# Popis souřadnicových systémů a transformace mezi vybranými systémy

Michal Eliaš

| Verze | Dátum | Autor | Opis zmen |
|---|---|---|---|
| [0.1] | 2023-03-08 | mel | Založenie súboru |

## Obsah

## Seznam obrázků



## Seznam tabulek

## Abstrakt

*Dokument obsahuje kompletnú správu týkajúcu sa vývoja modelu strát. Obsahoj je jednak matematický opis modelu, potom aj konkrétne príklady. Report obsahuje porovnanie so stávajúcim modelom a diskutuje o možných vylepšeniach.*

# Přehled důležitějších zkratek

| | | |
|---|---|---|
| CTP | - | Conventional Terrestrial Pole |
| ECEF | - | Earth-Centered Earth-Fixed. Pravouhlý souřadnicový systém |
| | - | |
| IERS | - | International Erath Rotation Service |

## Přehled důležitějších symbolů

TBA - TBA

# 1 Úvod

Dokument obsahuje základní popis transformací mezi vybranými souřadný systémy. Konkrétně se jedná o tyto souřadné soustavy:

1. ECEF (Earth Centred Earth Fixed) je pravoúhlá geocentrická souřadnicová soustava.
2. ENU (East North Up) je pravoúhlá lokální souřadnicová soustava.
3. GEOD je soustava geodetických/elipsoidickou souřadnic definovaných na rotačním elipsoidu, např. WGS-84.
4. SPHERE je soustava sférických souřadníc

## 1.1 Rešerš literatúry

### 1.1.1 Obecná četba

TBA

### 1.1.2 Zajímavé odkazy na literatúru ve vztahu k transformacím

TBA

# 2 Poznámky

## 2.1 Transformace

Definujme si zápis transformační matice ze souřadného systému UVW do souřadného systému XYZ například ve tvaru $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$ [GAB01].

Dále, ať vektor $\mathbf{v}$ obsahuje souřadnice systému XYZ, t.j. $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$ a ten stejný vektor $\mathbf{v}$ ať obsahuje souřadnice $\mathbf{v} = [v_u, v_v, v_w]^T$ systému UVW. Pak pre obecný zápis transformace platí tento předpis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} \tag{1}$$

Systémy $XYZ$, respektive $UVW$ reprezentují trojdimenzionální kartézské souřadné systémy.

Komponenty vektorů v jakémkoli souřadnícovém systému lze vyjádřit pomocí jejich jednotkových vektorů rovnoběžných s jejich příslušnými souřadnicovými osami. Například, ať souřadnicové osy systému XYZ označíme X, Y a Z a souřadnicové osy systému UVW označíme U, V a W, potom vektor $\mathbf{v}$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \mathbf{1}_x + v_y \mathbf{1}_y + v_z \mathbf{1}_z \\ &= v_u \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_w, \end{aligned} \tag{2}$$

kde

- jednotkové vektory $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ jsou definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- skaláry $v_x, v_y, v_z$ jsou komponenty vektoru $\mathbf{v}$ definovány podél souřadných os X, Y a Z systému XYZ,
- jednotkové vektory $\mathbf{1}_u, \mathbf{1}_v, \mathbf{1}_w$ jsou definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW,
- skaláry $v_u, v_v, v_w$ jsou komponenty vektoru $\mathbf{v}$ definovány podél souřadných os U, V a W systému UVW.

Příslušné komponenty vektoru lze vyjádřit pomocí skalárního součinu příslušných jednotkových vektorů, například ve tvaru

$$v_x = \mathbf{1}_x^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w, \tag{3}$$

$$v_y = \mathbf{1}_y^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w, \tag{4}$$

$$v_z = \mathbf{1}_z^T \mathbf{v} = v_u \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u + v_v \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v + v_w \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w, \tag{5}$$

a v maticové formě předchozí rovnice nabývají tento zápis

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_x^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_y^T \mathbf{1}_w \\ \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_u & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_v & \mathbf{1}_z^T \mathbf{1}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Tímto jsme si odvodili souřadnicovou transformační matici $\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW}$. Skalární součin jednotkových ortogonálních vektorů umožňuje odvodit směrové kosiny, přičemž obecně platí, že

$$\mathbf{1}_a^T \mathbf{1}_b = \cos(\theta_{a,b}). \tag{7}$$

V důsledku toho, souřadnicová transformační matice může být vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{C}_{XYZ}^{UVW} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x,u}) \cos(\theta_{x,v}) \cos(\theta_{x,w}) \\ \cos(\theta_{y,u}) \cos(\theta_{y,v}) \cos(\theta_{y,w}) \\ \cos(\theta_{z,u}) \cos(\theta_{z,v}) \cos(\theta_{z,w}) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Rovnice 8 vyjadřuje všeobecnou rotační matici v trojrozměrném prostoru.

### 2.2 Translace

V předchozí kapitole jsme se věnovali podobnostnej transformaci mezi dvěma pravoúhlými souřadný systémy. V případě posunu (translace), počátek jedné soustavy do počátku druhé soustavy jednoznačně vyjádříme pomocí vektoru

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} (x-u) & (y-v) & (z-w) \end{bmatrix}^T. \tag{9}$$

### 2.3 Transformace kovariančních matíc

Cílem kapitoly je navrhnout transformaci kovariančních matic souřadnic (jejích přesností) mezi uvažovanými souřadnými systémy. Princip postupu je založen na zákoně hromadění středních chyb, viz například [Kub13] anebo [MA76].

Matematický zápis transformace kovarianční matice mezi vybranými systémy je tento:

$$\mathbf{\Sigma}_{XYZ} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{UVW}\mathbf{J}^T, \tag{10}$$

kde

- $\mathbf{J}$ je Jakobi matice příslušné transformace,
- $\mathbf{\Sigma}_{UVW}$ je kovarianční matice souřadnic resp. souřadného systému, ze kterého transformujeme a
- $\mathbf{\Sigma}_{XYZ}$ je kovarianční matice souřadnic resp. souřadného systému, do kterého transformujeme.

Interpretaci Zákona hromadění chyb a jednotlivých matíc si ukážme na nasledujícim příkladě. Majme vektorvou funkci $f(X)$ s rozměrem $p$,

$$\mathbf{f}(X) = [f_1(X), f_2(X), \cdots, f_p(X)]^T \tag{11}$$

a neť operátor gradient pro vektor $\mathbf{X}$ s rozměrem $n$ je daný v tvaru

$$\nabla_X = \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial X_n}\right]^T. \tag{12}$$

Jakobiho matice $\mathbf{J}$ příslušné transformace je pak definovaný takto:

$$\mathbf{J}_X = \left[\nabla_X \mathbf{f}_X^T\right]^T = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \vdots \\ f_p(X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial X_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial X_1} & \frac{\partial f_p}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_n} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Uveďme kovarnanční matici souřadnicového systému ze kterého transformujeme, respektive obecnou kovarianční matici $Sigma_X$. Kovariančná matice je speciální matice jak z hlediska matematického (je symetrická či pozitivní definitná), tak z hlediska fyzikálního. Obsahuje všechny rozptyly a kovariance vstupních veličin. Obecně pro ni platí

$$\mathbf{\Sigma}_{X_{n\times n}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_1}\sigma_{X_n} \\ \sigma_{X_2}\sigma_{X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2}\sigma_{X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{X_n}\sigma_{X_1} & \sigma_{X_n}\sigma_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Zaveďme si ještě výstupní kovarianční matici, teda v našem případě kovarianční matici souřadnicového systému, do kterého chceme transformovat a to například v tvaru

$$\mathbf{\Sigma}_{Y_{p\times p}} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_1}\sigma_{Y_p} \\ \sigma_{Y_2}\sigma_{Y_1} & \sigma_{Y_2}^2 & \cdots & \sigma_{Y_2}\sigma_{Y_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{Y_p}\sigma_{Y_1} & \sigma_{Y_p}\sigma_{Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_p}^2 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Podle rovnice 10, kovarianční matici v systému transformovaných souřadníc výjadříme pomocí

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_1}\sigma_{Y_p} \\ \sigma_{Y_2}\sigma_{Y_1} & \sigma_{Y_2}^2 & \cdots & \sigma_{Y_2}\sigma_{Y_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{Y_p}\sigma_{Y_1} & \sigma_{Y_p}\sigma_{Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_p}^2 \end{bmatrix} = \tag{16}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial X_1} & \frac{\partial f_p}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_1}\sigma_{X_n} \\ \sigma_{X_2}\sigma_{X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2}\sigma_{X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{X_n}\sigma_{X_1} & \sigma_{X_n}\sigma_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_n} & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial X_n}. \end{bmatrix}$$

Rozptyl veličín systému transformované soustavy souřadníc, například $\sigma_{Y_1}^2$ po přenásobení matíc v předcházejíci rovnici, je

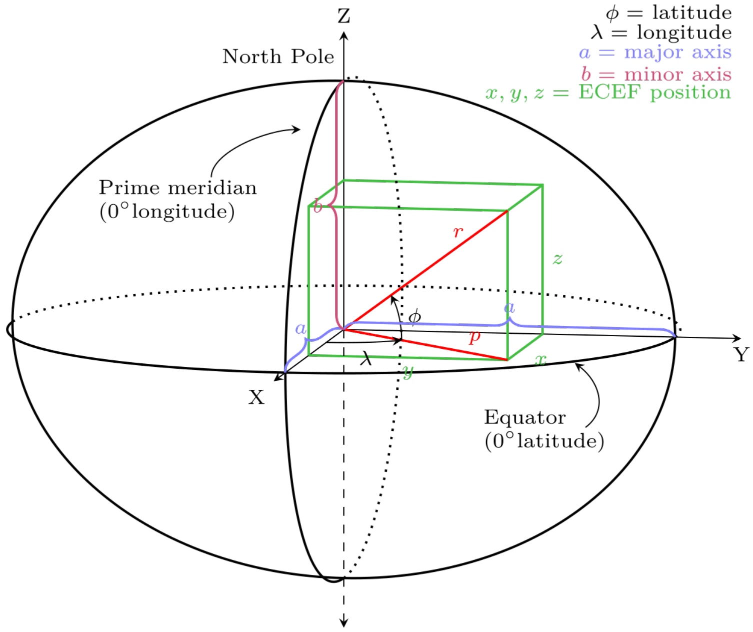
$$\sigma_{Y_1}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_i}\right)^2 + \sum\sum\nolimits_{i\neq j} \frac{\partial f_1}{\partial X_i}\frac{\partial f_1}{\partial X_j}\sigma_{X_iX_j} \tag{17}$$

a kovariance mezi veličinami $X_1$ **a** $X_2$ bude

$$\sigma_{X_1X_2} = \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial X_i}\frac{\partial f_2}{\partial X_i}\sigma_{X_i}^2 + \sum\sum\nolimits_{i\neq j} \frac{\partial f_1}{\partial X_i}\frac{\partial f_2}{\partial X_j}\sigma_{X_iX_j}. \tag{18}$$

## 2.4 Súradnicové systémy

### 2.4.1 ECEF - Earth Centred Earth Fixed




Obrázek 1: Zobrazení bodu v ECEF soustavě souřadnic. Obrázek je převzat z [ECE].

