Metodi numerici per equazioni differenziali con ritardo

Tesi di Laurea Triennale

Giampaolo Mele

Università di Pisa

30 settembre 2011

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizio

Equazione logist

letodo dei passi

sempio

Caso generale

Approccio standard

stensioni continue di letodi numerici per IVP ocalizzazione delle

liscontinuità Convergenza del met

assi

Esperimenti numerici

nclusione

Differenze tra IVP e DDE

onclusione

Un'equazione differenziale con ritardo (DDE) è un problema della forma

Definizione (DDE)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \le t \le t \\ y(t) = \phi(t) & t \le t \end{cases}$$

 $\tau = \tau(t, v(t))$ è detto ritardo

 $\blacktriangleright \phi(t)$ è detta storia

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizio

Equazione logist

Metodo dei pass

sempio aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo de bassi

sperimenti umerici

onclusione

Un'equazione differenziale con ritardo (DDE) è un problema della forma

Definizione (DDE)

$$egin{cases} y'(t) = f(t,y(t),y(t- au)) & t_0 \leq t \leq t_f \ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

ightharpoonup au = au(t, v(t)) è detto ritardo

 $\blacktriangleright \phi(t)$ è detta storia

letodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standard

stensioni continue di etodi numerici per IVP ocalizzazione delle

Convergenza del metodo di assi

sperimenti

onclusione

Un'equazione differenziale con ritardo (DDE) è un problema della forma

Definizione (DDE)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

ightharpoonup au = au(t,y(t)) è detto ritardo

 $\triangleright \phi(t)$ è detta storia

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei pass

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo de passi

sperimenti

onclusione

Un'equazione differenziale con ritardo (DDE) è un problema della forma

Definizione (DDE)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

- ightharpoonup au = au(t, y(t)) è detto ritardo
- $\blacktriangleright \phi(t)$ è detta storia

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei pass

Esempio

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de

sperimenti

onclusione

Condizioni

- f(t, u, v) continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti
- τ(t, u) non negativa, continua e lipschitziana suu secondo argomento
- $\triangleright \phi(t)$ continua e lipschitziana

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è

Лetodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizio

Equazione logistica

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità Convergenza del metodo de

sperimenti

nclusione

Condizioni

- f(t, u, v) continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti
- τ(t, u) non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento
- $\blacktriangleright \phi(t)$ continua e lipschitziana

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistica

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo de ssi

perimenti

. .

onclusione

Condizioni

- f(t, u, v) continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti
- ightharpoonup au(t,u) non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento
- $\triangleright \phi(t)$ continua e lipschitziana

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistica

Metodo dei pass

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo d assi

sperimenti

. .

onclusione

Condizioni

- f(t, u, v) continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti
- ightharpoonup au(t,u) non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento
- $\blacktriangleright \phi(t)$ continua e lipschitziana

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistica

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo o

perimenti

. .

onclusione

Condizioni

- f(t, u, v) continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti
- ightharpoonup au(t,u) non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento
- $\blacktriangleright \phi(t)$ continua e lipschitziana

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistica

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo o

perimenti

. .

onclusione

Condizioni

- f(t, u, v) continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti
- ightharpoonup au(t,u) non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento
- $\blacktriangleright \phi(t)$ continua e lipschitziana

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistica

∕letodo dei passi

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle

continuità nvergenza del metodo

sperimenti

menci

onclusione

Differenze tra IVP e DDE

Conclusione

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- ► N è il numero di individui della specie
- ▶ r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo (passi

sperimenti umerici

onclusione

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

▶ *N* è il numero di individui della specie

r à il tasso di crescita

► K è la capacità di carico della popolazione (numero

massimo di individui che possono trovarsi in un

determinato ambiente)

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizion

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standard

stensioni continue di netodi numerici per IVP ocalizzazione delle iscontinuità

Convergenza del metodo di passi

sperimenti

inclusione

onclusione

Differenze tra IVP e DDE

Conclusione

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- ► N è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo d assi

sperimenti

......

onclusione

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- ► N è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Metodo dei passi

Esempio Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

convergenza del metodo di assi

sperimenti

nclusione

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- ► *N* è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Metodo dei passi

Esempio Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo di assi

sperimenti

......

onclusione

Incoerenze

Equazione logistica

La soluzione di tale equazione è

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)}$$

Questa è una funzione crescente, daltronde in natura a volte il numero di individui di una certa specie diminuisce oppure segue un andamento oscillatorio

/letodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo de assi

imerici

Conclusione
Differenze tra IVP e DDE

Incoerenze

Equazione logistica

La soluzione di tale equazione è

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

Questa è una funzione crescente, daltronde in natura a volte il numero di individui di una certa specie diminuisce oppure segue un andamento oscillatorio

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Metodo dei passi

Esempio Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di netodi numerici per IVP Localizzazione delle

scontinuità onvergenza del metor

issi

merici

onclusione

Incoerenze

Equazione logistica

La soluzione di tale equazione è

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

Questa è una funzione crescente, daltronde in natura a volte il numero di individui di una certa specie diminuisce oppure segue un andamento oscillatorio

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

stensioni continue di netodi numerici per IVP

discontinuità

nvergenza del metodo ssi

sperimenti

nclusione

Oifferenze tra IVP e D

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right)$$

- K = 100
- r = 0.1
- $\phi(t) = 3$

Equazione logistica (Hutchinson 1948)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

Problema

Come cambia la soluzione?

