摄像机模型

Lu Peng
School of Computer Science,
Beijing University of Posts and Telecommunications

本课程三维重建篇所涉及的教学内容与课件参考了CS231A，
感谢CS231A课程团队在课程建设方面所做的工作！

Machine Vision Technology							
Semantic information				Metric 3D information			
Pixels	Segments	Images	Videos	Camera		Multi-view Geometry	
Convolutions Edges & Fitting Local features Texture	Segmentation Clustering	Recognition Detection	Motion Tracking	Camera Model	Camera Calibration	Epipolar Geometry	SFM
10	4	4	2	2	2	2	2

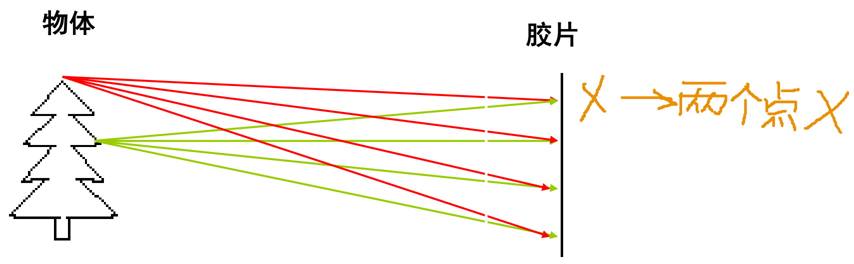
摄像机几何

- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

摄像机几何

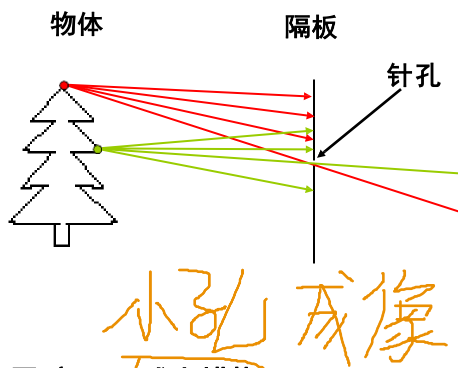
- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

