

libGeo: Popis souřadnicových systémů a transformace mezi vybranými systémy

MICHAL ELIAŠ

Verze	Dátum	Autor	Opis změn
[0.1]	2021-04-29	mel	Práce na popisu transformace ECEF2ENU a ENU2ECEF
[0.2]	2021-04-30	mel	Dokončení ECEF2ENU a ENU2ECEF; doplnění příkladů
[0.3]	2021-05-03	mel	Popis trans. kov. matíc; Popis souř. systémů; doplnění pseudokódů
[0.4]	2021-05-05	mel	Práce na popisu transformace GEOD2ECEF a ECEF2GEOD
[0.5]	2021-05-11	mel	Práce na popisu valcového zobrazení a UTM
[0.6]	2021-05-12	mel	Práce na popisu azimutálního zobrazení a Stereo projekce.
[0.7]	2021-05-13	mel	Práce na transformaci kov. matíc a popis některých případů

Obsah

1	Úvod	3
1.1	Rešerš literatury	3
2	Poznámky	3
2.1	Transformace	3
2.2	Translace	4
2.3	Transformace kovariančních matíc	5
2.4	Súradnicové systémy	7
3	Transformace souřadnic a jejich kovariančních matíc mezi vybranými souřadnicovými soustavami	9
3.1	ECEF \rightarrow ENU	9
3.2	ENU \rightarrow ECEF	11
3.3	GEOD \rightarrow ECEF	12
3.4	ECEF \rightarrow GEOD	16
4	Vybrané kartografické zobrazení	17
4.1	Definice a některé vlastnosti vybraných kartografického zobrazení	18
4.2	Poznámky k valcovým zobrazením	18
4.3	GEOD \rightarrow UTM	20
4.4	UTM \rightarrow GEOD	21
4.5	Poznámky k azimutálním zobrazením	23
4.6	GEOD \rightarrow STEREO	25
4.7	STEREO \rightarrow GEOD	26
	Appendices	28
A	Základní parametry zemského elipsoidu	28

B	Konstanty základních referenčních elipsoidů	29
B.1	World Geodetic System 1984 (WGS84)	29
B.2	Geodetic Reference System 1980 (GRS80)	29
B.3	Konstanty Krasovského elipsoidu	29
C	Pseudokódy implementovaných transformací v Matlab package +Geo	29
C.1	ECEF2ENU	29
C.2	ENU2ECEF	29
C.3	GEOD2ECEF	30
C.4	ECEF2GEOD	30

Seznam obrázků

1	Zobrazení bodu v ECEF soustavě souřadnic. Obrázek je převzat z [ECE].	7
2	Zobrazení systému souřadnic East-North-Up. Obrázek je převzat z [ENU].	8
3	Geodetické zeměpisné souřadnice. Obrázek je převzat z [Cim97].	8
4	Sférické polární souřadnice. Obrázek je převzat z [Weia].	9
5	$\varphi \rightarrow (x, y)$. Obrázek je převzat z [Cim97].	13
6	Prostorové pravouhlé souřadnice. Obrázek je převzat z [Cim97].	14
7	Geometrická azimutální projekce. Obrázek je převzat z [Buc02].	25

Seznam tabulek

Abstrakt

Dokument obsahuje popis transformací mezi vybranými souřadnicovými systémy.

Přehled důležitějších zkratk

CTP	-	Conventional Terrestrial Pole
ECEF	-	Earth-Centered Earth-Fixed. Pravoúhlý souřadnicový systém
	-	
IERS	-	International Earth Rotation Service

Přehled důležitějších symbolů

TBA - TBA

1 Úvod

Dokument obsahuje základní popis transformací mezi vybranými souřadnými systémy. Konkrétně se jedná o tyto souřadné soustavy:

1. ECEF (Earth Centred Earth Fixed) je pravoúhlá geocentrická souřadnicová soustava.
2. ENU (East North Up) je pravoúhlá lokální souřadnicová soustava.
3. GEOD je soustava geodetických/elipsoidickou souřadnic definovaných na rotačním elipsoidu, např. WGS-84.
4. SPHERE je soustava sférických souřadnic

1.1 Rešerš literatury

1.1.1 Obecná četba

TBA

1.1.2 Zajímavé odkazy na literaturu ve vztahu k transformacím

TBA

2 Poznámky

2.1 Transformace

Definujme si zápis transformační matice ze souřadného systému UVW do souřadného systému XYZ například ve tvaru \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} [GAB01].

Dále, ať vektor \mathbf{v} obsahuje souřadnice systému XYZ, t.j. $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ a ten stejný vektor \mathbf{v} ať obsahuje souřadnice $\mathbf{v} = [v_u, v_v, v_w]^T$ systému UVW. Pak pro obecný zápis transformace platí tento předpis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} \quad (1)$$

Systémy XYZ, respektive UVW reprezentují trojdimenzionální kartézské souřadné systémy.

Komponenty vektorů v jakémkoli souřadnicovém systému lze vyjádřit pomocí jejich jednotkových vektorů rovnoběžných s jejich příslušnými souřadnicovými osami. Například, ať souřadnicové osy systému XYZ označíme X, Y a Z a souřadnicové osy systému UVW označíme U, V a W, potom vektor \mathbf{v} můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_x \mathbf{1}_x + v_y \mathbf{1}_y + v_z \mathbf{1}_z \\ &= v_u \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_w,\end{aligned}\tag{2}$$

kde

- jednotkové vektory $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ jsou definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- skaláry v_x, v_y, v_z jsou komponenty vektoru \mathbf{v} definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- jednotkové vektory $\mathbf{1}_u, \mathbf{1}_v, \mathbf{1}_w$ jsou definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW,
- skaláry v_u, v_v, v_w jsou komponenty vektoru \mathbf{v} definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW.

Příslušné komponenty vektoru lze vyjádřit pomocí skalárního součinu příslušných jednotkových vektorů, například ve tvaru

$$v_x = \mathbf{1}_x^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w,\tag{3}$$

$$v_y = \mathbf{1}_y^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w,\tag{4}$$

$$v_z = \mathbf{1}_z^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w,\tag{5}$$

a v maticové formě předchozí rovnice nabývají tento zápis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix}.\tag{6}$$

Tímto jsme si odvodili souřadnicovou transformační matici \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} . Skalární součin jednotkových ortogonálních vektorů umožňuje odvodit směrové kosiny, přičemž obecně platí, že

$$\mathbf{1}_a^T \mathbf{1}_b = \cos(\theta_{a,b}).\tag{7}$$

V důsledku toho, souřadnicová transformační matice může být vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x,u}) & \cos(\theta_{x,v}) & \cos(\theta_{x,w}) \\ \cos(\theta_{y,u}) & \cos(\theta_{y,v}) & \cos(\theta_{y,w}) \\ \cos(\theta_{z,u}) & \cos(\theta_{z,v}) & \cos(\theta_{z,w}) \end{bmatrix}.\tag{8}$$

Rovnice 8 vyjadřuje všeobecnou rotační matici v trojrozměrném prostoru.

2.2 Translace

V předchozí kapitole jsme se věnovali podobnostnej transformaci mezi dvěma pravoúhlými souřadnými systémy. V případě posunu (translace), počátek jedné soustavy do počátku druhé soustavy jednoznačně vyjádříme pomocí vektoru

$$\mathbf{r} = [(x - u) \quad (y - v) \quad (z - w)]^T.\tag{9}$$

2.3 Transformace kovariančních matic

Cílem kapitoly je navrhnout transformaci kovariančních matic souřadnic (jejích přesností) mezi uvažovanými souřadnými systémy. Princip postupu je založen na zákoně hromadění středních chyb, viz například [Kub13] anebo [MA76].

Matematický zápis transformace kovarianční matice mezi vybranými systémy je tento:

$$\Sigma_{XYZ} = \mathbf{J}\Sigma_{UVW}\mathbf{J}^T, \quad (10)$$

kde

- \mathbf{J} je Jakobi matice příslušné transformace,
- Σ_{UVW} je kovarianční matice souřadnic resp. souřadného systému, ze kterého transformujeme a
- Σ_{XYZ} je kovarianční matice souřadnic resp. souřadného systému, do kterého transformujeme.

