摄像机标定

Lu Peng
School of Computer Science,
Beijing University of Posts and Telecommunications

Machine Vision Technology							
Semantic information				**Metric 3D information**			
Pixels	Segments	Images	Videos	Camera		Multi-view Geometry	
Convolutions Edges & Fitting Local features Texture	Segmentation Clustering	Recognition Detection	Motion Tracking	Camera Model	Camera Calibration	Epipolar Geometry	SFM
10	4	4	2	2	2	2	2

摄像机标定

- 针孔模型 & 透镜摄像机标定问题

- 径向畸变的摄像机标定

摄像机标定

- 针孔模型 & 透镜摄像机标定问题

- 径向畸变的摄像机标定

为什么重要？

摄像机标定，即求解摄像机内外参数
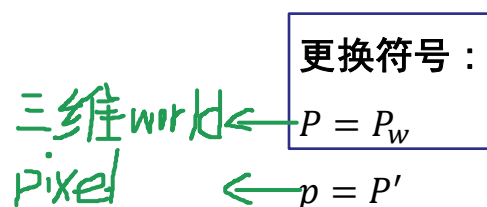

Source: Silvio Savarese

摄像机内、外参数描述了三维世界到二维像素的映射关系

Source: Silvio Savarese
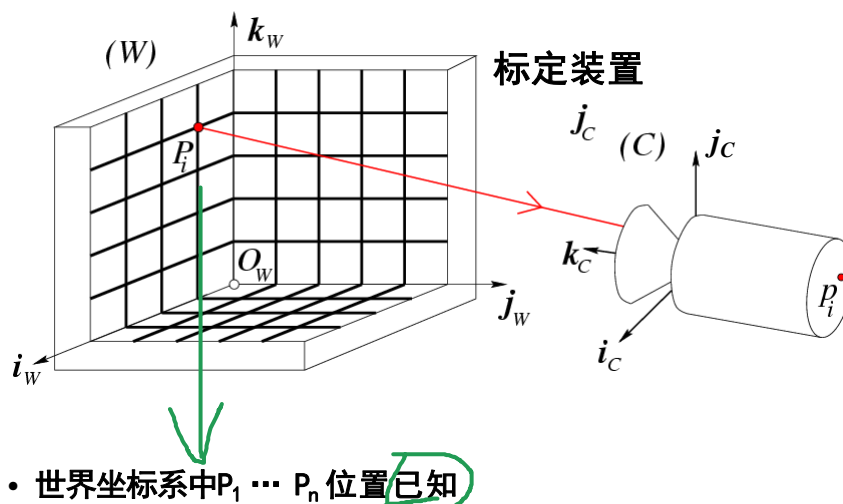
标定目标

$$P' = MP_w = \boxed{K}\,\boxed{[R\ T]}\,P_w$$

内参数

外参数

目标：从1张或多张图像中估算内外参数

更换符号：

三维world ← $P = P_w$

pixel ← $p = P'$
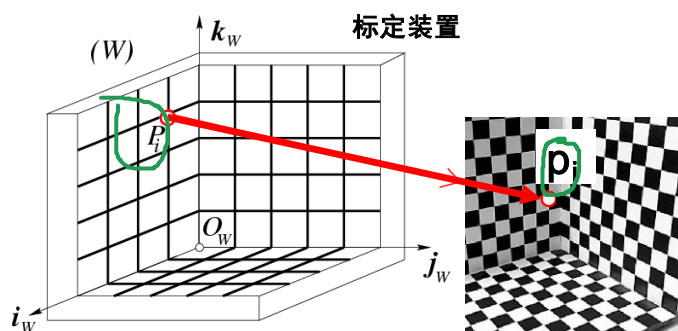
标定问题

标定装置

- 世界坐标系中 $P_1 \cdots P_n$ 位置已知
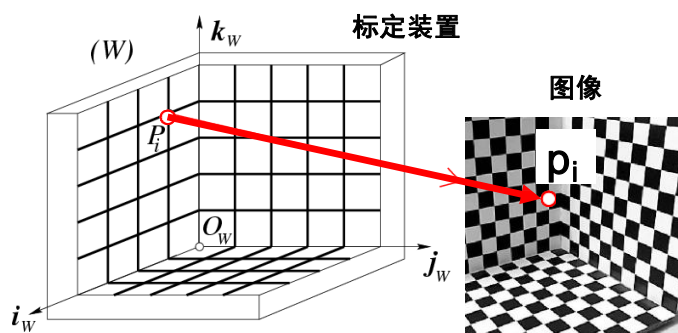
标定问题

标定装置

- 世界坐标系中 $P_1 \cdots P_n$ 位置已知 ✓
- 图像中 $p_1 \cdots p_n$ 位置已知 ✓

目标：计算摄像机内、外参数

标定问题

标定装置

图像

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \dfrac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix}$$

