libGeo: Popis souřadnicových systémů a transformace mezi vybranými systémy

Michal Eliaš

Verze	Dátum	Autor	Opis změn
[0.1]	2021-04-29	mel	Práce na popisu transformace ECEF2ENU a ENU2ECEF
[0.2]	2021-04-30	mel	Dokončení ECEF2ENU a ENU2ECEF; doplnění příkladů
[0.3]	2021-05-03	mel	Popis trans. kov. matíc; Popis souř. systémů; doplnění pseudokódů

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Abstrakt

Dokument obsahuje popis transformací mezi vybranými souřadnicovými systémy.

Přehled důležitějších zkratek

CTP	-	Conventional Terrestrial Pole
ECEF	-	Earth-Centered Earth-Fixed. Pravouhlý souřadnicový systém
	-	
IERS	-	International Erath Rotation Service

Přehled důležitějších symbolů

TBA	-	TBA

1 Úvod

Dokument obsahuje základní popis transformací mezi vybranými souřadný systémy. Konkrétně se jedná o tyto souřadné soustavy:

1. ECEF (Earth Centred Earth Fixed) je pravoúhlá geocentrická souřadnicová soustava.
2. ENU (East North Up) je pravoúhlá lokální souřadnicová soustava.
3. GEOD je soustava geodetických/elipsoidickou souřadnic definovaných na rotačním elipsoidu, např. WGS-84.
4. SPHERE je soustava sférických souřadníc

1.1 Rešerš literatúry

1.1.1 Obecná četba

TBA

1.1.2 Zajímavé odkazy na literatúru ve vztahu k transformacím

TBA

2 Poznámky

2.1 Transformace

Definujme si zápis transformační matice ze souřadného systému UVW do souřadného systému XYZ například ve tvaru $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$ [Grewal et al., 2001].

Dále, ať vektor $\mathbf{v}$ obsahuje souřadnice systému XYZ, t.j. $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ a ten stejný vektor $\mathbf{v}$ ať obsahuje souřadnice $\mathbf{v} = [v_u, v_v, v_w]^T$ systému UVW. Pak pre obecný zápis transformace platí tento předpis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} \tag{1}$$

Systémy XYZ, respektive UVW reprezentují trojdimenzionální kartézské souřadné systémy.

Komponenty vektorů v jakémkoli souřadnícovém systému lze vyjádřit pomocí jejich jednotkových vektorů rovnoběžných s jejich příslušnými souřadnicovými osami. Například, ať souřadnicové osy systému XYZ označíme X, Y a Z a souřadnicové osy systému UVW označíme U, V a W, potom vektor **v** můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \mathbf{1}_x + v_y \mathbf{1}_y + v_z \mathbf{1}_z \\ &= v_u \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_w, \end{aligned} \tag{2}$$

kde

- jednotkové vektory $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ jsou definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- skaláry v_x, v_y, v_z jsou komponenty vektoru **v** definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- jednotkové vektory $\mathbf{1}_u, \mathbf{1}_v, \mathbf{1}_w$ jsou definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW,
- skaláry v_u, v_v, v_w jsou komponenty vektoru **v** definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW.

Příslušné komponenty vektoru lze vyjádřit pomocí skalárního součinu příslušných jednotkových vektorů, například ve tvaru

$$v_x = \mathbf{1}_x^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w, \tag{3}$$

$$v_y = \mathbf{1}_y^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w, \tag{4}$$

$$v_z = \mathbf{1}_z^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w, \tag{5}$$

a v maticové formě předchozí rovnice nabývají tento zápis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Tímto jsme si odvodili souřadnicovou transformační matici $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$. Skalární součin jednotkových ortogonálních vektorů umožňuje odvodit směrové kosiny, přičemž obecně platí, že

$$\mathbf{1}_a^T \mathbf{1}_b = \cos(\theta_{a,b}). \tag{7}$$

V důsledku toho, souřadnicová transformační matice může být vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x,u}) \cos(\theta_{x,v}) \cos(\theta_{x,w}) \\ \cos(\theta_{y,u}) \cos(\theta_{y,v}) \cos(\theta_{y,w}) \\ \cos(\theta_{z,u}) \cos(\theta_{z,v}) \cos(\theta_{z,w}) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Rovnice 8 vyjadřuje všeobecnou rotační matici v trojrozměrném prostoru.