K interpretaci spomínaného zákona a jednotlivých matic si ukážme na následujícím příkladě. Majme vektorovou funkci $f(X)$ s rozměrem p ,

$$\mathbf{f}(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_p(X)]^T \quad (11)$$

a neť operátor gradient pro vektor \mathbf{X} s rozměrem n je daný v tvaru

$$\nabla_X = \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n} \right]^T. \quad (12)$$

Jakobiho matice \mathbf{J} příslušné transformace je pak definovaný takto:

$$\mathbf{J}_X = [\nabla_X \mathbf{f}_X^T]^T = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \vdots \\ f_p(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial X_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial X_1} & \frac{\partial f_p}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial X_n} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Uvedme kovarianční matici souřadnicového systému ze kterého transformujeme, respektive obecnou kovarianční matici Σ_X . Kovarianční matice je speciální matice jak z hlediska matematického (je symetrická či pozitivní definitní), tak z hlediska fyzikálního. Obsahuje všechny rozptyly a kovariance vstupních veličin. Obecně pro ni platí

$$\Sigma_{X_{n \times n}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \dots & \sigma_{X_1}\sigma_{X_n} \\ \sigma_{X_2}\sigma_{X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \sigma_{X_2}\sigma_{X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_n}\sigma_{X_1} & \sigma_{X_n}\sigma_{X_2} & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Zavedme si ještě výstupní kovarianční matici, teda v našem případě kovarianční matici souřadnicového systému, do kterého chceme transformovat a to například v tvaru

$$\Sigma_{Y_{p \times p}} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2} & \dots & \sigma_{Y_1}\sigma_{Y_p} \\ \sigma_{Y_2}\sigma_{Y_1} & \sigma_{Y_2}^2 & \dots & \sigma_{Y_2}\sigma_{Y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Y_p}\sigma_{Y_1} & \sigma_{Y_p}\sigma_{Y_2} & \dots & \sigma_{Y_p}^2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Podle rovnice 10, kovarianční matici v systému transformovaných souřadnic vyjádříme pomocí

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_1}\sigma_{Y_p} \\ \sigma_{Y_2}\sigma_{Y_1} & \sigma_{Y_2}^2 & \cdots & \sigma_{Y_2}\sigma_{Y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Y_p}\sigma_{Y_1} & \sigma_{Y_p}\sigma_{Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_p}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial X_1} & \frac{\partial f_p}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_1}\sigma_{X_n} \\ \sigma_{X_2}\sigma_{X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2}\sigma_{X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_n}\sigma_{X_1} & \sigma_{X_n}\sigma_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_n} & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_n} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Rozptýl veličin systému transformované soustavy souřadnic, například $\sigma_{Y_1}^2$ po přenásobení matic v předcházející rovnici, je

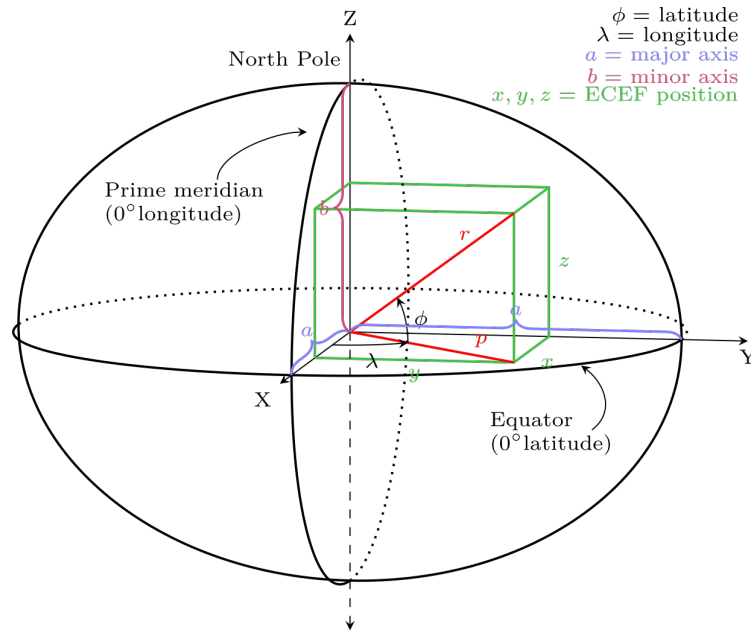
$$\sigma_{Y_1}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_i} \right)^2 + \sum \sum_{i \neq j} \frac{\partial f_1}{\partial X_i} \frac{\partial f_1}{\partial X_j} \sigma_{X_i X_j} \quad (17)$$

a kovariance mezi veličinami X_1 a X_2 bude

$$\sigma_{X_1 X_2} = \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial X_i} \frac{\partial f_2}{\partial X_i} \sigma_{X_i}^2 + \sum \sum_{i \neq j} \frac{\partial f_1}{\partial X_i} \frac{\partial f_2}{\partial X_j} \sigma_{X_i X_j}. \quad (18)$$

2.4 Sústředné souřadnicové systémy

2.4.1 ECEF - Earth Centred Earth Fixed



Obrázek 1: Zobrazení bodu v ECEF soustavě souřadnic. Obrázek je převzat z [ECE].

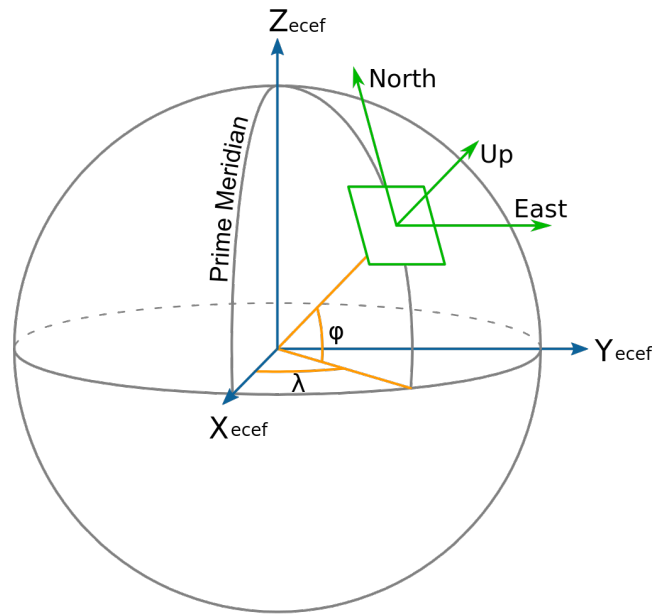
Základní kartézská pravouhlá soustava souřadnic, například tak, jako je zobrazená na obrázku 1, je definována takto [SH88], [Kov16]:

- počátek soustavy je soustředěn v geocentre, t.j. v gravitačním středu zemského tělesa,
- osa **Z** směřuje do místa zemského severního pólu, který je definován podle IERS. Protože poloha pólu se v čase mění, používá se střední poloha zemského pólu (CTP).
- osa **X** prochází bodem nulové zeměpisné délky, t.j. Greenwich poledníkem, který je definován podle IERS a míří do průsečíku tohoto poledníku a roviny rovníku,
- osa **Y** doplňuje pravotočivý pravouhlý systém souřadnic.

2.4.2 ENU - East-North-Up

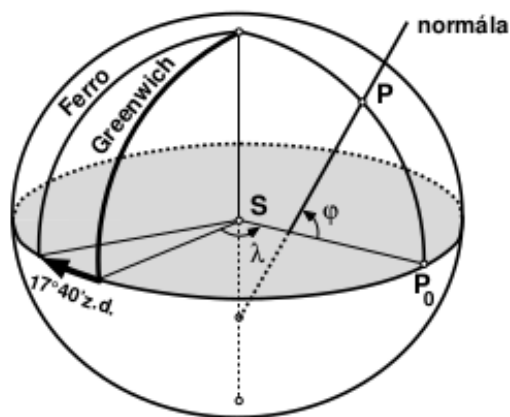
Některé výpočty souřadnic je praktičtější provádět v lokální souřadnicové soustavě například vzdálenost radarového přijímače od daného bodu atp., [Kov16], [Mey02]. ENU je lokální pravouhlá soustava souřadnic, přičemž její definice a umístění počátku soustavy a souřadnicových os, dle značení na obrázku 2, jsou:

- počátek systému soustavy souřadnic je umístěn v středě regionu záujmu a to buď na povrchu anebo blízko povrchu referenčního tělesa (elipsoid, koule),
- osa **n** (North) směřuje na sever,
- osa **e** (East) směřuje na východ a
- osa **u** (Up) je totožná s normálou referenčního tělesa (elipsoid, koule).



Obrázek 2: Zobrazení systému souřadnic East-North-Up. Obrázek je převzat z [ENU].