像素

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

问题：摄像机投影矩阵有几个未知量？

$$\underline{p_i} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \dfrac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$
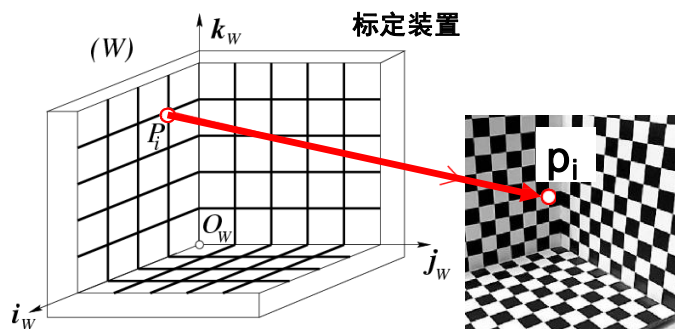
像素

未知

问题：求解投影矩阵需要多少对应点？

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \dfrac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

像素

标定问题

实际操作中使用多于六对点来获得更加鲁棒的结果。

标定问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \dfrac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix}$$

11

$$u_i = \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \rightarrow u_i(m_3 P_i) = m_1 P_i \rightarrow u_i(m_3 P_i) - m_1 P_i = 0$$

$$v_i = \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \rightarrow v_i(m_3 P_i) = m_2 P_i \rightarrow v_i(m_3 P_i) - m_2 P_i = 0$$

1x4 4x1

标定问题 $M = K [R \ T]$

$$\begin{cases} u_1(m_3 P_1) - m_1 P_1 = 0 \\ v_1(m_3 P_1) - m_2 P_1 = 0 \\ \qquad \vdots \\ u_i(m_3 P_i) - m_1 P_i = 0 \\ v_i(m_3 P_i) - m_2 P_i = 0 \\ \qquad \vdots \\ u_n(m_3 P_n) - m_1 P_n = 0 \\ v_n(m_3 P_n) - m_2 P_n = 0 \end{cases}$$

标定问题

已知
未知

$$\begin{cases} -u_1(m_3 P_1) + m_1 P_1 = 0 \\ -v_1(m_3 P_1) + m_2 P_1 = 0 \\ \qquad \vdots \\ -u_n(m_3 P_n) + m_1 P_n = 0 \\ -v_n(m_3 P_n) + m_2 P_n = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\boxed{P} \ \boxed{m = 0}$$

齐次线性方程组

1×4

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} P_1{}^T & 0^T & -u_1 P_1{}^T \\ 0^T & P_1{}^T & -v_1 P_1{}^T \\ & \vdots & \\ P_n{}^T & 0^T & -u_n P_n{}^T \\ 0^T & P_n{}^T & -v_n P_n{}^T \end{pmatrix}_{2n \times 12}$$

4×1

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} m_1{}^T \\ m_2{}^T \\ m_3{}^T \end{pmatrix}_{12 \times 1}$$

齐次线性方程组

$M =$ **方程数** $= 2n$
$N =$ **未知参数** $= 11$

当$M > N$时，超定方程组（**不少于6对点**）

- 0 总是一个解，不存在非零解
- 目标：求非零解 $\min_{m}\|Pm\|$ $\min_{m}\|Pm\|$

约束 $s.t.\|m\|=1$

标定问题

超定

$$P\,m = 0 \iff \begin{array}{l} \min_{m}\|Pm\| \\ s.t.\|m\|=1 \end{array}$$

标定问题

$$P\,m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \min_{m}\|Pm\|$$

$$s.t.\,\|m\|=1$$

奇异值分解！！！

标定问题

$$\boxed{P}\,m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \min_{m}\|Pm\|$$

$$s.t.\,\|m\|=1$$

奇异值分解！！！

$$\boxed{U_{2n\times12}D_{12\times12}V_{12\times12}^{T}}$$

标定问题

$$\boxed{P}\, m = 0 \iff \begin{array}{c} \min_{m} \|Pm\| \\ s.t.\,\|m\|=1 \end{array}$$