2.2 Translace

V předchozí kapitole jsme se věnovali podobnostnej transformaci mezi dvěma pravoúhlými souřadný systémy. V případě posunu (translace), počátek jedné soustavy do počátku druhé soustavy jednoznačně vyjádříme pomocí vektoru

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} (x-u) & (y-v) & (z-w) \end{bmatrix}^T. \tag{9}$$

2.3 Transformace kovariančních matíc

Cílem kapitoly je navrhnout transformaci kovariančních matic souřadnic (jejích přesností) mezi uvažovanými souřadnými systémy. Princip postupu je založen na zákoně hromadění středních chyb, viz například [Kubaček, 2013] anebo [Mikhail and Ackermann, 1976].

Matematický zápis transformace kovarianční matice mezi vybranými systémy je tento:

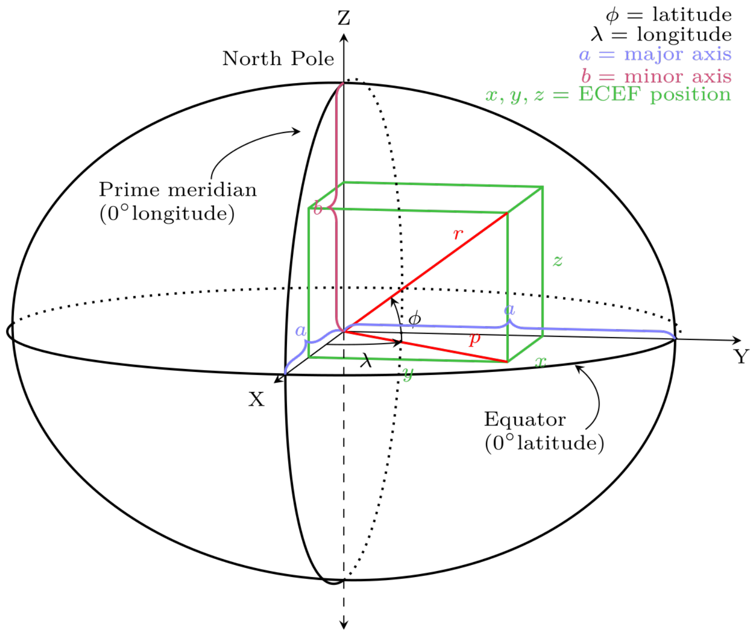
$$\mathbf{\Sigma}_{XYZ} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{UVW}\mathbf{J}^T, \tag{10}$$

kde

- $\mathbf{J}$ je Jakobi matice příslušné transformace,
- $\mathbf{\Sigma}_{UVW}$ je kovarianční matice souřadnic resp. souřadného systému, ze kterého transformujeme a
- $\mathbf{\Sigma}_{XYZ}$ je kovarianční matice souřadnic resp. souřadného systému, do kterého transformujeme.

2.4 Súradnicové systémy

2.4.1 ECEF - Earth Centred Earth Fixed



Obrázek 1: Zobrazení bodu v ECEF soustavě souřadnic. Obrázek je převzat z [ECEF:Wiki,].