2.4.3 GEOD - Systém geodetických souřadnic



Obrázek 3: Geodetické zeměpisné souřadnice. Obrázek je převzat z [Cim97].

V praktických úlohách se poloha bodu popisuje pomocí geodetických anebo elipsoidických souřadnic. Elipsoidických proto, protože se definuje pomocí zvoleného zemského elipsoidu. Ten slouží k aproximaci fyzického zemského tělesa. Základní matematické vzorce určené pro odvození elipsoidu jsou obsahem přílohy A a přehled konstant globálně užitých elipsoidů jsou obsahem přílohy B.

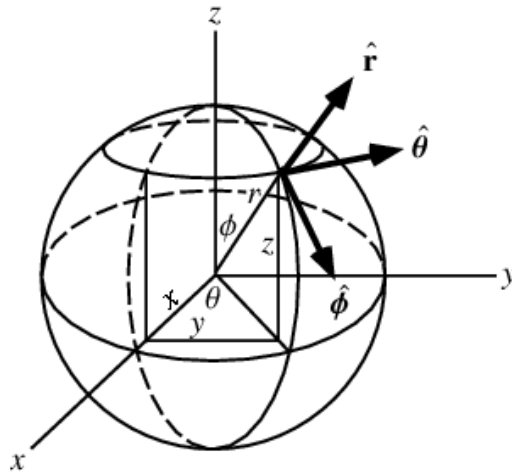
Poloha bodu **P** na obrázku 3 se vyjadřuje třemi souřadnicemi:

1. geodetickou zeměpisnou šířkou φ ,
2. geodetickou zeměpisnou délkou λ ,
3. geodetickou výškou.

Geodetická zeměpisná šířka φ bodu \mathbf{P} je úhel, který svírá normála v bodě \mathbf{P} k povrchu elipsoidu, s rovinou rovníku. Geodetická zeměpisná délka λ je úhel, který svírá rovina poledníku tohoto bodu s rovinou nultého poledníku. Za nultý poledník je mezinárodně volen ten, který prochází stabilizovaným bodem na astronomické observatoři v Greenwich. Geodetická výška se měří podél normály mezi referenčním elipsoidem a bodem \mathbf{P} .

2.4.4 SPHERE - Systém sférických (polárních) souřadnic

Koule je základní a nejjednodušší aproximace zemského tělesa. Sférické souřadnice tvoří systém souřadnic, které popisují polohu bodu na sféře. Referenční koule je pak definovaná sférickým poloměrem. Pro praktické výpočty se jeho hodnota často zpočítá jako střední poměr křivosti (a to z důvodu zachování objemu elipsoidu během jeho zobrazení na kouli, t.j. v místě lokální aproximace - viz příloha A).



Obrázek 4: Sférické polární souřadnice. Obrázek je převzat z [Weia].

Dle situace zobrazené na obrázku 4, poloha bodu na sféře je vyjádřena soustavou tří souřadnic:

- θ hodnota azimutu v rovině rovníka. Pokud je úhel značený symbolem λ , pak poukazuje na zeměpisnou délku,
- ϕ hodnota polárního úhla počítaná od zenitu (také zenitový úhel). Pokud je úhel značený symbolem φ' , pak poukazuje na doplněk zeměpisné délky od zenitu, t.j. $\varphi = 90 - \varphi'$ a
- r , je střední polomer Zeme.

3 Transformace souřadnic a jejich kovariančních matric mezi vybranými souřadnicovými soustavami

3.1 ECEF \rightarrow ENU

Předpokládejme, že v tomto příkladu je uvažovaný rotační elipsoid (například WGS-84 nebo GRS-80) geocentrický, to znamená, že střed elipsoidu se nachází ve středu zemského tělesa. Transformace souřadnic pak mezi zemským geocentrickým systémem souřadnic (xyz) a lokálním topocentrickým (nebo také lokálním geodetickým - enu) systémem může být vyjádřený předpisem [Sol98]

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{enu}^{xyz} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Pro popis transformace mezi uvedenými systémy si potřebujeme odvodit transformační matici, v tomto případě takzvanou rotační matici. Vycházejme z rovnice 8. Rotační matici pak zostavíme pro rotaci v prostoru a to pomocí jednoduchých rotací v každé ose samostatně.

Rotační matice kolem osy z ve směru hodinových ručiček nabude tvar

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

příčemž rotace kolem osy z je $\cos(\theta_{z,w}) = \cos(0) = 1$, protože úhel mezi osama z a w , které jsou v tomto příkladě totožné, je roven nule. Dále platí, že kosinus úhlu $\cos(\theta_{z,u}) = \cos(90) = 0$, protože z a u jsou na sebe kolmé. Stejně tento předpoklad platí i pro $\cos(\theta_{z,v})$, $\cos(\theta_{x,w})$ a $\cos(\theta_{y,w})$.

Analogicky postup bude platit i pro ostatní dvě rotace a tedy rotace kolem osy x je

$$\mathbf{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

a kolem osy y

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

Vyjádření transformační matice \mathbf{C}_{enu}^{xyz} mezi dvěma pravoúhlými kartézskými souřadnicovými systémy ECEF a ENU je založen na součinu dvou rotací, konkrétně:

1. rotaci kolem osy z o úhel $\pi/2 + \lambda$ a
2. rotaci kolem osy y o úhel $\pi/2 - \varphi$,

kde úhlové stupně λ , respektive φ geograficky představují stupeň otočení jedné soustavy od druhé ve směru zeměpisné délky (λ) a ve směru zeměpisné šířky (φ).

Potom transformace mezi systémy se dá vyjádřit ve tvaru

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1(\pi/2 - \varphi) \mathbf{R}_3(\pi/2 + \lambda) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Z předchozího zápisu plyne, že během rotace pravoúhlých souřadnicových soustav předpokládáme, že počátky souřadnic jsou shodné. V případě, že počátek, například soustavy ENU umístíme na povrch referenčního tělesa (elipsoid případně sféry), je zapotřebí doplnit posun mezi soustavami. Potom rovnice 23 nabude tvar

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

Při transformaci kovariančních matic vycházejme z předpokladu a definice Zákona hromadění středních chyb. Budeme vycházet z článku Transformace kovariančních matic. Předpokládejme, že kovarianční matice souřadnic soustavy ze které chceme transformovat Σ_{xyz} , je známá a to například

jako důsledek numerického výpočtu (regrese, vyrovnání, estimace souřadnice a jejich přesností atp.). Hlavní úlohou je v tomto kroku vyčíslit Jakobiho matici. Rozepsáním matic pro jednotlivé veličiny e, n, u z předchozích rovnic a následným parciálním derivováním podle veličin x, y, z snadno zjistíme, že Jakob matice \mathbf{J} je totožná s rotační maticí \mathbf{R} a tedy

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}. \quad (25)$$

Kovarianční matice souřadnic systému ENU pak nadobude tvaru

$$\Sigma_{enu} = \mathbf{J} \Sigma_{xyz} \mathbf{J}^T = \mathbf{R} \Sigma_{xyz} \mathbf{R}^T. \quad (26)$$

3.1.1 Příklad transformace z ECEF \rightarrow ENU

Nechť bod A je vyjádřen v souřadnicích souřadného systému ECEF a hodnoty souřadnic jsou:

- $x = 4198944.6161$ m
- $y = 174747.2383$ m
- $z = 4781886.8769$ m

Mějme bod B, jehož geodetické souřadnice jsou $\varphi = 48.8862deg$, $\lambda = 2.3343deg$ a geodetická výška je $h = 174.5217m$. Úhlové souřadnice použijeme jednak k natočení souřadných soustav (viz rotační matice v rovnici 23) a společně se zadanou elipsoidickou výškou, k umístění počátku ENU soustavy, který umístíme nad povrch rotačního elipsoidu. Úkolem je vyjádřit souřadnice bodu A v soustavě ENU a s přihlédnutím definovaného počátku ENU soustavy v bodě B.

Vektor pravoúhlých souřadnic bodu B, tj (x_0, y_0, z_0) získáme transformací GEOD2ECEF(). ENU souřadnice bodu A s přihlédnutím k umístění počátku ENU soustavy v bodě B a vypočítané podle 24, jsou:

- $e = 3579.4232$ m
- $n = -688.3514$ m
- $u = -51.0524$ m.

Pseudokód Matlab funkce ecef2enu(), která je implementována v package +Geo je stručně popsána v příloze C.1.