我们如何记录世界？



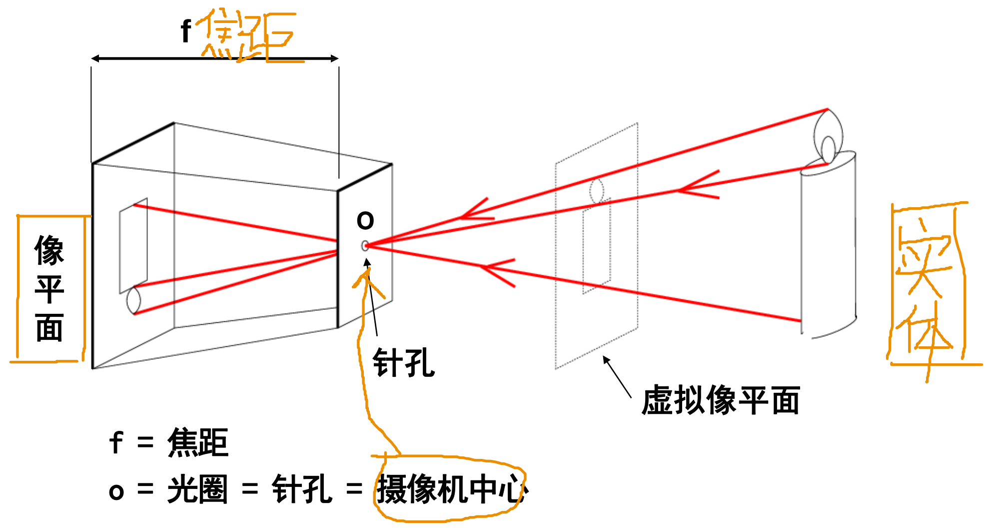
- **摄像机设计**
  - **想法：将胶片直接放置在物体前方？**

针孔摄像机

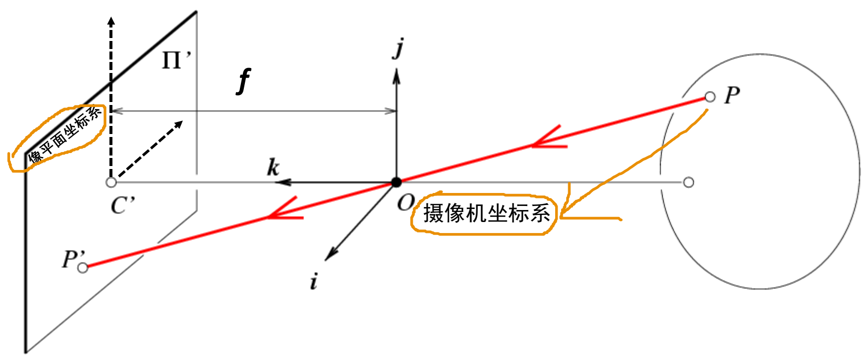


- **添加屏障——减少模糊**

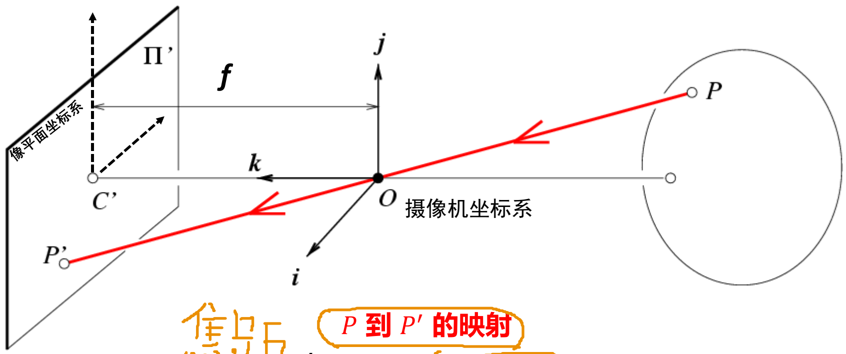
针孔摄像机


f 焦距
o
像平面
针孔
虚拟像平面
实体
f = 焦距
o = 光圈 = 针孔 = 摄像机中心

针孔摄像机


Π’
f
j
k
O
i
C’
P
P’
像平面坐标系
摄像机坐标系

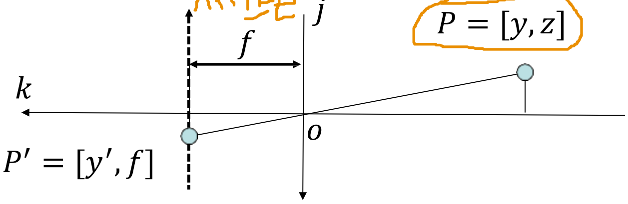
针孔摄像机



焦距

P 到 P′ 的映射

$P = [y, z]$

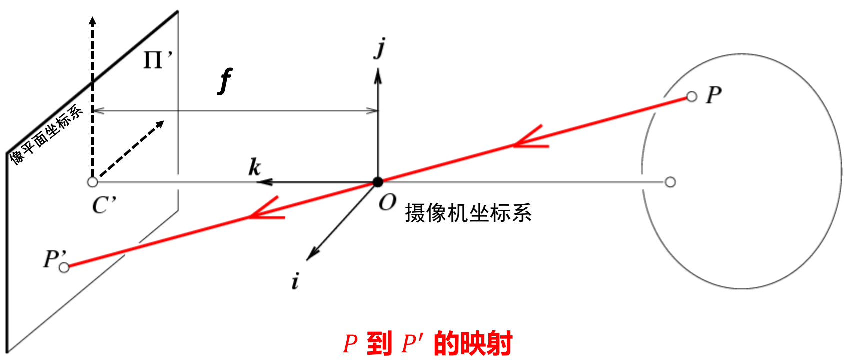


$P' = [y', f]$

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z} \quad \Longrightarrow \quad y' = f\frac{y}{z}$$

相似三角形法

针孔摄像机

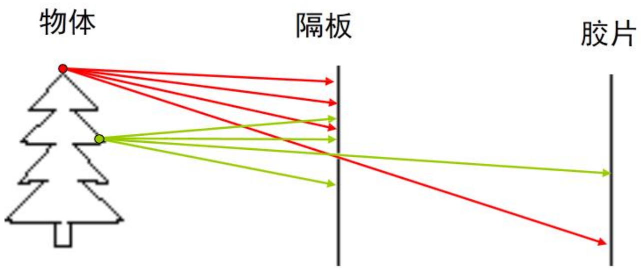


P 到 P′ 的映射

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = f\dfrac{x}{z} \\ y' = f\dfrac{y}{z} \end{cases}$$