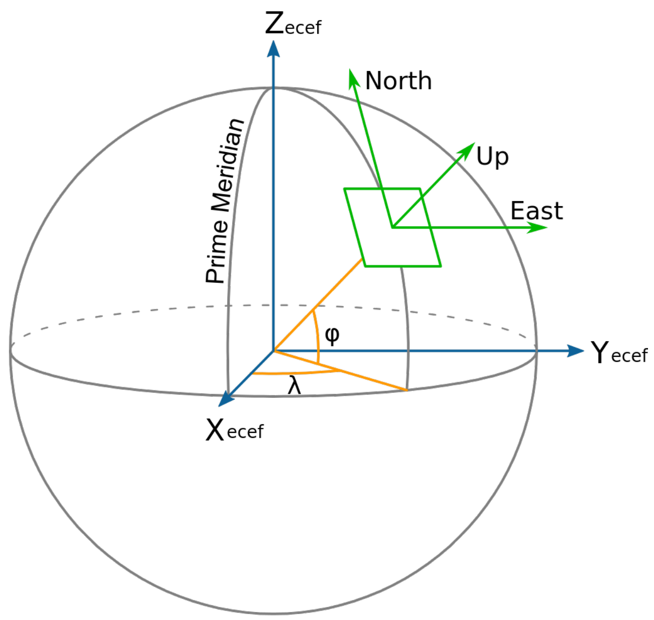
Základní kartézská pravouhlá soustava souřadníc, naúříklad tak, jako je zobrazená na obrázku 1, je definována takto [SH88], [Kov16]:

- počátek soustavy je soustředěn v geocentre, t.j. v gravitačním středu zemského tělesa,
- osa **Z** směruje do místa zemského severního pólu, který je definován podle IERS. Protože poloha pólu sa v čase mění, používá se střední poloha zemského pólu (CTP).
- osa **X** prochází bodem nulové zeměpisné délky, t.j. Greenwich poledníkem, který je definován podle IERS a míři do průsečníku tohto poledníku a roviny rovníku,
- osa **Y** doplňuje pravotočivý pravouhlý systém souřadníc.

### 2.4.2 ENU - East-North-Up

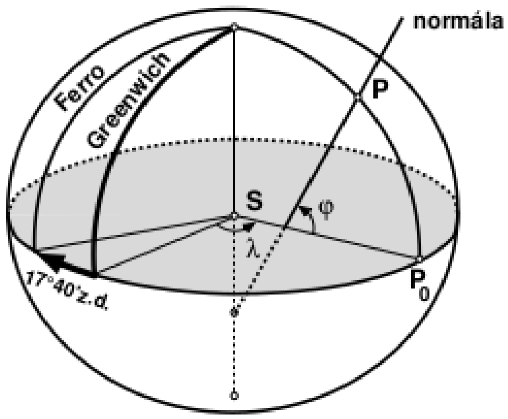
Některé výpočty souřadníc je praktičtější provádět v lokální souřadnicové soustavě například vzdálenosť radarového přijímače od daného bodu atp.,[Kov16], [Mey02]. ENU je lokální pravouhlá soustava souřadnic, pričemž její definice a umístnění počátku soustavy a souřadnicových os, dle značení na obrázku 2, jsou:

- počátek systému soustavy souřadníc je umiestnený v středě regiónu záujmu a to buď na povrchu anebo blízko povrchu referenčního tělesa (elipsoid, koule),
- osa **n** (North) směruje na sever,
- osa **e** (East) směruje na východ a
- osa **u** (Up) je totožná s normálou referenčního tělesa (elipsoid, koule).




Obrázek 2: Zobrazení systému souřadnic East-North-Up. Obrázek je převzat z [ENU].

### 2.4.3 GEOD - Systém geodetických souřadníc




Obrázek 3: Geodetické zeměpisné souřadnice. Obrázek je převzat z [Cim97].

V praktických úlohách se poloha bodu popisuje pomocí geodetických anebo elipsoidických souřadníc. Elipsoidických proto, protože se definuje pomocí zvoleného zemského elipsoidu. Ten slouží k aproximaci fyzického zemského tělesa. Základní matematické vzorce určené pro odvození elipsoidu jsou obsahem přílohy A a přehled konstant globálne užitých elipsoidů jsou obsahem přílohy B.

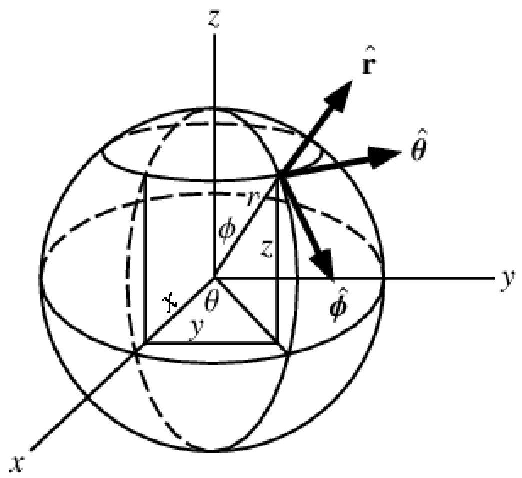
Poloha bodu **P** na obrázku 3 se vyjadřuje třemi souřadnicemi:

1. geodetickou zeměpisnou šířkou $\varphi$,
2. geodetickou zeměpisnou délkou $\lambda$,
3. geodetickou výškou.

Geodetická zeměpisná šířka $\varphi$ bodu **P** je uhel, který svírá normála v bodě P k povrchu elipsoidu, s rovinou rovníku. Geodetická zeměpisná délka $\lambda$ je úhel, který svírá rovina poledníku tohoto bodu s rovinou nultého poledníku. Za nultý poledník je mezinárodně volen ten, který prochází stabilizovaným bodem na astronomické observatoři v Greenwich. Geodetická výška se měří podél normály mezi referenčním elipsoidem a bodem **P**.

### 2.4.4 SPHERE - Systém sférických súradníc

Koule je základní a nejjednoduchší aproximace zemského tělesa. Sférické souřadnice tvoří systém souřdnic, které popisujou polohu bodu na sféře. Referenční koule je pak definovaná sférickým poloměrem. Pro praktické výpočty se jeho hodnota často zpočíta jako středný pomoměr křivosti (a to z důvodu zachování objemu eliposidu během jeho zobrazení na kouli, t.j. v místě lokálni aproximace - viz příloha A).



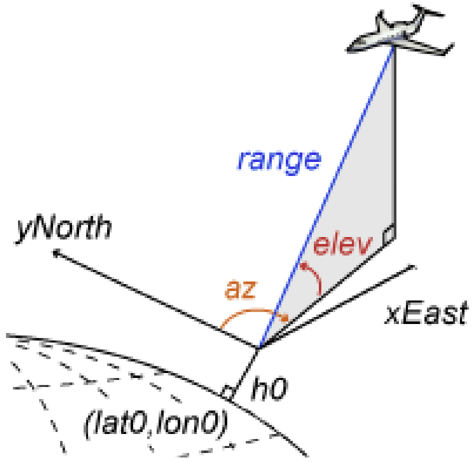

Obrázek 4: Sférické polárni souřadnice. Obrázek je převzat z [Weia].

Dle situace zobrazené na obrázku 4, poloha bodu na sféře je vyjadřená soustavou tří souřadníc:

- $\theta$ hodnota azimutu v rovině rovníka. Pokud je uhel značený symbolem $\lambda$, pak poukazuje na zeměpisnou délku,
- $\phi$ hodnota polárniho úhla počítaná od zenitu (také zenitový úhel). Pokud je uhel značený symbolem $\varphi^{'}$, pak poukazuje na doplnek zemepisej délky od zenitu, t.j. $\varphi = 90 - \varphi^{'}$ a
- r, je středný polomer Zeme.

### 2.4.5 AES - Systém polárnych súradníc

AES je súradný systém, ktorý pozostáva z týchto súradníc: azimut, elevačný uhol a spojnica medzi lokálnym počiatkom a cieľom. Jedná sa o systém polárnych súradníc. Lokálny počiatok súradného systému je charakterizovaný geodetickými súradnicami $lat_0, lon_0, h_0$. Na obrázku 5 je tento systém názorne zobrazený.




Obrázek 5: Polární souřadnice. Obrázek je převzat z [Mat].

# 3 Transformace souřadníc a jejích kovariančních matíc medzi vybranými souřadnicovými soustavami

## 3.1 ECEF → ENU

Předpokládejme, že v tomto příkladu je uvažovaný rotační elipsoid (například WGS-84 nebo GRS-80) geocentrický, to znamená, že střed elipsoidu se nachází ve středu zemského tělesa. Transformace souřadnic pak mezi zemským geocentrickým systémem souřadnic (xyz) a lokálním topocentrickým (nebo také lokálním geodetickým - enu) systémem může být vyjádřený předpisem [Sol98]

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{enu}^{xyz} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Pro popis transformace mezi uvedenými systémy si potřebujeme odvodit transformační matici, v tomto případě takzvanou rotační matici. Vycházejme z rovnice 8. Rotační matici pak zostavíme pro rotaci v prostoru a to pomocí jednoduchých rotací v každé ose samostatně.

Rotační matice kolem osy $z$ ve směru hodinových ručiček nabude tvar

$$\mathbf{R_3}\left(\theta\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta\right) & \sin\left(\theta\right) & 0 \\ -\sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

přičemž rotace kolem osy $z$ je $\cos\left(\theta_{z,w}\right) = \cos\left(0\right) = 1$, protože úhel mezi osama $z$ a $w$, které jsou v tomto přikladě totožné, je roven nule. Dále platí, že kosinus úhlu $\cos\left(\theta_{z,u}\right) = \cos\left(90\right) = 0$, protože $z$ a $u$ jsou na sebe kolmé. Stejně tento předpoklad platí i pro $\cos\left(\theta_{z,v}\right)$, $\cos\left(\theta_{x,w}\right)$ a $\cos\left(\theta_{y,w}\right)$.

Analogicky postup bude platit i pro ostatní dvě rotace a tedy rotace kolem osy $x$ je

$$\mathbf{R_1}\left(\theta\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\theta\right) & \sin\left(\theta\right) \\ 0 & -\sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

a kolem osy $y$

$$\mathbf{R_2}\left(\theta\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta\right) & 0 & -\sin\left(\theta\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(\theta\right) & 0 & \cos\left(\theta\right) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

Vyjádření transformační matice $\mathbf{C}_{enu}^{xyz}$ mezi dvěma pravoúhlými kartézskymi souřadnicovými systémy ECEF a ENU je založen na součinu dvou rotací, konkrétně:

1. rotaci kolem osy $z$ o úhel $\pi/2 + \lambda$ a
2. rotaci kolem osy $y$ o úhel $\pi/2 - \varphi$,

kde úhlové stupně $\lambda$, respektíve $\varphi$ geograficky představují stupeň otočení jedné soustavy od druhé ve směru zeměpisné délky ($\lambda$) a ve směru zeměpisné šířky ($\varphi$).

