Dimensione di Hausdorff e Insiemi di Furstenberg

Tesi di Laurea Triennale

Andrea Rossi

Università di Pisa

30 settembre 2011

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Indice.

- Presenteremo le definizioni classiche di:
  - Misure di Hausdorff.
  - Dimensione di Hausdorff.
  - Insieme di Furstenberg.
- Estenderemo in modo opportuno il concetto di misure di Hausdorff.
- Mostreremo un insieme *a-dimensionale* rispetto a queste misure di Hausdorff estese.
- Definiremo gli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Enunceremo due teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati.
- Come corollario otterremo un risultato importante per quanto riguarda la dimensione di un insieme di Furstenberg classico.

university-logo

Misure esterne di Hausdorff H_p^*.

Definizione

Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$, il *diametro* di E è il numero non negativo (eventualmente infinito)

$$diam\ E = \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \sup\{|x-y| : x, y \in E\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$, e siano p, $\delta \geqslant 0$. Definiamo

$$H_{p,\delta}^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (diam\ U_n)^p : U_n \text{ aperti}, \ diam\ U_n < \delta, \ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right\}.$$

Sia $p > 0$, la *misura esterna p-dimensionale di Hausdorff* H_p^* è data da

$$H_p^*(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H_{p,\delta}^*(E) = \sup_{\delta>0} H_{p,\delta}^*(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Misure esterne di Hausdorff H_p^*.

Definizione

Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$, il *diametro* di E è il numero non negativo (eventualmente infinito)

$$diam\ E = \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \sup\{|x-y| : x, y \in E\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$, e siano p, $\delta \geqslant 0$. Definiamo

$$H_{p,\delta}^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (diam\ U_n)^p : U_n \text{ aperti, } diam\ U_n < \delta,\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right\}.$$

Sia $p > 0$, la *misura esterna p-dimensionale di Hausdorff* H_p^* è data da

$$H_p^*(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H_{p,\delta}^*(E) = \sup_{\delta>0} H_{p,\delta}^*(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Misure esterne di Hausdorff H_p^*.

Definizione

Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$, il *diametro* di E è il numero non negativo (eventualmente infinito)

$$\mathit{diam}\ E = \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \sup\left\{|x-y| : x, y \in E\right\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$, e siano p, $\delta \geqslant 0$. Definiamo

$$H_{p,\delta}^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathit{diam}\ U_n)^p : U_n \text{ aperti, } \mathit{diam}\ U_n < \delta,\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right\}.$$

Sia $p > 0$, la *misura esterna p-dimensionale di Hausdorff* H_p^* è data da

$$H_p^*(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H_{p,\delta}^*(E) = \sup_{\delta>0} H_{p,\delta}^*(E) \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Proprietà delle misure esterne H_p^*.

Proposizione

Sia $p > 0$, allora:

1. $H_p^*(E) \geqslant 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
2. $H_p^*(\emptyset) = H_p^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$;
3. H_p^* *è monotona e numerabilmente subadditiva;*
4. $H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
5. $H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \qquad \forall t > 0, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$.

university-logo

Proprietà delle misure esterne H_p^*.

Proposizione

Sia $p > 0$, allora:

1. $H_p^*(E) \geqslant 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
2. $H_p^*(\emptyset) = H_p^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$;
3. H_p^* *è monotona e numerabilmente subadditiva;*
4. $H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
5. $H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \qquad \forall t > 0, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$.

university-logo

Proprietà delle misure esterne H_p^*.

Proposizione

Sia $p > 0$, allora:

1. $H_p^*(E) \geqslant 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N;$
2. $H_p^*(\emptyset) = H_p^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N;$
3. H_p^* *è monotona e numerabilmente subadditiva;*
4. $H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N;$
5. $H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \qquad \forall t > 0, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$

university-logo

Proprietà delle misure esterne H_p^*.

Proposizione

Sia $p > 0$, allora:

1. $H_p^*(E) \geqslant 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
2. $H_p^*(\emptyset) = H_p^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$;
3. H_p^* *è monotona e numerabilmente subadditiva;*
4. $H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
5. $H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \qquad \forall t > 0, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$.

university-logo

Proprietà delle misure esterne H_p^*.

Proposizione

Sia $p > 0$, *allora:*

1. $H_p^*(E) \geqslant 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
2. $H_p^*(\emptyset) = H_p^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$;
3. H_p^* *è monotona e numerabilmente subadditiva;*
4. $H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$;
5. $H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \qquad \forall t > 0,\ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N$.

university-logo

Proprietà delle misure esterne H_p^*.

Proposizione

Sia $p > 0$, allora:

1. $H_p^*(E) \geqslant 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N;$
2. $H_p^*(\emptyset) = H_p^*(\{x\}) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N;$
3. H_p^* *è monotona e numerabilmente subadditiva;*
4. $H_p^*(E + x) = H_p^*(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N;$
5. $H_p^*(tE) = t^p H_p^*(E) \qquad \forall t > 0, \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^N.$

university-logo

Misure di Hausdorff H_p.

Definizione

La classe degli insiemi H_p-misurabili è

$$M_H = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ H_p^*(A) = H_p^*(A \cap E) + H_p^*(A \cap E^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N \right\}.$$

Definizione

La misura di Hausdorff di indice p è $H_p = H_p^*|_{M_H}$.

Si verifica che M_H è una tribù e che H_p è numerabilmente additiva sugli elementi disgiunti di M_H, quindi H_p è effettivamente una misura.

Proposizione

Per ogni $p > 0$, si ha $B(\mathbb{R}^N) \subset M_H$, ovvero i boreliani sono H_p-misurabili.

university-logo

Misure di Hausdorff H_p.

Definizione

La classe degli insiemi H_p-misurabili è

$$M_H = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ H_p^*(A) = H_p^*(A \cap E) + H_p^*(A \cap E^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N \right\}.$$

Definizione

La misura di Hausdorff di indice p è $H_p = H_p^*|_{M_H}$.

Si verifica che M_H è una tribù e che H_p è numerabilmente additiva sugli elementi disgiunti di M_H, quindi H_p è effettivamente una misura.

Proposizione

Per ogni $p > 0$, si ha $B(\mathbb{R}^N) \subset M_H$, ovvero i boreliani sono H_p-misurabili.

university-logo

Misure di Hausdorff H_p.