3.2 ENU \rightarrow ECEF

Jednou z vlastností rotačních matic je tá, podle které $\mathbf{R}(\theta)^{-1} = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}(\theta)^T$. Z toho plyne, že zápis pro inverznou transformaci je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(-(\pi/2 + \lambda)) \mathbf{R}_1(-(\pi/2 - \varphi)) \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda) \sin(\varphi) & \cos(\lambda) \cos(\varphi) \\ \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \sin(\varphi) & \sin(\lambda) \cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}. \quad (27)$$

a po doplnění předpokladu translace počátku souřadné soustavy, rovnici 27 doplníme do tvaru

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}, \quad (28)$$

kde pravoúhlé souřadnice vektoru $\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ získáme transformací zeměpisných souřadnic posunutého počátku například ENU soustavy (φ, λ, hel) do systému geocentrických kartézských souřadnic (například systému ECEF).

Odhad kovarianční matice Σ_{xyz} geocentrických pravouhlých souřadnic kopíruje postup jako v případě odhadu matice Σ_{enu} , no s tím rozdílem, že zde je

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}^{-1}, \quad (29)$$

respektíve vzhledem k vlastnostem matice rotace \mathbf{R}

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}^T. \quad (30)$$

Pro Σ_{xyz} pak dostaneme

$$\Sigma_{xyz} = \mathbf{J} \Sigma_{enu} \mathbf{J}^T. \quad (31)$$

3.2.1 Příklad transformace z ENU \rightarrow ECEF

V tomto příkladě bude naší úlohou prezentovat inverzní transformaci, no vycházejme z výsledků výpočtu polohy bodu v ENU soustavě souřadnic, t.j. souřadnic pro bod B v předcházejícím příkladě. Jeho souřadnice jsou:

- $e = 3579.4232$ m
- $n = -688.3514$ m
- $u = -51.0524$ m.

Dle rovnice 28, ECEF XYZ souřadnice bodu A jsou:

- $x = 4198944.6161$ m
- $y = 174747.2383$ m
- $z = 4781886.8769$ m.

Pseudokód Matlab funkce `enu2ecef()`, která je implementována v package `+Geo Package` je obsahem přílohy C.2

3.3 GEOD \rightarrow ECEF

Aby sme odvodili základní vzorce pro transformaci geodetických souřadnic na geocentrické pravouhlé kartézské souřadnice, je potřeba si vysvětlit základní geometrii mezi těmito souřadnicovými soustavami. V textu se budeme držet kompletního odvození a prepisu tak, jak je prezentován v kapitole 1.2 skriptu [Cim97].

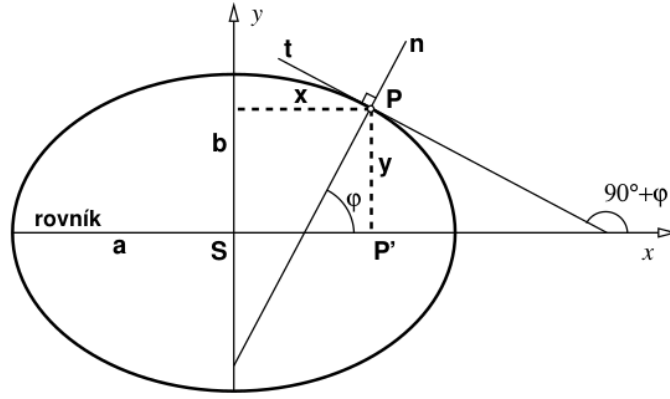
Na obr. 5 svírá normála n v bode \mathbf{P} k elipse s velkou poloosou a (s osou x) úhel φ (geodetická šířka bodu \mathbf{P}). Odpovídající tečna t svírá s kladným směrem osy x úhel $90^\circ + \varphi$ a její směrnice k je dána vzorcem

$$k = \frac{dy}{dx} = \tan(90^\circ + \varphi) = -\cot(\varphi). \quad (32)$$

Diferencováním rovnice meridiánové elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (33)$$

dostaneme



Obrázek 5: $\varphi \rightarrow (x, y)$. Obrázek je převzat z [Cim97].

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0 \quad (34)$$

a odtud

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad (35)$$

Z předchádzejících rovnic vyplývá

$$\cot(\varphi) = \frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}. \quad (36)$$

Po umocnění a úpravě

$$b^4 x^2 \sin^2(\varphi) - a^4 y^2 \cos^2(\varphi) = 0 \quad (37)$$

a dále víme, že

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0. \quad (38)$$

Řešením těchto dvou (pro x^2, y^2 lineárních) rovnic dostaneme

$$x = \frac{a^2 \cos(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (39)$$

a

$$y = \frac{b^2 \sin(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}}. \quad (40)$$

Do jmenovatelů dosadíme $b^2 = a^2(1 - e^2)$, potom po úpravě dostaneme

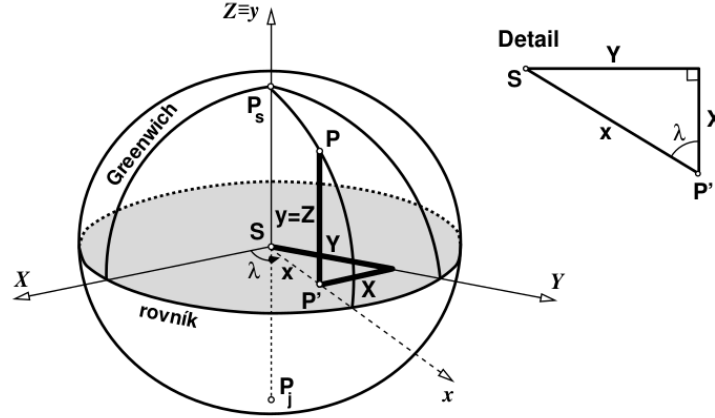
$$x = \frac{a \cos(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{a \cos(\varphi)}{W} \quad (41)$$

a

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{a(1 - e^2) \sin(\varphi)}{W}, \quad (42)$$

kde $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}$ je první geodetická funkce.

Polohu bodu P na rotačním elipsoidu vyjádříme v pravouhlé soustavě souřadnic. Její počátek je v středu elipsoidu S , osa Z v ose rotace, osa X v průsečnicku roviny rovníku s rovinou nultého poledníku, osa Y v rovině rovníku kolmá na osu X - tak jak je to znázorněno na obrázku 6.



Obrázek 6: Prostorové pravouhlé souřadnice. Obrázek je převzat z [Cim97].

Bodem $P(\varphi, \lambda)$ prochází poledník $P_s - P - P_j - P_s$ o geodetické délce φ . V rovině tohoto poledníku má bod P pravouhlé souřadnice x, y , odvozené vzorci 41, 42.

Podle obrázka 6 napíšeme pro souřadnice X, Y, Z bodu P vzorce

$$X = x \cos(\lambda) \quad (43)$$

$$Y = x \sin(\lambda) \quad (44)$$

$$Z = y. \quad (45)$$

Dosadíme-li do předchozích vzorců za x a y rovnice 41 a 42, dostaneme

$$X = \frac{a}{W} \cos(\varphi) \cos(\lambda) \quad (46)$$

$$Y = \frac{a}{W} \cos(\varphi) \sin(\lambda) \quad (47)$$

$$Z = \frac{a}{W} (1 - e^2) \sin(\varphi). \quad (48)$$

Uvažíme-li vzorec pro příčný poloměr křivosti

$$N = \frac{a}{W}, \quad (49)$$

potom geocentrické pravouhlé souřadnice bodu P budou mít vzorce

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ N \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ N (1 - e^2) \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (50)$$

V případě, že bod P leží ve směru normály k elipsoidu ve výšce H nad elipsoidem, pak předchozí rovnice budou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + H) \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ (N + H) \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ (N [1 - e^2] + H) \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Předpokládejme, že kovarianční matice souřadnic φ, λ a H , Σ_{GEOD} je známá. Pro odhad kovarianční matice prostorových pravouhlých souřadnic X, Y, Z , Σ_{ECEF} budeme postupovat podle článku Transformace kovariančních matic. Z článku víme, že úlohou je vyjádřit Jakobiho matici \mathbf{J} . Derivováním modelu rovnic X, Y, Z z poslední rovnice podle veličin φ, λ a H , postupně dostaneme:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial H} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y}{\partial H} \\ \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial H} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Pro jednotlivé složky platí:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \cos(\lambda) \left(\frac{\partial N}{\partial \varphi} \cos(\varphi) - \sin(\varphi) (N + H) \right), \quad (53)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = -(N + H) \cos(\varphi) \sin(\lambda), \quad (54)$$

$$\frac{\partial X}{\partial H} = \cos(\varphi) \cos(\lambda), \quad (55)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = \sin(\lambda) \left(\frac{\partial N}{\partial \varphi} \cos(\varphi) - \sin(\varphi) (N + H) \right), \quad (56)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = (N + H) \cos(\varphi) \cos(\lambda), \quad (57)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial H} = \cos(\varphi) \sin(\lambda), \quad (58)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{b^2}{a^2} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial N}{\partial \varphi} + \cos(\varphi) N \right) + H \cos(\varphi), \quad (59)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0, \quad (60)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial H} = \sin(\varphi), \quad (61)$$

kde

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{ae^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{3/2}} \quad (62)$$

a veličiny a, e, N jsou hlavní poloos meridiánové elipsy, její první excentricita a příčný poloměr křivosti.