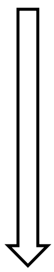
针孔摄像机

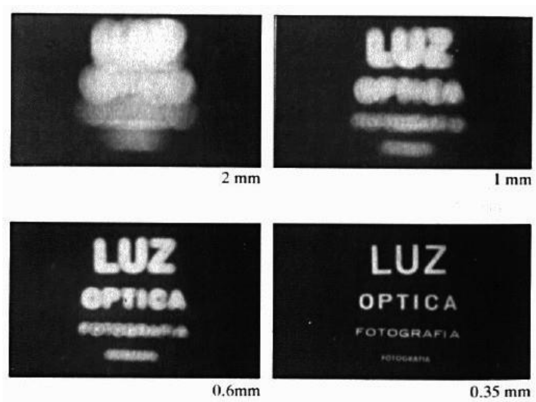


光圈的尺寸重要吗？

针孔摄像机

缩小光圈





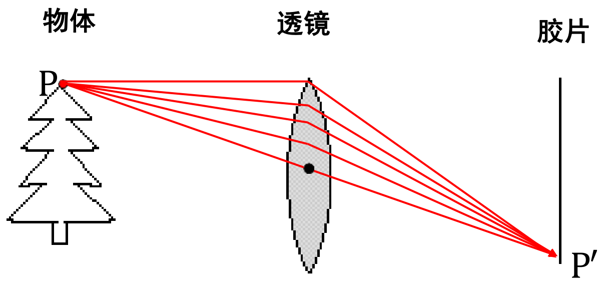
光线多

随着光圈减小，成像效果如何变化？（越来越清晰、越来越暗）

如何应对到达胶片的光线变少？

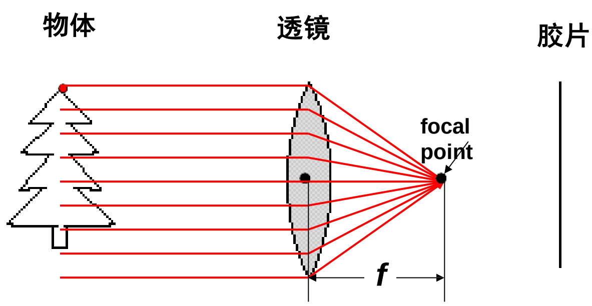
摄像机 & 透镜

增加透镜！！！



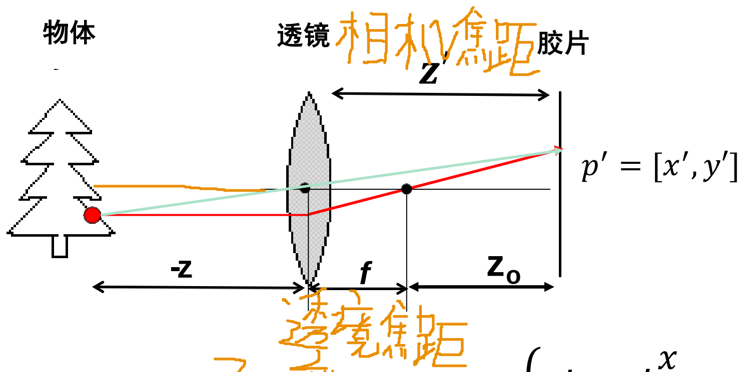
- 透镜将多条光线聚焦到胶片上，增加了照片的亮度

摄像机 & 透镜



- 透镜将光线聚焦到胶片上
  - 1 – 所有平行于光轴的光线都会会聚到焦点，焦点到透镜中心的距离称为焦距。
  - 2 – 穿过中心的光线的方向不发生改变

近轴折射模型



根据折射定律:

$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

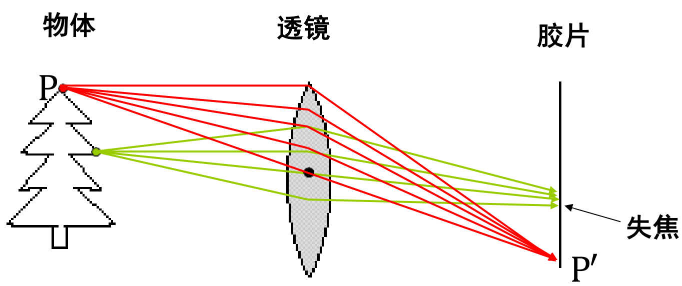
R为透镜球面半径，n为透镜折射系数

不变

$$\boxed{z' = f + z_0}$$

$$\begin{cases} x' = z'\dfrac{x}{z} \\ y' = z'\dfrac{y}{z} \end{cases}$$

透镜问题：失焦



- **透镜将光线聚焦到胶片上**
  - **物体“聚焦”有特定距离**
  - **景深**

透镜问题：失焦

微距摄像！！！

- 透镜将光线聚焦到胶片上
  - 物体“聚焦”有特定距离
  - 景深

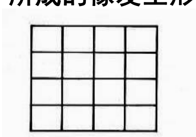
透镜问题：径向畸变

枕

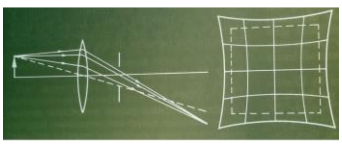
桶

- 径向畸变：图像像素点以畸变中心为中心点，沿着径向产生的位置偏差，从而导致图像中所成的像发生形变

没有畸变

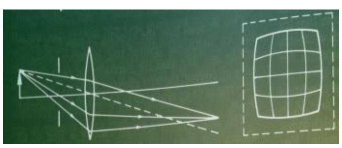


枕形



畸变像点相对于理想像点沿径向向外偏移，远离中心

桶形



畸变像点相对于理想点沿径向向中心靠拢

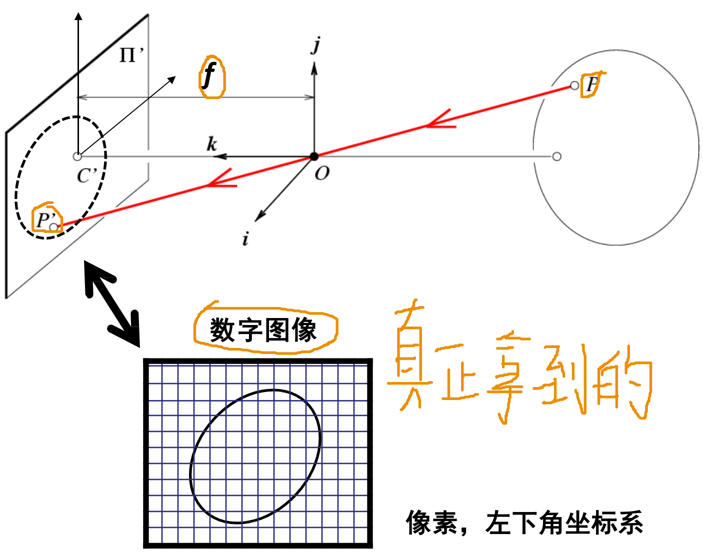
产生原因：光线在远离透镜中心的地方比靠近中心的地方更加弯曲

摄像机几何

- 针孔模型 & 透镜
- **摄像机几何**
- 其他摄像机模型

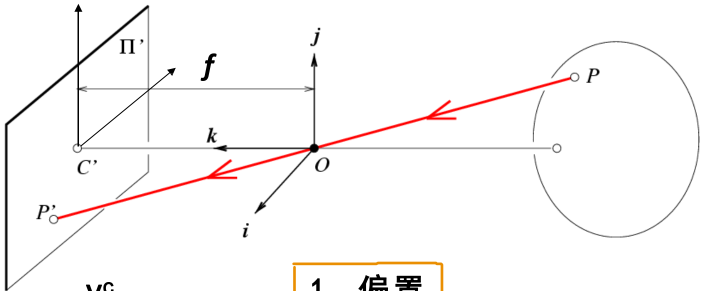
像平面到像素平面

像平面

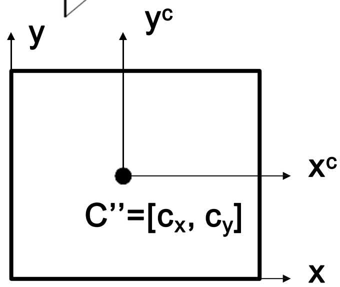


像素，左下角坐标系

像素坐标系

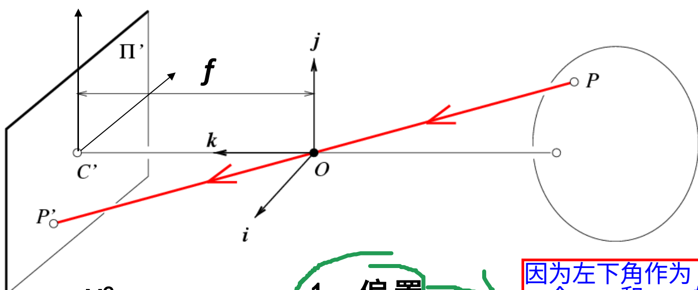


1. 偏置



$$(x,y,z) \rightarrow (\boxed{f\frac{x}{z}}+c_x, \boxed{f\frac{y}{z}}+c_y)$$

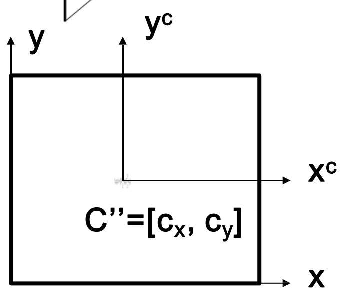
像素坐标系



1. 偏置

因为左下角作为（0，0）点，因此会有一个c_x 和 c_y的偏置

2. 单位变换

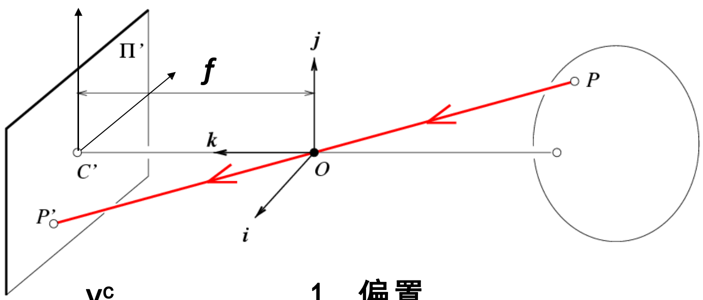


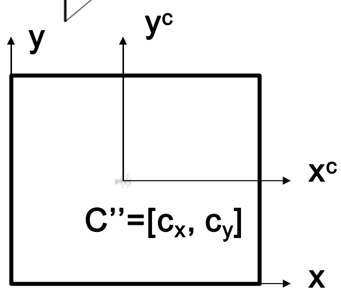
$$(x,y,z) \rightarrow (\underbrace{\boxed{f\,k}}_{\alpha}\frac{x}{z}+\overset{\text{offset}}{c_x}, \underbrace{\boxed{f\,l}}_{\beta}\frac{y}{z}+\overset{\text{offset}}{c_y})$$

单位: k , l :pixel/m f : m

非方形像素 α , β : pixel

像素坐标系





1. 偏置
2. 单位变换 三维 —> 像素点

$$(x,y,z) \rightarrow \left(\underbrace{\boxed{f\,k}}_{\alpha}\frac{x}{z}+c_x,\underbrace{\boxed{f\,l}}_{\beta}\frac{y}{z}+c_y\right)$$

$$P=(x,y,z)\rightarrow P'=\left(\alpha\frac{x}{z}+c_x,\beta\frac{y}{z}+c_y\right)$$

问题：P到P'的变换是线性的吗？

$$\underbrace{P=(x,y,z)}_{\text{三维}}\rightarrow \underbrace{P'=\left(\alpha\frac{x}{z}+c_x,\beta\frac{y}{z}+c_y\right)}_{\text{像素}}$$

齐次坐标

$1 \to 1$

E $\to$ H

$$\underbrace{(x,y)}_{2D} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}_{3D} \qquad \underbrace{(x,y,z)}_{3D} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} 4D$$

图像点的齐次坐标　　　　空间点的齐次坐标

$n \to 1$

齐次 H $\to$ E 欧式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

齐次坐标系中的投影变换

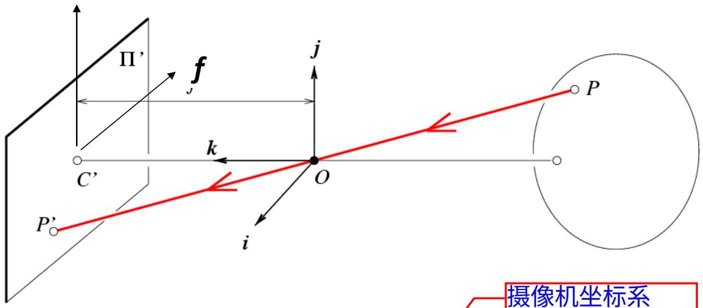
mat

$$P_h' = \begin{bmatrix} \alpha x + c_x z \\ \beta y + c_y z \\ z \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \alpha & 0 & c_x & 0 \\ 0 & \beta & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \boldsymbol{P_h}$$