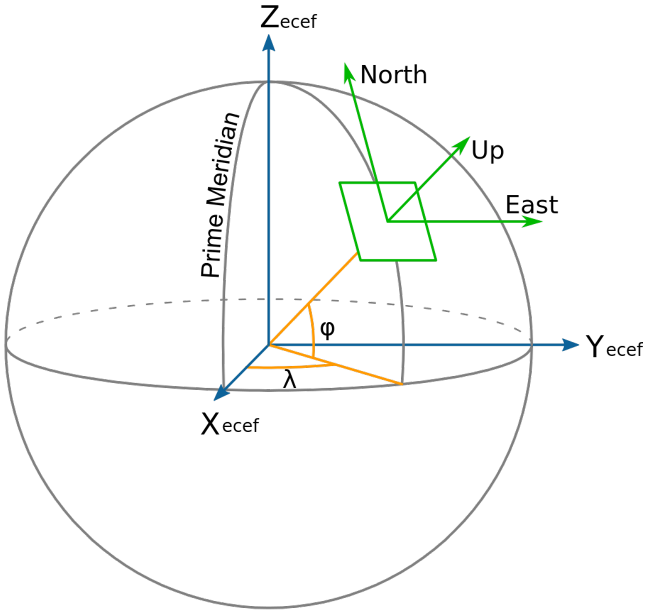
Základní kartézská pravouhlá soustava souřadníc, naúříklad tak, jako je zobrazená na obrázku 1, je definována takto [Soler and Hothem, 1988], [Kovář, 2016]:

- počátek soustavy je soustředěn v geocentre, t.j. v gravitačním středu zemského tělesa,
- osa **Z** směruje do místa zemského severního pólu, který je definován podle IERS. Protože poloha pólu sa v čase mění, používá se střední poloha zemského pólu (CTP).
- osa **X** prochází bodem nulové zeměpisné délky, t.j. Greenwich poledníkem, který je definován podle IERS a míři do průsečníku tohto poledníku a roviny rovníku,
- osa **Y** doplňuje pravotočivý pravouhlý systém souřadníc.

2.4.2 ENU - East-North-Up

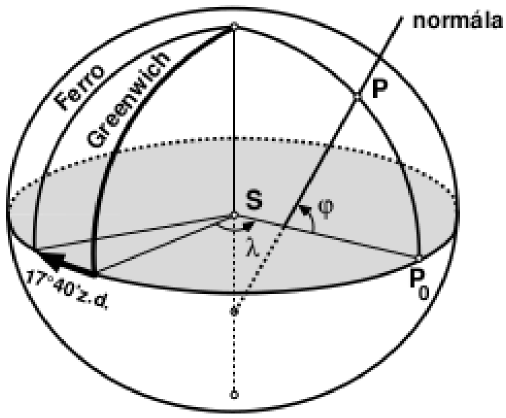
Některé výpočty souřadníc je praktičtější provádět v lokální souřadnicové soustavě například vzdálenosť radarového přijímače od daného bodu atp.,[Kovář, 2016], [Meyer, 2002]. ENU je lokální pravouhlá soustava souřadnic, pričemž její definice a umístnění počátku soustavy a souřadnicových os, dle značení na obrázku 2, jsou:

- počátek systému soustavy souřadníc je umiestnený v středě regiónu záujmu a to buď na povrchu anebo blízko povrchu referenčního tělesa (elipsoid, koule),
- osa **n** (North) směruje na sever,
- osa **e** (East) směruje na východ a
- osa **u** (Up) je totožná s normálou referenčního tělesa (elipsoid, koule).



Obrázek 2: Zobrazení systému souřadnic East-North-Up. Obrázek je převzat z [ENU:Wiki,].

2.4.3 GEOD - Systém geodetických souřadníc



Obrázek 3: Geodetické zeměpisné souřadnice. Obrázek je převzat z [Cimbalník M., 1997].

V praktických úlohách se poloha bodu popisuje pomocí geodetických anebo elipsoidických souřadníc. Elipsoidických proto, protože se definuje pomocí zvoleného zemského elipsoidu. Ten slouží k aproximaci fyzického zemského tělesa. Základní matematické vzorce určené pro odvození elipsoidu jsou obsahem přílohy A a přehled konstant globálne užitých elipsoidů jsou obsahem přílohy B.

