}_z^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w, && (5)
\end{aligned}
$$

a v maticové formě předchozí rovnice nabývají tento zápis

$$
\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix}. \tag{6}
$$

Tímto jsme si odvodili souřadnicovou transformační matici $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$. Skalární součin jednotkových ortogonálních vektorů umožňuje odvodit směrové kosiny, přičemž obecně platí, že

$$
\mathbf{1}_a^T \mathbf{1}_b = \cos(\theta_{a,b}). \tag{7}
$$

V důsledku toho, souřadnicová transformační matice může být vyjádřena ve tvaru

$$
\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x,u}) \cos(\theta_{x,v}) \cos(\theta_{x,w}) \\ \cos(\theta_{y,u}) \cos(\theta_{y,v}) \cos(\theta_{y,w}) \\ \cos(\theta_{z,u}) \cos(\theta_{z,v}) \cos(\theta_{z,w}) \end{bmatrix}. \tag{8}
$$

Rovnice 8 vyjadřuje všeobecnou rotační matici v trojrozměrném prostoru.

2.2 Translace

V predchádzajúcej kapitole sme sa venovali podobnostnej transformácii medzi dvoma pravohlými súradnými systémami. V prípade posunu (translace) počiatku jednej sústavy do počiatku druhej sústavy jednoznačne vyjadríme pomocou vektoru

$$
\mathbf{r} = \begin{bmatrix} (x-u) & (y-v) & (z-w) \end{bmatrix}^T. \tag{9}
$$

2.3 Transformace kovariančních matíc

2.4 Súradnicové systémy

2.4.1 ECEF - Earth Centred Earth Fixed

TBD - obrázok s nakreslenými osami, súradnice, m?no jednotkove vektory a opis

2.4.2 ENU - East-North-Up

TBD - obrázok s nakreslenými osami, súradnice, m?no jednotkove vektory a opis

2.4.3 GEOD - Systém geodetických súradníc

TBD - obrázok s nakreslenými osami, súradnice, m?no jednotkove vektory a opis

2.4.4 SPHERE - Systém sférických súradníc

TBD - obrázok s nakreslenými osami, súradnice, m?no jednotkove vektory a opis

3 ECEF → ENU & ENU → ECEF

Předpokládejme, že v tomto příkladu je uvažovaný rotační elipsoid (například WGS-84 nebo GRS-80) geocentrický, to znamená, že střed elipsoidu se nachází ve středu zemského tělesa. Transformace souřadnic pak mezi zemským geocentrickým systémem souřadnic (xyz) a lokálním topocentrickým (nebo také lokálním geodetickým - enu) systémem může být vyjádřený předpisem [Soler, 1998]

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{enu}^{xyz} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Pro popis transformace mezi uvedenými systémy si potřebujeme odvodit transformační matici, v tomto případě takzvanou rotační matici. Vycházejme z rovnice 8. Rotační matici pak zostavíme pro rotaci v prostoru a to pomocí jednoduchých rotací v každé ose samostatně.

Rotační matice kolem osy z ve směru hodinových ručiček nabude tvar

$$\mathbf{R_3}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

přičemž rotace kolem osy z je $\cos(\theta_{z,w}) = \cos(0) = 1$, protože úhel mezi osama z a w, které jsou v tomto přikladě totožné, je roven nule. Dále platí, že kosinus úhlu $\cos(\theta_{z,u}) = \cos(90) = 0$, protože z a u jsou na sebe kolmé. Stejně tento předpoklad platí i pro $\cos(\theta_{z,v})$, $\cos(\theta_{x,w})$ a $\cos(\theta_{y,w})$.

Analogicky postup bude platit i pro ostatní dvě rotace a tedy rotace kolem osy x je

$$\mathbf{R_1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

a kolem osy y

$$\mathbf{R_2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{13}$$

Vyjádření transformační matice $\mathbf{C}_{enu}^{xyz}$ mezi dvěma pravoúhlými kartézskymi souřadnicovými systémy ECEF a ENU je založen na součinu dvou rotací, konkrétně:

1. rotaci kolem osy z o úhel $\pi/2 + \lambda$ a
2. rotaci kolem osy x o úhel $\pi/2 - \varphi$,

kde úhlové stupně λ, respektíve φ geograficky představují stupeň otočení jedné soustavy od druhé ve směru zeměpisné délky (λ) a ve směru zeměpisné šířky (φ).