Esempio

Fissiamo

- K = 100
- r = 0.1
- $\phi(t) = 3$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Delinizioni

Metodo dei passi

Esempio Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

nvergenza del metodo ssi

perimenti merici

onclusione

Equazione logistica (Hutchinson 1948)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

Problema

Come cambia la soluzione?

Esempio

Fissiamo

- K = 100
- r = 0.1
- $\phi(t) = 3$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

^oresentazione del problema

Definizioni

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

stensioni continue di netodi numerici per IVP ocalizzazione delle discontinuità

nvergenza del metodo

perimenti

nerici

onclusione

Equazione logistica (Hutchinson 1948)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

Problema

Come cambia la soluzione?

Esempio

Fissiamo

- K = 100
- r = 0.1
- $\phi(t) = 3$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Metodo dei passi

Esempio Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

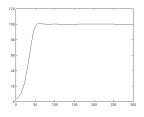
nvergenza del metodo ssi

perimenti

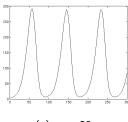
merici

onclusione

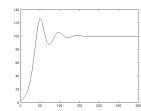
Figura: Grafici al variare di au



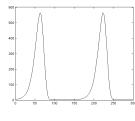
(a)
$$\tau = 5$$



(c)
$$\tau = 20$$



(b)
$$\tau = 10$$



(d)
$$\tau = 27$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Metodo dei pass

Esempio

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo dei passi

Esperimenti . .

Conclusione

Metodo dei passi

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le \Lambda \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

L'idea è di ricondurre la DDE a tanti problemi ai valori iniziali (IVP, initial value problem)

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logistica

ivietodo dei pa

Caso generale

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo de ssi

perimenti

onclusione

Metodo dei passi

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

L'idea è di ricondurre la DDE a tanti problemi ai valori iniziali (IVP, initial value problem)

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Matada dai passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> onvergenza del metodo de Issi

perimenti

nclusione

Metodo dei passi

Esempio

$$egin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

L'idea è di ricondurre la DDE a tanti problemi ai valori iniziali (IVP, initial value problem)

letodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei pas

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> onvergenza del metodo de Issi

sperimenti

nclusione

Differenze tra IVP e DI

nclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_1(t) = 1 - t$$

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in [0,1] è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovverd

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in [1,2] invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

so generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> onvergenza del metod assi

sperimenti umerici

onclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in [0, 1] è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_1(t) = 1 - t$$

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in [0,1] è sufficiente risolvere

$$egin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0,1] \ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in [1, 2] invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

so generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> nvergenza del metodo ssi

sperimenti umerici

onclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in [0,1] è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in [1,2] invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei passi

so generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> nvergenza del metodo ssi

sperimenti umerici

onclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in [0,1] è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in [1,2] invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

vietodo dei passi

so generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> nvergenza del metodo ssi

sperimenti umerici

onclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

In generale possiamo determinare la soluzione per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0(t) = \phi(t) & t \le 0 \\ y'_{i+1}(t) = -y_i(t-1) & i \le t \le i+1 \\ y_{i+1}(i) = y_i(i) & \end{cases}$$

La soluzione sarà l'incollamento delle yi ovvero

$$y(t) = y_i(t)$$
 se $i \le t \le i + 1$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo passi

sperimenti

onclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

In generale possiamo determinare la soluzione per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0(t) = \phi(t) & t \le 0 \\ y'_{i+1}(t) = -y_i(t-1) & i \le t \le i+1 \\ y_{i+1}(i) = y_i(i) & \end{cases}$$

La soluzione sarà l'incollamento delle y_i ovvero

$$y(t) = y_i(t)$$
 se $i \le t \le i + 1$

letodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo de passi

sperimenti Imerici

onclusione

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

In generale possiamo determinare la soluzione per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0(t) = \phi(t) & t \le 0 \\ y'_{i+1}(t) = -y_i(t-1) & i \le t \le i+1 \\ y_{i+1}(i) = y_i(i) & \end{cases}$$

La soluzione sarà l'incollamento delle y_i ovvero

$$y(t) = y_i(t)$$
 se $i \le t \le i + 1$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Caro gonorale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo de passi

sperimenti Imerici

onclusione

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

In generale possiamo determinare la soluzione per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0(t) = \phi(t) & t \le 0 \\ y'_{i+1}(t) = -y_i(t-1) & i \le t \le i+1 \\ y_{i+1}(i) = y_i(i) & \end{cases}$$

La soluzione sarà l'incollamento delle y_i ovvero

$$y(t) = y_i(t)$$
 se $i \le t \le i + 1$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo de passi

sperimenti

onclusione

Difference are IVD - I

Conclusione

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \le t \le 1\\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2} & 1 \le t \le 2\\ -\frac{t^3}{6} + \frac{3}{2}t^2 - 4t + \frac{17}{6} & 2 \le t \le 3\\ \dots \end{cases}$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle

Convergenza del metodo de passi

passi

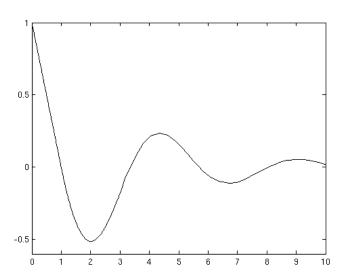
sperimenti Imerici

onclusione

Difference are IVD -

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

Grafico della soluzione



Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità Convergenza del metodo dei

Convergenza del metodo de passi

sperimenti umerici

onclusione

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

$$\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$$

Problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Data la suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$$

Risolvere la DDE equivale a risolvere un numero arbitrario di IVP

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistica

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo di assi

sperimenti Imerici

nclusione

Problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Data la suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$$

Problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Data la suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$$

Risolvere la DDE equivale a risolvere un numero arbitrario di IVP

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logist

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle

onvergenza del metodo Issi

sperimenti Imerici

.......

onclusione.