H→E

$$\overbrace{P_h'}^{\text{齐次}} \to \overbrace{P' = (\alpha \frac{x}{z} + c_x, \beta \frac{y}{z} + c_y)}^{\text{欧式}}$$

摄像机的投影矩阵



摄像机坐标系

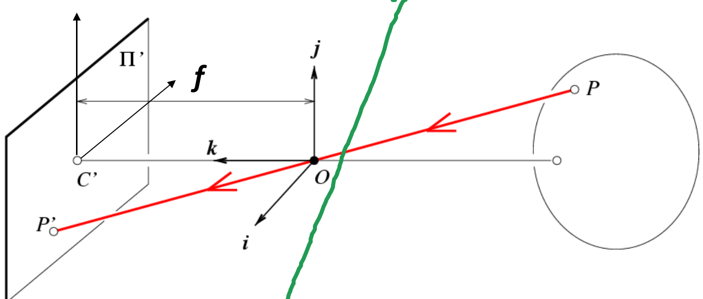
投影矩阵

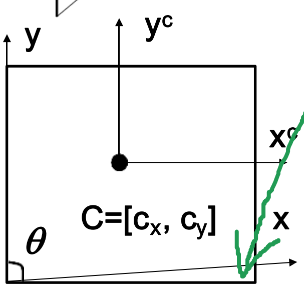
$$\overset{3\times1}{P'} = \overset{3\times4}{\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 & c_x & 0 \\ 0 & \beta & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{固定不变的，给定相机之后}}} \overset{4\times1}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}} = MP$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

线性映射

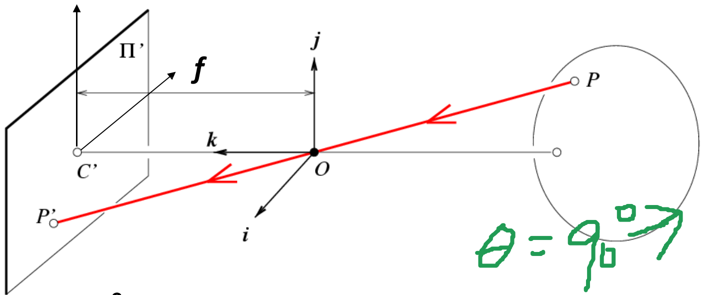
摄像机偏斜





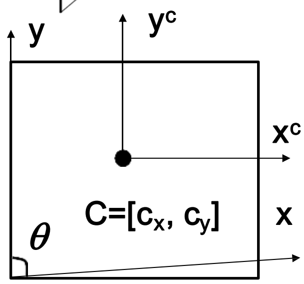
制造工艺影响，像素可能不垂直，而是0-

摄像机偏斜



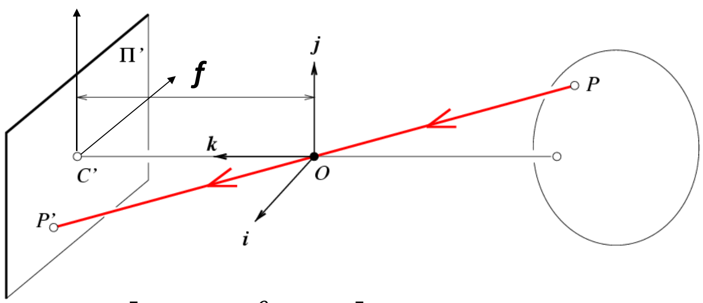
$\theta = 90°$

0
β
0



$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

摄像机坐标系下的摄像机模型

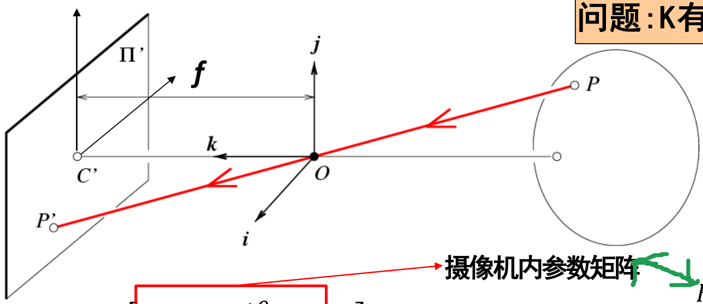


$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

摄像机坐标系下的摄像机模型

问题：K有多少个自由度？

5 α β c_x c_y θ



摄像机内参数矩阵

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot\theta & c_x \\ 0 & \frac{\beta}{\sin\theta} & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \boxed{\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

内参数决定了摄像机坐标系下空间点到图像点的映射！

$= \boxed{M} P$

投影矩阵

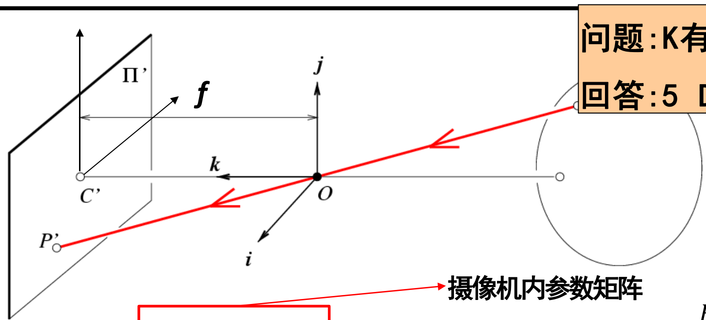
$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{= K[I \quad 0]P}$