Potom transformace mezi systémy se dá vyjádřit ve tvaru

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R_1}(\pi/2 - \varphi)\,\mathbf{R_3}(\pi/2 + \lambda) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Jednou z vlastností rotačných matíc je tá, podle které $\mathbf{R}(\theta)^{-1} = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}(\theta)^T$. Z toho plyne, že zápis pro inversnou tranformaci je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R_3}(-(\pi/2 + \lambda))\,\mathbf{R_1}(-(\pi/2 - \varphi)) \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ \cos(\lambda) & -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Z předchozího zápisu plyne, že během rotace pravoúhlých souřadnicových soustav předpokládáme, že počátky souřadnic jsou shodné. V případě, že počátek, například soustavy ENU umístíme na povrch referenčního tělesa (elipsoid případně sféry), je zapotřebí doplnit posun mezi soustavami. Potom rovnice 14 nabude tvar

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

a rovnici 15 doplníme do tvaru

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}, \tag{17}$$

kde pravoúhlé souřadnice vektoru $\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ získáme transformací zeměpisných souřadnic posunutého počátku například ENU soustavy $(\varphi,\ \lambda)$ do systému geocentrických kartézskych souřadnic (například systému ECEF).

3.1 Příklad transformace z ECEF → ENU

Nech bod A je vyjadrený v súradniciach súradného systému ECEF hodnoty súradníc sú:

- $x = 4198944.6161$ m
- $y = 174747.2383$ m
- $z = 4781886.8769$ m

Majme bod B, ktorého geodetické súradnice sú $\varphi = 48.8862deg$, $\lambda = 2.3343deg$ a elipsoidická výška je $hel = 174.5217m$. Uhlové súradnice použijeme jednak k natočeniu súradných sústav (viď rotačná matica v rovnici 14) a spoločne so zadanou elipsoidickou výškou, k umiestneniu počiatku ENU sústavy, ktorý umiestníme nad povrch rotačného elipsoidu. Úlohou je vyjadriť súradnice bodu A v sústave ENU a s prihliadnutím zadefinovaného počiatku ENU sústavy v bode B.

Vektor pravouhlých súradníc bodu B, t.j. (x_0, y_0, z_0) získame transformáciou GEOD2ECEF().

ENU súradnice bodu A s prihliadnutím k umiestneniu počiatku ENU sústavy v bode B a výpočítané podľa 16, sú:

- $e = 3579.4232$ m
- $n = -688.3514$ m
- $u = -51.0524$ m.

Pseudokód Matlab funkcie ecef2enu() implementovanej v package +Geo je zhrnutý v prílohe A.1.

3.2 Příklad transformace z ENU → ECEF

V tomto príklade bude našou úlohou prezentovať inverznú transformáciu, no vychádzajme z ENU súradníc bod B v predchádzajúcom príklad. Jeho súradnice sú

- $e = 3579.4232$ m
- $n = -688.3514$ m
- $u = -51.0524$ m.

Aplikujúc rovnicu 17, ECEF XYZ súradnice bodu A sú

- $x = 4198944.6161$ m
- $y = 174747.2383$ m
- $z = 4781886.8769$ m.

Pseudokód Matlab funkcie enu2ecef() implementovanej v package +Geo je obsahom prílohy A.2

4 ECEF GEOD

Reference

[Grewal et al., 2001] Grewal, M. S., Andrews, A. P., and Bartone, C. G. (2001). *Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration*. Wiley-Interscience.

[Soler, 1998] Soler, T. (1998). A compendium of transformation formulas useful in gps work. *Journal of Geodesy*, 72:482–490.

Appendices

A Pseudokódy implementovaných transformácii v Matlab package +Geo

A.1 ECEF2ENU

Data: x, y, z, φ, λ, hel, RT, ELL
Result: e, n, u
výpočet rotační matice $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$;
if $RT == elipsoid$ **then**
  $[x_0, y_0, z_0] = geod2ecef(\varphi, \lambda, hel, ELL)$;
else
  $[x_0, y_0, z_0] = sphere2ecef(\varphi, \lambda, hel^*)$;
end
Výpočet podle rovnice 16

Algorithm 1: Transformácia ECEF2ENU

A.2 ENU2ECEF

Data: e, n, u, φ, λ, hel, RT, ELL
Result: x, y, z
výpočet rotační matice $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$;
if $RT == elipsoid$ **then**
  $[x_0, y_0, z_0] = geod2ecef(\varphi, \lambda, hel, ELL)$;
else
  $[x_0, y_0, z_0] = sphere2ecef(\varphi, \lambda, hel^*)$;
end
Výpočet podle rovnice 17

Algorithm 2: Transformácia ENU2ECEF