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

DDF

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

IVP associati alla DDF

Data Δ per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f(t, y_{n+1}(t), x(t - \tau(t, y_{n+1}(t)))) \\ y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n) \end{cases}$$

dove

$$x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \le t_0 \\ y_i(s) & t_{i-1} \le s \le t_i \end{cases} \quad y_0(t) = \phi(t)$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità Convergenza del metodo de

sperimenti

onclusione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

IVP associati alla DDE

Data Δ per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f(t, y_{n+1}(t), x(t - \tau(t, y_{n+1}(t)))) \\ y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n) \end{cases}$$

dove

$$x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \le t_0 \\ y_i(s) & t_{i-1} \le s \le t_i \end{cases} \quad y_0(t) = \phi(t)$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità Convergenza del metodo di

sperimenti

umerici

onclusione

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

IVP associati alla DDE

Data Δ per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f(t, y_{n+1}(t), x(t - \tau(t, y_{n+1}(t)))) \\ y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n) \end{cases}$$

dove

$$x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \le t_0 \\ y_i(s) & t_{i-1} \le s \le t_i \end{cases} \quad y_0(t) = \phi(t)$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo (passi

nclusione

lifferenze tra IVP

Oifferenze tra IVP e DDE Conclusione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

IVP associati alla DDE

Data Δ per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f(t, y_{n+1}(t), x(t - \tau(t, y_{n+1}(t)))) \\ y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n) \end{cases}$$

dove

$$x(s) := egin{cases} \phi(s) & s \leq t_0 \ y_i(s) & t_{i-1} \leq s \leq t_i \end{cases} \quad y_0(t) = \phi(t)$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei passi

Approccio standard

stensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo di passi

sperimenti umerici

onclusione

Differenze tra IVP

rerenze tra IVP e L nclusione

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n$$

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Domanda

Cosa succede se τ si annulla?

In realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standare

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità Convergenza del metodo de

sperimenti

sperimenti umerici

Conclusione

Scelta di A

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n$$

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n$$

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Domand:

Cosa succede se au si annulla?

per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metod Issi

sperimenti

nclusions

onclusione

ifferenze tra IVP e DDE onclusione

n realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n$$

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Domanda

Cosa succede se τ si annulla?

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

Caro gonoralo

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metoc assi

sperimenti Imerici

umerici

nclusione

ifferenze tra IVP e DDI onclusione

n realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n$$

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

In realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Domanda

Cosa succede se τ si annulla?

Domand:

La teoria sugli IVP è sufficiente?

Osservazione

Di ogni IVP associato alla DDE è necessario conoscere un'approssimazione continua della soluzione, pertanto i classici metodi per IVP (come ad esempio Eulero o i metodi di Runge-Kutta) non sono sufficienti dato che approssimano solo in alcuni punti la soluzione.

Pertanto ci sono due possibilità:

- ► Interpolare la soluzione
- Estendere i metodi numerici discreti a metodi numerici continui

Netodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standar

stensioni continue di

Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo assi

perimenti merici

onclusione

Domanda

La teoria sugli IVP è sufficiente?

Osservazione

Di ogni IVP associato alla DDE è necessario conoscere un'approssimazione continua della soluzione, pertanto i classici metodi per IVP (come ad esempio Eulero o i metodi di Runge-Kutta) non sono sufficienti dato che approssimano solo in alcuni punti la soluzione.

Pertanto ci sono due possibilità:

- ► Interpolare la soluzione
- Estendere i metodi numerici discreti a metodi numerici continui

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

sempio

Approccio standa

Estensioni continue di

Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo assi

perimenti merici

onclusione

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

Domanda

La teoria sugli IVP è sufficiente?

Osservazione

Di ogni IVP associato alla DDE è necessario conoscere un'approssimazione continua della soluzione, pertanto i classici metodi per IVP (come ad esempio Eulero o i metodi di Runge-Kutta) non sono sufficienti dato che approssimano solo in alcuni punti la soluzione.

Pertanto ci sono due possibilità:

- ► Interpolare la soluzione
- ► Estendere i metodi numerici discreti a metodi numerici continui

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

∕letodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

tensioni continue di

ocalizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo de passi

sperimenti ımerici

onclusione

Differenze tra IVP e DDE

onclusione

Domanda

La teoria sugli IVP è sufficiente?

Osservazione

Di ogni IVP associato alla DDE è necessario conoscere un'approssimazione continua della soluzione, pertanto i classici metodi per IVP (come ad esempio Eulero o i metodi di Runge-Kutta) non sono sufficienti dato che approssimano solo in alcuni punti la soluzione.

Pertanto ci sono due possibilità:

- ► Interpolare la soluzione
- Estendere i metodi numerici discreti a metodi numerici continui

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

∕letodo dei passi

.

laso generale

Approccio standard

di numerici per

liscontinuità

assi

sperimenti imerici

onclusione

Differenze tra IVP e DDE

onclusione

IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t_0) = y_0 & \end{cases}$$

Definizione (Metodi numerici per IVP)

Data una suddivisione $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$ definiamo un metodo numerico a k passi come una successione

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1}y_n + \dots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} + h_{n+1}\phi(y_n, \dots, y_{n-k+1})$$
 $0 \le n \le N-1$

dove $h_{n+1}=t_{n+1}-t_n$ e si suppongono noti i primi k termini y_0,\ldots,y_{k-1} . Inoltre chiediamo che la funzione ϕ sia lipschitziana.