Definizione

La classe degli insiemi H_p-misurabili è

$$M_H = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ H_p^*(A) = H_p^*(A \cap E) + H_p^*(A \cap E^c) \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N \right\}.$$

Definizione

La misura di Hausdorff di indice p è $H_p = H_p^*|_{M_H}$.

Si verifica che M_H è una tribù e che H_p è numerabilmente additiva sugli elementi disgiunti di M_H, quindi H_p è effettivamente una misura.

Proposizione

Per ogni $p > 0$, si ha $B(\mathbb{R}^N) \subset M_H$, ovvero i boreliani sono H_p-misurabili.

university-logo

Dimensione di Hausdorff

Fissato $E \subseteq \mathbb{R}^N$, studiamo la misura esterna $H_p^*(E)$ al variare di $p > 0$.

Proposizione

Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e per ogni ε positivo

$$H_{N+\varepsilon}^*(E) = 0.$$

Consideriamo quindi $H_p^*(E)$ limitandoci ai valori $p \in (0, N]$.

Proposizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e sia $p \in]0, N]$:

$$\text{(i) se } H_p^*(E) < \infty \quad \text{allora} \quad H_q^*(E) = 0 \qquad \forall\ q \in\ ]p, N];$$

$$\text{(ii) se } H_p^*(E) > 0 \quad \text{allora} \quad H_q^*(E) = \infty \qquad \forall\ q \in\ ]0, p[.$$

Dimensione di Hausdorff

Fissato $E \subseteq \mathbb{R}^N$, studiamo la misura esterna $H_p^*(E)$ al variare di $p > 0$.

Proposizione

Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e per ogni ε positivo

$$H_{N+\varepsilon}^*(E) = 0.$$

Consideriamo quindi $H_p^*(E)$ limitandoci ai valori $p \in (0, N]$.

Proposizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e sia $p \in]0, N]$:

$$(i) \text{ se } H_p^*(E) < \infty \quad \text{allora} \quad H_q^*(E) = 0 \qquad \forall\, q \in\,]p, N];$$

$$(ii) \text{ se } H_p^*(E) > 0 \quad \text{allora} \quad H_q^*(E) = \infty \qquad \forall\, q \in\,]0, p[.$$

Dimensione di Hausdorff

Fissato $E \subseteq \mathbb{R}^N$, studiamo la misura esterna $H_p^*(E)$ al variare di $p > 0$.

Proposizione

Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e per ogni ε positivo

$$H^*_{N+\varepsilon}(E) = 0.$$

Consideriamo quindi $H_p^*(E)$ limitandoci ai valori $p \in (0, N]$.

Proposizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e sia $p \in]0, N]$:

$$\text{(i) se } H_p^*(E) < \infty \quad \text{allora} \quad H_q^*(E) = 0 \qquad \forall\ q \in\ ]p, N];$$

$$\text{(ii) se } H_p^*(E) > 0 \quad \text{allora} \quad H_q^*(E) = \infty \qquad \forall\ q \in\ ]0, p[.$$

Dimensione di Hausdorff

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ *tale che* $H_p^*(E)$ *non sia identicamente nulla per ogni* $p > 0$, *allora esiste* $p_0 \in]0, N]$ *tale che*

$$H_p^*(E) = \begin{cases} \infty & se\ 0 < p < p_0 \\ \in [0, \infty] & se\ p = p_0 \\ 0 & se\ p > p_0 \end{cases}$$

In particolare per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $p \longmapsto H_p^*(E)$ risulta decrescente in p. Di conseguenza possiamo introdurre il prossimo concetto.

Definizione

Si dice dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$, il numero

$$dim_H(E) = \inf \left\{ p > 0 : \ H_p^*(E) = 0 \right\} \ \in \ [0, N].$$

Dimensione di Hausdorff

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ *tale che* $H_p^*(E)$ *non sia identicamente nulla per ogni* $p > 0$, *allora esiste* $p_0 \in]0, N]$ *tale che*

$$H_p^*(E) = \begin{cases} \infty & se\ 0 < p < p_0 \\ \in [0, \infty] & se\ p = p_0 \\ 0 & se\ p > p_0 \end{cases}$$

In particolare per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $p \longmapsto H_p^*(E)$ risulta decrescente in p. Di conseguenza possiamo introdurre il prossimo concetto.

Definizione

Si dice dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$, il numero

$$dim_H(E) = \inf \left\{ p > 0 : \ H_p^*(E) = 0 \right\} \ \in \ [0, N].$$

Dimensione di Hausdorff

Osservazione

Notiamo che il concetto di dimensione di Hausdorff vale per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$, anche non misurabile, perché la definizione si basa sul concetto di misura esterna di Hausdorff, definita per ogni E.
Come da intuito, la dimensione di Hausdorff è monotona, ovvero $E \subset F$ implica $dim_H(E) \leqslant dim_H(F)$: questo deriva dal fatto che H_p^* è monotona.
In pratica per dimostrare che un insieme dato E ha una certa dimensione di Hausdorff s è sufficiente verificare che

$$H_r^*(E) = \infty \qquad \forall r < s \qquad \text{e} \qquad H_t^*(E) = 0 \qquad \forall t > s,$$

indipendentemente dal fatto che $H_s^*(E)$ sia nulla, finita positiva o infinita.
In particolare se $0 < H_s^*(E) < \infty$ allora $dim_H(E) = s$.

university-logo

Dimensione di Hausdorff

Osservazione

Notiamo che il concetto di dimensione di Hausdorff vale per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$, anche non misurabile, perché la definizione si basa sul concetto di misura esterna di Hausdorff, definita per ogni E.

Come da intuito, la dimensione di Hausdorff è monotona, ovvero $E \subset F$ implica $dim_H(E) \leqslant dim_H(F)$: questo deriva dal fatto che H_p^* è monotona. In pratica per dimostrare che un insieme dato E ha una certa dimensione di Hausdorff s è sufficiente verificare che

$$H_r^*(E) = \infty \qquad \forall r < s \qquad \text{e} \qquad H_t^*(E) = 0 \qquad \forall t > s,$$

indipendentemente dal fatto che $H_s^*(E)$ sia nulla, finita positiva o infinita. In particolare se $0 < H_s^*(E) < \infty$ allora $dim_H(E) = s$.

university-logo

Il rapporto tra la misura di Hausdorff e quella di Lebesgue

Dopo aver introdotto la dimensione di Hausdorff, mostreremo ora come essa caratterizza gli insiemi non trascurabili rispetto a m_N, ovvero quelli con misura di Lebesgue strettamente positiva.