Potom transformace mezi systémy se dá vyjádřit ve tvaru

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R_1}\left(\pi/2 - \varphi\right) \mathbf{R_3}\left(\pi/2 + \lambda\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\left(\lambda\right) & \cos\left(\lambda\right) & 0 \\ -\cos\left(\lambda\right)\sin\left(\varphi\right) & -\sin\left(\lambda\right)\sin\left(\varphi\right) & \cos\left(\varphi\right) \\ \cos\left(\lambda\right)\cos\left(\varphi\right) & \sin\left(\lambda\right)\cos\left(\varphi\right) & \sin\left(\varphi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Z předchozího zápisu plyne, že během rotace pravoúhlých souřadnicových soustav předpokládáme, že počátky souřadnic jsou shodné. V případě, že počátek, například soustavy ENU umístíme na povrch referenčního tělesa (elipsoid případně sféry), je zapotřebí doplnit posun mezi soustavami. Potom rovnice 23 nabude tvar

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

Při transformaci kovariančných matic vycházejme z předpokladu a definice Zákona hromadění středních chyb. Budeme vycházet z článku Transformace kovariančních matic. Předpokládejme, že kovariančná matice souřadnic soustavy ze které chceme transformovat $\Sigma_{xyz}$, je známá a to například jako důsledek numerického výpočtu (regrese, vyrovnìní, estimace souřadnice a jejich přesností atp.). Hlavní úlohou je v tomto kroku vyčíslit Jakobiho matici. Rozepsáním matic pro jednotlivé veličiny $e$,$n$,$u$ z předchozích rovnic a následným parciálním derivovaním podle veličin $x$,$y$,$z$ snadno zjistíme, že Jakob matice $\mathbf{J}$ je totožná s rotační maticí $\mathbf{R}$ a tedy

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}. \tag{25}$$

Kovarianční matice souřadníc systému ENU pak nadobude tvaru

$$\mathbf{\Sigma}_{enu} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xyz}\mathbf{J}^T = \mathbf{R}\mathbf{\Sigma}_{xyz}\mathbf{R}^T. \tag{26}$$

### 3.1.1 Příklad transformace z ECEF $\rightarrow$ ENU

Nechť bod A je vyjádřen v souřadnicích souřadného systému ECEF a hodnoty souřadnic jsou:

- $x = 4198944.6161$ m
- $y = 174747.2383$ m
- $z = 4781886.8769$ m

Mějme bod B, jehož geodetické souřadnice jsou $\varphi = 48.8862deg$, $\lambda = 2.3343deg$ a geodetická výška je $h = 174.5217m$. Úhlové souřadnice použijeme jednak k natočení souřadných soustav (viz rotační matice v rovnici 23) a společně se zadanou elipsoidickou výškou, k umístění počátku ENU soustavy, který umístíme nad povrch rotačního elipsoidu. Úkolem je vyjádřit souřadnice bodu $A$ v soustavě ENU a s přihlédnutím definovaného počátku ENU soustavy v bodě B.

Vektor pravoúhlých souřadnic bodu B, tj $(x_0, y_0, z_0)$ získáme transformací GEOD2ECEF(). ENU souřadnice bodu A s přihlédnutím k umístění počátku ENU soustavy v bodě B a vypočítané podle 24, jsou:

- $e = 3579.4232$ m
- $n = -688.3514$ m
- $u = -51.0524$ m.

Pseudokód Matlab funkce ecef2enu(), která je implementováná v package +Geo je stručně popsaná v příloze C.1.

## 3.2 ENU $\rightarrow$ ECEF

Jednou z vlastností rotačných matíc je tá, podle které $\mathbf{R}(\theta)^{-1} = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}(\theta)^T$. Z toho plyne, že zápis pro inversnou tranformaci je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R_3}\left(-\left(\pi/2+\lambda\right)\right)\mathbf{R_1}\left(-\left(\pi/2-\varphi\right)\right)\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda)\sin(\varphi) & \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ \cos(\lambda) & -\sin(\lambda)\sin(\varphi) & \sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}. \tag{27}$$

a po doplnění předpokaldu translace počátku souřadné soustavy, rovnici 27 doplníme do tvaru

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} e \\ n \\ u \end{bmatrix}, \tag{28}$$

kde pravoúhlé souřadnice vektoru $\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ získáme transformací zeměpisných souřadnic posunutého počátku například ENU soustavy ($\varphi$, $\lambda$, $hel$) do systému geocentrických kartézskych souřadnic (například systému ECEF).

Odhad kovarianční matice $\Sigma_{xyz}$ geocentrických pravoyhlých souřadníc kopíruje postup jako v prípade odhadu matice $\Sigma_{enu}$, no s tým rozdílem, že zde je

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}^{-1}, \tag{29}$$

respektíve vzhledem k vlastnostem matice rotace $\mathbf{R}$

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}^T. \tag{30}$$

Pro $\Sigma_{xyz}$ pak dostaneme

$$\mathbf{\Sigma}_{xyz} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{enu}\mathbf{J}^T.. \tag{31}$$

### 3.2.1 Příklad transformace z ENU → ECEF

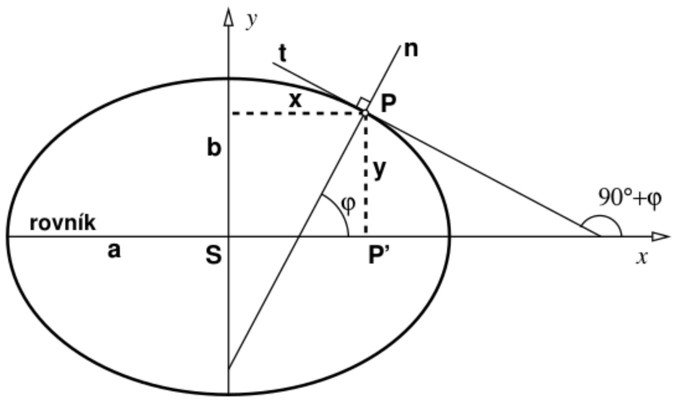
V tomto příkladě bude naší úlohou přezentovat inverzní transformaci, no vycházejme z výsledků výpočtu polohy bodu v ENU soustavě souřadnic, t.j. souřadníc pro bod B v předcházejícim příkladě. Jeho souřadnice jsou:

- $e = 3579.4232$ m
- $n = -688.3514$ m
- $u = -51.0524$ m.

Dle rovnice 28, ECEF XYZ souřadnice bodu A jsou:

- $x = 4198944.6161$ m
- $y = 174747.2383$ m
- $z = 4781886.8769$ m.

Pseudokód Matlab funkce enu2ecef(), která je implmentováná v package +Geo Package je obsahem přílohy C.2




Obrázek 6: $\varphi \to (x, y)$. Obrázek je převzat z [Cim97].

### 3.3 GEOD $\to$ ECEF

Aby sme odvodili základní vzorce pro trnasformaci geodetických souřadníc na geocentrické pravouhlé kartézské souřadnice, je potřeba si vysvětlit základní geometrii mezi těmito souřadnicovými soustavami. V textu se budeme držet kompletního odvození a prepisu tak, jak je prezentován v kapitole 1.2 skriptu [Cim97].

Na obr. 6 svírá normála $n$ v bode $\mathbf{P}$ k elipse s velkou poloosou $a$ (s osou $x$ ) úhel $\varphi$ (geodetická šířka bodu $\mathbf{P}$ ). Odpovdidající tečna $t$ svíra s kladným směrem osy $x$ úhel $90^\circ + \varphi$ a její směrnice $k$ je dána vzorcem

$$k = \frac{dy}{dx} = \tan(90^\circ + \varphi) = -\cot(\varphi). \tag{32}$$

Diferencovaním rovnice meridiánové elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{33}$$

dostaneme

$$\frac{2xdx}{a^2} + \frac{2ydy}{b^2} = 0 \tag{34}$$

a odtud

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \tag{35}$$

Z předcházdejících rovníc vyplývá

$$\cot(\varphi) = \frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}. \tag{36}$$

Po umocnění a úpravě

$$b^4 x^2 \sin^2(\varphi) - a^4 y^2 \cos^2(\varphi) = 0 \tag{37}$$

a dále víme, že

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0. \tag{38}$$

Řešením těchto dvou (pro $x^2, y^2$ lineárních) rovníc dostaneme

$$x = \frac{a^2 \cos(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}} \tag{39}$$

a

$$y = \frac{b^2 \sin(\varphi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}}. \tag{40}$$

Do jmenovatelu dosaďme $b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$, potom po úpravě dostaneme

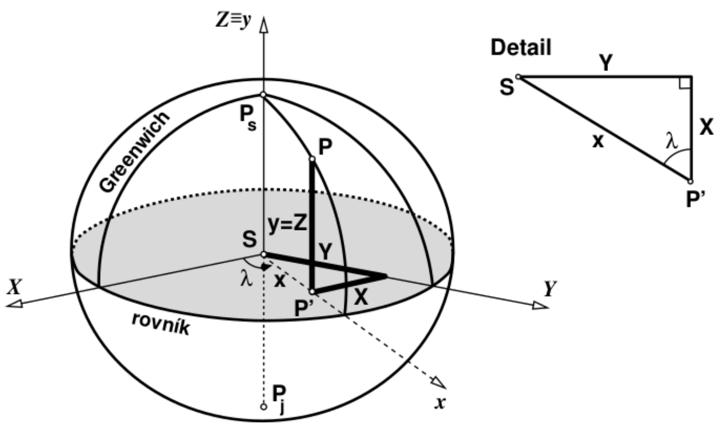
$$x = \frac{a \cos(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{a \cos(\varphi)}{W} \tag{41}$$

a

$$y = \frac{a\left(1 - e^2\right) \sin(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{a\left(1 - e^2\right) \sin(\varphi)}{W}, \tag{42}$$

kde $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}$ je první geodetická funkce.

Polohu bodu $P$ na rotačním elipsoidu vyjadříme v pravouhlé soustavě souřadnic. Její počátek je v středu elipsoidu $S$, osa $Z$ v ose rotace, osa $X$ v průsečníku roviny rovníku s rovinou nultého poledníku, osa $Y$ v rovnině rovníku kolmá na osu $X$ - tak jak je to znázorneno na obrázku 7.




Obrázek 7: Prostorové pravouhlé souřadnice. Obrázek je převzat z [Cim97].

Bodem $P(\varphi, \lambda)$ prochází poledník $P_s - P - P_j - P_s$ o geodetické délke $\varphi$. V rovině tohto poledníku má bod $P$ pravouhlé souřadnice $x$, $y$, odvozené vzorci 41, 42.