Quello che vogliamo è che $y_n \simeq y(t_n)$

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni Eguazione logistic

Equazione logistica

Metodo dei passi

A ---- g.......

Approccio standaro

ensioni continue di rodi numerici per IVF

iscontinuità ionvergenza del metodo assi

sperimenti

imerici

Differenze tra IVP e DI

Differenze tra IVP e DDI Conclusione

IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definizione (Metodi numerici per IVP)

Data una suddivisione $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$ definiamo un metodo numerico a k passi come una successione

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1}y_n + \dots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} + h_{n+1}\phi(y_n, \dots, y_{n-k+1})$$
 $0 \le n \le N-1$

dove $h_{n+1}=t_{n+1}-t_n$ e si suppongono noti i primi k termini y_0,\ldots,y_{k-1} . Inoltre chiediamo che la funzione ϕ sia lipschitziana.

Quello che vogliamo è che $y_n \simeq y(t_n)$

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

tensioni continue di

ocalizzazione delle

onvergenza del metodo ssi

perimenti imerici

nclusione

Differenze tra IVP e DE

Conclusione

IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definizione (Metodi numerici per IVP)

Data una suddivisione $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$ definiamo un metodo numerico a k passi come una successione

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1}y_n + \dots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} + h_{n+1}\phi(y_n,\dots,y_{n-k+1})$$
 $0 \le n \le N-1$

dove $h_{n+1}=t_{n+1}-t_n$ e si suppongono noti i primi k termini y_0,\ldots,y_{k-1} . Inoltre chiediamo che la funzione ϕ sia lipschitziana.

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei passi

Esempio

Approccio standard

nsioni continue di

alizzazione delle ontinuità

scontinuità onvergenza del metor

ssi

perimenti merici

nclusione

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

Conclusione

IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definizione (Metodi numerici per IVP)

Data una suddivisione $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$ definiamo un metodo numerico a k passi come una successione

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1}y_n + \dots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} + h_{n+1}\phi(y_n,\dots,y_{n-k+1})$$
 $0 \le n \le N-1$

dove $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ e si suppongono noti i primi k termini y_0, \ldots, y_{k-1} . Inoltre chiediamo che la funzione ϕ sia lipschitziana.

Quello che vogliamo è che $y_n \simeq y(t_n)$

Definizione (Estensione continua)

Definiamo estensione continua (o interpolatore) di un metodo numerico una funzione $\eta(t)$ polinomiale a tratti definita dalle restrizioni su ogni intervallo $[t_n,t_{n+1}]$ di una interpolazione basata sui valori calcolati in un intervallo più amplio possibile $[t_{n-i_n},t_{n+i_n+1}]$ con $i_n,j_n\geq 0$ della forma

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \beta_{n,1}(\theta) y_{n+j_n} + \dots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y_{n-i_n} \\
+ h_{n+1} \Psi(y_{n+j_n}, \dots, y_{n-i_n}, \theta)$$

dove $0 \leq \theta \leq 1$ e chiediamo che $\eta(t)$ sia continua, quindi

$$\eta(t_n) = y_n$$
 e $\eta(t_{n+1}) = y_{n+1}$

Inoltre chiediamo che la funzione Ψ sia lipschitziana.

Metodi numeri per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standard

izzazione delle

continuità invergenza del metodo

passi

merici

nclusione

Differenze tra IVP e DDE

nclusione

Consistenza

Definizione (Consistenza di un metodo numerico)

Un metodo numerico è consistente di ordine p se per ogni IVP e per ogni suddivisione Δ , $p\geq 1$ è il più grande intero tale che

$$\|y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\| = O(h_{n+1}^{p+1})$$
 per $0 \le n \le N-1$

dove

$$\tilde{y}_{n+1} = \alpha_{n,1}y(t_n) + \cdots + \alpha_{n,k}y(t_{n-k+1}) + h_{n+1}\phi(y(t_n), \dots, y(t_{n-k+1}))$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logist

∕letodo dei passi

sempio

aso generale

Approccio standard

estensioni continue o metodi numerici ner

ocalizzazione delle scontinuità

Convergenza del metodo assi

perimenti

nclusione

Differenze tra IVP e DDE

onclusione

Consistenza

Definizione (Consistenza di un'estensione continua)

Un'estensione continua è consistente di ordine q se per ogni IVP e per ogni suddivisione $\Delta,\ q\geq 1$ è il più grande intero tale che

$$\max_{t_n \le t \le t_{n+1}} \|y(t) - \tilde{\eta}(t)\| = O(h_{n+1}^{q+1})$$
 per $0 \le n \le N-1$

dove

$$\tilde{\eta}(t_n + \theta h_{n+1}) = \beta_{n,1}(\theta) y(t_{n+j_n}) + \dots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y(t_{n-i_n}) \\
+ h_{n+1} \Psi(y(t_{n+j_n}), \dots, y(t_{n-i_n}), \theta)$$

Metodi numeri per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizio

Equazione logist

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standard

tensioni continue di

alizzazione delle

Convergenza del metodo assi

perimenti

nclusione

Convergenza

Definizione (Convergenza)

Un metodo numerico è convergente di ordine p se per ogni IVP e per ogni suddivisione Δ , posto $h = \max_{1 \le n \le N} t_n$ vale