Teorema

Esiste una costante α_N, che dipende solo da N, tale che per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha

$$H_N^*(E) = \alpha_N m_N^*(E).$$

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che $m_N^*(E) > 0$, allora

$$dim_H(E) = N.$$

university-logo

Il rapporto tra la misura di Hausdorff e quella di Lebesgue

Dopo aver introdotto la dimensione di Hausdorff, mostreremo ora come essa caratterizza gli insiemi non trascurabili rispetto a m_N, ovvero quelli con misura di Lebesgue strettamente positiva.

Teorema

Esiste una costante α_N, che dipende solo da N, tale che per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha

$$H_N^*(E) = \alpha_N m_N^*(E).$$

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che $m_N^*(E) > 0$, allora

$$dim_H(E) = N.$$

university-logo

Il rapporto tra la misura di Hausdorff e quella di Lebesgue

Dopo aver introdotto la dimensione di Hausdorff, mostreremo ora come essa caratterizza gli insiemi non trascurabili rispetto a m_N, ovvero quelli con misura di Lebesgue strettamente positiva.

Teorema

Esiste una costante α_N, che dipende solo da N, tale che per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha

$$H_N^*(E) = \alpha_N m_N^*(E).$$

Corollario

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che $m_N^*(E) > 0$, allora

$$dim_H(E) = N.$$

university-logo

Esempi

In seguito al corollario limiteremo la nostra attenzione alla dimensione di Hausdorff degli insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, e vedremo con alcuni esempi come tale dimensione riesca a catalogare e distinguere questi insiemi:

- sia $M \subset \mathbb{R}^N$ tale che $m_N^*(M) > 0$, allora M ha dimensione N;
- ogni insieme numerabile $E \subset \mathbb{R}^N$ ha dimensione 0;
- il supporto $\Gamma = \varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}^N$ di ogni curva semplice di classe C^1 ha dimensione 1;

university-logo

Esempi

In seguito al corollario limiteremo la nostra attenzione alla dimensione di Hausdorff degli insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, e vedremo con alcuni esempi come tale dimensione riesca a catalogare e distinguere questi insiemi:

- sia $M \subset \mathbb{R}^N$ tale che $m_N^*(M) > 0$, allora M ha dimensione N;
- ogni insieme numerabile $E \subset \mathbb{R}^N$ ha dimensione 0;
- il supporto $\Gamma = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^N$ di ogni curva semplice di classe C^1 ha dimensione 1;

university-logo

Esempi

In seguito al corollario limiteremo la nostra attenzione alla dimensione di Hausdorff degli insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, e vedremo con alcuni esempi come tale dimensione riesca a catalogare e distinguere questi insiemi:

- sia $M \subset \mathbb{R}^N$ tale che $m_N^*(M) > 0$, allora M ha dimensione N;
- ogni insieme numerabile $E \subset \mathbb{R}^N$ ha dimensione 0;
- il supporto $\Gamma = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^N$ di ogni curva semplice di classe C^1 ha dimensione 1;

university-logo

Esempi

In seguito al corollario limiteremo la nostra attenzione alla dimensione di Hausdorff degli insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, e vedremo con alcuni esempi come tale dimensione riesca a catalogare e distinguere questi insiemi:

- sia $M \subset \mathbb{R}^N$ tale che $m_N^*(M) > 0$, allora M ha dimensione N;
- ogni insieme numerabile $E \subset \mathbb{R}^N$ ha dimensione 0;
- il supporto $\Gamma = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^N$ di ogni curva semplice di classe C^1 ha dimensione 1;

university-logo

Un esempio di dimensione non intera: l'insieme di Cantor

Sia $C \subset \mathbb{R}$ l'insieme di Cantor ottenuto togliendo da $[0, 1]$ al primo passo l'intervallo (aperto) centrale di ampiezza $1/3$, e ricorsivamente al k-esimo passo togliendo da ogni sottointervallo residuo l'intervallo (aperto) centrale di ampiezza $(1/3)^k$.

Figura: I primi cinque passi dell'iterazione.

Proposizione

L'insieme di Cantor ha dimensione $\frac{\log 2}{\log 3}$.

university-logo

Un esempio di dimensione non intera: l'insieme di Cantor

Sia $C \subset \mathbb{R}$ l'insieme di Cantor ottenuto togliendo da $[0,1]$ al primo passo l'intervallo (aperto) centrale di ampiezza $1/3$, e ricorsivamente al k-esimo passo togliendo da ogni sottointervallo residuo l'intervallo (aperto) centrale di ampiezza $(1/3)^k$.

Figura: I primi cinque passi dell'iterazione.

Proposizione

L'insieme di Cantor ha dimensione $\frac{\log 2}{\log 3}$.

university-logo

Insiemi di Furstenberg

Presentiamo adesso una classe di particolari sottoinsiemi del piano euclideo, la cui definizione si basa sul concetto di dimensione di Hausdorff.

Definizione

Sia $\alpha \in]0,1]$, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice insieme di Furstenberg di tipo α (oppure insieme F_α) se, per ogni direzione e nel cerchio unitario, esiste un segmento l_e nella direzione di e tale che $dim_H(l_e \cap E) \geqslant \alpha$. Diremo anche che in tal caso E appartiene alla classe F_α.

university-logo

Insiemi di Furstenberg

Presentiamo adesso una classe di particolari sottoinsiemi del piano euclideo, la cui definizione si basa sul concetto di dimensione di Hausdorff.

Definizione

Sia $\alpha \in]0, 1]$, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice insieme di Furstenberg di tipo α (oppure insieme F_α) se, per ogni direzione e nel cerchio unitario, esiste un segmento l_e nella direzione di e tale che $dim_H(l_e \cap E) \geqslant \alpha$. Diremo anche che in tal caso E appartiene alla classe F_α.

university-logo

Funzioni dimensione

Definizione

Una funzione $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ è chiamata funzione dimensione se

$$h(0) = 0,\ \ h(t) > 0 \text{ per } t > 0,\ \ h \text{ è crescente e continua a destra.}$$

Denotiamo con $\mathbb{H}$ la classe delle funzioni dimensione.

Definizione

Siano g, h due funzioni dimensione. Diremo che g è dimensionalmente più piccola di h e scriveremo $g \prec h$ se e solo se

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

university-logo

Funzioni dimensione

Definizione

Una funzione $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ è chiamata funzione dimensione se

$$h(0) = 0,\ \ h(t) > 0 \text{ per } t > 0,\ \ h \text{ è crescente e continua a destra.}$$

Denotiamo con $\mathbb{H}$ la classe delle funzioni dimensione.