Podle obrázka 7 napíšeme pro souřadnice $X$, $Y$, $Z$ bodu $P$ vzorce

$$X = x\cos(\lambda) \tag{43}$$

$$Y = x\sin(\lambda) \tag{44}$$

$$Z = y. \tag{45}$$

Dosadíme-li do předchozích vzorců za x a y rovnice 41 a 42, dostaneme

$$X = \frac{a}{W}\cos(\varphi)\cos(\lambda) \tag{46}$$

$$Y = \frac{a}{W}\cos(\varphi)\sin(\lambda) \tag{47}$$

$$Z = \frac{a}{W}\left(1 - e^2\right)\sin(\varphi). \tag{48}$$

Uvážime-li vzorec pro příčný poloměr křivosti

$$N = \frac{a}{W}, \tag{49}$$

potom geocentrické pravouhlé souřadnice bodu $P$ budou mít vzorce

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ N\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ N\left(1-e^2\right)\sin(\varphi) \end{bmatrix}. \tag{50}$$

V případe, že bod $P$ leží ve směru normály k elipsoidu ve výšce $H$ nad elipsoidem, pak předchozí rovnice budou

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+H)\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ (N+H)\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ \left(N\left[1-e^2\right]+H\right)\sin(\varphi) \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Předpokládejme, že kovarianční matice souřadníc $\varphi, \lambda$ a $H$, $\Sigma_{GEOD}$ je známá. Pro odhad kovarianční matice prostorových pravouhlých souřadníc $X,\ Y,\ Z$, $\Sigma_{ECEF}$ budeme postupovať podle článku Transformace kovariančních matíc. Z článku víme, že úlohou je vyjádřít Jakobiho matici $\mathbf{J}$. Derivovaním modelu rovníc $X,\ Y,\ Z$ z poslední rovníce podle veličín $\varphi, \lambda$ a $H$, postupně dostaneme:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial H} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y}{\partial H} \\ \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial H}. \end{bmatrix} \tag{52}$$

Pro jednotlivé zložky platí:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \cos(\lambda)\left(\frac{\partial N}{\partial \varphi}\cos(\varphi) - \sin(\varphi)(N+H)\right), \tag{53}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = -(N+H)\cos(\varphi)\sin(\lambda), \tag{54}$$

$$\frac{\partial X}{\partial H} = \cos(\varphi)\cos(\lambda), \tag{55}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = \sin(\lambda)\left(\frac{\partial N}{\partial \varphi}\cos(\varphi) - \sin(\varphi)(N+H)\right), \tag{56}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = (N+H)\cos(\varphi)\cos(\lambda), \tag{57}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial H} = \cos(\varphi)\sin(\lambda), \tag{58}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{b^2}{a^2}\left(\sin(\varphi)\frac{\partial N}{\partial \varphi} + \cos(\varphi)N\right) + H\cos(\varphi), \tag{59}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0, \tag{60}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial H} = \sin(\varphi), \tag{61}$$

kde

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{ae^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\left(1 - e^2 \sin^2(\varphi)\right)^{3/2}} \tag{62}$$

a veličiny *a, e,* $N$ jsou hlavní poloos meridiánové elipsy, její první excentricita a příčný poloměr křivosti.

Kovarianční matice souřadníc prostorového pravouhlého souřadnicového systému ECEF je s přihlédnutím k právě definované Jakobiho matici

$$\mathbf{\Sigma}_{ECEF} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{GEOD}\mathbf{J}^T. \tag{63}$$

### 3.3.1 Příklad transformace z GEOD → ECEF

Ukážme si příklad transformace z geodetických souřadníc do prostorových pravouhlých souřadníc.

Bod $P$ ležíci na elipsoidu má geodetické spuřadnice:

- $\varphi = 48.8562°$
- $\lambda = 2.3508°$
- $h = 0.0674m$.

Po aplikovaní rovnice 51 (uvažujeme rotační elipsoid WGS-84 tak jak je definován v B.1), prostorové geocentrické souřadnice bodu $P$ jsou:

- $X = 4200952.53m$
- $Y = 172458.50m$
- $Z = 4780052.13m$.

Pseudokód Matlab funkce geod2ecef(), která je implmentováná v package +Geo Package je obsahem přílohy C.3.

## 3.4 ECEF → GEOD

Existuje celá řada metod, které se zaměřují na inversní transformaci souřadnic z pravoúhlého prostorového systému souřadnic na systém geodetických zeměpisných souřadnic. Práce se speciálně zaměřují na převod geodetické šířky $\varphi$ a to hlavně z důvodu přesnosti jejího odhadu (víme, že z důvodu zploštění referenčního tělesa, v našem případě elipsoidu, geodetická šířka není definována na spojnici středu elipsoidu a bodu $P$ na povrchu elipsoidu a proto nastávají problémy řešení rovnice pro odhad geodetické šířky ze vstupních parametrů, které jsou pravoúhlé geocentrické souřadnice) nebo z důvodu výpočetního (geodetická šířka se počítá buď iterativními metodami nebo neiterativními). Z odborných článků, které se věnují tomuto problému bychom mohli citovat například [Bow76], [Bor89] nebo z aktuálních prací [Fuk06] či [Ver11] (implementován v + Geo package). Autoři, v práci [FI03] se věnovali vzájemnému srovnání vybraných (do toho roku známých) algoritmů.

Jeden ze základních algoritmů (bez ověření přesnosti či výpočetní rychlosti) na odhad geodetických souřadnic $(\varphi, \lambda, h)$ počítaných z pravoúhlých kartézskych souřadnic X, Y, Z je tento [GAB01]:

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right), \tag{64}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{Z + \dfrac{e^2 a^2 \sin^3(\zeta)}{b}}{\xi - e^2 a \cos(\zeta)}\right), \tag{65}$$

a

$$h = \frac{\xi}{\cos(\varphi)} - N, \tag{66}$$

kde

$$\zeta = \tan^{-1}\left(\frac{aZ}{b\xi}\right) \tag{67}$$

$$\xi = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{68}$$

a $N$ je příčný poloměr křivosti, $a$ je hlavní poloosa meridiánové elipsy, $b$ je vedlejší poloosa meridiánovej elipsy a $e$ je její excentricita.

Odhad kovarianční matice geodetických souřadníc bodu v geodetickém souřadnicovém systému nebude záviset na komplikovaných iteračních postupech spojených s odhadem zeměpisné šiřky. S výhodou využijeme výsledných rovníc popsaných v části textu, kde se věnujeme transformaci geodetických souřadníc bodu do systému prostorových pravouhlých souřadníc, respektíve transformační Jacobiho matice, kterou jsme z těchto rovníc odvodili. Inverze takto odvozené Jacobiho matice nám v této časti poslouži k odhadu kovarianční matice výsledných geodetických souřadníc. Proto pro kovariační matici geodetických souřadníc transformované ze soustavy prostorových souřadníc bude

$$\mathbf{\Sigma}_{GEOD} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{ECEF}\left(\mathbf{J}^{-1}\right)^{T}. \tag{69}$$

### 3.4.1 Příklad transformace z ECEF → GEOD

Příklad transformace z prostorových pravouhlých souřadníc do systému geodetických souřadníc.

Bod $P$ ležíci na elipsoidu má tentokrát prostorové spuřadnice:

- $X = 4200952.53m$
- $Y = 172458.50m$
- $Z = 4780052.13m.$

Po aplikovaní algoritmu například [Ver11] (uvažujeme rotační elipsoid WGS-84 tak jak je definován v B.1), pak prostorové geocentrické souřadnice bodu $P$ jsou:

- $\varphi = 48.8562°$
- $\lambda = 2.3508°$
- $h = 0.0674m.$

Pseudokód Matlab funkce ecef2geod(), která je implmentováná v package +Geo Package je obsahem přílohy C.4.

## 3.5 ENU → AES

Algoritmus určený na odhad polárnych súradníc (Az - azimut, El - elevačný uhol a Sr - šikmá spojnica medzi lokálnym počiatkom a cieľom) počítaných s lokálnych pravouhlých súradníc napríklad súradného systému ENU je tento:

$$\tan(Az) = \frac{E}{N}, \tag{70}$$

$$\tan(El) = \frac{U}{\sqrt{E^2 + N^2}}, \tag{71}$$

$$Sr = \sqrt{E^2 + N^2 + U^2}. \tag{72}$$

### 3.5.1 Příklad transformace z ENU → AES

Příklad transformace z lokálnich pravouhlých souřadníc do systému polárních souřadníc.

Bod $P$, například cíl, kterého poloha je charakterizováná v souřadnicovém systému ENU má prostorové spuřadnice:

- $E = 8.4504m$
- $N = 12.4737m$
- $U = 1.1046m.$

Polárne souřadnice tohto cíle jsou:

- $Az = 34.1160°$
- $El = 4.1931°$
- $Sr = 15.1070m.$

## 3.6 AES → ENU

Spätný algoritmus určený na odhad lokálnych pravouhlých súradníc (E - East, N - North, U - Up) počítaných z plárnych súradníc AES (Az - azimut, El - elevačný uhol a Sr - šikmá spojnica medzi lokálnym počiatkom a cieľom) je tento:

$$E = Sr \cdot \cos(El) \cdot \sin(Az), \tag{73}$$
$$N = Sr \cdot \cos(El) \cdot \cos(Az), \tag{74}$$
$$U = Sr \cdot \sin(El). \tag{75}$$

### 3.6.1 Příklad transformace z AES → ENU

Bod $P$, je definovnám pomocu polárních souřadníc.

- $Az = 34.1160°$
- $El = 4.1931°$
- $Sr = 15.1070m.$

Lokálni pravouhlé souřadnice tohto cíle jsou:

- $E = 8.4504m$
- $N = 12.4737m$
- $U = 1.1046m.$

# 4 Vybrané kartografické zobrazení

Z hlediska zkreslení zobrazení rozlišujeme na:

1. konformní - stejnouhlá,
2. ekvidistantní - stejnodelná,
3. ekvivalentní - stejnoplochá,
4. kompenzační - vyrovnávací.

Z pohledu k třídění zobrazovací plochy, pomocí které si můžeme představit vznik obrazu referernční lochy rozlišujeme:

1. zobrazení na kulovou plochu,
2. jednoduchá zobrazení (kuželová, válcová, azimutální),
3. nepravá zobrazení (pseudokonická, pseudocylindrická, pseudoazimutální),
4. polykónická,
5. polyederická,
6. obecná.

My popíšeme jenom vybrané jednoduchá zobrazení a to konrkétně válcová (UTM) a azitmální (stereografická projekce).

## 4.1 Definice a některé vlastnosti vybraných kartografického zobrazení

Kartografickým zobrazením je podle [Buc02] vzájemné přiřazení polohy bodů na dvou různých referenčních plochách. V některých případech, kdy je možno vztah realizovat geometrickou cestou (promítaním), podle [Buc02] budeme takové zobrazení nazývat projekcí neboli prospektivním zobrazením.

Zobrazení je jednoznačne matematicky definováno vtahem mezi souřadnicemi bodů na obourefe- renčních plochách, kterému říkame zobrazovací rovnice. Například zobrazení elipsoidu do roviny budou zobrazovací rovnice v explicitním tvaru

$$X = f\left(\varphi, \lambda\right), \tag{76}$$

$$Y = g\left(\varphi, \lambda\right), \tag{77}$$

kde funkce $f$, $g$ v určitém místě považujeme za spojité, obecně na sobě mezávislé, diferencovatelné apod. Výjimky představují singulární body (např. póly), kde uvedená vlastnost není obecně splněna.

### 4.1.1 Poznámky k jednoduchým zobrazením

Pro naše účely nás budou zajímat jenom jednoduchá zobrazení. Jednoduchá zobrazní jsou taková zobrazení, pro něž je možno zapsat zobrazovací rovnice, podle nichž každá z rovinných souřadníc (polárních nebo pravoúhlých) a výrazy pro zkreslení (zýávislé proměnné) se dají vyjádřit funkcemi pouze jedné souřadnice (nezávsilé proměnné) na referenční ploše. Důsledkem takové jednoduché volby je pak i jednoduchý obraz poledníků a rovnobežek, které jsou pak na mapě znázorněny jako svazek přímek čo osnova rovnoběřných přímek (u poledníku) a soustava rovnoběžných kružnic či osnova rovnoběžných přímek (u rovnoběžek). Jednoduchá zobrazení jsou ortogonální (viz [Buc02], str. 51).