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^p)$$

la sua estensione continua è convergente di ordine q se

$$\max_{t_0 < t < t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^q)$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standaro

stensioni continue di

ocalizzazione delle

onvergenza del metodo d assi

perimenti

merici

onclusione

Differenze tra IVP e DDE

clusione

Matrice associata ad un metodo numerico

$$C_{n} = \begin{pmatrix} \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,k-1} & \alpha_{n,k} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Metodi numeric

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Metodo dei passi

Fremnio

Approccio standaro

stensioni continue di

etodi numerici per IVI calizzazione delle

liscontinuità Convergenza del metodo

passi

merici

onclusione

0-Stabilità

Teorema

Sia

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1}y_n + \dots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} + h_{n+1}\phi(y_n,\dots,y_{n-k+1})$$
 $0 \le n \le N-1$

un metodo numerico a k passi consistente di ordine p e sia C_n la sua matrice associata allora se

- esiste una norma $\|\cdot\|_*$ tale che $\|C_n\|_* \leq 1$
- ▶ la funzione f (che definisce l'IVP) è di classe C^p
- ▶ i punti $y_0..., y_{k-1}$ sono una approssimazione di ordine p della soluzione esatta

allora il metodo è convergente di ordine p, inoltre se il metodo numerico ammette un'estensione continua consistente di ordine q allora tale estensione è convergente di ordine $q'=\min\{p,q+1\}$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Netodo dei passi

aso generale

Approccio standard

izzazione delle

onvergenza del metodo d

enerimenti

ımerici

nclusione

Esempio:Interpolazioni cubiche di Hermite

Esempio (Interpolazioni cubiche di Hermite)

Supponiamo di avere un metodo consistente di ordine $p \ge 3$, allora è possibile estendere questo metodo ad un metodo continuo consistente di ordine 3 usando le interpolazioni cubiche di Hermite, ovvero calcolato y_{n+1} approssimiamo la soluzione in $[t_n, t_{n+1}]$ con

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = (1 - \theta)y_n + \theta y_{n+1}
+ \theta(\theta - 1)[(1 - 2\theta)(y_{n+1} - y_n)
+ (\theta - 1)h_n f(y_n, t_n) + \theta h_n f(y_{n+1}, t_{n+1})]$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizio

Equazione logist

Netodo dei passi

ietodo dei pa

laso generale

Approccio standard

sioni continue di

calizzazione delle continuità

nvergenza del metodo de ssi

erimenti

nclusione

onclusione

Differenze tra IVP e DDE

clusione

Metodi di Runge-Kutta

l metodi di Runge-Kutta ad u stadi sono definiti da

Metodi di Runge-Kutta

$$\begin{cases} Y_{n+1}^{i} = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} g(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}) & 1 \leq i \leq \nu \\ y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_{i} g(t_{n+1}^{i}, Y_{n+1}^{i}) & \end{cases}$$

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei pass

Caso generale

Approccio standaro

tensioni continue di

Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo passi

sperimenti Imerici

Conclusione

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

Metodi di Runge-Kutta

I metodi di Runge-Kutta ad u stadi sono definiti da

Metodi di Runge-Kutta

$$\begin{cases} Y_{n+1}^{i} = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} g(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}) & 1 \le i \le \nu \\ y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_{i} g(t_{n+1}^{i}, Y_{n+1}^{i}) & \end{cases}$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei pass

Esempio Caso generale

Approccio standard

censioni continue di

calizzazione delle

scontinuità onvergenza del meto

onvergenza del metodo d assi

sperimenti

nclusione

Metodi di Runge-Kutta

I metodi di Runge-Kutta ad u stadi sono definiti da

Metodi di Runge-Kutta

$$\begin{cases} Y_{n+1}^{i} = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} g(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}) & 1 \leq i \leq \nu \\ y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_{i} g(t_{n+1}^{i}, Y_{n+1}^{i}) & \end{cases}$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei pass

sempio

Approccio standard

stensioni continue di

calizzazione delle

continuità nvergenza del meto

.onvergenza dei metodo de iassi

perimenti imerici

onclusione

Integratori di prima classe

Teorema

Se un metodo di Runge-Kutta è consistente allora è convergente

Teorema (Esistenza degli interpolatori di prima classe)

Dato un metodo di Runge-Kutta con ordine di convergenza p esiste un interpolatore con grado e ordine di convergenza $|\frac{p+1}{2}|$

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizio

Equazione logisti

Metodo dei pass

Caso generale

Approccio standaro

stensioni continue di

Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo di passi

sperimenti imerici

nclusione

Integratori di prima classe

Teorema

Se un metodo di Runge-Kutta è consistente allora è convergente

Teorema (Esistenza degli interpolatori di prima classe)

Dato un metodo di Runge-Kutta con ordine di convergenza p esiste un interpolatore con grado e ordine di convergenza $|\frac{p+1}{2}|$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistic

Metodo dei passi

sempio

. . . .