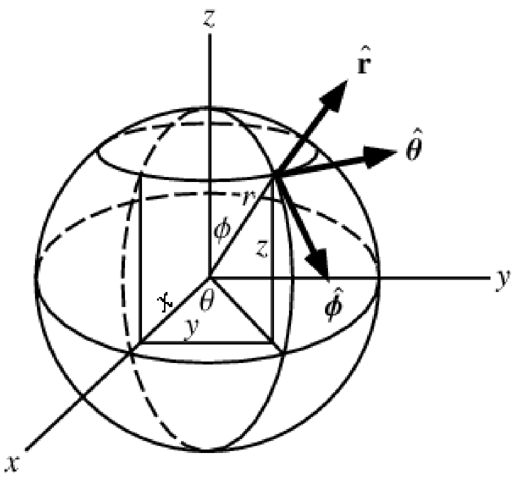
Poloha bodu **P** na obrázku 3 se vyjadřuje třemi souřadnicemi:

1. geodetickou zeměpisnou šířkou φ,
2. geodetickou zeměpisnou délkou λ,
3. geodetickou výškou.

Geodetická zeměpisná šířka φ bodu **P** je uhel, který svírá normála v bodě P k povrchu elipsoidu, s rovinou rovníku. Geodetická zeměpisná délka λ je úhel, který svírá rovina poledníku tohoto bodu s rovinou nultého poledníku. Za nultý poledník je mezinárodně volen ten, který prochází stabilizovaným bodem na astronomické observatoři v Greenwich. Geodetická výška se měří podél normály mezi referenčním elipsoidem a bodem **P**.

2.4.4 SPHERE - Systém sférických (polárnych) súradníc

Koule je základní a nejjednoduchší aproximace zemského tělesa. Sférické souřadnice tvoří systém souřdnic, které popisujou polohu bodu na sféře. Referenční koule je pak definovaná sférickým poloměrem. Pro praktické výpočty se jeho hodnota často zpočíta jako středný pomoměr křivosti (a to z důvodu zachování objemu eliposidu během jeho zobrazení na kouli, t.j. v místě lokálni aproximace - viz příloha A).



Obrázek 4: Sférické polárni souřadnice. Obrázek je převzat z [Weisstein,].

Dle situace zobrazené na obrázku 4, poloha bodu na sféře je vyjadřená soustavou tří souřadníc:

- θ hodnota azimutu v rovině rovníka. Pokud je uhel značený symbolem λ, pak poukazuje na zeměpisnou délku,
- ϕ hodnota polárniho úhla počítaná od zenitu (také zenitový úhel). Pokud je uhel značený symbolem $\varphi^{'}$, pak poukazuje na doplnek zemepisej délky od zenitu, t.j. $\varphi = 90 - \varphi^{'}$ a
- r, je středný polomer Zeme.

3 Transformace souřadníc medzi vybranými souřadnicovými soustavami

3.1 ECEF → ENU & ENU → ECEF

Předpokládejme, že v tomto příkladu je uvažovaný rotační elipsoid (například WGS-84 nebo GRS-80) geocentrický, to znamená, že střed elipsoidu se nachází ve středu zemského tělesa. Transformace souřadnic pak mezi zemským geocentrickým systémem souřadnic (xyz) a lokálním topocentrickým (nebo také lokálním geodetickým - enu) systémem může být vyjádřený předpisem [Soler, 1998]

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{enu}^{xyz} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Pro popis transformace mezi uvedenými systémy si potřebujeme odvodit transformační matici, v tomto případě takzvanou rotační matici. Vycházejme z rovnice 8. Rotační matici pak zostavíme pro rotaci v prostoru a to pomocí jednoduchých rotací v každé ose samostatně.