### 4.2 Poznámky k valcovým zobrazením

Válcová zobrazení v normálni poloze mají tyto vlastnosti [Buc02]:

1. rovník a rovnoběžky se zobrazují jako osnova rovnoběžných přímek,
2. obrazy poledníků tvoří osnovu přímek vzájemně stejně odlehlých rovnoběžných a kolmých na obrazy rovnoběžek,
3. obraz základního poledníku volíme jako osu Y,
4. zobrazovací rovnica pro Y je veličina Y funkcí pouze ($\varphi$).
5. do obrazou rovníku vkládame osu X (u souřadnícových systému používaných v geodézii je orientace opačná),
6. zobrazovací rovnica pro X je X lineární funkcí zeměpisné délky ($\lambda$).

Zkreslení v poledníku a rovnoběžce jsou:

$$m_p = \frac{dY}{M d\varphi} \tag{78}$$

$$m_r = \frac{dX}{N\cos(\varphi)\, d\lambda} = \frac{a}{N\cos(\varphi)}, \tag{79}$$

kde $M$, $N$ jsou meridiánový a příčný polomēr křivosti, $a$ je hlavní poloosa meridiánové elipsy a $\varphi$ je zeměpisná šířka.

Protože poledník a rovnoběžka tvoří u válcových zobrazení hlavní paprsky, je pro konformitu jedinou a postačující podmínkou

$$m_p = m_r,$$

a pri referenční ploše elipsoidické a nezkresleném rovníku bude pro dosazení 78 a 79, platit:

$$\frac{dY}{M d\varphi} = \frac{a}{N\cos(\varphi)}. \tag{80}$$

Po separaci proměnných dostaneme

$$dY = a\frac{M}{N\cos(\varphi)} d\varphi, \tag{81}$$

kde na pravé straně rovnice se vyskytuje výraz pro tzv. izometrickou šířku.

Izometrická šířka $q$, která je funkcí zeměpisné šířky $\varphi$, je definována:

$$q = \int_0^{\varphi} \frac{M}{N\cos(\varphi)} d\varphi \tag{82}$$

a po dosazení za $M$ a $N$ dostaneme

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{\varphi} \frac{\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2(\varphi)\right)\cos(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{\left(1-e^2\sin^2(\varphi)-e^2\cos^2(\varphi)\right) d\varphi}{\left(1-e^2\sin^2(\varphi)\right)\cos(\varphi)} \\ &= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos(\varphi)} - \int_0^{\varphi} \frac{e\cos(\varphi) d\varphi}{1-e^2\sin^2(\varphi)} \\ &= \ln\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - e\int_0^{\varphi} \frac{d\left(e\sin(\varphi)\right)}{1-e^2\sin^2(\varphi)}, \end{aligned} \tag{83}$$

a po proložení $x = e\sin(\varphi)$ v posledním integrálu, z nehož plyne, že

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e\sin(\varphi)}{1-e\sin(\varphi)}\right) \tag{84}$$

a pro izometrickou šířku pak platí

$$q = \ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1-e\sin(\varphi)}{1+e\sin(\varphi)}\right)^{\frac{e}{2}}\right]. \tag{85}$$

Po dosazení 85 do 81 dostaneme [Buc02], [Sny87]:

$$Y = a\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1-e\sin(\varphi)}{1+e\sin(\varphi)}\right)^{\frac{e}{2}}\right]. \tag{86}$$

Protože $X$ je lineární funkce zeměpisné délky, pro vyjdřední souřadnice $X$ platí:

$$X = a(\lambda - \lambda_0). \tag{87}$$

Inversní vzorec pro veličinu $\varphi$ v případě spětné transformace vyžaduje počítaní přes iterační proces a základní rovnice je definováná ve tvaru [Sny87]

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}\left\{t\left[\frac{1-e\sin(\varphi)}{1+e\sin(\varphi)}\right]^{\frac{e}{2}}\right\}, \tag{88}$$

kde

$$t = e^{\frac{-Y}{a}}$$

a iterační proces začína výpočtem

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}(t)$$

a pokračuje pokud není dosažení zvolená konvergenční hranice.

Inversní zeměpisná délka se vypočte podle rovnice:

$$\lambda = \frac{X}{a} + \lambda_0. \tag{89}$$

### Konformní transversální válcové zobrazení

Konformní transversální válcové zobrazení nazývané také Gaussovo (pro elipsoidickou referenční plochu) nebo transversální Mercatorovo, je specifické tím, že válec se dotýka referenční koule (elipsoidu) podél základního poledníku, procházejíciho středem území. Kartografické poledníky a rovnoběžky se pak zobrazují jako zeměpisné polidníky a rovnoběžky v normálni poloze.

Uplatnění našlo také konformní válcové zobrazení v obecné poloze (v literatuře Oblique Mercator Projection). Délkově zachovává zvolený kartografický rovník.

### Universální transversální zobrazení v poledníkových pásech, zobrazení systému UTM

V zobrazeních, v kterých má být užito v poloze jiné než normální, zobrazuje se najdřív elipsoid na kouli a pak terpve s koule na zobrazovací plochu, [Buc02]. V případě Gauss (Gauss-Krügerova) zobrazení, elipsoid je zobrazován přímo do roviny, tedy bez zprostředkujíci koule a to tak, že meridiální pruhy stejné šířky se zobrazují samostatně. Určující podínkou je konformita a nezkreslený základní (střední) poledník pásu.

### 4.3 GEOD→ UTM

V knize [Buc02] se uvádí podrobné odvození zobrazovacích rovníc. Z pohledu programatorského je možná výhodnější popsat algoritmus, který se nachádzí v knize [Sny87] (vzorce platí pro elipsoid).

$$x = k_0 N \left[ A + (1 - T + C) \frac{A}{6} + \left( 5 - 18T + T^2 + 72C - 58e^{'2} \right) \frac{A^5}{120} \right] \tag{90}$$

$$y = k_0 \left\{ B - B_0 + N \tan(\varphi) \left[ \frac{A^2}{2} + \left( 5 - T + 9C + 4C^2 \right) \frac{A^4}{24} + \left( 61 - 58T + T^2 + 600C - 330e^{'2} \right) \frac{A^6}{720} \right] \right\} \tag{91}$$

$$k = k_0 \left[ 1 + (1 + C) \frac{A^2}{2} + \left( 5 - 4T + 42C + 13C^2 - 28e^{'2} \right) \frac{A^4}{24} + \left( 61 - 148T + 16T^2 \right) \frac{A^6}{720} \right], \tag{92}$$

kde

- $k_0$ je multipliační konstanta $k_0 = 0.9996$,
- $e^{'2}$ je druhá excentricita rotačního eliposidu definováná také pomocí $e^{'2} = e^2 / \left(1 - e^2\right)$,
- $N$ je příčný poloměr křivosti rotačního elipsoidu,
- $T = \tan^2(\varphi)$,
- $C = e^{'2} \cos^2(\varphi)$,
- $A = (\lambda - \lambda_0) \cos(\varphi)$ předpokladajíc, že $\lambda$ a $\lambda_0$ jsou v radiánech,
- $B$ je délka oblouku meridiánu od rovníku po $\varphi$. $B_0 = B$ zpočtěná pro $\varphi_0$ a platí

$$\begin{aligned} B = \quad & a \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \cdots \right) \varphi \\ & -a \left( \frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} - \cdots \right) \sin(2\varphi) \\ & +a \left( \frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} + \cdots \right) \sin(4\varphi) \\ & -a \left( \frac{35e^6}{3072} + \cdots \right) \sin(6\varphi) \end{aligned} \tag{93}$$

- $\varphi$ je zeměpisná délka v radiánech.

Pokud $\varphi \pm \pi/2$, pak $x = 0$, $y = k_0 (B - B_0)$ a $k = k_0$.

Jednotlivé osi souřadníc jsou dané takto: Yová osa leži v obraze základnáho poledníku $\lambda_0$ a y roste směrem na sever. Xová osa je kolmá na Y a x roste směrem na východ.

### 4.4 UTM → GEOD

Pro inversní vzroce podle [Sny87] platí:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 \quad & - \quad G \left[ \frac{D^2}{2} - \left( 5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9e^{'2} \right) \frac{D^4}{24} \right] \\ & - \quad G \left[ \left( 61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252e^{'2} - 3C_1^2 \right) \frac{D^6}{720} \right], \end{aligned} \tag{94}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{D - (1 + 2T_1 + C_1)\frac{D^3}{6} + \left(5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8e^{'2} + 24T_1^2\right)\frac{D^5}{120}}{\cos\left(\varphi_1\right)}, \tag{95}$$

kde

- $G = \left(\frac{N_1 \tan\left(\varphi_1\right)}{R_1}\right)$
- $\varphi_1$ je zeměpisná šířka charakteristická pro centrální meridián a která ma stejnou $y$ souřadnici jako bod, kterého polární sořadnice jsou $(\varphi, \lambda)$

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \mu \quad &+ \quad \left(\frac{3e_1}{2} - \frac{27e_1^3}{32} + \cdots\right)\sin 2\mu \\ &+ \quad \left(\frac{21e_1}{16} - \frac{55e_1^4}{32} + \cdots\right)\sin 4\mu \\ &+ \quad \left(\frac{151e_1^3}{96} + \cdots\right)\sin 6\mu \\ &+ \quad \left(\frac{1097e_1^4}{512} - \cdots\right)\sin 8\mu\end{aligned}$$

- $e_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$
- $\mu = \frac{B}{a\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \cdots\right)}$
- $B_0$ je spočtená pomocí rovnice 93 pro vstupní $\varphi_0$,
- $B = B_0 + \frac{y}{k_0}$,
- $e^{'2} = \frac{e^2}{(1 - e^2)}$,
- $C_1 = e^{'2}\cos^2\left(\varphi_1\right)$,
- $T_1 = \tan^2\left(\varphi_1\right)$,
- $N_1 = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - e^2\sin^2\left(\varphi_1\right)\right)}}$,
- $R_1 = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2\sin^2\left(\varphi_1\right)\right)^{3/2}}$,
- $D = \frac{x}{N_1 k_0}$.

### Meridiánová konvergence

Meridiánová konvergence je podle [Mer] úhel určitém bodu referenční plochy mezi tečnami k místnímu poledníku a ke křivce rovnoběžné se základním poledníkem; může být elipsoidická meridiánová konvergence, sférická meridiánová konvergence a rovinná meridiánová konvergence.

V knize [Buc02], vzorec pro výpočet meridiánové konvergence $\gamma$ je (bez odvození)

$$\begin{aligned} \tan(\gamma) &= \lambda \sin(\varphi) + \frac{\lambda^3}{3} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) \left(1 + \tan^2(\varphi) + 3\eta^2 + 2\eta^4\right) \\ &+ \frac{\lambda^5}{15} \sin(\varphi) \cos^4(\varphi) \left(2 + 4\tan^2(\varphi) + 2\tan^4(\varphi)\right) + \cdots, \end{aligned} \tag{96}$$

kde $\eta^2 = \dfrac{e^2 \cos^2(\varphi)}{1 - e^2}$.