Estensioni continue di

metodi numerici per IVP

ocalizzazione delle scontinuità

convergenza del metodo di assi

perimenti Imerici

onclusione

ONCIUSIONE Differenze tra IVP e DE

Integratori di prima classe

Se un metodo di Runge-Kutta è consistente allora è convergente

Teorema (Esistenza degli interpolatori di prima classe)

Dato un metodo di Runge-Kutta con ordine di convergenza p esiste un interpolatore con grado e ordine di convergenza $\left| \frac{p+1}{2} \right|$

DDF

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \le t \le t, \\ y(t) = \phi(t) & t \le t, \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1 , ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatt

$$y'(t_0)^- = \phi(t_0) y'(t_0)^+ = f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0))))$$

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

sperimenti ımerici

onclusione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1 , ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatt

$$y'(t_0)^- = \phi(t_0)$$

$$y'(t_0)^+ = f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0))))$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistic

Metodo dei pass

Esempio Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

> perimenti merici

onclusione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1 , ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatt

$$y'(t_0)^- = \phi(t_0)$$

$$y'(t_0)^+ = f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistic

Metodo dei pas

Esempio Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo dei passi

> sperimenti Imerici

nclusione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1 , ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatt

$$y'(t_0)^- = \phi(t_0)$$

$$y'(t_0)^+ = f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistic

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

perimenti

nclusione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1 , ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatti

$$y'(t_0)^- = \phi(t_0)$$

 $y'(t_0)^+ = f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0))))$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizio

Equazione logistic

Metodo dei passi

sempio

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

perimenti

nclusione

Esempio

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2} & 1 \le t \le 2 \\ \dots \end{cases}$$

$$y'(0)^- = \phi(0) = 1$$

 $y'(0)^+ = -y(0-1) = -1$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei pa

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

Passi Esperimenti

inclusione

onciusione

Differenze tra IVP e DDE

Conclusione

Esempio

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = egin{cases} 1-t & 0 \leq t \leq 1 \ rac{t^2}{2}-2t+rac{3}{2} & 1 \leq t \leq 2 \ \dots \end{cases}$$

$$y'(0)^- = \phi(0) = 1$$

 $y'(0)^+ = -y(0-1) = -1$

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei pas

Esempio Caso generale

Approccio standard

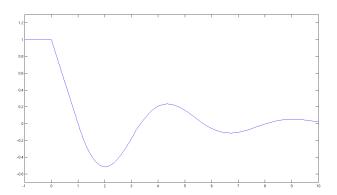
Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

Esperimenti

onclusione

Grafico della soluzione



Metodi numerio

Giampaolo Mele

Presentazione de

Definizio

Equazione logisti

1etodo dei pass

sempio

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo dei passi

sperimenti

nclusione

Esempio

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Propagazione delle discontinuità

Con gli stessi conti si trova che y'' è discontinua in 1.

Non è difficile provare che $y^{(i+1)}$ è discontinua in i.

/letodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo dei passi

sperimenti

onclusione

Esempio

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Propagazione delle discontinuità

Con gli stessi conti si trova che y'' è discontinua in 1.

Non è difficile provare che $y^{(i+1)}$ è discontinua in i.

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistic

Metodo dei pas

Caso generale

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo dei passi

sperimenti

. . .

onclusione

Definizione (Discontinuità di ordine k)

Il punto ξ è una discontinuità di ordine k se per $0 \le s \le k-1$ si ha che $y^{(s)}(\xi)$ esiste e $y^{(k)}$ è lipschitziana e continua in un intorno di ξ , mentre $y^{(k+1)}$ è discontinua in ξ

Definizione (Argomento deviato)

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Le (eventuali) discontinuità della soluzione sono dovute alla propagazione della (eventuale) discontinuità di ordine 0 in t_0

Лetodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizio

Equazione logisti

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo dei passi

sperimenti

onclusione

Definizione (Discontinuità di ordine k)

Il punto ξ è una discontinuità di ordine k se per $0 \le s \le k-1$ si ha che $y^{(s)}(\xi)$ esiste e $y^{(k)}$ è lipschitziana e continua in un intorno di ξ , mentre $y^{(k+1)}$ è discontinua in ξ

Definizione (Argomento deviato)

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Le (eventuali) discontinuità della soluzione sono dovute alla propagazione della (eventuale) discontinuità di ordine 0 in t_0

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del

Definizion

Equazione logist

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

sperimenti

nclusione

onclusione

Giampaolo Mele

Giampaoio iviele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

sperimenti

merici

Conclusione

Differenze tra IVP e DDE

Definizione (Discontinuità di ordine k)

Il punto ξ è una discontinuità di ordine k se per $0 \le s \le k-1$ si ha che $y^{(s)}(\xi)$ esiste e $y^{(k)}$ è lipschitziana e continua in un intorno di ξ , mentre $y^{(k+1)}$ è discontinua in ξ

Definizione (Argomento deviato)

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Le (eventuali) discontinuità della soluzione sono dovute alla propagazione della (eventuale) discontinuità di ordine 0 in t_0

Present

Il punto ξ è una discontinuità di ordine k se per $0 \le s \le k-1$ si ha che $y^{(s)}(\xi)$ esiste e $y^{(k)}$ è lipschitziana e continua in un intorno di ξ , mentre $y^{(k+1)}$ è discontinua in ξ

Definizione (Argomento deviato)

Definizione (Discontinuità di ordine k)

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Le (eventuali) discontinuità della soluzione sono dovute alla propagazione della (eventuale) discontinuità di ordine 0 in t_0

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizio

Equazione logistic

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

sperimenti

nclusione

onclusione

Proposizione

Sia ξ uno zero semplice di

$$\alpha(\xi) = t_0$$

Allora y" è discontinua in ξ

E' sufficiente derivare

$$y''(\xi)^{+} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) +}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\xi)^{+} +} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\alpha(\xi))^{+} \alpha'(\xi)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\alpha(\xi))^{+} \alpha'(\xi)}$$

$$y''(\xi)^{-} = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\xi)^{-} + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\alpha(\xi))^{-} \alpha'(\xi)$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei pas