奇异值分解！！！ ⇐

$$\boxed{U_{2n\times12} D_{12\times12} V_{12\times12}^T}$$

结论： m为P矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|m\| = 1$

$$m \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} m_1{}^T \\ m_2{}^T \\ m_3{}^T \end{pmatrix} \implies M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = [A\ b]$$

提取摄像机参数

$$P' = M P_w = \boxed{K}\,\boxed{[R\ T]}\,P_w$$

内参数   外参数

$$M = \begin{pmatrix} \alpha r_1{}^T - \alpha cot\theta r_2{}^T + u_0 r_3{}^T & \alpha t_x - \alpha cot\theta t_y + u_0 t_z \\ \dfrac{\beta}{sin\theta} r_2{}^T + v_0 r_3{}^T & \dfrac{\beta}{sin\theta} t_y + v_0 t_z \\ r_3{}^T & t_z \end{pmatrix}_{3\times4}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

提取摄像机参数

求解得到的 M

$$\rho[A\ b] = K[R\ \mathrm{T}]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1{}^T - \alpha cot\theta r_2{}^T + u_0 r_3{}^T \\ \dfrac{\beta}{sin\theta} r_2{}^T + v_0 r_3{}^T \\ r_3{}^T \end{pmatrix} = KR$$

$K[R\ \mathrm{T}]$

$$= \begin{pmatrix} \alpha r_1{}^T - \alpha cot\theta r_2{}^T + u_0 r_3{}^T & \alpha t_x - \alpha cot\theta t_y + u_0 t_z \\ \dfrac{\beta}{sin\theta} r_2{}^T + v_0 r_3{}^T & \dfrac{\beta}{sin\theta} t_y + v_0 t_z \\ r_3{}^T & t_z \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

提取摄像机参数

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1{}^T - \alpha cot\theta r_2{}^T + u_0 r_3{}^T \\ \dfrac{\beta}{sin\theta} r_2{}^T + v_0 r_3{}^T \\ r_3{}^T \end{pmatrix} = KR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

内参数

$$\rho = \frac{\pm 1}{|a_3|} \qquad u_0 = \rho^2(a_1 \cdot a_3)$$
$$v_0 = \rho^2(a_2 \cdot a_3)$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

提取摄像机参数

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1{}^T - \alpha cot\theta r_2{}^T + u_0 r_3{}^T \\ \dfrac{\beta}{sin\theta} r_2{}^T + v_0 r_3{}^T \\ r_3{}^T \end{pmatrix} = KR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho^2 (a_1 \times a_3) = \alpha r_2 - \alpha cot\theta r_1 \\ \rho^2 (a_2 \times a_3) = \dfrac{\beta}{sin\theta} r_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2 |a_1 \times a_3| = \dfrac{|\alpha|}{sin\theta} \\ \rho^2 |a_2 \times a_3| = \dfrac{|\beta|}{sin\theta} \end{cases}$$

内参数

$$cos\theta = -\frac{(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3)}{|a_1 \times a_3| \cdot |a_2 \times a_3|}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

定理（Faugeras，1993）

$$M = K[\, R\ T\,] = [KR\ KT] = [A\ b] \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

令 $M = (A \quad b)$ 为3×4的矩阵，$a_i^T (i = 1,2,3)$ 表示由矩阵 A 的行

- M 是透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- M 是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且
$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$
- M 是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且
$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

提取摄像机参数

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1{}^T - \alpha cot\theta r_2{}^T + u_0 r_3{}^T \\ \dfrac{\beta}{sin\theta} r_2{}^T + v_0 r_3{}^T \\ r_3{}^T \end{pmatrix} = KR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho^2 (a_1 \times a_3) = \alpha r_2 - \alpha cot\theta r_1 \\ \rho^2 (a_2 \times a_3) = \dfrac{\beta}{sin\theta} r_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 |a_1 \times a_3| = \dfrac{|\alpha|}{sin\theta} \\ \rho^2 |a_2 \times a_3| = \dfrac{|\beta|}{sin\theta} \end{cases}$$