### Délkové zkreslení

Délkové zkreslení je funkcií zeměpisných souřadníc a pre jeho výpočet platí [Buc02]:

$$m = 1 + \frac{\lambda}{2} \cos^2(\varphi). \tag{97}$$

Chceme-li délkové zkreslení zpočíst z pravouhlých souřadníc, pak vzorec pre výpočet je tento:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \cdots, \tag{98}$$

avšak $R = \sqrt{MN}$ je funkcí zeměpisné šířky $\varphi$.

## 4.5 Poznámky k azimutálním zobrazením

Azimutální zobrazení si můžeme představit tak, že obraz referenčního tělesa vzniká již přímo v rovině [Buc02], str. 99. V tomto zobrazení je rovina kolmá ke spojnici kartografického pólu se středem referenční koule (pozor na projekci z elipsoidu). Nasledujíci text se týka odvození zobrazení vývozené z referenční koule. V knize [Sny87] se diskutuje algoritmus respektíve vzorce platné pro elipsoid.

Z azimutálniho zobrazení jsou známá některé vlastnosti, například:

- Obrazem poledníků je svazek přímek s vrcholem v kartografickém pólu a které svírají stejné úhly jako na kouli.
- Základní poledník se zobrazí jako osa X.
- Obrazem rovnoběžek jsou kružnice se středem v kartografickém pólu. Poloměr těchto rovnoběžek závisí na kartografické šiřce.

Zobrazovací rovnice jsou:

$$\rho = f(\psi), \tag{99}$$

kde $\psi = 90° - \varphi$, kde v tomto případe $\varphi$ je kartografická šířka (odvozená na kouli a ne na elipsoidu).

$$\varepsilon = \lambda, \tag{100}$$

kde $\lambda$ v tomto případe reprezentuje kartografickou délku.

Funkci $f$ v případě první zobrazovací rovnice definujeme na základě požadávků, nejčastěji z ekvidistance, ekvivalence či konfomity. Nás bude zajímat konformní zobrazení, protože stereografická projekce zachováva konformitu úhlů.

V azimutálním zobrazení můžeme zavést pravouhlou rovinnou soustavu, kde pravoúhlé souřadnice X, Y získame transformací polárních souřadníc na pravouhlé souřadnice. Počátek takéto souřadnicové soustavy je potom někdy vhodné pomocí aditačních konstant přesunout do libovolného místa vzhledem k středu zobrazovaného území a to tak, aby souřadnice v tomto území měly kladnou hodnotu.

K transformaci polárních souřadníc do soustavy pravouhlých souřadnic použijeme výrazy:

$$X = \rho \cos(\varepsilon), \tag{101}$$

$$Y = \rho \sin(\varepsilon), \tag{102}$$

resp. pro inversní případ platí:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{103}$$

a

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right). \tag{104}$$

Jak už bylo nastíněno, nás bude zajímat konformní zobrazení. Pro konformní azimutální zobrazení je jedninou a postačující podmínkou

$$\frac{d\rho}{Rd\psi} = \frac{\rho}{R\sin(\psi)}. \tag{105}$$

Po separaci proměnných

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\psi}{\sin(\psi)} \tag{106}$$

a po integraci dostaneme

$$\ln(\rho) = \ln\left(\tan\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) + \ln(C), \tag{107}$$

kde $C$ je libovolná integrační konstanta a z poslední rovnice plyne, že

$$\rho = C\tan\left(\frac{\psi}{2}\right). \tag{108}$$

Pokud zavedeme podmínku, aby pro střed mapy (pro pól) platilo $m = 1$, pak (bez odvození - viz [Buc02]), $C = 2R$, takže zobrazovací rovnice jsou

$$\rho = 2R\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \tag{109}$$

a

$$\varepsilon = \lambda. \tag{110}$$

Výraz pro zkreslení $m$ je

$$m = \frac{1}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}. \tag{111}$$

Pokud chceme stanovit v pólu konkrétní délkové zkreslení různe od jedné, je možné, podobně jako v případe UTM zobrazení, zavést multiplikační konstantu, jejíž velkost udává délkové zkreslení v pólu. Platí

$$C = k2R. \tag{112}$$

Vedle konformity má zobrazení důležitou vlastnost, že každá kružnice na referenční ploše kulové se zobrazuje opět jako kružnice. Tedy obrazy geografické sítě se skládá ze samých kružnic respektíve přímek (kružnice s nulovou křivostí).

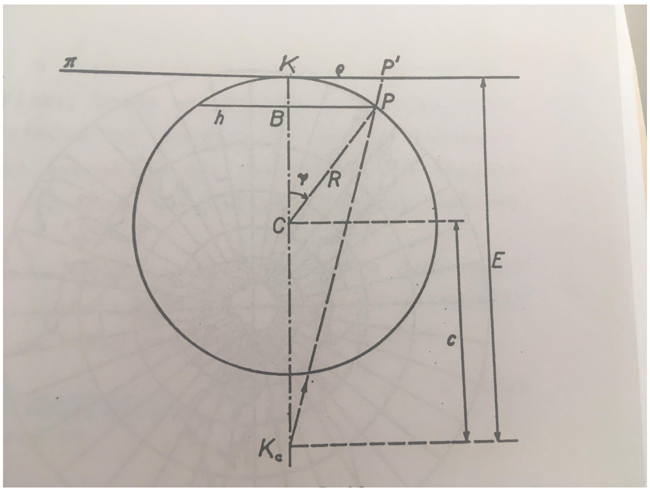
Výraz pro délkové zkreslení je možné vyjádřit i za použití rovinných souřadníc a to v tvaru

$$m = 1 + \frac{X^2 + Y^2}{4R^2}, \tag{113}$$

kde $R$ je poloměr koule.

### 4.6 GEOD → STEREO

Azimutální (geometrické) projekce vznikají promítnutím povrchu referenční koule o poloměru $R$ z libovolného bodu $K_c$ na rovinu $\pi$, kolmou ke spojnici středu promítaní $K_c$ se středem kolue $C$. Podle předchozího obrázku, který znázorňuje osový řez rovinou promítacího paprsku bodu P, je obraz bodu $P'$ určen v rovině $\pi$ polárnimi souřadnicemi $\rho, \varepsilon$.




Obrázek 8: Geometrická azimutální projekce. Obrázek je převzat z [Buc02].

Z obrázku plyne táto nerovnost

$$\frac{\rho}{R\sin(\psi)} = \frac{E}{c + R\cos(\psi)}, \tag{114}$$

kde $E = K_cK$ a $c = K_cC$, kde $C$ je střed koule. Takže zobrazovací rovnice azimutálních zobrazení budou

$$\rho = \frac{RE\sin(\psi)}{c + R\cos(\psi)} \tag{115}$$

a

$$\varepsilon = \lambda. \tag{116}$$

Vztahy pro výpočet pravouhlých souřadníc transformované z polárních souřadníc, resp. přímo ze zeměpisných souřadníc jsou (porovnej s [Weib] anebo [TDBS77], kde je přehozené značení souřadnicových os).

$$X = \frac{RE\left(-\cos(\varphi_K)\sin(\varphi) + \sin(\varphi_K)\cos(\varphi)\cos(\Delta\lambda)\right)}{c + R\left(\sin(\varphi_K)\sin(\varphi) + \cos(\varphi_K)\cos(\varphi)\cos(\Delta\lambda)\right)}, \tag{117}$$

a

$$Y = \frac{RE\left(\cos(\varphi)\sin(\Delta\lambda)\right)}{c + R\left(\sin(\varphi_K)\sin(\varphi) + \cos(\varphi_K)\cos(\varphi)\cos(\Delta\lambda)\right)}, \tag{118}$$

kde $\Delta\lambda = (\lambda - \lambda_K)$.

Rovnice platí pro všechny azimutální projekce. Jedina neznáma konstanta $c$ rozhoduje výběr projekce zo sady případů, z nichž užívané jsou:

- gnomická projekce, při $c = 0$;
- **stereografická projekce**, při $c = R$;
- externí projekce, při $c > R$;

- ortografická projekce, při $c = \infty$.

Poznamenajme, že rovnice stereografické projece, která zobrazuje referenční těleso elipsoid do roviny jsou obsahem knihy [Sny87].

## 4.7 STEREO → GEOD

.

Inverzní vzorce pro odhad zeměpisných souřadníc z pravouhlých rovinných souřadníc jsou [TDBS77] anebo [Weib] (pozor na přehozené značení souřadnicových os):

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\cos(c)\sin(\varphi_K)\frac{Y\sin(c)\cos(\varphi_K)}{\rho}\right), \tag{119}$$

a

$$\lambda = \lambda_0 + \tan^{-1}\left(\frac{X\sin(c)}{\rho\cos(\varphi_K)\cos(c) - Y\sin(\varphi_K)\sin(c)}\right), \tag{120}$$

kde

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{121}$$

a

$$c = 2\tan^{-1}\left(\frac{\rho}{2R}\right). \tag{122}$$

## Reference


[Bor89] K. M. Borkowski. Accurate algorithms to transform geocentric to geodetic coordinates. *Bulletin Geodesique*, 63(1):50–56, March 1989.

[Bow76] B. Bowring. Transformation from spatial to geographical coordinates. *Survey Review*, 23:323–327, 1976.

[Buc02] Buchar, P. *Matematická kartografie.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002.

[Caj14] Cajthaml, J. *Kartografie 1. Soubor přednášek.* ČVUT v Praze, katedra geomatiky, 2014.

[Cim97] Cimbalník M., Mervart L. *Vyšší geodézie 1.* Ediční středisko ČVUT, Praha, 1997.

[ECE] ECEF:Wiki. Ecef coordinates in relation to latitude and longitude — Wikipedia, the free encyclopedia.

[ENU] ENU:Wiki. The east north up (enu) local tangent plane is similar to ned, except for swapping 'down' for 'up' and x for y. — Wikipedia, the free encyclopedia.

[FI03] H. Fok and H. Iz. A comparative analysis of the performance of iterative and non-iterative solutions to the cartesian to geodetic coordinate transformation. volume 5, pages 61–74, 2003.

[Fuk06] Toshio Fukushima. Transformation from Cartesian to Geodetic Coordinates Accelerated by Halley's Method. *Journal of Geodesy*, 79(12):689–693, March 2006.

[GAB01] Mohinder S. Grewal, Angus P. Andrews, and Chris G. Bartone. *Global Navigation Satellite Systems, Inertial Navigation, and Integration.* Wiley-Interscience, 2001.

[Kov16] P. Kovář. *Družicová navigace. Od teorie k aplikacím v softwarovém přijímači.* České vysoké učení technické v Praze. Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2016.

[Kub13] L. Kubaček. *Statistical Theory of Geodetic Network.* VÚGTK, Zdiby, 2013.

[MA76] E.M. Mikhail and F.E. Ackermann. *Observations and Least Squares.* IEP-A Dun-Donnelley Publisher, New York, 1976.

[Mat] Matlab. Comparison of 3-d coordinate systems.

[Mer] Meridiánová konvergence. Definice meridiánovej konvergence. terminologický slovník zeměměřictví a katastru nemovitostí.