Rotační matice kolem osy z ve směru hodinových ručiček nabude tvar

$$\mathbf{R_3}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

přičemž rotace kolem osy z je $\cos(\theta_{z,w}) = \cos(0) = 1$, protože úhel mezi osama z a w, které jsou v tomto přikladě totožné, je roven nule. Dále platí, že kosinus úhlu $\cos(\theta_{z,u}) = \cos(90) = 0$, protože z a u jsou na sebe kolmé. Stejně tento předpoklad platí i pro $\cos(\theta_{z,v})$, $\cos(\theta_{x,w})$ a $\cos(\theta_{y,w})$.

Analogicky postup bude platit i pro ostatní dvě rotace a tedy rotace kolem osy x je

$$\mathbf{R_1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{13}$$

a kolem osy y

$$\mathbf{R_2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

Vyjádření transformační matice $\mathbf{C}_{enu}^{xyz}$ mezi dvěma pravoúhlými kartézskymi souřadnicovými systémy ECEF a ENU je založen na součinu dvou rotací, konkrétně:

1. rotaci kolem osy z o úhel $\pi/2 + \lambda$ a
2. rotaci kolem osy y o úhel $\pi/2 - \varphi$,

kde úhlové stupně λ, respektíve φ geograficky představují stupeň otočení jedné soustavy od druhé ve směru zeměpisné délky (λ) a ve směru zeměpisné šířky (φ).

Potom transformace mezi systémy se dá vyjádřit ve tvaru

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R_1}(\pi/2 - \varphi)\,\mathbf{R_3}(\pi/2 + \lambda) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Jednou z vlastností rotačných matíc je tá, podle které $\mathbf{R}(\theta)^{-1} = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}(\theta)^T$. Z toho plyne, že zápis pro inversnou tranformaci je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R_3}(-(\pi/2 + \lambda))\,\mathbf{R_1}(-(\pi/2 - \varphi)) \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ \cos(\lambda) & -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Z předchozího zápisu plyne, že během rotace pravoúhlých souřadnicových soustav předpokládáme, že počátky souřadnic jsou shodné. V případě, že počátek, například soustavy ENU umístíme na povrch referenčního tělesa (elipsoid případně sféry), je zapotřebí doplnit posun mezi soustavami. Potom rovnice 15 nabude tvar

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

a rovnici 16 doplníme do tvaru

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}, \tag{18}$$

kde pravoúhlé souřadnice vektoru $\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ získáme transformací zeměpisných souřadnic posunutého počátku například ENU soustavy (φ, λ, hel) do systému geocentrických kartézskych souřadnic (například systému ECEF).

3.1.1 Příklad transformace z ECEF → ENU

Nechť bod A je vyjádřen v souřadnicích souřadného systému ECEF a hodnoty souřadnic jsou:

- $x = 4198944.6161$ m
- $y = 174747.2383$ m
- $z = 4781886.8769$ m

Mějme bod B, jehož geodetické souřadnice jsou $\varphi = 48.8862deg$, $\lambda = 2.3343deg$ a geodetická výška je $h = 174.5217m$. Úhlové souřadnice použijeme jednak k natočení souřadných soustav (viz rotační matice v rovnici 15) a společně se zadanou elipsoidickou výškou, k umístění počátku ENU soustavy, který umístíme nad povrch rotačního elipsoidu. Úkolem je vyjádřit souřadnice bodu A v soustavě ENU a s přihlédnutím definovaného počátku ENU soustavy v bodě B.

Vektor pravoúhlých souřadnic bodu B, tj (x_0, y_0, z_0) získáme transformací GEOD2ECEF(). ENU souřadnice bodu A s přihlédnutím k umístění počátku ENU soustavy v bodě B a vypočítané podle 17, jsou:

- $e = 3579.4232$ m
- $n = -688.3514$ m
- $u = -51.0524$ m.

Pseudokód Matlab funkce ecef2enu(), která je implementováná v package +Geo je stručně popsaná v příloze C.1.