摄像机坐标系下的摄像机模型

问题：K有多少个自由度？

回答：5 DOF ！



摄像机内参数矩阵

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot\theta & c_x \\ 0 & \frac{\beta}{\sin\theta} & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \boxed{\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

内参数决定了摄像机坐标系下空间点到图像点的映射！

$= \boxed{M} P$

投影矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$= K[I \quad 0]P$

规范化投影变换

$$P' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

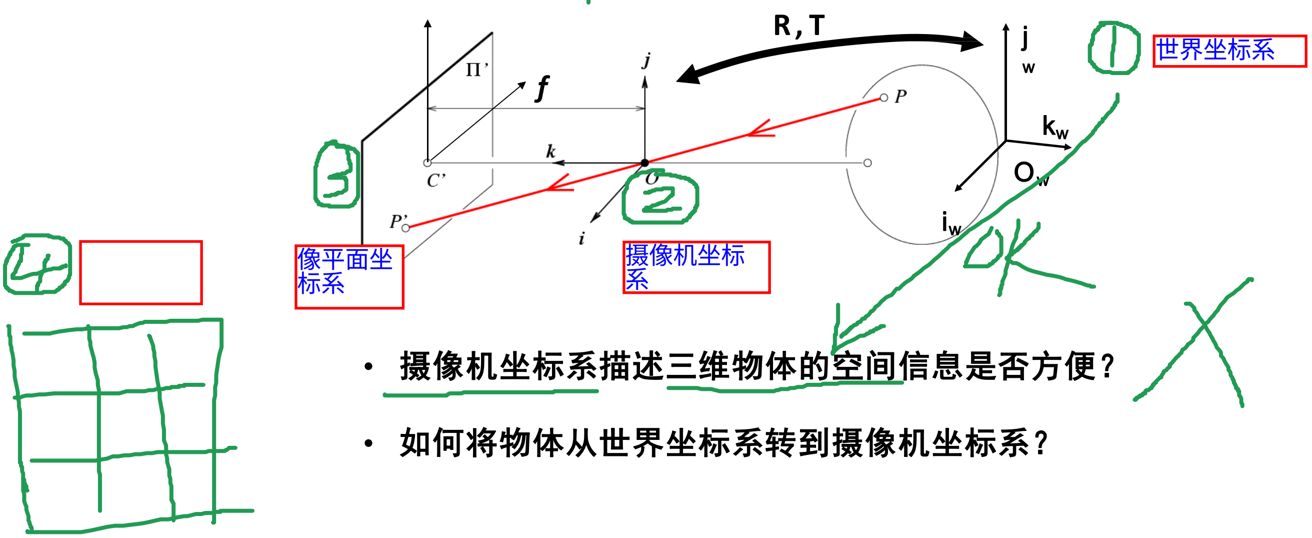
$$\mathfrak{R}^4 \xrightarrow{H} \mathfrak{R}^3$$

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{P}$$

P'欧式坐标为 $\begin{bmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{bmatrix}$

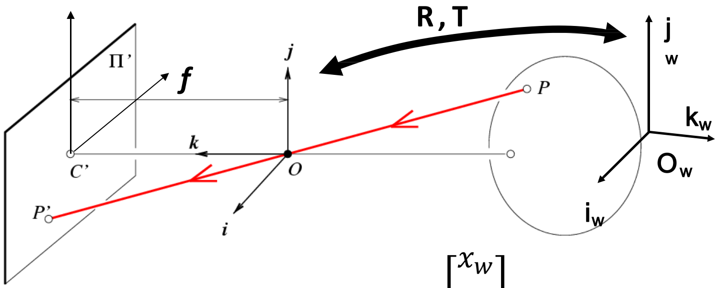
$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

