Zadanie numeryczne 3

Mikołaj Płaszczyca

9 listopada 2022

1 Sposób zapisu macierzy

Mamy do czynienia z macierzą wstęgową (z 4 wstęgami), więc wygodnie będzie nam ją zapisać w macierzy 4xN w następujący sposób:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2, 0.2, [...], 0.2, 0.2, 0 \\ 1.2, 1.2, [...], 1.2, 1.2, 1.2 \\ \frac{0.1}{1}, \frac{0.1}{2}, [...], \frac{0.1}{N-2}, \frac{0.1}{N-1}, 0 \\ \frac{0.4}{1^2}, \frac{0.4}{2^2}, [...], \frac{0.4}{(N-2)^2}, 0, 0 \end{pmatrix}$$

Niektóre wstęgi będą krótsze niż reszta, więc przyjmuje konwencje wedle której 0 będą symbolizowały, że wstęga już sie skończyła i nie przyujmuje w tym miejscu wartości.

2 Faktoryzacja LU

2.1 Uproszczone wzory

Zwracając uwage na budowę macierzy można zauważyć, że umożliwia nam ona znaczne uproszczenie wzorów używanych podczas faktoryzacji LU. Przedstawiają sie one nastepująco:

$A_{1,i} = A_{1,i} - A_{0,i-1} * A_{2,i-1}$
$A_{2,i} = A_{2,i} - A_{0,i-1} * A_{3,i-1}$
$A_{0,i} = \frac{A_{0,i}}{A_{1,i}}$
$A_{3,i} = A_{3,i}$

(A_0 to wiersz macierzy przechowujący pierwszą diagonale, A_1 drugą itd.)
Dodatkowo nie potrzebujemy rezerwować dodatkowej pamięci, ponieważ przekształcenia możemy wykonać w macierzy A.

Wybieramy te metode z wymienionego wyżej powodu, oraz dlatego, że umożliwi nam osiągniecię złożoności liniowej.

3 Wyznacznik macierzy

3.1 Wzór

Wyznacznik macierzy A jest równy iloczynowi wyznaczników L i U. Jako, że obie macierze są trójkątnie dolne lub górne ich wyznaczniki są równe iloczynowi diagonali. W związku z budową macierzy L jej wyznacznik zawsze będzie równy 1.

$det(A) = det(L) * det(U) = det(U)$

3.2 Wynik

W przypadku, który analizujemy w zadaniu czyli N = 100, wyznacznik wynosi: 78240161.00959387.

4 Rozwiązanie równania

Równanie Ay = x, po faktoryzacji LU, możemy rozbić na układ dwóch równań:

$$\begin{cases} L * z = x \\ U * y = z \end{cases}$$

Najpierw wyliczając z, a potem y.
Wektor z wyliczymy za pomocą Forward Substitution, a wektor y za pomocą Backward Substitution

4.1 Uproszczone Forward Substitution

Analizując strukture macierzy L otrzymujemy wzór:

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_i = x_i - (A_{0,i-1} * z_{i-1}) \text{ dla } i > 0 \end{cases}$$

4.2 Uproszczone Backward Substitution

Analizując strukture macierzy U otrzymujemy wzór:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{z_{N-1}}{A_{1,N-1}} \\ y_1 = \frac{(z_{N-2} - A_{2,N-2} * y_0)}{A_{1,N-2}} \\ y_i = \frac{z_i - (A_{3,i} * y_j) - (A_{2,i} * y_{j+1})}{A_{1,i}} \text{ dla } i > 1 \text{ zaczynając od } i = N-3 \end{cases}$$

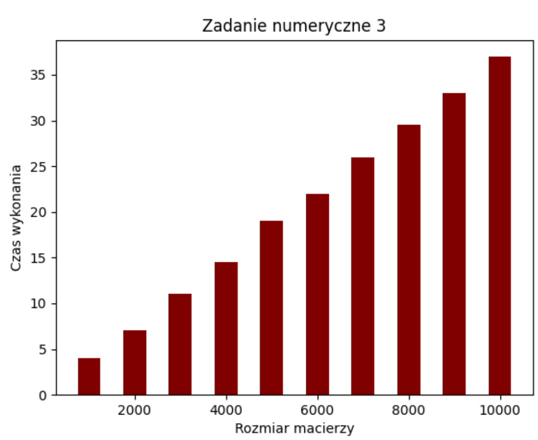
$j = 0$ dla $i = N - 3$,
następnie zwiększa się o 1 dla kazdego nastepnego elementu
Po obliczeniach należy wykonać odwrócenie tablicy, używając np. metody reverse() ($O(n)$).

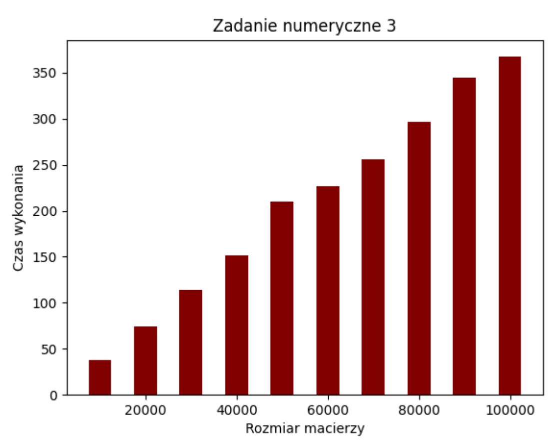
5 Analiza złożoności obliczeniowej i pamięciowej

5.1 Złożoność obliczeniowa

Stworzenie macierzy - $O(n)$
Uproszczona faktoryzacja LU - $O(n)$
Liczenie wyznacznika - $O(n)$
Uproszczone Forward Substitution - $O(n)$
Uproszczone Backward Substitution - $O(n)$

Udało nam się osiągnąc złożoność liniową.





Dwa razy większy rozmiar macierzy przekłada się na dwa razy większy czas potrzebny na obliczenia.

5.2 Pamieć

Macierz A - o rozmiarze 4xN
Wektor X - o rozmiarze N
Wektor Z - o rozmiarze N
Wektor Y - o rozmiarze N

Ilośc potrzebnej pamięci także rośnie liniowo.