Definizione

Siano g, h due funzioni dimensione. Diremo che g è dimensionalmente più piccola di h e scriveremo $g \prec h$ se e solo se

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

university-logo

Estensione

Possiamo ora definire le misure esterne di Hausdorff H^h, dove $h \in \mathbb{H}$, analogamente al caso classico.

Definizione

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $\delta > 0$ e h una funzione dimensione. Definiamo

$$H^h_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} h(diam\ U_n) : U_n \text{ aperti}, \, diam\ U_n < \delta, \, E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right\}.$$

La misura esterna h-dimensionale di Hausdorff di $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è

$$H^h(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H^h_\delta(E) = \sup_{\delta>0} H^h_\delta(E).$$

university-logo

Estensione

Possiamo ora definire le misure esterne di Hausdorff H^h, dove $h \in \mathbb{H}$, analogamente al caso classico.

Definizione

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $\delta > 0$ e h una funzione dimensione. Definiamo

$$H^h_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} h(diam\ U_n) : U_n \text{ aperti}, \ diam\ U_n < \delta, \ E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right\}.$$

La misura esterna h-dimensionale di Hausdorff di $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è

$$H^h(E) = \lim_{\delta \to 0^+} H^h_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} H^h_\delta(E).$$

university-logo

Estensione

Osservazione

Notiamo come si tratti effettivamente di un'estensione delle definizioni precedenti, nel senso che la definizione usuale di misura esterna di Hausdorff $H_p^*(p > 0)$ si ottiene per $h_p(x) = x^p$, che è proprio una funzione dimensione. Analogamente per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $h \longmapsto H^h(E)$ risulta decrescente in h, ovvero se $g \prec h$ allora $H^h(E) \leqslant H^g(E)$.

Come vedremo, non è vero in generale che, dato un insieme E, esista una funzione $h \in \mathbb{H}$ tale che

$$H^g(E) = \begin{cases} \infty & \text{se } g \prec h \\ 0 & \text{se } g \succ h \end{cases}$$

ovvero con questa estensione alle misure H^h perdiamo l'analogo della dimensione di Hausdorff, che invece esiste per ogni insieme E nella definizione standard.

university-logo

Estensione

Osservazione

Notiamo come si tratti effettivamente di un'estensione delle definizioni precedenti, nel senso che la definizione usuale di misura esterna di Hausdorff $H_p^*(p > 0)$ si ottiene per $h_p(x) = x^p$, che è proprio una funzione dimensione. Analogamente per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $h \longmapsto H^h(E)$ risulta decrescente in h, ovvero se $g \prec h$ allora $H^h(E) \leqslant H^g(E)$.

Come vedremo, non è vero in generale che, dato un insieme E, esista una funzione $h \in \mathbb{H}$ tale che

$$H^g(E) = \begin{cases} \infty & \text{se } g \prec h \\ 0 & \text{se } g \succ h \end{cases}$$

ovvero con questa estensione alle misure H^h perdiamo l'analogo della dimensione di Hausdorff, che invece esiste per ogni insieme E nella definizione standard.

university-logo

Estensione

Osservazione

Notiamo come si tratti effettivamente di un'estensione delle definizioni precedenti, nel senso che la definizione usuale di misura esterna di Hausdorff $H_p^*(p > 0)$ si ottiene per $h_p(x) = x^p$, che è proprio una funzione dimensione. Analogamente per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ la funzione $h \longmapsto H^h(E)$ risulta decrescente in h, ovvero se $g \prec h$ allora $H^h(E) \leqslant H^g(E)$.

Come vedremo, non è vero in generale che, dato un insieme E, esista una funzione $h \in \mathbb{H}$ tale che

$$H^g(E) = \begin{cases} \infty & \text{se } g \prec h \\ 0 & \text{se } g \succ h \end{cases}$$

ovvero con questa estensione alle misure H^h perdiamo l'analogo della dimensione di Hausdorff, che invece esiste per ogni insieme E nella definizione standard.

university-logo

I risultati di Besicovitch

Teorema

Sia $h \in \mathbb{H}$ *tale che* $H^h(E) = 0$*, allora*

$$\exists\ g \prec h\ (g \in \mathbb{H}) : \quad H^g(E) = 0.$$

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme boreliano. Se* $h \in \mathbb{H}$ *è tale che* E *ha misura* H^h *non* σ*-finita allora esiste* $g \succ h$ $(g \in \mathbb{H})$ *tale che* E *ha misura* H^g *non* σ*-finita.*

university-logo

I risultati di Besicovitch

Teorema

Sia $h \in \mathbb{H}$ *tale che* $H^h(E) = 0$*, allora*

$$\exists\ g \prec h\ (g \in \mathbb{H}) : \quad H^g(E) = 0.$$

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme boreliano. Se* $h \in \mathbb{H}$ *è tale che* E *ha misura* H^h *non* σ*-finita allora esiste* $g \succ h$ $(g \in \mathbb{H})$ *tale che* E *ha misura* H^g *non* σ*-finita.*

university-logo

I risultati di Besicovitch

Corollario

Se per un boreliano $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ esiste $h \in \mathbb{H}$ tale che

$$H^g(E) > 0 \quad \forall g \prec h, \qquad\qquad H^g(E) = 0 \quad \forall g \succ h,$$

allora E ha misura H^h positiva e σ-finita.

Definizione

Se E è un boreliano che verifica le ipotesi del corollario, esso si dice h-set; viceversa, se per ogni $h \in \mathbb{H}$ E non è un h-set, E si dice *a-dimensionale*.

Il corollario è importante in quanto ci permetterà di mostrare un esempio di insieme a-dimensionale: l'insieme dei numeri di Liouville.

university-logo

I risultati di Besicovitch

Corollario

Se per un boreliano $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ esiste $h \in \mathbb{H}$ tale che

$$H^g(E) > 0 \quad \forall g \prec h, \qquad\qquad H^g(E) = 0 \quad \forall g \succ h,$$

allora E ha misura H^h positiva e σ-finita.

Definizione

Se E è un boreliano che verifica le ipotesi del corollario, esso si dice h-set; viceversa, se per ogni $h \in \mathbb{H}$ E non è un h-set, E si dice *a-dimensionale*.

