

# Didaktik der Algebra Blatt 5 Übung C

## Aufgabe 2a

Der Trail fördert algebraische Kompetenzen durch authentische Anwendungssituationen:

### Starke Algebra-Potenziale:

- Fibonacci-Aufgaben (Treppenstufen) für funktionales Denken und Rekursion
- Wahrscheinlichkeitsberechnungen (Packstation) für Variablenkonzept
- Pythagoras und Trigonometrie für algebraische Geometrie

### Grundlegende Förderung:

- Proportionales Denken (Maßstäbe, Schuhgrößen)
- Flächen- und Volumenberechnungen als Vorstufe zu Termumformungen

### Besondere Stärken:

- Natürlicher Übergang von konkreten Werten zu allgemeinen Formeln
- Implizite Vermittlung algebraischer Denkweisen
- Lebensweltbezug als Motivation für Abstraktion

Durch gezielte Reflexion der Lösungswege kann das vorhandene Potenzial voll ausgeschöpft werden, um variables Denken, funktionale Zusammenhänge und Modellierungskompetenz nachhaltig zu fördern.

## Aufgabe „Treppenstufen“

### Aufgabenstellung:

„Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Treppe vor dem Institut mit Schrittlängen von einer oder zwei Stufen zu erklimmen? Es können die Schrittlängen auch gemischt werden.“

### Lösung:

13

### Algebraische Förderaspekte:

Die Aufgabe regt dazu an, ein konkretes Problem (das Besteigen einer Treppe) in ein mathematisches Modell zu überführen. Durch das Untersuchen kleiner Fallbeispiele (z. B. für 3 oder 4 Stufen) erkennen die Lernenden ein Muster, das zur Fibonacci-Folge führt. Dies fördert die Fähigkeit, Strukturen zu identifizieren und in eine allgemeine Formel zu übersetzen:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten wird als Funktion der Stufenanzahl  $n$  betrachtet. Die Lernenden analysieren rekursive und explizite Darstellungen und setzen sich mit Wachstumsprozessen auseinander. Dies stärkt das Verständnis funktionaler Zusammenhänge. Die Verwendung von  $n$  als Variable für die Stufenanzahl unterstützt das Verständnis von

Platzhaltern in mathematischen Ausdrücken. Die Lernenden erkennen, dass die gefundene Gesetzmäßigkeit für beliebige Stufenanzahlen gilt.

## Aufgabe „Packstation im Westend“

### Aufgabenstellung:

„Du sollst zwei Pakete für den Chef abholen. Du weißt nicht, wie groß sie sind. Du rätst hinter welchen der gelben Fächer sie liegen könnten (In jedem Fach kann nur ein Paket liegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Pakete auch wirklich hinter den von Dir getippten Fächern liegen?“

### Lösungen:

$$\frac{1}{11175} \text{ und } < 0,01\%$$

### Algebraische Förderaspekte:

Die Aufgabe erfordert die Berechnung aller möglichen und günstigen Anordnungen der Pakete. Die Lernenden nutzen kombinatorische Überlegungen und gelangen zur Formel:

$$P = \frac{2}{n \cdot (n - 1)}$$

Dabei steht  $n$  für die Anzahl der Fächer. Dies fördert den Umgang mit Variablen und Termumformungen.

Die Schülerinnen und Schüler modellieren eine reale Situation mithilfe von Wahrscheinlichkeitstheorie und Algebra. Sie analysieren die Problemstellung, definieren Variablen und leiten eine allgemeine Formel her. Dieser Prozess stärkt die Fähigkeit, reale Probleme mathematisch zu durchdringen.

Indem die Aufgabe mit variierenden Parametern (z. B. mehr Pakete oder Fächer) betrachtet wird, können die Lernenden die gefundene Formel erweitern. Dies fördert das Verständnis für die Allgemeingültigkeit algebraischer Aussagen.

## Aufgabe 2b

### Aufgabe „Treppenstufen“

#### Standardlösungsweg: Fibonacci-Folge

- **Ansatz:**  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  mit  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$
- **Rechnung:**  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 5$ ,  $a_5 = 8$ ,  $a_6 = 13$
- **Benötigtes Vorwissen:** Rekursionsprinzip, Mustererkennung
- **Klassenstufenzuordnung:** Klasse 8-11

#### Alternativer Lösungsweg: Kombinatorische Zählung

- **Ansatz:** Anzahl der 2er-Schritte variieren
- **Rechnung:**
  - 0 Zweier: 1,1,1,1,1,1  $\rightarrow$  1 Möglichkeit
  - 1 Zweier: 2,1,1,1,1  $\rightarrow$  5 über 1 = 5 Möglichkeiten

- 2 Zweier:  $2,2,1,1 \rightarrow 4$  über 2 = 6 Möglichkeiten
- 3 Zweier:  $2,2,2 \rightarrow 1$  Möglichkeit
- **Summe:**  $1 + 5 + 6 + 1 = 13$
- **Benötigtes Vorwissen:** Kombinatorik, Binomialkoeffizient
- **Klassenstufenzuordnung:** Klasse 11-13

### Aufgabe „Packstation im Westend“

#### Standardlösungsweg: Kombinatorik über Anordnungen

- **Ansatz:** Günstige durch mögliche Fälle
- **Rechnung:**
  - Mögliche Anordnungen:  $150 \times 149 = 22.350$
  - Günstige Anordnungen: 2 (beide Pakete in getippten Fächern)
  - **Ergebnis:**  $P = 2/22350 = 1/11175$
- **Benötigtes Vorwissen:** Permutationen ohne Wiederholung
- **Klassenstufenzuordnung:** Klasse 12-13

#### Alternativer Lösungsweg: Pfadregel

- **Ansatz:**  $P = (2/150) \times (1/149) = 2/22350 = 1/11175$
- **Benötigtes Vorwissen:** Baumdiagramm, multiplikative Verknüpfung
- **Klassenstufenzuordnung:** Klasse 7-12