[Mey02] Thomas Meyer. Grid, ground, and globe: Distances in the gps era. *Surveying and Land Information Systems*, 62:179–202, 01 2002.

[SH88] Tomas Soler and Larry Hothem. Coordinate systems used in geodesy: Basic definitions and concepts. *Journal of Surveying Engineering-asce - J SURV ENG-ASCE*, 114:84–97, 05 1988.

[Sny87] Snyder, J., P. Map projections: A working manual, 1987.

[Sol98] T. Soler. A compendium of transformation formulas useful in gps work. *Journal of Geodesy*, 72:482–490, 1998.

[TDBS77] M. P. Thomas D. B., Mephan and R. R. Steeves. The stereographic double projection, 1977.

[Ver11] Hugues Vermeille. An analytical method to transform geocentric into geodetic coordinates. *Journal of Geodesy*, 85(2):105–117, February 2011.

[Weia] Weisstein, E., W. Spherical coordinates. from mathworld–a wolfram web resource.

[Weib] Weisstein, Eric W. Stereographic projection. from mathworld. a wolfram web resource.

# Appendices

# A Základní parametry zemského elipsoidu

| | |
|---|---|
| a | hlavní poloosa meridiánové elipsy |
| b | vedlejší poloosa meridiánové elipsy |
| f | zploštění (první) |
| n | zploštění (druhé) |
| e | excentricita (první) |
| $e^{'}$ | excentricita (druhá) |
| c | pólový poloměr křivosti |
| M | meridiánový poloměr křivosti |
| N | příčný poloměr křivosti |
| R | střední poloměr křivosti |
| r | poloměr rovnoběžky |
| $\varphi$ | zeměpisná šířka |
| $B_0^\varphi$ | délka oblouku meridiánu od rovníku po $\varphi$ |
| W | první geodetická funkce |
| V | druhá geodetická funkce |
| F | pomocná geodetická funce |

$$f = (a - b)/a. \tag{123}$$

$$n = (a - b)/(a + b). \tag{124}$$

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2. \tag{125}$$

$$e^{'2} = (a^2 - b^2)/b^2. \tag{126}$$

$$c = a^2/b. \tag{127}$$

$$M = a\left(1 - e^2\right)/W^3. \tag{128}$$

$$N = a/W. \tag{129}$$

$$R = \sqrt{MN} \tag{130}$$

$$r = N\cos(\varphi). \tag{131}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2\sin^2(\varphi)} \tag{132}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2\cos^2(\varphi)} \tag{133}$$

$$F = \sqrt{1 + n\cos(2\varphi) + n^2} \tag{134}$$

# B Konstanty základních referenčních elipsoidů

## B.1 World Geodetic System 1984 (WGS84)

$a = 6378137m \quad b = 6356752,31425m \quad f = 0,003352810664747$

## B.2 Geodetic Reference System 1980 (GRS80)

$a = 6378137m \quad b = 6356752,31414m \quad f = 0,003352810681182$

## B.3 Konstanty Krasovského elipsoidu

$a = 6378245m \quad b = 6356863,01877m \quad f = 0,003352329869259$

# C Pseudokódy implementovaných transformácii v Matlab package +Geo

## C.1 ECEF2ENU

**Data:** x, y, z, $\varphi$, $\lambda$, hel, RT, ELL
**Result:** e, n, u
výpočet rotační matice $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$;
**if** $RT == elipsoid$ **then**
| $[x_0, y_0, z_0] = geod2ecef(\varphi, \lambda, hel, ELL)$;
**else**
| $[x_0, y_0, z_0] = sphere2ecef(\varphi, \lambda, hel^*)$;
**end**
Výpočet podle rovnice 24

**Algorithm 1:** Transformácia ECEF2ENU

## C.2 ENU2ECEF

**Data:** e, n, u, $\varphi$, $\lambda$, hel, RT, ELL
**Result:** x, y, z
výpočet rotační matice $\mathbf{R}(\varphi, \lambda)$;
**if** $RT == elipsoid$ **then**
| $[x_0, y_0, z_0] = geod2ecef(\varphi, \lambda, hel, ELL)$;
**else**
| $[x_0, y_0, z_0] = sphere2ecef(\varphi, \lambda, hel^*)$;
**end**
Výpočet podle rovnice 28

**Algorithm 2:** Transformácia ENU2ECEF

### C.3 GEOD2ECEF

**Data:** $\varphi$, $\lambda$, h, ELL
**Result:** x, y, z
výpočet potřebních parametrů rotačního elipsoidu (a, b, N)
Výpočet podle rovnice 51
**Algorithm 3:** Transformácia GEOD2ECEF

### C.4 ECEF2GEOD

**Data:** x, y, z, ELL
**Result:** $\varphi$, $\lambda$, h
výpočet potřebních parametrů rotačního elipsoidu (například a, e)
Výpočet podle algoritmu diskutovaný např. [Ver11].
**Algorithm 4:** Transformácia ECEF2GEOD

## D Smerové kosíny

## E Elipsa chýb a Helmertová krivka

K určeniu presnosti dvojrozmernej náhodnej veličiny je vhodné správne rozumieť chybám v rovine. Presnosť je po štatistickej stránke daná dvoma odchýlkami s normálnym rozdelením. Presnosť je teda v konkrétnom súradnom systéme, napr. v systéme pravouhlých kartézianských súradníc x, y, definovaná tzv. kovariančnou maticou v tvare:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_x\sigma_y \\ \sigma_x\sigma_y & \sigma_y \end{pmatrix}, \tag{135}$$

kde

- $\sigma_x$ je druhá odmocnina rozptylu veličiny x a reprezentuje charakteristiku presnosti tejto veličiny,
- $\sigma_y$ je druhá odmocnina rozptylu veličiny y a rovnako reprezentuje charakteristiku presnosti tejto veličiny,
- $\sigma_x\sigma_y$ je kovariancia medzi parametrami x a y (v literatúre $\sigma_{x,y}$ alebo $Cov_{x,y}$).

Plochu elipsy, ktorú odvodíme z informácií z danej kovariančnej matice 135, opisujú tri základné veličiny: a) smerodajná odchýlka v smere hlavnej polosi $\sigma_a$, b) smerodajná odchýlka v smere vedľajšej poloosi $\sigma_b$ a c) uhol natočenia celej plochy $\vartheta$. Tieto kolmé smerodajné odchýlky spoločne s uhlom natočenia je možné odvodiť viacerými spôsobmi. Sledujúc prácu [?], vychádzajme z predpokladu, že hustota pravdepodobnosti je definovaná predpisom:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{\frac{-1}{2\,(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}, \tag{136}$$

kde

- $\rho$ je koeficient korelácie.

V prípade, ak veličiny x a y sú nezávislé, koeficient korelácie je nulový. Naopak, ak veličiny sú korelované dostaneme rovnicu elipsy v tvare:

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}\right) = t^2, \tag{137}$$

kde $t$ je normovaná veľkosť dvojrozmernej chyby.

Ďalej bez ďalšieho odvodenia, dôjdeme k výsledku, podľa ktorého veľkosť hlavnej osi elipsy (smerodajnej odchýlky $\sigma_a$) je:

$$\sigma_a = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{\left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2\right)^2 + 4\rho\sigma_x^2\sigma_y^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{138}$$

a veľkosť vedľajšej osi elipsy

$$\sigma_b = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{\left(\sigma_x^2 - \sigma_y^2\right)^2 + 4\rho\sigma_x^2\sigma_y^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{139}$$

Natočenie elipsy môžeme opísať vzorcom

$$\tan(2\vartheta) = 2\rho\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}. \tag{140}$$

K rovnakému výsledku sa dá dôjsť spektrálnym rozkladom kovariančnej matice $\mathbf{Q}$ (náčrt rozkladu a odvodenia je v prílohe).

Význam veličín $\sigma_a$, $\sigma_b$ a $\vartheta$ sa často zobrazuje ako elipsa chýb a je to krivka, ktorá spojuje body s rovnakou hustotou pravdepodobnosti. To znamená, že hlavná poloosa, ktorá je odvodená od rovnice 138 je od pôvodnej súradnej sústavy odklonená o uhol opísaný rovnicou 140 a že rovnica 137 obecne definuje okolie skutočnej polohy veličiny, v ktorom by sa teoreticky malo vyskytovať isté percento možných hodnôt.

Z uvedeného rozloženia chýb v rovine je možné, opäť s istou pravdepodobnosťou, odvodiť aj neistotu určenia polohy bodu v ľubovoľnom smere. Krivka, ktorá spojuje presnosť pre všetky smery sa nazýva *Helmertová krivka.*

Pre odhad presnosti použijeme zákon hromadenia stredných chýb. Všeobecný zápis zákona je tento [**?**]:

$$m_f^2 = \mathbf{f}^T\mathbf{Q}\mathbf{f}, \tag{141}$$

kde

- $\mathbf{f}$ je vektor smerových kosínov,
- $\mathbf{Q}$ je hore definovaná kovariančná matica a
- $m_f^2$ je prievodič bodu Helmertovej krivky, t.j. veľkosť rozptylu v smere danej priamky $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Bez odvodenia, rovnica Helmertovej krivky je

Jej vyjadrenie je

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2\sigma_x^2 + y^2\sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y xy. \tag{142}$$

### E.1 Príklad zobrazenia elipsy chýb a Helmertovej krivky

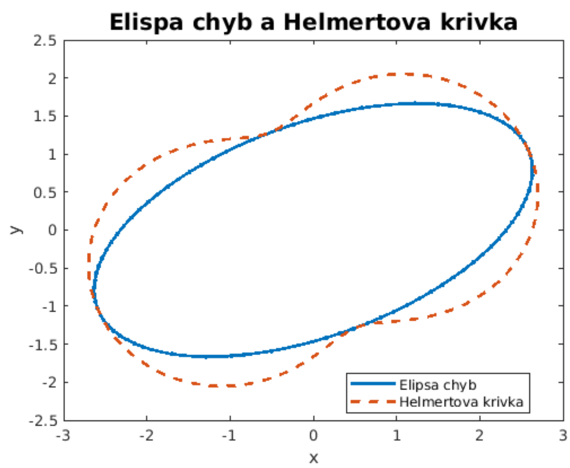
Prvý príklad poukazuje na stav v ktorom kovariančná matica vyjadruje nezávislé veličiny.
Jej vyjadrenie je:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{143}$$


Obrázek 9: Zobrazenie elipsy chýb a Helmertovej krivky. Kovariancia je 0.0.