Il corollario è importante in quanto ci permetterà di mostrare un esempio di insieme a-dimensionale: l'insieme dei numeri di Liouville.

university-logo

I risultati di Besicovitch

Corollario

Se per un boreliano $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *esiste* $h \in \mathbb{H}$ *tale che*

$$H^g(E) > 0 \quad \forall g \prec h, \qquad\qquad H^g(E) = 0 \quad \forall g \succ h,$$

allora E *ha misura* H^h *positiva e* σ*-finita.*

Definizione

Se E è un boreliano che verifica le ipotesi del corollario, esso si dice h-set; viceversa, se per ogni $h \in \mathbb{H}$ E non è un h-set, E si dice *a-dimensionale*.

Il corollario è importante in quanto ci permetterà di mostrare un esempio di insieme a-dimensionale: l'insieme dei numeri di Liouville.

university-logo

I numeri di Liouville

Definizione

Chiamiamo insieme dei numeri di Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists\ p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2) : \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Proposizione

L'insieme $\mathbb{L}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \neq \mathbb{L} \subset \mathbb{Q}^c$, *cioè i numeri di Liouville sono irrazionali;*
2. $\mathbb{L}$ *è un insieme* G_δ, *quindi boreliano;*
3. $\mathbb{L}$ *è denso in* $\mathbb{R}$;
4. $\mathbb{L}$ *ha misura m di Lebesgue nulla;*
5. $\mathbb{L}$ *è periodico mod* $\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{L} + q = \mathbb{L} \quad \forall\ q \in \mathbb{Q}$.

I numeri di Liouville

Definizione

Chiamiamo insieme dei numeri di Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists\ p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2) : \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Proposizione

L'insieme $\mathbb{L}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \neq \mathbb{L} \subset \mathbb{Q}^c$, *cioè i numeri di Liouville sono irrazionali;*
2. $\mathbb{L}$ *è un insieme G_δ, quindi boreliano;*
3. $\mathbb{L}$ *è denso in $\mathbb{R}$;*
4. $\mathbb{L}$ *ha misura m di Lebesgue nulla;*
5. $\mathbb{L}$ *è periodico mod* $\mathbb{Q}: \quad \mathbb{L} + q = \mathbb{L} \quad \forall\ q \in \mathbb{Q}$.

I numeri di Liouville

Definizione

Chiamiamo insieme dei numeri di Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \exists\ p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2) : \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Proposizione

L'insieme $\mathbb{L}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \neq \mathbb{L} \subset \mathbb{Q}^c$, *cioè i numeri di Liouville sono irrazionali;*
2. $\mathbb{L}$ *è un insieme* G_δ, *quindi boreliano;*
3. $\mathbb{L}$ *è denso in* $\mathbb{R}$;
4. $\mathbb{L}$ *ha misura m di Lebesgue nulla;*
5. $\mathbb{L}$ *è periodico mod* $\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{L} + q = \mathbb{L} \quad \forall\ q \in \mathbb{Q}$.

I numeri di Liouville

Definizione

Chiamiamo insieme dei numeri di Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists\ p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2) : \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Proposizione

L'insieme $\mathbb{L}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \neq \mathbb{L} \subset \mathbb{Q}^c$, *cioè i numeri di Liouville sono irrazionali;*
2. $\mathbb{L}$ *è un insieme* G_δ, *quindi boreliano;*
3. $\mathbb{L}$ *è denso in* $\mathbb{R}$*;*
4. $\mathbb{L}$ *ha misura* m *di Lebesgue nulla;*
5. $\mathbb{L}$ *è periodico mod* $\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{L} + q = \mathbb{L} \quad \forall\ q \in \mathbb{Q}$.

I numeri di Liouville

Definizione

Chiamiamo insieme dei numeri di Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists\ p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2) : \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Proposizione

L'insieme $\mathbb{L}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \neq \mathbb{L} \subset \mathbb{Q}^c$, *cioè i numeri di Liouville sono irrazionali;*
2. $\mathbb{L}$ *è un insieme* G_δ, *quindi boreliano;*
3. $\mathbb{L}$ *è denso in* $\mathbb{R}$*;*
4. $\mathbb{L}$ *ha misura* m *di Lebesgue nulla;*
5. $\mathbb{L}$ *è periodico mod* $\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{L} + q = \mathbb{L} \quad \forall\ q \in \mathbb{Q}$.

I numeri di Liouville

Definizione

Chiamiamo insieme dei numeri di Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \exists \ p, q \in \mathbb{Z} \ (q \geqslant 2) : \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Proposizione

L'insieme $\mathbb{L}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \neq \mathbb{L} \subset \mathbb{Q}^c$, *cioè i numeri di Liouville sono irrazionali;*
2. $\mathbb{L}$ *è un insieme* G_δ, *quindi boreliano;*
3. $\mathbb{L}$ *è denso in* $\mathbb{R}$*;*
4. $\mathbb{L}$ *ha misura m di Lebesgue nulla;*
5. $\mathbb{L}$ *è periodico mod* $\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{L} + q = \mathbb{L} \quad \forall \ q \in \mathbb{Q}$.

I numeri di Liouville

Definizione

Chiamiamo insieme dei numeri di Liouville

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \exists\, p, q \in \mathbb{Z}\ (q \geqslant 2) : \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Proposizione

L'insieme $\mathbb{L}$ ha le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \neq \mathbb{L} \subset \mathbb{Q}^c$, *cioè i numeri di Liouville sono irrazionali;*
2. $\mathbb{L}$ *è un insieme* G_δ, *quindi boreliano;*
3. $\mathbb{L}$ *è denso in* $\mathbb{R}$*;*
4. $\mathbb{L}$ *ha misura m di Lebesgue nulla;*
5. $\mathbb{L}$ *è periodico mod* $\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{L} + q = \mathbb{L} \quad \forall\, q \in \mathbb{Q}$.

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Per mostrare che $\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale, dobbiamo utilizzare delle interessanti proprietà di cui godono le misure di Borel su $\mathbb{R}$.

Indichiamo con $int(A)$ la parte interna dell'insieme A, definiamo $A+B=\{a+b : a \in A, \quad b \in B\}, \quad A+t=\{a+t : a \in A\}$.

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano di misura di Lebesgue nulla e μ una misura boreliana (cioè definita su una tribù contenente i boreliani) su $\mathbb{R}$ tale che B abbia misura μ positiva e σ-finita. Allora esiste un compatto $C \subset B$ con $\mu(C)>0$ e $int(C-C)=\emptyset$.