Esempio

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

sperimenti

onclusione

Proposizione

Sia ξ uno zero semplice di

$$\alpha(\xi) = t_0$$

Allora y" è discontinua in ξ

E' sufficiente derivare

$$y''(\xi)^{+} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) +}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\xi)^{+} +} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\alpha(\xi))^{+} \alpha'(\xi)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\alpha(\xi))^{+} \alpha'(\xi)}$$

$$y''(\xi)^{-} = \frac{\partial f}{\partial t} (\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) + \frac{\partial f}{\partial y} (\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\xi)^{-} + \frac{\partial f}{\partial x} (\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) y'(\alpha(\xi))^{-} \alpha'(\xi)$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei passi

Esempio

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo dei passi

sperimenti umerici

onclusione

Ripetendo gli stessi passaggi si trova che le y''' è discontinua in ξ' se questo è uno zero semplice di

$$\alpha(\xi') = \xi$$

Generalizzando

Proposizione (Discontinuità di grado p)

Le eventuali discontinuità di grado al più p sono

$$\begin{cases} \alpha(\xi_{k,j}) = \xi_{k-1,i} \\ \xi_{0,1} = t_0 \end{cases} \qquad 1 \le i \le \mu$$

Netodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logist

∕letodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

sperimenti

onclusione

Ripetendo gli stessi passaggi si trova che le y''' è discontinua in ξ' se questo è uno zero semplice di

$$\alpha(\xi') = \xi$$

Generalizzando

Proposizione (Discontinuità di grado p)

Le eventuali discontinuità di grado al più p sono

$$\begin{cases} \alpha(\xi_{k,j}) = \xi_{k-1,i} \\ \xi_{0,1} = t_0 \end{cases} \quad 1 \le i \le p$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logisti

Metodo dei passi

Esempio

aso generale

Approccio standard

metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo de passi

sperimenti umerici

onclusione

Differenze tra IVP e D

Conclusione

Teorema

- ▶ Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p
- L'interpolatore ha ordine di consistenza q
- ▶ La suddivisione \triangle contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p
- ▶ L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \le t \le t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Metodo dei passi

Esempio
Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Esperimenti numerici

Conclusione

Teorema

- ▶ Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p
- L'interpolatore ha ordine di consistenza q
- ▶ La suddivisione \triangle contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p
- ▶ L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q + 1\}$

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \le t \le t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Metodi numerio

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi Esempio

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle

Esperimenti numerici

Conclusione

Teorema

- ▶ Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p
- L'interpolatore ha ordine di consistenza q
- La suddivisione Δ contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p
- ▶ L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \le t \le t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Esperimenti numerici

Conclusione

Teorema

- ▶ Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p
- L'interpolatore ha ordine di consistenza q
- ▶ La suddivisione Δ contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p
- ▶ L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q + 1\}$

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \le t \le t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Esperimenti

onclusione

Conclusione

Teorema

- ▶ Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p
- L'interpolatore ha ordine di consistenza q
- ▶ La suddivisione Δ contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p
- ▶ L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q + 1\}$

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \le t \le t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Esperimenti

onclusione

Conclusione

Teorema

- ▶ Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p
- L'interpolatore ha ordine di consistenza q
- La suddivisione Δ contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p
- L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+i_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \le t \le t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Domande

Tutta questa teoria è necessaria

Cosa succede se A non contiene le discontinuità

Netodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Metodo dei pass

Esempio

Caso generale

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo dei passi

sperimenti Imerici

inclusione

onclusione

Domande

Tutta questa teoria è necessaria?

Cosa succede se A non contiene le discontinuità

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Caso generale

Metodo dei passi

Metodo dei passi

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo dei

sperimenti

illerici

onclusione

Domande

Tutta questa teoria è necessaria?

Cosa succede se Δ non contiene le discontinuità?

Caso generale

discontinuità Convergenza del metodo dei

DDE (Feldstein-Neves)

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}y\left(y(t) - \sqrt{2} + 1\right) & t \in [1, 3] \\ y(t) = 1 & t \le 1 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & 1 \le t \le 2\\ \frac{t}{4} + \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{t} & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> nvergenza del metodo ssi

sperimenti . .

.......

DDE (Feldstein-Neves)

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}y\left(y(t) - \sqrt{2} + 1\right) & t \in [1, 3] \\ y(t) = 1 & t \le 1 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & 1 \le t \le 2\\ \frac{t}{4} + \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{t} & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logist

Metodo dei passi

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> onvergenza del metodo de Issi

perimenti

Conclusione

Conclusion

DDE (Feldstein-Neves)

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}y\left(y(t) - \sqrt{2} + 1\right) & t \in [1, 3] \\ y(t) = 1 & t \le 1 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & 1 \le t \le 2\\ \frac{t}{4} + \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{t} & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logist

Metodo dei pass

aso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> onvergenza del metodo de Issi

perimenti

Conclusione

Metodo di Runge-Kutta convergente di ordine 3 e mentre l'interpolatore è convergente di ordine 2.

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
\hline
& \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}$$

$$b_1(\theta) = -\frac{3}{4}\theta^2 + b_2(\theta) = 0$$

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizion

Equazione logistica

Metodo dei pa

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo d assi

sperimenti

onclusione

Metodo di Runge-Kutta convergente di ordine 3 e mentre l'interpolatore è convergente di ordine 2.