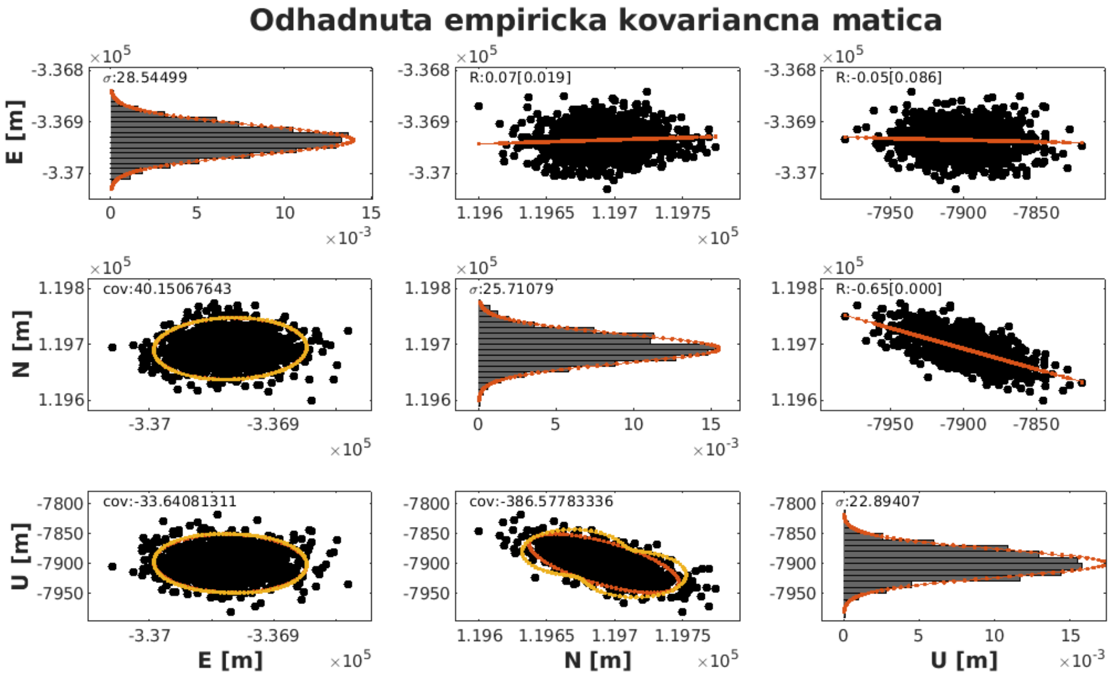
Druhý príklad poukazuje na stav v ktorom kovariančná matica vyjadruje závislé veličiny.
Jej vyjadrenie je:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 1.5 & 5 \end{pmatrix}. \tag{144}$$




Obrázek 10: Zobrazenie elipsy chýb a Helmertovej krivky. Kovariancia je 1.5.

Posledný príklad obshahuje stav transformácie kovariančnej matice zo systému ECEF do systému ENU pravouhlých súradníc. Scatter ploty pod diagonálou obsahujú aj porovnanie elíps chýb a Helmertových kriviek. Z príkladu je pozorovateľné, že ak sa druhé odmocniny rozptylov veličín približne




Obrázek 11: Transformácia suradníc zo súradného systému ECEF do systému ENU.

rovnajú a veličiny nie sú korelované (v príklade takými veličinami sú súradnice N (north) a U (up) v korelácii so súradnicou E (east)) tak polygóny elipsy chýb a Helmertových kriviek sa veľmi zhodujú. Naopak, ak sú data korelované (z príkladu pozorujeme závislosť veličín N a U), vidíme neistoty určenia polôh bodov v danom smere značne odlišné (bola uvažovaná 90% hladina významnosti).

# F Vlastné čísla a vlastné vektory

## F.1 Spektrálny rozklad štvorcovej matice

Bez dokazovania.

Nech $\mathbf{Q}$ je štvorcová matica s rozmerom $n \times n$. Potom spektrálnym rozkladom takejto matice je rozklad matice na vlastné čísla a vlastné vektory a platí:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T, \tag{145}$$

kde

- $\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T$ sú vlastné vektory a
- $\lambda_i$ sú vlastné čísla.

Ak pre skalár $\lambda$ a pre vektor $\mathbf{f}$, ktorý je nenulový platí

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \lambda \mathbf{f} \tag{146}$$

potom $\lambda$ je vlastné číslo matice $\mathbf{Q}$ a vektor $\mathbf{f}$ je vlastný vektor matice $\mathbf{Q}$ a príslušný vlastnému číslu $\lambda$.

Platí, že vlastný vektor matice je príslušný jednej vlastnej hodnote tejto matice. Vlastné čísla matice s rozmerom napr. $2 \times 2$ získame riešením rovnice:

$$Det\,(\mathbf{Q}-\lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - Tr(\mathbf{Q})\lambda + Det(\mathbf{Q}) = 0 \tag{147}$$

a potom

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{148}$$

Je to nutná a postačujúca podmienka pre existenciu vlastného vektoru matice $\mathbf{Q}$ príslušného $\lambda$.

### F.2 Návrh odvodenia prvkov elipsy chýb za pomoci spektrálneho rozkladu štvorcovej matice

Majme kovariančnú maticu $\mathbf{Q}$ v tvare,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}. \tag{149}$$

Podľa 147 a 148 dostaneme

$$Det(\mathbf{Q}-\lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{150}$$

a potom

$$\left(\sigma_x^2-\lambda\right)\left(\sigma_y^2-\lambda\right) - \rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2 = 0. \tag{151}$$

Po vyriešení,

$$\sigma_a = \sqrt{\lambda_1} = \left\{\frac{1}{2}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sqrt{\left(\sigma_x^2-\sigma_y^2\right)^2+4\rho\sigma_x^2\sigma_y^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{152}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\lambda_2} = \left\{\frac{1}{2}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sqrt{\left(\sigma_x^2-\sigma_y^2\right)^2+4\rho\sigma_x^2\sigma_y^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{153}$$

## G Zákon hromadenia chýb - Propagation low

## H Zobrazení elipsoidu na kouli za podmínky zachování úhlů (konformní zobrazení)

Poznámky pocházejí z předášek [Caj14].

- Musí být splněny podmínky konformity

$$m_r = m_p, \quad p = 0. \tag{154}$$

Při odvození stačí uvažovat první podmínku. Tá druhá je splněna tím, že zeměpisná síť se zobrazuje jako zeměpisná síť (viz přednáška 3 [Caj14]).

$$\frac{RdU}{Md\varphi} = \frac{R\cos{(U)}dV}{N\cos{(\varphi)}d\lambda}. \tag{155}$$

- Vzhledem k tomu, že intervaly zeměpisné délky musí být symetrické, pak

$$dV = \alpha d\lambda. \tag{156}$$

- Výslední zobrazovací rovnice (bez odvození) jsou:

$$\tan\left(\frac{U}{2}+45°\right)=\frac{1}{k}\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}+45°\right)\left(\frac{1-e\sin(\varphi)}{1+e\sin(\varphi)}\right)^{e/2}\right]^{\alpha} \tag{157}$$

$$V=\alpha\lambda. \tag{158}$$

### Zkreslení

Pro zkreslení platí

$$m=\frac{\alpha R\cos(U)}{N\cos(\varphi)}, \tag{159}$$

$$P=m^2, \tag{160}$$

a

$$\Delta\omega=0. \tag{161}$$

### Volba konstant zobrazení

Pokud má být zobrazení souvislé (celý elipsoid na celou kouli), pak

$$\alpha=1, \tag{162}$$

$$k=1, \tag{163}$$

a

$$R=a. \tag{164}$$

Pokud má být zobrazené jenom dílčí území mezi $\varphi_J$ a $\varphi_S$, pak (Gaussův způsob):

- zvolí se základní rovnoběžka $\varphi_0$ (uprostřed území), která zůstane nezkreslená, t.j.

$$m_0=1, \tag{165}$$

- pomocí Taylorova rozvoje se vzorec pro délkové zkreslení odvodí do tvaru

$$m=f(\varphi)=f(\varphi_0+\Delta\varphi)=f(\varphi_0)+\Delta\varphi\frac{dm}{d\varphi}+\Delta\varphi^2\frac{d^2m}{2!d^2\varphi}+\cdots \tag{166}$$

- Aby délkové zkreslení bylo co nejmenší, zvolí se podmínky

$$m_0=1, \tag{167}$$

$$\frac{dm}{d\varphi}=0, \tag{168}$$

a

$$\frac{d^2m}{d^2\varphi}=0. \tag{169}$$

- Z předchozích podmínek (bez odvození), pro hledané konstanty dostaneme týto vztahy

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4(\varphi_0)}{1 - e^2}, \tag{170}$$

přičemž

$$\sin(\varphi_0) = \alpha \sin(U_0). \tag{171}$$

A dále,

$$k = \frac{\tan^{\alpha}\left(\frac{\varphi_0}{2} + 45^\circ\right)\left(\frac{1 - e\sin(\varphi_0)}{1 + e\sin(\varphi_0)}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}}{\tan\left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ\right)}, \tag{172}$$

a

$$R = \sqrt{M_0 N_0}. \tag{173}$$

# I Meridánová konvergence - poznámky

Při převodu zeměpisných (např. elipsoidických) souřadníc do zobrazovací roviny některého zobrazovacího systému by mohla platiť táto schéma převodu (viz nasledující obrázek):

$$\varphi\,,\ \lambda \ \underset{I}{\longrightarrow}\ U,\ V \ \underset{II}{\dashrightarrow}\ \check{S}\,,\ D \ \underset{III}{\longrightarrow}\ \rho\,,\ \varepsilon \ \underset{IV}{\dashrightarrow}\ X\,,\ Y$$

Obrázek 12: Obecná schéma možného převodu elipsoidicých souřadníc do systému zobrazovacích souřadníc.

1. Blok **I** představuje konformní zobrazení elipsoidických souřadníc na kouli (například Gaussovým způsobem).
2. Blok **II** jsou zeměpisne sférické spuřadnice převedeny na kartografické souřadnice a to vzhledem k zvolenému kartografckému pólu.
3. Blok **III** obsahuje konformní zobrazení kartografických souřadníc z koule na zvolenou zobrazovací plochu (kužel, válec, rovina).
4. Blok **IV** obsahuje výpočet pravouhlých souřadníc z polárních souřadníc.

Meridiánová konvergence je úhel mezi zemským poledníkem a rovnoběžkou rovnoběžnou s osou Y (X - v závislosti na tom, jak je souřadnicový sýstém zobrazovací roviny definován).

Speciálne pro stereografickou projekci, pokud by byla stereografická projekce v normálni poloze (na pólu) tak meridiánová konvergence se rovná přímo zeměpisné délce. Pokud stereografická projekce bude definováná v obecné poloze, postup odhadu meridánové konvergence by mohl být tento:

- Zeměpisné souřadnice U, V pomocí nasledujících vztahů převedeme na kartografické souřadnice, s, d (platí pro převod na koulové ploše)

$$\sin(s) = \sin(U_k)\sin(U) + \cos(U_k)\cos(U)\cos(\Delta V) \tag{174}$$

$$\sin(d) = \frac{\sin(\Delta V)\cos(U)}{\cos(s)}. \tag{175}$$

- Nasleduje výpočet souřadnice $\varepsilon$, například pomocí této zobrazovací rovnice

$$\varepsilon = nD, \tag{176}$$

kde D je zeměpisná délka na kouli a n je konstanta zobrazení.

- U vrcholu P sféfirckého trojuholníku se musí vypočítat vnitří úhel $\xi$

$$\sin(\xi) = \frac{\cos(U_k)\sin(D)}{\sin(U)}. \tag{177}$$

- Potom meridiánová konvergence se vypočte pomocí rovnice $C = \varepsilon - \xi$. Platí také přibližný vzorec

$$C = 0.008257Y + 2.373\frac{Y}{X}\ [km], \tag{178}$$

kde Y a X jsou pravouhlé souřadnice, přičemž X je obrazem základního poledníku a Y je kolmá na X.