3.1.2 Příklad transformace z ENU → ECEF

V tomto příkladě bude naší úlohou přezentovat inverzní transformaci, no vycházejme z výsledků výpočtu polohy bodu v ENU soustavě souřadnic, t.j. souřadníc pro bod B v předcházejícim příkladě. Jeho souřadnice jsou:

- $e = 3579.4232$ m
- $n = -688.3514$ m
- $u = -51.0524$ m.

Dle rovnice 18, ECEF XYZ souřadnice bodu A jsou:

- $x = 4198944.6161$ m

- $y = 174747.2383$ m
- $z = 4781886.8769$ m.

Pseudokód Matlab funkce enu2ecef(), která je implmentováná v package +Geo Package je obsahem přílohy C.2

Reference

[Cimbalník M., 1997] Cimbalník M., M. L. (1997). *Vyšší geodézie 1.* Ediční středisko ČVUT, Praha.

[ECEF:Wiki,] ECEF:Wiki. Ecef coordinates in relation to latitude and longitude — Wikipedia, the free encyclopedia.

[ENU:Wiki,] ENU:Wiki. The east north up (enu) local tangent plane is similar to ned, except for swapping 'down' for 'up' and x for y. — Wikipedia, the free encyclopedia.

[Grewal et al., 2001] Grewal, M. S., Andrews, A. P., and Bartone, C. G. (2001). *Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration.* Wiley-Interscience.

[Kovář, 2016] Kovář, P. (2016). *Družicová navigace. Od teorie k aplikacím v softwarovém přijímači.* České vysoké učení technické v Praze. Česká technika - nakladatelství ČVUT.

[Kubaček, 2013] Kubaček, L. (2013). *Statistical Theory of Geodetic Network.* VÚGTK, Zdiby.

[Meyer, 2002] Meyer, T. (2002). Grid, ground, and globe: Distances in the gps era. *Surveying and Land Information Systems*, 62:179–202.

[Mikhail and Ackermann, 1976] Mikhail, E. and Ackermann, F. (1976). *Observations and Least Squares.* IEP-A Dun-Donnelley Publisher, New York.

[Soler, 1998] Soler, T. (1998). A compendium of transformation formulas useful in gps work. *Journal of Geodesy*, 72:482–490.

[Soler and Hothem, 1988] Soler, T. and Hothem, L. (1988). Coordinate systems used in geodesy: Basic definitions and concepts. *Journal of Surveying Engineering-asce - J SURV ENG-ASCE*, 114:84–97.

[Weisstein,] Weisstein, E., W. Spherical coordinates. from mathworld–a wolfram web resource.

Appendices

A Matematické vzorce odvozené na referenčním elipsoidu

TBA

B Konstanty základních referenčních elipsoidů

TBA

C Pseudokódy implementovaných transformácii v Matlab package +Geo

C.1 ECEF2ENU

Data: x, y, z, φ, λ, hel, RT, ELL
Result: e, n, u
výpočet rotační matice $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$;
if $RT == elipsoid$ **then**
  $[x_0, y_0, z_0] = geod2ecef(\varphi, \lambda, hel, ELL)$;
else
  $[x_0, y_0, z_0] = sphere2ecef(\varphi, \lambda, hel^*)$;
end
Výpočet podle rovnice 17

Algorithm 1: Transformácia ECEF2ENU

C.2 ENU2ECEF

Data: e, n, u, φ, λ, hel, RT, ELL
Result: x, y, z
výpočet rotační matice $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$;
if $RT == elipsoid$ **then**
  $[x_0, y_0, z_0] = geod2ecef(\varphi, \lambda, hel, ELL)$;
else
  $[x_0, y_0, z_0] = sphere2ecef(\varphi, \lambda, hel^*)$;
end
Výpočet podle rovnice 18

Algorithm 2: Transformácia ENU2ECEF