Kovarianční matice souřadnic prostorového pravouhlého souřadnicového systému ECEF je s přihlédnutím k právě definované Jakobiho matici

$$\Sigma_{ECEF} = \mathbf{J} \Sigma_{GEOD} \mathbf{J}^T. \quad (63)$$

3.3.1 Příklad transformace z GEOD → ECEF

Ukážme si příklad transformace z geodetických souřadnic do prostorových pravouhlých souřadnic.

Bod P ležící na elipsoidu má geodetické souřadnice:

- $\varphi = 48.8562^\circ$
- $\lambda = 2.3508^\circ$
- $h = 0.0674m$.

Po aplikování rovnice 51 (uvažujeme rotační elipsoid WGS-84 tak jak je definován v B.1), prostorové geocentrické souřadnice bodu P jsou:

- $X = 4200952.53m$
- $Y = 172458.50m$
- $Z = 4780052.13m$.

Pseudokód Matlab funkce `geod2ecef()`, která je implementována v package `+Geo Package` je obsahem přílohy C.3.

3.4 ECEF → GEOD

Existuje celá řada metod, které se zaměřují na inverzní transformaci souřadnic z pravoúhlého prostorového systému souřadnic na systém geodetických zeměpisných souřadnic. Práce se speciálně zaměřují na převod geodetické šířky φ a to hlavně z důvodu přesnosti jejího odhadu (víme, že z důvodu zploštění referenčního tělesa, v našem případě elipsoidu, geodetická šířka není definována na spojnici středu elipsoidu a bodu P na povrchu elipsoidu a proto nastávají problémy řešení rovnice pro odhad geodetické šířky ze vstupních parametrů, které jsou pravoúhlé geocentrické souřadnice) nebo z důvodu výpočetního (geodetická šířka se počítá buď iterativními metodami nebo neiterativními). Z odborných článků, které se věnují tomuto problému bychom mohli citovat například [Bow76], [Bor89] nebo z aktuálních prací [Fuk06] či [Ver11] (implementován v `+ Geo package`). Autoři, v práci [FI03] se věnovali vzájemnému srovnání vybraných (do toho roku známých) algoritmů.

Jeden ze základních algoritmů (bez ověření přesnosti či výpočetní rychlosti) na odhad geodetických souřadnic (φ, λ, h) počítaných z pravoúhlých kartézských souřadnic X, Y, Z je tento [GAB01]:

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right), \quad (64)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{Z + \frac{e^2 a^2 \sin^3(\zeta)}{b}}{\xi - e^2 a \cos(\zeta)} \right), \quad (65)$$

a

$$h = \frac{\xi}{\cos(\varphi)} - N, \quad (66)$$

kde

$$\zeta = \tan^{-1} \left(\frac{aZ}{b\xi} \right) \quad (67)$$

$$\xi = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (68)$$

a N je příčný poloměr křivosti, a je hlavní poloosa meridiánové elipsy, b je vedlejší poloosa meridiánové elipsy a e je její excentricita.

Odhad kovarianční matice geodetických souřadnic bodu v geodetickém souřadnicovém systému nebude záviset na komplikovaných iteračních postupech spojených s odhadem zeměpisné šířky. S výhodou využijeme výsledných rovnic popsanych v části textu, kde se věnujeme transformaci geodetických souřadnic bodu do systému prostorových pravouhlých souřadnic, respektive transformační Jacobiho matice, kterou jsme z těchto rovnic odvodili. Inverze takto odvozené Jacobiho matice nám v této části poslouží k odhadu kovarianční matice výsledných geodetických souřadnic. Proto pro kovariační matici geodetických souřadnic transformované ze soustavy prostorových souřadnic bude

$$\mathbf{\Sigma}_{GEOD} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{\Sigma}_{ECEF} (\mathbf{J}^{-1})^T. \quad (69)$$

3.4.1 Příklad transformace z ECEF \rightarrow GEOD

Příklad transformace z prostorových pravouhlých souřadnic do systému geodetických souřadnic.

Bod P ležící na elipsoidu má tentokrát prostorové souřadnice:

- $X = 4200952.53m$
- $Y = 172458.50m$
- $Z = 4780052.13m$.

Po aplikování algoritmu například [Ver11] (uvažujeme rotační elipsoid WGS-84 tak jak je definován v B.1), pak prostorové geocentrické souřadnice bodu P jsou:

- $\varphi = 48.8562^\circ$
- $\lambda = 2.3508^\circ$
- $h = 0.0674m$.

Pseudokód Matlab funkce `ecef2geod()`, která je implementována v package `+Geo Package` je obsahem přílohy C.4.

4 Vybrané kartografické zobrazení

Z hlediska zkrslení zobrazení rozlišujeme na:

1. konformní - stejnouhlá,
2. ekvidistantní - stejnodelná,
3. ekvivalentní - stejnoplochá,
4. kompenzační - vyrovnávací.

Z pohledu k třídění zobrazovací plochy, pomocí které si můžeme představit vznik obrazu referenční lochy rozlišujeme:

1. zobrazení na kulovou plochu,
2. jednoduchá zobrazení (kuželová, válcová, azimutální),
3. nepravá zobrazení (pseudokonická, pseudocylindrická, pseudoazimutální),
4. polykónická,

5. polyederická,
6. obecná.

My popíšeme jenom vybrané jednoduchá zobrazení a to konkrétně válcová (UTM) a azimutální (stereografická projekce).

4.1 Definice a některé vlastnosti vybraných kartografického zobrazení

Kartografickým zobrazením je podle [Buc02] vzájemné přiřazení polohy bodů na dvou různých referenčních plochách. V některých případech, kdy je možno vztah realizovat geometrickou cestou (promítáním), podle [Buc02] budeme takové zobrazení nazývat projekcí neboli perspektivním zobrazením.

Zobrazení je jednoznačně matematicky definováno vtažením mezi souřadnicemi bodů na obou referenčních plochách, kterému říkáme zobrazovací rovnice. Například zobrazení elipsoidu do roviny budou zobrazovací rovnice v explicitním tvaru

$$X = f(\varphi, \lambda), \quad (70)$$

$$Y = g(\varphi, \lambda), \quad (71)$$

kde funkce f , g v určitém místě považujeme za spojitě, obecně na sobě mezívislé, diferencovatelné apod. Výjimky představují singulární body (např. póly), kde uvedená vlastnost není obecně splněna.

4.1.1 Poznámky k jednoduchým zobrazením

Pro naše účely nás budou zajímat jenom jednoduchá zobrazení. Jednoduchá zobrazení jsou taková zobrazení, pro něž je možno zapsat zobrazovací rovnice, podle nichž každá z rovinných souřadnic (polárních nebo pravoúhlých) a výrazy pro zkreslení (závislé proměnné) se dají vyjádřit funkcemi pouze jedné souřadnice (nezávislé proměnné) na referenční ploše. Důsledkem takové jednoduché volby je pak i jednoduchý obraz poledníků a rovnoběžek, které jsou pak na mapě znázorněny jako svazek přímek či osnova rovnoběžných přímek (u poledníku) a soustava rovnoběžných kružnic či osnova rovnoběžných přímek (u rovnoběžek). Jednoduchá zobrazení jsou ortogonální (viz [Buc02], str. 51).