Teorema

Sia B un insieme G_δ denso tale che $\{t \in \mathbb{R} : B+t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$ e sia $C \subset B$ un compatto con $int(C-C)=\emptyset$. Allora B contiene una quantità più che numerabile di traslati disgiunti di C.

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Per mostrare che $\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale, dobbiamo utilizzare delle interessanti proprietà di cui godono le misure di Borel su $\mathbb{R}$.

Indichiamo con $int(A)$ la parte interna dell'insieme A, definiamo
$A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}, \quad A + t = \{a + t : a \in A\}$.

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano di misura di Lebesgue nulla e μ una misura boreliana (cioè definita su una tribù contenente i boreliani) su $\mathbb{R}$ tale che B abbia misura μ positiva e σ-finita. Allora esiste un compatto $C \subset B$ con $\mu(C) > 0$ e $int(C - C) = \emptyset$.

Teorema

Sia B un insieme G_δ denso tale che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$ e sia $C \subset B$ un compatto con $int(C - C) = \emptyset$. Allora B contiene una quantità più che numerabile di traslati disgiunti di C.

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Per mostrare che $\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale, dobbiamo utilizzare delle interessanti proprietà di cui godono le misure di Borel su $\mathbb{R}$.

Indichiamo con $int(A)$ la parte interna dell'insieme A, definiamo $A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}, \quad A + t = \{a + t : a \in A\}$.

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano di misura di Lebesgue nulla e μ una misura boreliana (cioè definita su una tribù contenente i boreliani) su $\mathbb{R}$ tale che B abbia misura μ positiva e σ-finita. Allora esiste un compatto $C \subset B$ con $\mu(C) > 0$ e $int(C - C) = \emptyset$.

Teorema

Sia B un insieme G_δ denso tale che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$ e sia $C \subset B$ un compatto con $int(C - C) = \emptyset$. Allora B contiene una quantità più che numerabile di traslati disgiunti di C.

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Per mostrare che $\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale, dobbiamo utilizzare delle interessanti proprietà di cui godono le misure di Borel su $\mathbb{R}$.

Indichiamo con $int(A)$ la parte interna dell'insieme A, definiamo
$A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}, \quad A + t = \{a + t : a \in A\}$.

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano di misura di Lebesgue nulla e μ una misura boreliana (cioè definita su una tribù contenente i boreliani) su $\mathbb{R}$ tale che B abbia misura μ positiva e σ-finita. Allora esiste un compatto $C \subset B$ con $\mu(C) > 0$ e $int(C - C) = \emptyset$.

Teorema

Sia B un insieme G_δ denso tale che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$ e sia $C \subset B$ un compatto con $int(C - C) = \emptyset$. Allora B contiene una quantità più che numerabile di traslati disgiunti di C.

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Per mostrare che $\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale, dobbiamo utilizzare delle interessanti proprietà di cui godono le misure di Borel su $\mathbb{R}$.

Indichiamo con $int(A)$ la parte interna dell'insieme A, definiamo $A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}, \quad A + t = \{a + t : a \in A\}$.

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano di misura di Lebesgue nulla e μ una misura boreliana (cioè definita su una tribù contenente i boreliani) su $\mathbb{R}$ tale che B abbia misura μ positiva e σ-finita. Allora esiste un compatto $C \subset B$ con $\mu(C) > 0$ e $int(C - C) = \emptyset$.

Teorema

Sia B un insieme G_δ denso tale che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$ e sia $C \subset B$ un compatto con $int(C - C) = \emptyset$. Allora B contiene una quantità più che numerabile di traslati disgiunti di C.

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Per mostrare che $\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale, dobbiamo utilizzare delle interessanti proprietà di cui godono le misure di Borel su $\mathbb{R}$.

Indichiamo con $int(A)$ la parte interna dell'insieme A, definiamo
$A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\}, \quad A + t = \{a + t : a \in A\}$.

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano di misura di Lebesgue nulla e μ una misura boreliana (cioè definita su una tribù contenente i boreliani) su $\mathbb{R}$ tale che B abbia misura μ positiva e σ-finita. Allora esiste un compatto $C \subset B$ con $\mu(C) > 0$ e $int(C - C) = \emptyset$.

Teorema

Sia B un insieme G_δ denso tale che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$ e sia $C \subset B$ un compatto con $int(C - C) = \emptyset$. Allora B contiene una quantità più che numerabile di traslati disgiunti di C.

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Grazie ai due teoremi appena enunciati otteniamo

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un insieme (non vuoto) G_δ di misura di Lebesgue nulla, e supponiamo che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$. Allora per ogni misura μ boreliana su $\mathbb{R}$ e invariante per traslazioni si ha o $\mu(B) = 0$ oppure B ha misura μ non σ-finita.

Corollario

$\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale.

university-logo

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Grazie ai due teoremi appena enunciati otteniamo

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un insieme (non vuoto) G_δ di misura di Lebesgue nulla, e supponiamo che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$. Allora per ogni misura μ boreliana su $\mathbb{R}$ e invariante per traslazioni si ha o $\mu(B) = 0$ oppure B ha misura μ non σ-finita.

Corollario

$\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale.

university-logo

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Grazie ai due teoremi appena enunciati otteniamo

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un insieme (non vuoto) G_δ di misura di Lebesgue nulla, e supponiamo che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$. Allora per ogni misura μ boreliana su $\mathbb{R}$ e invariante per traslazioni si ha o $\mu(B) = 0$ oppure B ha misura μ non σ-finita.

Corollario

$\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale.

university-logo

Misure di Borel su $\mathbb{R}$

Grazie ai due teoremi appena enunciati otteniamo

Teorema

Sia $B \subset \mathbb{R}$ un insieme (non vuoto) G_δ di misura di Lebesgue nulla, e supponiamo che $\{t \in \mathbb{R} : B + t \subset B\}$ sia denso in $\mathbb{R}$. Allora per ogni misura μ boreliana su $\mathbb{R}$ e invariante per traslazioni si ha o $\mu(B) = 0$ oppure B ha misura μ non σ-finita.