内参数

$$\alpha = \rho^2 |a_1 \times a_3| sin\theta$$

$$\boldsymbol{\beta} = \rho^2 |a_2 \times a_3| sin\theta$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

定理（Faugeras，1993）

$$M = K[\ R\ T\ ] = [KR\ KT] = [A\ b] \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

令 $M = (A \quad b)$ 为3×4的矩阵，$a_i^T (i = 1,2,3)$ 表示由矩阵 A 的行

- M是透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- M是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$

- M是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

提取摄像机参数

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1{}^T - \alpha cot\theta r_2{}^T + u_0 r_3{}^T \\ \dfrac{\beta}{sin\theta} r_2{}^T + v_0 r_3{}^T \\ r_3{}^T \end{pmatrix} = KR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho^2 (a_1 \times a_3) = \alpha r_2 - \alpha cot\theta r_1 \\ \rho^2 (a_2 \times a_3) = \dfrac{\beta}{sin\theta} r_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^2 |a_1 \times a_3| = \dfrac{|\alpha|}{sin\theta} \\ \rho^2 |a_2 \times a_3| = \dfrac{|\beta|}{sin\theta} \end{cases}$$

外参数

$$r_1 = \frac{(a_2 \times a_3)}{|a_2 \times a_3|} \quad r_3 = \frac{\pm a_3}{|a_3|}$$

$$r_2 = r_3 \times r_1$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

提取摄像机参数

求解得到的 M

$$\rho [A \; b] = K[R \; \mathrm{T}]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

外参数

$$T = \rho K^{-1} b$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

提取摄像机参数

求解得到的M

$$\rho\,[A\ b] = K[R\ \text{T}]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1{}^T \\ a_2{}^T \\ a_3{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1{}^T \\ r_2{}^T \\ r_3{}^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$
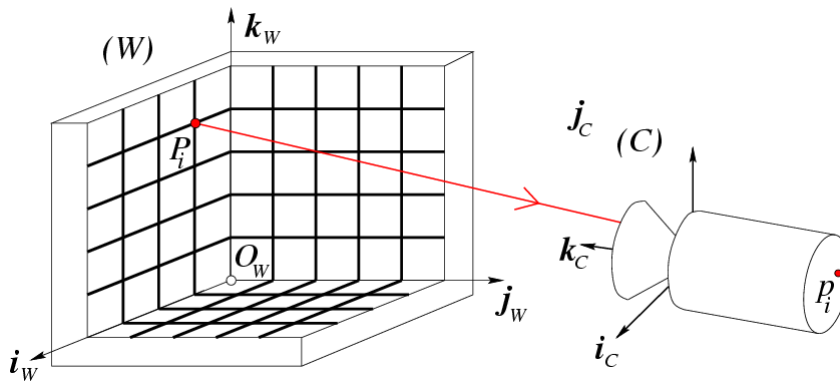
内参数

$$\rho = \frac{\pm 1}{|a_3|} \qquad u_0 = \rho^2(a_1 \cdot a_3)$$
$$v_0 = \rho^2(a_2 \cdot a_3)$$

$$cos\theta = -\frac{(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3)}{|a_1 \times a_3| \cdot |a_2 \times a_3|}$$