4.2 Poznámky k válcovým zobrazením

Válcová zobrazení v normální poloze mají tyto vlastnosti [Buc02]:

1. rovník a rovnoběžky se zobrazují jako osnova rovnoběžných přímek,
2. obrazy poledníků tvoří osnovu přímek vzájemně stejně odlehklých rovnoběžných a kolmých na obrazy rovnoběžek,
3. obraz základního poledníku volíme jako osu Y ,
4. zobrazovací rovnice pro Y je veličina Y funkcí pouze (φ) .
5. do obrazu rovníku vkládáme osu X (u souřadnicových systému používaných v geodézii je orientace opačná),
6. zobrazovací rovnice pro X je X lineární funkcí zeměpisné délky (λ) .

Zkreslení v poledníku a rovnoběžce jsou:

$$m_p = \frac{dY}{Md\varphi} \quad (72)$$

$$m_r = \frac{dX}{N \cos(\varphi) d\lambda} = \frac{a}{N \cos(\varphi)}, \quad (73)$$

kde M , N jsou meridiánový a příčný poloměr křivosti, a je hlavní poloosa meridiánové elipsy a φ je zeměpisná šířka.

Protože poledník a rovnoběžka tvoří u válcových zobrazení hlavní paprsky, je pro konformitu jedinou a postačující podmínkou

$$m_p = m_r,$$

a při referenční ploše elipsoidické a nezkresleném rovníku bude pro dosažení 72 a 73, platit:

$$\frac{dY}{M d\varphi} = \frac{a}{N \cos(\varphi)}. \quad (74)$$

Po separaci proměnných dostaneme

$$dY = a \frac{M}{N \cos(\varphi)} d\varphi, \quad (75)$$

kde na pravé straně rovnice se vyskytuje výraz pro tzv. izometrickou šířku.

Izometrická šířka q , která je funkcí zeměpisné šířky φ , je definována:

$$q = \int_0^\varphi \frac{M}{N \cos(\varphi)} d\varphi \quad (76)$$

a po dosazení za M a N dostaneme

$$\begin{aligned} q &= \int_0^\varphi \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2(\varphi)) \cos(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_0^\varphi \frac{(1-e^2 \sin^2(\varphi) - e^2 \cos^2(\varphi)) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2(\varphi)) \cos(\varphi)} \\ &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)} - \int_0^\varphi \frac{e \cos(\varphi) d\varphi}{1-e^2 \sin^2(\varphi)} \\ &= \ln \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - e \int_0^\varphi \frac{d(e \sin(\varphi))}{1-e^2 \sin^2(\varphi)}, \end{aligned} \quad (77)$$

a po proložení $x = e \sin(\varphi)$ v posledním integrálu, z něhož plyne, že

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+e \sin(\varphi)}{1-e \sin(\varphi)}\right) \quad (78)$$

a pro izometrickou šířku pak platí

$$q = \ln \left[\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1-e \sin(\varphi)}{1+e \sin(\varphi)} \right)^{\frac{e}{2}} \right]. \quad (79)$$

Po dosazení 79 do 75 dostaneme [Buc02], [Sny87]:

$$Y = a \ln \left[\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1-e \sin(\varphi)}{1+e \sin(\varphi)} \right)^{\frac{e}{2}} \right]. \quad (80)$$

Protože X je lineární funkce zeměpisné délky, pro vyjádření souřadnice X platí:

$$X = a(\lambda - \lambda_0). \quad (81)$$

Inverzní vzorec pro veličinu φ v případě spětné transformace vyžaduje počítání přes iterační proces a základní rovnice je definována ve tvaru [Sny87]

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} \left\{ t \left[\frac{1 - e \sin(\varphi)}{1 + e \sin(\varphi)} \right]^{\frac{e}{2}} \right\}, \quad (82)$$

kde

$$t = e^{-\frac{Y}{a}}$$

a iterační proces začíná výpočtem

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1}(t)$$

a pokračuje pokud není dosažení zvolená konvergenční hranice.

Inverzní zeměpisná délka se vypočte podle rovnice:

$$\lambda = \frac{X}{a} + \lambda_0. \quad (83)$$

Konformní transversální válcové zobrazení

Konformní transversální válcové zobrazení nazývané také Gaussovo (pro elipsoidickou referenční plochu) nebo transversální Mercatorovo, je specifické tím, že válec se dotýka referenční koule (elipsoidu) podél základního poledníku, procházejícího středem území. Kartografické poledníky a rovnoběžky se pak zobrazují jako zeměpisné polidníky a rovnoběžky v normální poloze.

Uplatnění našlo také konformní válcové zobrazení v obecné poloze (v literatuře Oblique Mercator Projection). Délkově zachovává zvolený kartografický rovník.

Universální transversální zobrazení v poledníkových páslech, zobrazení systému UTM

V zobrazeních, v kterých má být užito v poloze jiné než normální, zobrazuje se nejdřív elipsoid na kouli a pak terpe s koule na zobrazovací plochu, [Buc02]. V případě Gauss (Gauss-Krügerova) zobrazení, elipsoid je zobrazován přímo do roviny, tedy bez zprostředkující koule a to tak, že meridiální pruhy stejné šířky se zobrazují samostatně. Určující podmínkou je konformita a nezkrácený základní (střední) poledník pásu.

4.3 GEOD → UTM

V knize [Buc02] se uvádí podrobné odvození zobrazovacích rovnic. Z pohledu programátorského je možná výhodnější popsat algoritmus, který se nachází v knize [Sny87] (vzorce platí pro elipsoid).

$$x = k_0 N \left[A + (1 - T + C) \frac{A}{6} + \left(5 - 18T + T^2 + 72C - 58e'^2 \right) \frac{A^5}{120} \right] \quad (84)$$

$$y = k_0 \left\{ B - B_0 + N \tan(\varphi) \left[\frac{A^2}{2} + (5 - T + 9C + 4C^2) \frac{A^4}{24} + \left(61 - 58T + T^2 + 600C - 330e'^2 \right) \frac{A^6}{720} \right] \right\} \quad (85)$$

$$k = k_0 \left[1 + (1 + C) \frac{A^2}{2} + \left(5 - 4T + 42C + 13C^2 - 28e'^2 \right) \frac{A^4}{24} + \left(61 - 148T + 16T^2 \right) \frac{A^6}{720} \right], \quad (86)$$

kde

- k_0 je multipliační konstanta $k_0 = 0.9996$,
- e'^2 je druhá excentricita rotačního elipsoidu definovaná také pomocí $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$,
- N je příčný poloměr křivosti rotačního elipsoidu,
- $T = \tan^2(\varphi)$,
- $C = e'^2 \cos^2(\varphi)$,
- $A = (\lambda - \lambda_0) \cos(\varphi)$ předpokládajíc, že λ a λ_0 jsou v radiánech,
- B je délka oblouku meridiánu od rovníku po φ . $B_0 = B$ zpočtená pro φ_0 a platí

$$\begin{aligned}
B = & a \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \dots \right) \varphi \\
& - a \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} - \dots \right) \sin(2\varphi) \\
& + a \left(\frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} + \dots \right) \sin(4\varphi) \\
& - a \left(\frac{35e^6}{3072} + \dots \right) \sin(6\varphi)
\end{aligned} \tag{87}$$

- φ je zeměpisná délka v radiánech.

Pokud $\varphi \pm \pi/2$, pak $x = 0$, $y = k_0 (B - B_0)$ a $k = k_0$.

Jednotlivé osi souřadnic jsou dané takto: Yová osa leží v obraze základního poledníku λ_0 a y roste směrem na sever. Xová osa je kolmá na Y a x roste směrem na východ.

4.4 UTM → GEOD

Pro inverzní vzroce podle [Sny87] platí:

$$\begin{aligned}
\varphi = \varphi_1 & - G \left[\frac{D^2}{2} - \left(5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9e'^2 \right) \frac{D^4}{24} \right] \\
& - G \left[\left(61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252e'^2 - 3C_1^2 \right) \frac{D^6}{720} \right],
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{D - (1 + 2T_1 + C_1) \frac{D^3}{6} + \left(5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8e'^2 + 24T_1^2 \right) \frac{D^5}{120}}{\cos(\varphi_1)}, \tag{89}$$

kde

- $G = \left(\frac{N_1 \tan(\varphi_1)}{R_1} \right)$

- φ_1 je zeměpisná šířka charakteristická pro centrální meridián a která má stejnou y souřadnici jako bod, kterého polární souřadnice jsou (φ, λ)

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \mu &+ \left(\frac{3e_1}{2} - \frac{27e_1^3}{32} + \dots \right) \sin 2\mu \\ &+ \left(\frac{21e_1}{16} - \frac{55e_1^4}{32} + \dots \right) \sin 4\mu \\ &+ \left(\frac{151e_1^3}{96} + \dots \right) \sin 6\mu \\ &+ \left(\frac{1097e_1^4}{512} - \dots \right) \sin 8\mu\end{aligned}$$

- $e_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$
- $\mu = \frac{B}{a \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \dots \right)}$
- B_0 je spočtená pomocí rovnice 87 pro vstupní φ_0 ,
- $B = B_0 + \frac{y}{k_0}$,
- $e'^2 = \frac{e^2}{(1 - e^2)}$,
- $C_1 = e'^2 \cos^2(\varphi_1)$,
- $T_1 = \tan^2(\varphi_1)$,
- $N_1 = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2(\varphi_1))}}$,
- $R_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2(\varphi_1))^{3/2}}$,
- $D = \frac{x}{N_1 k_0}$.