Corollario

$\mathbb{L}$ è un insieme a-dimensionale.

university-logo

Insiemi di Furstenberg generalizzati

Definizione

Sia $h \in \mathbb{H}$, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *insieme di Furstenberg di tipo* h, o insieme F_h, se per ogni direzione $e \in \mathbb{S}^1$ esiste un segmento l_e nella direzione di e tale che $H^h(l_e \cap E) > 0$.

university-logo

Insiemi di Furstenberg generalizzati

Definizione

$$\mathbb{H}_d = \{h \in \mathbb{H} : \; h(2x) \leqslant Ch(x) \;\text{ per qualche } C > 0\}.$$

Definizione

Date due funzioni $g, h \in \mathbb{H}$ definiamo

$$\Delta_0(g,h)(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \qquad \Delta_1(g,h)(x) = \frac{g(x)}{h^2(x)}.$$

university-logo

Insiemi di Furstenberg generalizzati

Definizione

$$\mathbb{H}_d = \{h \in \mathbb{H} : \ h(2x) \leqslant Ch(x) \ \text{ per qualche } C > 0\}.$$

Definizione

Date due funzioni $g, h \in \mathbb{H}$ definiamo

$$\Delta_0(g,h)(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \qquad \Delta_1(g,h)(x) = \frac{g(x)}{h^2(x)}.$$

university-logo

Condizioni sufficienti affinché $H^g(F_h) > 0$

Teorema

Siano E un insieme F_h con $h \in \mathbb{H}_d$, $g \in \mathbb{H}$ tale che $g \prec h^2$. Posto

$$a_k = \sqrt{\frac{k}{\Delta_1(g,h)(2^{-k})}},$$

supponiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converga. Allora

$$H^g(E) > 0.$$

university-logo

Condizioni sufficienti affinché $H^g(F_h) > 0$

Teorema

Siano E un insieme F_h con $h \in \mathbb{H}_d$, $g \in \mathbb{H}$ tale che $g \prec h^2$. Posto

$$a_k = \sqrt{\frac{k}{\Delta_1(g,h)(2^{-k})}},$$

supponiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converga. Allora

$$H^g(E) > 0.$$

university-logo

Condizioni sufficienti affinché $H^g(F_h) > 0$

Teorema

Siano E un insieme F_h con $h \in \mathbb{H}_d$, $g \in \mathbb{H}$ tale che $g \prec h^2$. Posto

$$a_k = \sqrt{\frac{k}{\Delta_1(g,h)(2^{-k})}},$$

supponiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converga. Allora

$$H^g(E) > 0.$$

university-logo

Condizioni sufficienti affinché $H^g(F_h) > 0$

Teorema

Sia E un insieme F_h, con $h \in \mathbb{H}_d$, tale che $h(x) \lesssim x^\alpha$ per qualche $0 < \alpha < 1$, e sia $g \in \mathbb{H}$ tale che $g \prec h$. Posto

$$a_k = (\Delta_0(h, g)(2^{-k}))^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}},$$

se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, allora

$$H^{g\sqrt{\cdot}}(E) > 0.$$

university-logo

Condizioni sufficienti affinché $H^g(F_h) > 0$

Teorema

Sia E un insieme F_h, con $h \in \mathbb{H}_d$, tale che $h(x) \lesssim x^\alpha$ per qualche $0 < \alpha < 1$, e sia $g \in \mathbb{H}$ tale che $g \prec h$. Posto

$$a_k = (\Delta_0(h, g)(2^{-k}))^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}},$$

se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, allora

$$H^{g\sqrt{\cdot}}(E) > 0.$$

university-logo

Condizioni sufficienti affinché $H^g(F_h) > 0$

Teorema

Sia E un insieme F_h, con $h \in \mathbb{H}_d$, tale che $h(x) \lesssim x^\alpha$ per qualche $0 < \alpha < 1$, e sia $g \in \mathbb{H}$ tale che $g \prec h$. Posto

$$a_k = (\Delta_0(h,g)(2^{-k}))^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}},$$

se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, allora

$$H^{g\sqrt{\cdot}}(E) > 0.$$

university-logo

Il caso degli insiemi di Furstenberg classici

Riprendiamo la definizione di insieme di Furstenberg classico.

Definizione

Sia $\alpha \in]0,1]$, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice insieme di Furstenberg di tipo α (oppure insieme F_α) se, per ogni direzione e nel cerchio unitario, esiste un segmento l_e nella direzione di e tale che $dim_H(l_e \cap E) \geqslant \alpha$. Diremo anche che in tal caso E appartiene alla classe F_α.

Osservazione

Un insieme di Furstenberg classico di tipo F_α con $\alpha \in]0,1]$ non è altro che un caso particolare di insieme di Furstenberg generalizzato di tipo F_h, con $h(x) = x^\alpha$.

university-logo

Il caso degli insiemi di Furstenberg classici

Riprendiamo la definizione di insieme di Furstenberg classico.

Definizione

Sia $\alpha \in]0,1]$, un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice insieme di Furstenberg di tipo α (oppure insieme F_α) se, per ogni direzione e nel cerchio unitario, esiste un segmento l_e nella direzione di e tale che $dim_H(l_e \cap E) \geqslant \alpha$. Diremo anche che in tal caso E appartiene alla classe F_α.

Osservazione

Un insieme di Furstenberg classico di tipo F_α con $\alpha \in]0,1]$ non è altro che un caso particolare di insieme di Furstenberg generalizzato di tipo F_h, con $h(x) = x^\alpha$.

university-logo

Il teorema di Wolff

Useremo i due importanti teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati per dare un risultato notevole, dovuto a Wolff, per quanto riguarda la dimensione di Hausdorff di un insieme del tipo F_α.

Teorema (Wolff)

Dato $\alpha \in]0,1]$, sia $E \in F_\alpha$. Allora

$$dim_H(E) \geqslant \max\{2\alpha, \alpha + 1/2\}.$$

university-logo

Il teorema di Wolff

Useremo i due importanti teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati per dare un risultato notevole, dovuto a Wolff, per quanto riguarda la dimensione di Hausdorff di un insieme del tipo F_α.

Teorema (Wolff)

Dato $\alpha \in]0,1]$*, sia* $E \in F_\alpha$. *Allora*

$$dim_H(E) \geqslant \max\{2\alpha, \alpha + 1/2\}.$$

university-logo

Il teorema di Wolff

Useremo i due importanti teoremi sugli insiemi di Furstenberg generalizzati per dare un risultato notevole, dovuto a Wolff, per quanto riguarda la dimensione di Hausdorff di un insieme del tipo F_α.