$$\alpha = \rho^2 |a_1 \times a_3| sin\theta$$

$$\beta = \rho^2 |a_2 \times a_3| sin\theta$$

外参数

$$r_1 = \frac{(a_2 \times a_3)}{|a_2 \times a_3|}$$

$$r_3 = \frac{\pm a_3}{|a_3|}$$

$$r_2 = r_3 \times r_1$$

$$T = \rho K^{-1} b$$

退化示例

- $P_i(i = 1, \cdots, n)$**不能位于同一平面!!!**

摄像机标定

- 针孔模型 & 透镜摄像机标定问题

- **径向畸变的摄像机标定**

透镜问题：径向畸变

- **径向畸变**:图像像素点以畸变中心为中心点,沿着径向产生的位置偏差,从而导致图像中所成的像发生形变

没有畸变

枕形
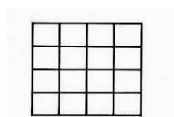
畸变像点相对于理想像点沿径向向外偏移,远离中心

桶形

畸变像点相对于理想点沿径向向中心靠拢

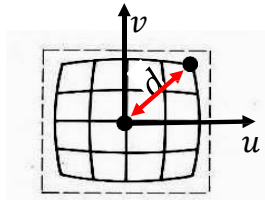**产生原因**：光线在远离透镜中心的地方比靠近中心的地方更加弯曲

Source: Silvio Savarese

径向畸变

图像放大率随距光轴距离的增加而减小

如何建模？

$$S_\lambda$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} MP_i \to \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i$$

畸变因子

$$\lambda = 1 \pm \underbrace{\sum_{p=1}^{3} \boxed{K_p} d^{2p}}_{\text{多项式函数}}$$

$$d^2 = u^2 + v^2$$

建模径向特性

径向畸变

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} MP_i \to \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$Q$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \dfrac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

径向畸变

$$Q$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M P_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i \qquad\qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \dfrac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

问题：这是线性方程组吗？

径向畸变

$$Q$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M P_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i \qquad\qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \dfrac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

问题：这是线性方程组吗？

不是！

标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \dfrac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad X = f(Q)$$

测量值   参数

$i = 1 \dots n$ $f(\ )$ 为非线性映射

标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \dfrac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad X = f(Q)$$

测量值   参数

$i = 1 \dots n$ $f(\ )$ 为非线性映射

– **牛顿法** 与 **列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）**

- 从初始解开始迭代
- 若初始解与实际相距较远，可能会很慢
- 估计解可能是初始解的函数（由于局部最小值）
- 牛顿法需要计算一阶导矩阵J（雅可比矩阵），二阶导矩阵H（海塞矩阵）
- L-M算法不用计算H

标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \dfrac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \qquad\longrightarrow\qquad X = f(Q)$$

测量值　　　参数

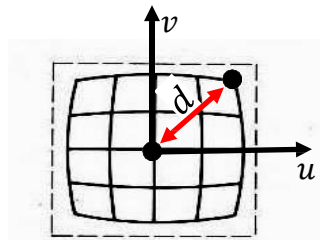$$i = 1 \dots n \qquad\qquad f(\ ) \text{ 为非线性映射}$$

一种可能算法

1. **求解系统的线性部分**以找到近似解

2. **使用该解作为整个系统的初始条件**

3. **使用牛顿法或 L-M 算法求解整个系统**

求解线性部分

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \dfrac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} \dfrac{m_1 p_i}{m_3 p_i} \\ \dfrac{m_2 p_i}{m_3 p_i} \end{bmatrix}$$

我们能估计出 m_1 和 m_2 并忽视径向畸变吗?

求解线性部分

估计 m_1 和 m_2 $\cdots$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 p_i}{m_3 p_i} \\ \dfrac{m_2 p_i}{m_3 p_i} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{u_i}{v_i} = \frac{\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{(m_1 P_i)}{(m_3 p_i)}}{\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{(m_2 p_i)}{(m_3 p_i)}} = \frac{m_1 p_i}{m_2 p_i}$$

$$\begin{cases} v_1(m_1 P_1) - u_1(m_2 P_1) = 0 \\ v_i(m_1 P_i) - u_i(m_2 P_i) = 0 \\ \quad\quad\quad \vdots \\ v_n(m_1 P_n) - u_n(m_2 P_n) = 0 \end{cases} \qquad L\,\boldsymbol{n} = 0 \qquad L \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 p_1{}^T & -u_1 p_1{}^T \\ v_2 p_2{}^T & -u_2 p_2{}^T \\ \vdots & \vdots \\ v_n p_n{}^T & -u_n p_n{}^T \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

通过SVD求得 $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} m_1{}^T \\ m_2{}^T \end{bmatrix}$

求解线性部分

一旦估计出 m_1 和 m_2 $\cdots$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 p_i}{m_3 p_i} \\ \dfrac{m_2 p_i}{m_3 p_i} \end{bmatrix}$$

m_3 是关于 m_1，m_2，λ 的非线性函数

-牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

摄像机标定

- 针孔模型 & 透镜摄像机标定问题（完）

- 径向畸变的摄像机标定(完）