Zadanie numeryczne 4

Mikołaj Płaszczyca

20 listopada 2022

1 Rozwiązywanie równań z pomocą wzoru Shermana-Morrisona

1.1 Wzór Shermana-Morrisona

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

1.2 Rozwiązywanie równań

$\mathbf{(A+uv^T)y=b}$
$\mathbf{y=(A+uv^T)^{-1}b=A^{-1}b-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}b}{1+v^TA^{-1}u}=z-\frac{xv^tz}{1+v^tx}}$
dla $\mathbf{z=A^{-1}b}$ i $\mathbf{x=A^{-1}u}$

Aby w łatwy sposób obliczyć y wystarczy rozwiązać dwa równania:
$$\begin{cases}\mathbf{Az=b}\\ \mathbf{Ax=u}\end{cases}$$
i podstawić x i z do wzoru. Budowa macierzy umożliwia nam rozwiązanie tych równan w czasie $O(n)$, za pomocą backward substitution.

2 Rozwiązanie

2.1 Zapis macierzy

Macierz

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 10 & 8 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 10 & 8 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 10 & 8 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 10 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

możemy zapisać jako:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 7 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 9 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 9 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\\cdots\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\cdots\\1\\1\\1\end{pmatrix}^T$$

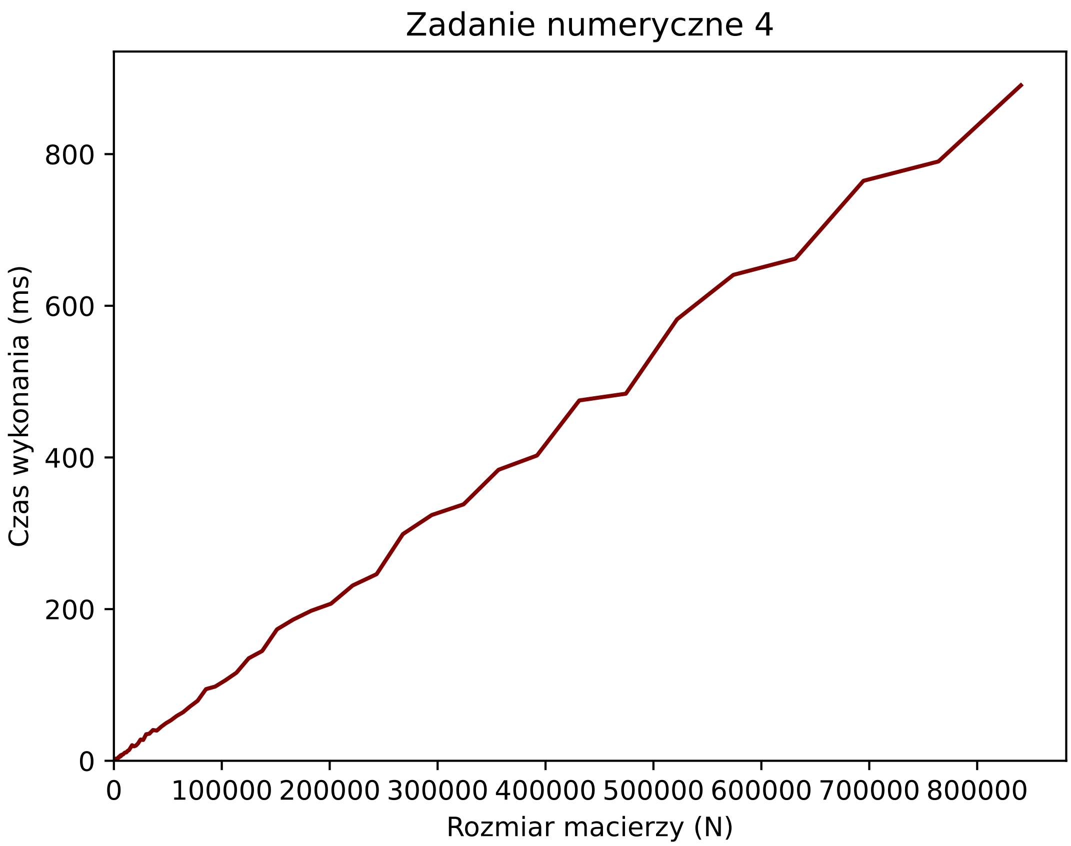
i podstawić pod wzór Shermana Morrisona.

2.2 Zaimplementowane funkcje

Backward substitution - $O(n)$
Mnożenie wektorów - $O(n)$
Mnożenie wektora przez stałą - $O(n)$
Odejmowanie wektorów - $O(n)$

2.3 Złożoność obliczeniowa

Dzięki specyficznej budowie tej macierzy gęstej, złożonośc obliczeniowa każdej z tych operacji wynosi $O(n)$.



3 Wnioski

W pewnych przypadkach, dobierajac odpowiedni sposób rozwiązania jesteśmy w stanie znacznie zmniejszyć złożoność obliczeniową rozwiązywania równan liniowych. W tym przypadku z $O(N^3)$ do $O(N)$

4 Wynik równania Ay = b

$$
y=\begin{pmatrix}
0.07525844089350037 \\
0.07525904117533852 \\
0.07525826938440369 \\
0.07525926168703423 \\
0.07525798586936636 \\
0.07525962620636797 \\
0.07525751720165161 \\
0.07526022877914401 \\
0.07525674246522518 \\
0.07526122486883524 \\
0.07525546177847939 \\
0.07526287146607977 \\
0.07525334472487927 \\
0.07526559339213704 \\
0.07524984510566277 \\
0.07527009290255826 \\
0.07524406002083556 \\
0.07527753086876468 \\
0.0752344969214272 \\
0.07528982628228972 \\
0.07521868853260927 \\
0.07531015135362709 \\
0.07519255629803279 \\
0.07534374994093965 \\
0.07514935811434514 \\
0.07539929046282379 \\
0.07507794887192268 \\
0.07549110234593842 \\
0.07495990502220382 \\
0.07564287300986267 \\
0.07476477131144413 \\
0.0758937592094108 \\
0.07444220334059656 \\
0.07630848945764337 \\
0.07390897873572605 \\
0.07699406394961972 \\
0.07302752581747077 \\
0.0781273605588052 \\
0.07157043017708939 \\
0.08000076923929544 \\
0.0691617618736019 \\
0.08309762848663654 \\
0.06518008569844908 \\
0.08821692642611872 \\
0.058598131204829124 \\
0.09667943934648726 \\
0.04771775745006959 \\
0.11066849131689238 \\
0.029731833488120224 \\
0.13379325069654147
\end{pmatrix}
$$