Meridiánová konvergence

Meridiánová konvergence je podle [Mer] úhel určitém bodu referenční plochy mezi tečnami k místnímu poledníku a ke křivce rovnoběžné se základním poledníkem; může být elipsoidická meridiánová konvergence, sférická meridiánová konvergence a rovinná meridiánová konvergence.

V knize [Buc02], vzorec pro výpočet meridiánové konvergence γ je (bez odvození)

$$\begin{aligned}\tan(\gamma) &= \lambda \sin(\varphi) + \frac{\lambda^3}{3} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) (1 + \tan^2(\varphi) + 3\eta^2 + 2\eta^4) \\ &+ \frac{\lambda^5}{15} \sin(\varphi) \cos^4(\varphi) (2 + 4 \tan^2(\varphi) + 2 \tan^4(\varphi)) + \dots,\end{aligned}\tag{90}$$

$$\text{kde } \eta^2 = \frac{e^2 \cos^2(\varphi)}{1 - e^2}.$$

Délkové zkreslení

Délkové zkreslení je funkcí zeměpisných souřadnic a pro jeho výpočet platí [Buc02]:

$$m = 1 + \frac{\lambda}{2} \cos^2(\varphi). \quad (91)$$

Chceme-li délkové zkreslení spočítat z pravouhlých souřadnic, pak vzorec pro výpočet je tento:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \dots, \quad (92)$$

avšak $R = \sqrt{MN}$ je funkcí zeměpisné šířky φ .

4.5 Poznámky k azimutálním zobrazením

Azimutální zobrazení si můžeme představit tak, že obraz referenčního tělesa vzniká již přímo v rovině [Buc02], str. 99. V tomto zobrazení je rovina kolmá ke spojnici kartografického pólu se středem referenční koule (pozor na projekci z elipsoidu). Nasledující text se týká odvození zobrazení vývozené z referenční koule. V knize [Sny87] se diskutuje algoritmus respektive vzorce platné pro elipsoid.

Z azimutálního zobrazení jsou známá některé vlastnosti, například:

- Obrazem poledníků je svazek přímek s vrcholem v kartografickém pólu a které svírají stejné úhly jako na kouli.
- Základní poledník se zobrazí jako osa X.
- Obrazem rovnoběžek jsou kružnice se středem v kartografickém pólu. Poloměr těchto rovnoběžek závisí na kartografické šířce.

Zobrazovací rovnice jsou:

$$\rho = f(\psi), \quad (93)$$

kde $\psi = 90^\circ - \varphi$, kde v tomto případě φ je kartografická šířka (odvozená na kouli a ne na elipsoidu).

$$\varepsilon = \lambda, \quad (94)$$

kde λ v tomto případě reprezentuje kartografickou délku.

Funkci f v případě první zobrazovací rovnice definujeme na základě požadavků, nejčastěji z ekvivalence, ekvivalence či konformity. Nás bude zajímat konformní zobrazení, protože stereografická projekce zachovává konformitu úhlů.

V azimutálním zobrazení můžeme zavést pravouhlou rovinnou soustavu, kde pravoúhlé souřadnice X, Y získáme transformací polárních souřadnic na pravouhlé souřadnice. Počátek takové souřadnicové soustavy je potom někdy vhodné pomocí aditačních konstant přesunout do libovolného místa vzhledem k středu zobrazovaného území a to tak, aby souřadnice v tomto území měly kladnou hodnotu.

K transformaci polárních souřadnic do soustavy pravouhlých souřadnic použijeme výrazy:

$$X = \rho \cos(\varepsilon), \quad (95)$$

$$Y = \rho \sin(\varepsilon), \quad (96)$$

resp. pro inverzní případ platí:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (97)$$

a

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right). \quad (98)$$

Jak už bylo nastíněno, nás bude zajímat konformní zobrazení. Pro konformní azimutální zobrazení je jedninou a postačující podmínkou

$$\frac{d\rho}{Rd\psi} = \frac{\rho}{R \sin(\psi)}. \quad (99)$$

Po separaci proměnných

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\psi}{\sin(\psi)} \quad (100)$$

a po integraci dostaneme

$$\ln(\rho) = \ln\left(\tan\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) + \ln(C), \quad (101)$$

kde C je libovolná integrační konstanta a z poslední rovnice plyne, že

$$\rho = C \tan\left(\frac{\psi}{2}\right). \quad (102)$$

Pokud zavedeme podmínku, aby pro střed mapy (pro pól) platilo $m = 1$, pak (bez odvození - viz [Buc02]), $C = 2R$, takže zobrazovací rovnice jsou

$$\rho = 2R \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (103)$$

a

$$\varepsilon = \lambda. \quad (104)$$

Výraz pro zkreslení m je

$$m = \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}. \quad (105)$$

Pokud chceme stanovit v pólu konkrétní délkové zkreslení různě od jedné, je možné, podobně jako v případě UTM zobrazení, zavést multiplikační konstantu, jejíž velikost udává délkové zkreslení v pólu. Platí

$$C = k2R. \quad (106)$$

Vedle konformity má zobrazení důležitou vlastnost, že každá kružnice na referenční ploše kulové se zobrazuje opět jako kružnice. Tedy obrazy geografické sítě se skládá ze samých kružnic respektive přímk (kružnice s nulovou křivostí).

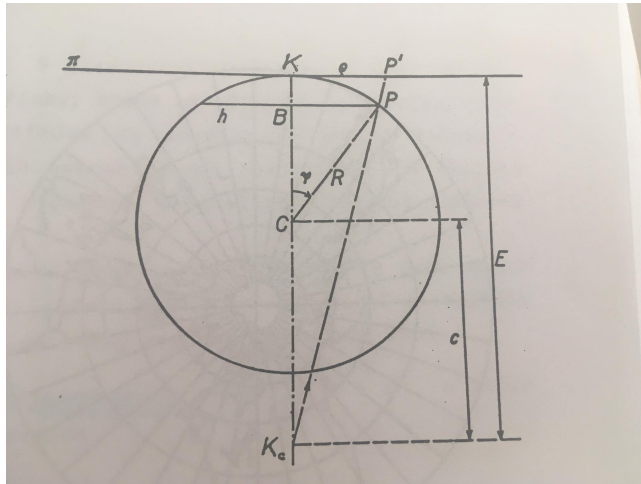
Výraz pro délkové zrekšení je možné vyjádřit i za použití rovinných souřadnic a to v tvaru

$$m = 1 + \frac{X^2 + Y^2}{4R^2}, \quad (107)$$

kde R je poloměr koule.

4.6 GEOD → STEREO

Azimutální (geometrické) projekce vznikají promítnutím povrchu referenční koule o poloměru R z libovolného bodu K_c na rovinu π , kolmou ke spojnici středu promítání K_c se středem koule C . Podle předchozího obrázku, který znázorňuje osový řez rovinou promítacího paprsku bodu P , je obraz bodu P' určen v rovině π polárními souřadnicemi ρ, ε .



Obrázek 7: Geometrická azimuthální projekce. Obrázek je převzat z [Buc02].