世界坐标系



- 摄像机坐标系描述三维物体的空间信息是否方便？
- 如何将物体从世界坐标系转到摄像机坐标系？

摄像机外参数



$P_c = R \cdot P_w + T$

平移

旋转

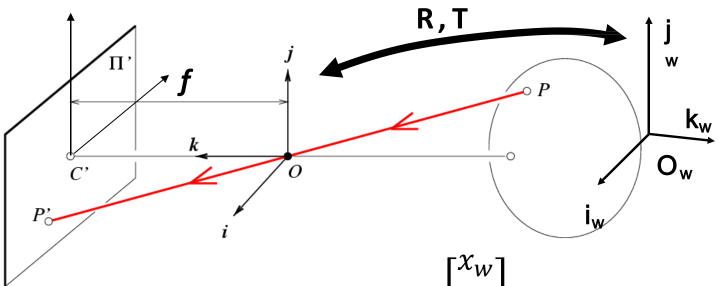
$P_w = R^T \cdot (P_c - T)$

R为正交矩阵，因此R的逆就是R的转置

齐次坐标系：$P = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P}_w$

$\boldsymbol{P}_w = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$

摄像机外参数



齐次坐标系：$P = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P}_w$

$\boldsymbol{P}_w = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$

内参数矩阵

3x4

外参数矩阵

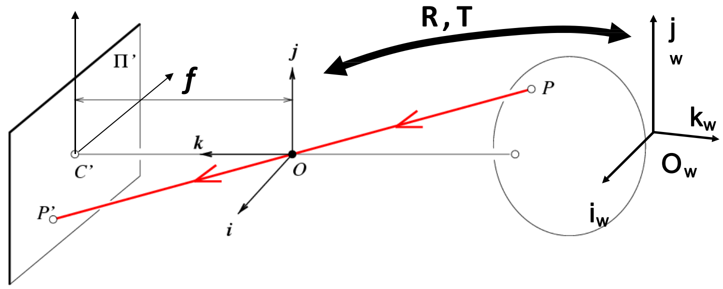
齐次

$M = K[R \quad T]$

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K\boxed{[R \quad T]}P_w = MP_w$$

3x3 3x1

摄像机几何



内部参数　　外部参数

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K\boxed{[R \quad T]}P_w = MP_w$$

完整的摄像机模型！

问题：各个符号的物理意义及其维度分别是什么？

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K[R \quad T]P_w = MP_w$$

11 DoF

问题：投影矩阵M有多少个自由度？

5 DoF　　　　6 DoF

内部参数　　　　外部参数

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K\boxed{[R \quad T]}P_w = MP_w$$

3 DoF　　3 DoF

问题：P'转换成欧式坐标该如何写？

内部参数　　　　外部参数

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K\boxed{[R \quad T]}P_w = MP_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w$$

m_1 1x4 行

m_2 x4

m_3 1x4

定理（Faugeras，1993）

$$M = K[\,R\;T\,] = [KR\;KT] = [A\;b] \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1\times3 \\ 1\times3 \\ 1\times3 \end{matrix}$$

令 $M = (A \quad b)$ 为3×4的矩阵，$a_i^T (i = 1,2,3)$ 表示由矩阵 A 的行

- M是透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- M是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \qquad \theta = 90°$$

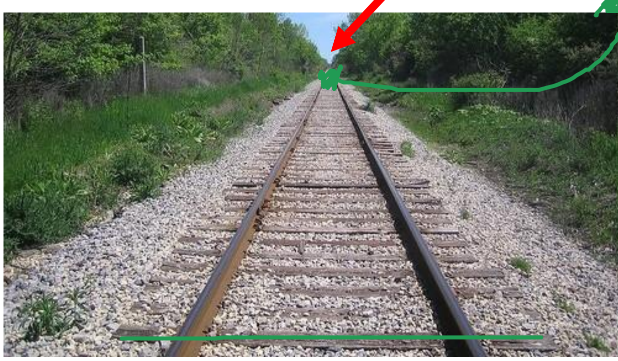
- M是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

投影变换的性质

1. 点投影为点
2. 线投影为线
3. 近大远小
4. 角度不再保持
5. 平行线相交

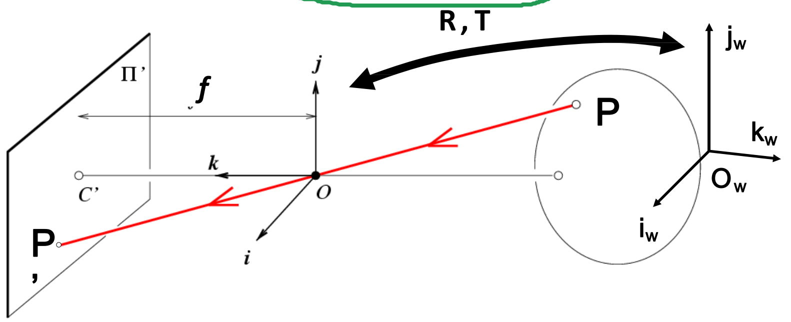
3D世界中的平行线在图像中相交于“影消点”



摄像机几何

- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- **其他摄像机模型**

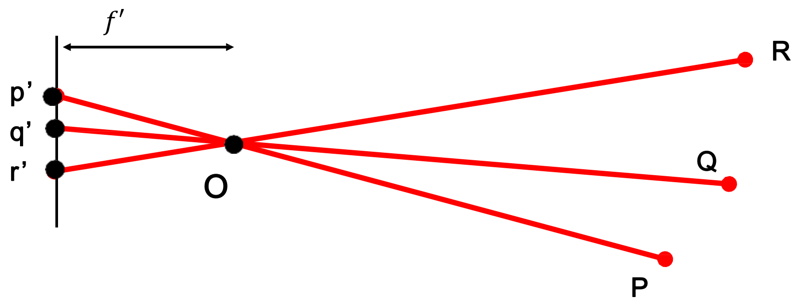
透视投影摄像机



$$P'_{3\times1} = MP_w = K_{3\times3}[R \quad T]_{3\times4}P_{w4\times1} \qquad M = \begin{bmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{bmatrix}$$