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
\hline
& \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}$$

$$b_1(\theta) = -\frac{3}{4}\theta^2 + \theta$$
$$b_2(\theta) = 0$$
$$b_3(\theta) = \frac{3}{4}\theta^2$$

letodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei pae

empio so generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle

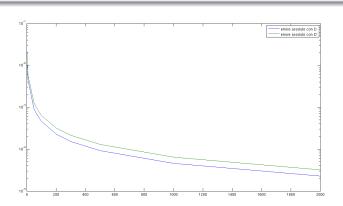
onvergenza del metodo o

sperimenti

onclusione

C'è una discontinuità in 2

- ▶ Risolviamo il problema in [1, 3.11111
- $\triangle = \{1, 2, 3.11111\}$
- \triangle $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de

Definizion

Equazione logistic

Metodo dei pass

Caso generale

Approccio standaro

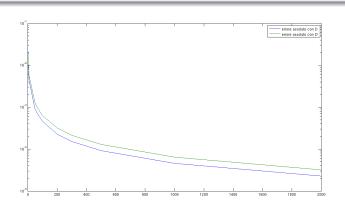
Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metoc assi

sperimenti Imerici

Conclusione

- ▶ C'è una discontinuità in 2
- ▶ Risolviamo il problema in [1, 3.11111]
- $\triangle = \{1, 2, 3.11111\}$
- $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei pass

Caso generale

Approccio standare

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle

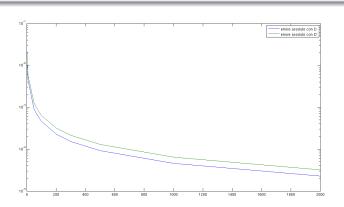
> onvergenza del metoc assi

sperimenti

Conclusione

Esperimenti numerici

- ► C'è una discontinuità in 2
- ▶ Risolviamo il problema in [1, 3.11111]
- $\Delta = \{1, 2, 3.11111\}$
- $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



1etodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logist

Metodo dei pas

Caso generale

Approccio standar

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> onvergenza del metod assi

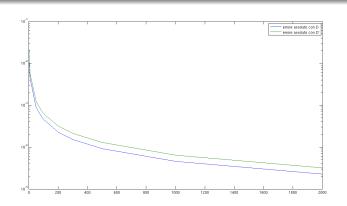
speriment umerici

Conclusione

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

Esperimenti numerici

- C'è una discontinuità in 2
- ▶ Risolviamo il problema in [1,3.11111]
- $\Delta = \{1, 2, 3.11111\}$
- $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



Netodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standar

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle

onvergenza del metod assi

sperimenti umerici

Conclusion

Differenze tra IVP e DDE Conclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t - \tau) \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

$$t \leq 0$$

Cosa succede se

$$\tau = 0$$

$$rac{1}{2}$$

$$rac{1}{2}$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei pass

Caso generale

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo dei passi

umerici

Conclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t - \tau) \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

t < 0

Cosa succede se

$$\triangleright \tau = 0$$

 $\tau = 1$

 $\triangleright \tau = 2$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione de

Definizioni

Equazione logisti

Metodo dei pas

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo dei passi

umerici

onclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t - \tau) \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

$$t \le 0$$

Cosa succede se:

$$\tau = 0$$

$$\tau = 1$$

$$\tau = 2$$

Metodi numerio

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei pas

Caso generale

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo dei passi

umerici

Conclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t - \tau) \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

$$t \leq 0$$

Cosa succede se:

$$\tau = 0$$

$$ightharpoonup au = 1$$

$$\tau = 0$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei pas

esempio Caso generale

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

Convergenza del metodo dei passi

umerici

onclusione

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t - \tau) \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

$$t \le 0$$

Cosa succede se:

$$\tau = 0$$

$$ightharpoonup au = 1$$

$$\tau = 2$$

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistic

Metodo dei pas

Caso generale

Approccio standaro

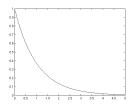
Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

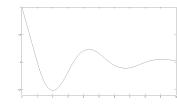
Convergenza del metodo dei passi

umerici

onclusione

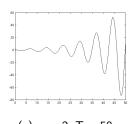
Figura: Grafici al variare del ritardo





(a)
$$\tau = 0, T = 5$$

(b)
$$\tau = 1, T = 20$$



(c)
$$\tau = 2, T = 50$$

Metodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del

Definizioni

Equazione logist

Netodo dei passi

Caso generale

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità Convergenza del metodo di

Convergenza del metodo de passi

umerici

Conclusione

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie letodi numerici per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei pass

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo de assi

perimenti merici

nclusione

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logist

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle

nvergenza del metodo de ssi

perimenti

merici

onclusione

erenze tra IVP e DDE

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizion

Equazione logistic

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

> onvergenza del metodo de ssi

perimenti Imerici

onclusione

erenze tra IVP e DDE

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Metodi numerio per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizio

Equazione logistic

Metodo dei passi

esempio Caso generale

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metodo (

sperimenti

speriment umerici

onclusione

ferenze tra IVP e DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Equazione logistica

Metodo dei passi

Caso generale

Approccio standaro

Estensioni continue di metodi numerici per IVP Localizzazione delle discontinuità

onvergenza del metod

sperimenti

umerici

onclusione

fferenze tra IVP e DDE

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Fine

Grazie per l'attenzione

Metodi numeric per DDE

Giampaolo Mele

Presentazione del problema

Definizioni

Metodo dei pass

Esempio

Approccio standard

Estensioni continue di metodi numerici per IVP

Convergenza del metodo dei passi

sperimenti

numerici

nclusione

erenze tra IVP e DDE