Z obrázku plyne tato nerovnost

$$\frac{\rho}{R \sin(\psi)} = \frac{E}{c + R \cos(\psi)}, \quad (108)$$

kde $E = K_c K$ a $c = K_c C$, kde C je střed koule. Takže zobrazovací rovnice azimuthálních zobrazení budou

$$\rho = \frac{RE \sin(\psi)}{c + R \cos(\psi)} \quad (109)$$

a

$$\varepsilon = \lambda. \quad (110)$$

Vztahy pro výpočet pravouhlých souřadnic transformované z polárních souřadnic, resp. přímo ze zeměpisných souřadnic jsou (porovnej s [Weib] anebo [TDBS77], kde je přehozené značení souřadnicových os).

$$X = \frac{RE (-\cos(\varphi_K) \sin(\varphi) + \sin(\varphi_K) \cos(\varphi) \cos(\Delta\lambda))}{c + R (\sin(\varphi_K) \sin(\varphi) + \cos(\varphi_K) \cos(\varphi) \cos(\Delta\lambda))}, \quad (111)$$

a

$$Y = \frac{RE (\cos(\varphi) \sin(\Delta\lambda))}{c + R (\sin(\varphi_K) \sin(\varphi) + \cos(\varphi_K) \cos(\varphi) \cos(\Delta\lambda))}, \quad (112)$$

kde $\Delta\lambda = (\lambda - \lambda_K)$.

Rovnice platí pro všechny azimuthální projekce. Jedina neznáma konstanta c rozhoduje výběr projekce ze sady případů, z nichž užívané jsou:

- gnomická projekce, při $c = 0$;
- **stereografická projekce**, při $c = R$;
- externí projekce, při $c > R$;

- ortografická projekce, při $c = \infty$.

Poznamenajme, že rovnice stereografické projekce, která zobrazuje referenční těleso elipsoid do roviny jsou obsahem knihy [Sny87].

4.7 STEREO → GEOD

Inverzní vzorce pro odhad zeměpisných souřadnic z pravouhlých rovinných souřadnic jsou [TDBS77] anebo [Weib] (pozor na přehozené značení souřadnicových os):

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\cos(c) \sin(\varphi_K) \frac{Y \sin(c) \cos(\varphi_K)}{\rho} \right), \quad (113)$$

a

$$\lambda = \lambda_0 + \tan^{-1} \left(\frac{X \sin(c)}{\rho \cos(\varphi_K) \cos(c) - Y \sin(\varphi_K) \sin(c)} \right), \quad (114)$$

kde

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (115)$$

a

$$c = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\rho}{2R} \right). \quad (116)$$

Reference

- [Bor89] K. M. Borkowski. Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates. *Bulletin Geodesique*, 63(1):50–56, March 1989.
- [Bow76] B. Bowring. Transformation from spatial to geographical coordinates. *Survey Review*, 23:323–327, 1976.
- [Buc02] Buchar, P. *Matematická kartografie*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002.
- [Cim97] Cimbalník M., Mervart L. *Vyšší geodézie 1*. Ediční středisko ČVUT, Praha, 1997.
- [ECE] ECEF:Wiki. Ecef coordinates in relation to latitude and longitude — Wikipedia, the free encyclopedia.
- [ENU] ENU:Wiki. The east north up (enu) local tangent plane is similar to ned, except for swapping 'down' for 'up' and x for y. — Wikipedia, the free encyclopedia.
- [FI03] H. Fok and H. Iz. A comparative analysis of the performance of iterative and non-iterative solutions to the cartesian to geodetic coordinate transformation. volume 5, pages 61–74, 2003.
- [Fuk06] Toshio Fukushima. Transformation from Cartesian to Geodetic Coordinates Accelerated by Halley's Method. *Journal of Geodesy*, 79(12):689–693, March 2006.
- [GAB01] Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews, and Chris G. Bartone. *Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration*. Wiley-Interscience, 2001.
- [Kov16] P. Kovář. *Družicová navigace. Od teorie k aplikacím v softwarovém přijímači*. České vysoké učení technické v Praze. Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2016.
- [Kub13] L. Kubaček. *Statistical Theory of Geodetic Network*. VÚGTK, Zdíby, 2013.
- [MA76] E.M. Mikhail and F.E. Ackermann. *Observations and Least Squares*. IEP-A Dun-Donnelley Publisher, New York, 1976.

- [Mer] Meridiánová konvergence. Definice meridiánovej konvergence. terminologický slovník zeměměřictví a katastru nemovitostí.
- [Mey02] Thomas Meyer. Grid, ground, and globe: Distances in the gps era. *Surveying and Land Information Systems*, 62:179–202, 01 2002.
- [SH88] Tomas Soler and Larry Hothem. Coordinate systems used in geodesy: Basic definitions and concepts. *Journal of Surveying Engineering-asce - J SURV ENG-ASCE*, 114:84–97, 05 1988.
- [Sny87] Snyder, J., P. Map projections: A working manual, 1987.
- [Sol98] T. Soler. A compendium of transformation formulas useful in gps work. *Journal of Geodesy*, 72:482–490, 1998.
- [TDBS77] M. P. Thomas D. B., Mephan and R. R. Steeves. The stereographic double projection, 1977.
- [Ver11] Hugues Vermeille. An analytical method to transform geocentric into geodetic coordinates. *Journal of Geodesy*, 85(2):105–117, February 2011.
- [Weia] Weisstein, E., W. Spherical coordinates. from mathworld—a wolfram web resource.
- [Weib] Weisstein, Eric W. Stereographic projection. from mathworld. a wolfram web resource.

Appendices

A Základní parametry zemského elipsoidu

a	hlavní poloosa meridiánové elipsy
b	vedlejší poloosa meridiánové elipsy
f	zploštění (první)
n	zploštění (druhé)
e	excentricita (první)
e'	excentricita (druhá)
c	pólový poloměr křivosti
M	meridiánový poloměr křivosti
N	příčný poloměr křivosti
R	střední poloměr křivosti
r	poloměr rovnoběžky
φ	zeměpisná šířka
B_0^φ	délka oblouku meridiánu od rovníku po φ
W	první geodetická funkce
V	druhá geodetická funkce
F	pomocná geodetická funkce

$$f = (a - b)/a. \quad (117)$$

$$n = (a - b)/(a + b). \quad (118)$$

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2. \quad (119)$$

$$e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2. \quad (120)$$

$$c = a^2/b. \quad (121)$$

$$M = a(1 - e^2)/W^3. \quad (122)$$

$$N = a/W. \quad (123)$$

$$R = \sqrt{MN} \quad (124)$$

$$r = N \cos(\varphi). \quad (125)$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)} \quad (126)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2(\varphi)} \quad (127)$$

$$F = \sqrt{1 + n \cos(2\varphi) + n^2} \quad (128)$$

B Konstanty základních referenčních elipsoidů

B.1 World Geodetic System 1984 (WGS84)

$$a = 6378137m \quad b = 6356752,31425m \quad f = 0,003352810664747$$

B.2 Geodetic Reference System 1980 (GRS80)

$$a = 6378137m \quad b = 6356752,31414m \quad f = 0,003352810681182$$

B.3 Konstanty Krasovského elipsoidu

$$a = 6378245m \quad b = 6356863,01877m \quad f = 0,003352329869259$$

C Pseudokódy implementovaných transformací v Matlab package +Geo

C.1 ECEF2ENU

Data: x, y, z, φ , λ , hel, RT, ELL

Result: e, n, u

výpočet rotační matice $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$;

if $RT == \text{elipsoid}$ **then**

$[x_0, y_0, z_0] = \text{geod2ecf}(\varphi, \lambda, \text{hel}, \text{ELL})$;

else

$[x_0, y_0, z_0] = \text{sphere2ecf}(\varphi, \lambda, \text{hel}^*)$;

end

Výpočet podle rovnice [24](#)

Algorithm 1: Transformácia ECEF2ENU

C.2 ENU2ECEF

Data: e, n, u, φ , λ , hel, RT, ELL

Result: x, y, z

výpočet rotační matice $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$;

if $RT == \text{elipsoid}$ **then**

$[x_0, y_0, z_0] = \text{geod2ecf}(\varphi, \lambda, \text{hel}, \text{ELL})$;

else

$[x_0, y_0, z_0] = \text{sphere2ecf}(\varphi, \lambda, \text{hel}^*)$;

end

Výpočet podle rovnice [28](#)

Algorithm 2: Transformácia ENU2ECEF

C.3 GEOD2ECEF

Data: φ , λ , h , ELL

Result: x , y , z

výpočet potřebných parametrů rotačního elipsoidu (a , b , N)

Výpočet podle rovnice [51](#)

Algorithm 3: Transformácia GEOD2ECEF

C.4 ECEF2GEOD

Data: x , y , z , ELL

Result: φ , λ , h

výpočet potřebných parametrů rotačního elipsoidu (například a , e)

Výpočet podle algoritmu diskutovaný např. [\[Ver11\]](#).

Algorithm 4: Transformácia ECEF2GEOD