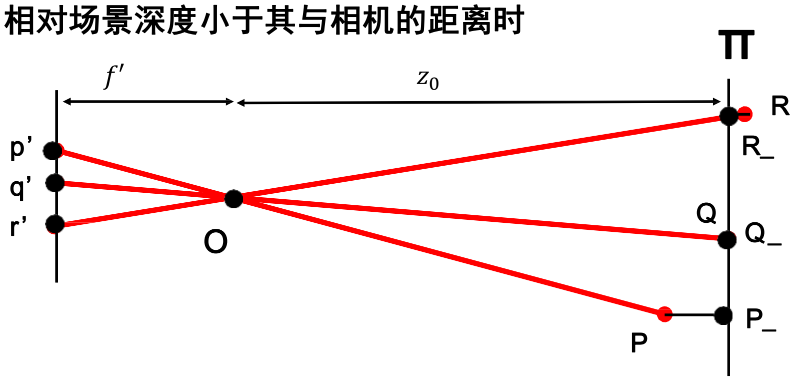
$$= \begin{bmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{bmatrix}P_w = \begin{bmatrix}m_1P_w\\m_2P_w\\m_3P_w\end{bmatrix} \xrightarrow{E} \left(\frac{m_1P_w}{m_3P_w}, \frac{m_2P_w}{m_3P_w}\right)$$

透视投影摄像机

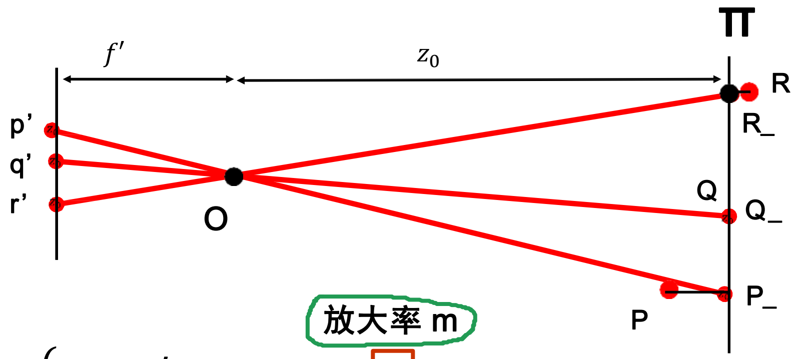


弱透视投影摄像机

当相对场景深度小于其与相机的距离时



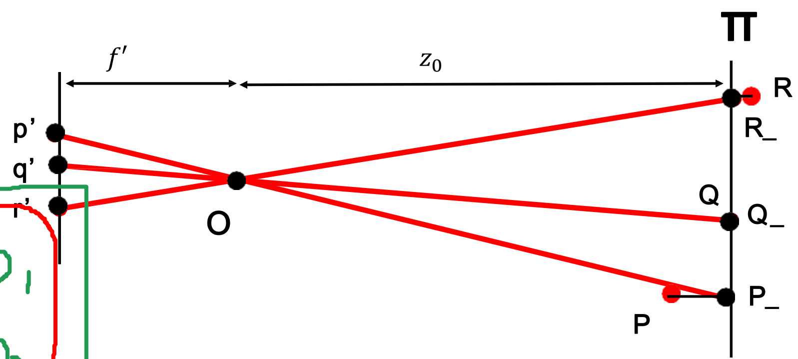
弱透视投影摄像机



放大率 m

$$\begin{cases} x' = \dfrac{f'}{z}x \\ y' = \dfrac{f'}{z}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \boxed{\dfrac{f'}{z_0}}x \\ y' = \dfrac{f'}{z_0}y \end{cases}$$

弱透视投影摄像机



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{bmatrix}$$

投影（透视） 弱透视

$$M = K[R \quad T] = \begin{bmatrix} A_{2\times3} & b_{2\times1} \\ v_{1\times2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$m_3 = [0, 0, 0, 1]$

弱透视与透视投影摄像机

$$P' = MP_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w = \begin{bmatrix} m_1 P_w \\ m_2 P_w \\ m_3 P_w \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{E}} \left(\frac{m_1 P_w}{m_3 P_w}, \frac{m_2 P_w}{m_3 P_w}\right)$$

透视

实体基本上在一个平面上

$$P' = MP_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w = \begin{bmatrix} m_1 P_w \\ m_2 P_w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & m_1 & & \\ & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{E}} (m_1 P_w, m_2 P_w)$$

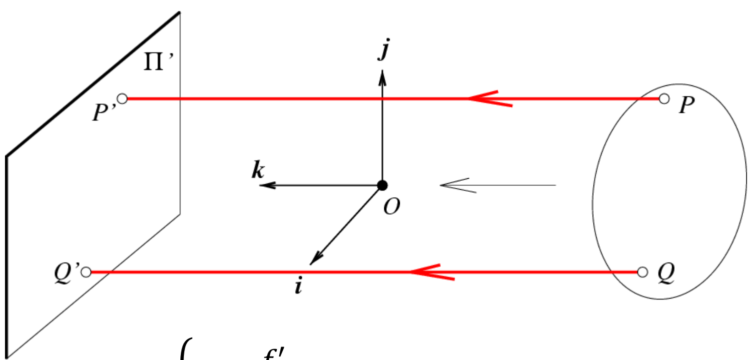
放 大 率

参数更少，描述起来更加简单

弱透视

正交投影摄像机

摄像机中心到像平面的距离无限远时



$$\begin{cases} x' = \dfrac{f'}{z} x \\ y' = \dfrac{f'}{z} y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

各种摄像机模型的应用场合

- 正交投影
  - 更多应用在建筑设计(AUTOCAD) 或者工业设计行业
- 弱透视投影在数学方面更简单
  - 当物体较小且较远时准确，常用于图像识别任务
- 透视投影对于3D到2D映射的建模更为准确
  - 用于运动恢复结构或SLAM

摄像机几何

- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型