Teorema (Wolff)

Dato $\alpha \in]0,1]$, *sia* $E \in F_\alpha$. *Allora*

$$dim_H(E) \geqslant \max\{2\alpha, \alpha + 1/2\}.$$

university-logo

Un'applicazione del teorema di Wolff

Applichiamo infine il teorema di Wolff per stimare la dimensione di un opportuno insieme di Furstenberg che andiamo a costruire:

Esempio

Consideriamo il classico insieme di Cantor $C \subset \mathbb{R}$, e sia $C' = C - 1/2 \subset [-1/2, 1/2]$ il suo traslato verso sinistra di $1/2$. Definiamo

$$\mathcal{W} = \left\{(x, y) : \ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ r \in C', \ \theta \in [0, \pi]\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{W}$ contiene in ogni direzione un insieme di Cantor, quindi $\mathcal{W}$ è un insieme di Furstenberg F_α dove $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. Allora per il teorema di Wolff si ha

$$dim_H(\mathcal{W}) \geqslant \max\left\{2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{2\log 2}{\log 3}, \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

university-logo

Un'applicazione del teorema di Wolff

Applichiamo infine il teorema di Wolff per stimare la dimensione di un opportuno insieme di Furstenberg che andiamo a costruire:

Esempio

Consideriamo il classico insieme di Cantor $C \subset \mathbb{R}$, e sia $C' = C - 1/2 \subset [-1/2, 1/2]$ il suo traslato verso sinistra di $1/2$. Definiamo

$$\mathcal{W} = \left\{(x,y) : \; x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta, \; r \in C', \; \theta \in [0,\pi]\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{W}$ contiene in ogni direzione un insieme di Cantor, quindi $\mathcal{W}$ è un insieme di Furstenberg F_α dove $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. Allora per il teorema di Wolff si ha

$$dim_H(\mathcal{W}) \geqslant \max\left\{2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{2\log 2}{\log 3}, \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

university-logo

Un'applicazione del teorema di Wolff

Applichiamo infine il teorema di Wolff per stimare la dimensione di un opportuno insieme di Furstenberg che andiamo a costruire:

Esempio

Consideriamo il classico insieme di Cantor $C \subset \mathbb{R}$, e sia $C' = C - 1/2 \subset [-1/2, 1/2]$ il suo traslato verso sinistra di $1/2$. Definiamo

$$\mathcal{W} = \left\{(x, y) : \; x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta, \; r \in C', \; \theta \in [0, \pi]\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{W}$ contiene in ogni direzione un insieme di Cantor, quindi $\mathcal{W}$ è un insieme di Furstenberg F_α dove $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. Allora per il teorema di Wolff si ha

$$dim_H(\mathcal{W}) \geqslant \max\left\{2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{2\log 2}{\log 3}, \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

university-logo

Un'applicazione del teorema di Wolff

Applichiamo infine il teorema di Wolff per stimare la dimensione di un opportuno insieme di Furstenberg che andiamo a costruire:

Esempio

Consideriamo il classico insieme di Cantor $C \subset \mathbb{R}$, e sia $C' = C - 1/2 \subset [-1/2, 1/2]$ il suo traslato verso sinistra di $1/2$. Definiamo

$$\mathcal{W} = \left\{(x, y) : \ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ r \in C', \ \theta \in [0, \pi]\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{W}$ contiene in ogni direzione un insieme di Cantor, quindi $\mathcal{W}$ è un insieme di Furstenberg F_α dove $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. Allora per il teorema di Wolff si ha

$$dim_H(\mathcal{W}) \geqslant \max\left\{2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{2\log 2}{\log 3}, \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

university-logo

Un'applicazione del teorema di Wolff

Applichiamo infine il teorema di Wolff per stimare la dimensione di un opportuno insieme di Furstenberg che andiamo a costruire:

Esempio

Consideriamo il classico insieme di Cantor $C \subset \mathbb{R}$, e sia $C^{'} = C - 1/2 \subset [-1/2, 1/2]$ il suo traslato verso sinistra di $1/2$. Definiamo

$$\mathcal{W} = \left\{(x, y): \ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ r \in C^{'}, \ \theta \in [0, \pi]\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{W}$ contiene in ogni direzione un insieme di Cantor, quindi $\mathcal{W}$ è un insieme di Furstenberg F_α dove $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. Allora per il teorema di Wolff si ha

$$dim_H(\mathcal{W}) \geqslant \max\left\{2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{2\log 2}{\log 3}, \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

university-logo

Un'applicazione del teorema di Wolff

Applichiamo infine il teorema di Wolff per stimare la dimensione di un opportuno insieme di Furstenberg che andiamo a costruire:

Esempio

Consideriamo il classico insieme di Cantor $C \subset \mathbb{R}$, e sia $C' = C - 1/2 \subset [-1/2, 1/2]$ il suo traslato verso sinistra di $1/2$. Definiamo

$$\mathcal{W} = \left\{(x, y) : \ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ r \in C', \ \theta \in [0, \pi]\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$\mathcal{W}$ contiene in ogni direzione un insieme di Cantor, quindi $\mathcal{W}$ è un insieme di Furstenberg F_α dove $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. Allora per il teorema di Wolff si ha

$$dim_H(\mathcal{W}) \geqslant \max\left\{2\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right\} = \max\left\{\frac{2\log 2}{\log 3}, \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

university-logo

Conclusioni

university-logo

Bibliografia essenziale

Paolo Acquistapace.
Appunti di Analisi Funzionale.
http://www.dm.unipi.it/∼acquistp/anafun.pdf .

A. S. Besicovitch.
On the definitions of tangents to sets of infinite linear measure.
Proc. Camb. Phil. Soc. 52 (1956) 2029.

Marton Elekes e Tamas Keleti.
Borel sets which are null or non-σ-finite for every translation invariant measure.
Adv. Math. 201 (2006) 102-115.

Ursula Molter e Ezequiel Rela.
Improving dimension estimates for Furstenberg-type sets.
Adv. Math. 223 (2010) 672-688.

university-logo

Bibliografia essenziale

- C. A. Rogers.
  Hausdorff measures.
  Cambridge University Press, 1970.

- Carlo Viola.
  Approssimazione diofantea, frazioni continue e misure d'irrazionalità.
  La Matematica nella Società e nella Cultura, Boll. Un. Mat. Ital. (8) 7-A, agosto 2004.

- Thomas Wolff.
  Recent work connected with the Kakeya problem.
  Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996), 129162, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

university-logo