

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ
BİTİRME PROJESİ**

TÜREV

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Hüsamettin COŞKUN**

**HAZIRLAYAN
Melih TAŞKIN**



MANİSA 2022

T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

TÜREV

Melih TAŞKIN

BİTİRME PROJESİ

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Bu çalışma tarafımdan incelenmiş olup Bitirme Projesi olarak kabul edilmiştir.

.... / /

Danışman: Prof. Dr. Hüsamettin COŞKUN

Öğrenci : Melih TAŞKIN

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyesi ve öğrencisine ait olduğunu onaylarım.

.... / /

Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü Başkanı
Prof. Dr. Mustafa KAZAZ

ÖZGEÇMİŞ

8 Ocak 1997 tarihinde Denizlinin Acıpayam ilçesinde doğdum. İsmim Melih Taşkın. İlköğretim ve lise eğitimini İzmirin Tire ilçesinde tamamladım. 2015 senesinde liseden mezun oldum. 2019 senesinde Celal Bayar Üniversitesi Matematik Programında lisans eğitimine başladım.

TEŞEKKÜR

Başta bitirme projesi danışman hocam Prof. Dr. Hüsamettin Coşkun olmak üzere, sorularımı cevapsız bırakmayan ve bilgilerini arkadaşça paylaşan Manisa Celal Bayar Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma teşekkür ederim.

ÖZET

Bu projede Matematik biliminde türev kavramının neyi ifade ettiğini ve nerelerde kullanıldığını bahsediliyor. Teoremler ve örneklerle konunun anlaşılabilirliği kolaylaştırılmış, içerik oluşturulurken okuyucunun anlayabileceği en yalın dil ve kavramlar kullanılmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖZGEÇMİŞ	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. FONKSİYON OLARAK TÜREV	2
2.1. Türev Fonksiyonu	2
2.2. Türev İçin Alternatif Bir Formül	2
2.3. Tanımı Kullanarak Türev Hesaplama	3
2.4. Gösterim	4
2.5. Türevin Grafiğini Çizmek	4
2.6. Bir Aralıkta Türevlenebilirlik; Tek Taraflı Türevler	5
2.7. Ne Zaman Bir Fonksiyonun Bir Noktada Türevi Yoktur?	7
2.8. Türevlenebilir Fonksiyonlar Sürekli Dir	8
2.9. Türevlerin Ara Değer Özelliği	8
3. TÜREV KURALLARI	9
3.1. Kuvvetler, Katlar, Toplamlar ve Farklar	9
3.1.1. Bir Sabit Fonksiyonun Türevi	9
3.1.2. Pozitif Tamsayılar İçin Kuvvet Kuralı	10
3.1.3. Sabitle Çarpım Kuralı	10
3.1.4. Türev Toplama Kuralı	11
3.1.5. Çarpım Kuralı	13
3.1.6. Bölüm Kuralı	15
3.1.7. Negatif Tamsayılar İçin Kuvvet Kuralı	15
3.2. İkinci ve Daha Yüksek Mertebe Türevler	17
4. BİR DEĞİŞİM ORANI OLARAK TÜREV	18

4.1. Anlık Değişim Oranları	18
4.2. Bir Doğru Üzerinde Hareket-Yer Değiştirme, Hız,Sürat, İvme ve Çekme	19
4.3. Ekonomide Türevler	21
4.4. Değişikliğe Duyarlılık	23
5. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ	25
5.1. Sinüs Fonksiyonunun Türevi	25
5.2. Kosinüs Fonksiyonunun Türevi	26
5.3. Diğer Temel Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri	27
6. ZİNCİR KURALI ve PARAMETRİK DENKLEMLER	29
6.1. Bir Bileşke Fonksiyonun Türevi	29
6.2. "İç-Dış" Kuralı	31
6.3. Zincir Kuralının Üst Üste Kullanılması	32
6.4. Zincir Kuralı ve Bir Fonksiyonun Kuvveti	32
6.5. Parametrik Denklemler	33
6.6. Parametrize Eğrilerin Eğimleri	36
6.6.1. dy/dx İçin Parametrik Formül	36
6.6.2. d^2y/dx^2 İçin Parametrik Formül	38
6.6.3. Standart Parametrizasyonlar ve Türev Kuralları	38
7. KAPALI TÜREV ALMA	39
7.1. Kapalı Olarak Tanımlı Fonksiyonlar	40
7.2. Mercekler, Teğetler ve Normal Doğrular	43
7.3. Yüksek Mertebe Türevler	45
7.4. Türevlenebilir Fonksiyonların Rasyonel Kuvvetleri	45
8. İLİŞKİLİ ORANLAR	47
8.1. İlişkili Oranlar Denklemleri	47
8.1.1. İlişkili Oranlar Denklemleri	49
9. LİNEERİZASYON ve DİFERANSİYELLER	51
9.1. Lineerizasyon	51
9.2. Diferansiyeller	55

9.2.1. Diferansiyellerle Tahmin Etme	56
9.2.2. Diferansiyel Yaklaşımındaki Hata	57
9.3. Değişime Karşı Duyarlılık	59
10. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER	60
KAYNAKLAR	61

1. GİRİŞ

Türev bir fonksiyonun değişme hızını ölçer ve analizdeki en önemli fikirlerden biridir. Türevler hız ve ivme hesaplamada, bir hastalığın yayılma oranını tahmin etmede, verimliliği maksimize edecek şekilde üretim seviyesini belirlemede, silindirik bir kutunun ideal boyutlarını bulmada, tarih öncesi bir sanat eserinin yaşını belirlemede ve bir çok başka uygulamalar için kullanılır. Bu bölümde, türevleri hesaplamayı kolaylaştıracak yöntemler geliştireceğiz ve türevlerin karmaşık fonksiyonlara yaklaşımda nasıl kullanılacağını öğreneceğiz

2. FONKSİYON OLARAK TÜREV

2.1. Türev Fonksiyonu

Tanım 2.1.1. Bir $f(x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi, x 'teki değeri

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

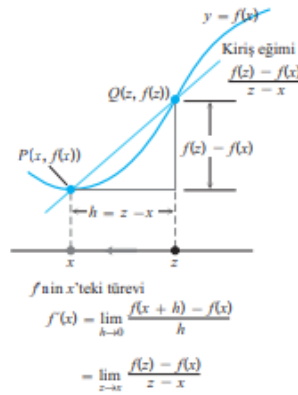
olan(limitin bulunması koşuluyla) f' fonksiyonudur.

Bağımsız değişken x 'e göre türev aldığımızı belirtmek için, tanımdan basitçe f yerine $f(x)$ notasyonunu kullanırız. f' 'nin tanım kümesi, f' 'nin tanım kümesinde limitin var olduğu noktaların kümesi, f' 'nin tanım kümesiyle aynı veya daha küçük olabilir. Belirli bir x için varsa, f' 'nin x 'te bir türevi vardır(türevlenebilir) deriz. f' 'nin tanım kümesinin her noktası için f' varsa f 'ye türevlenebilir deriz.

Eğer $z = x + h$ yazarsak $h = z - x$ olur ve ancak ve yalnız $z \rightarrow x$ ise $h \rightarrow 0$ dır. Bu nedenle, türevin bir eşdeğer tanımı şekil 2.1den de anlaşılabilir üzere aşağıdaki gibidir.

2.2. Türev İçin Alternatif Bir Formül

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$



Şekil 2.1. Bir f fonksiyonunun türevi için fark oranını yazma şekli ilgilendğimiz noktaları nasıl işaretlediğimize bağlıdır.

2.3. Tanımı Kullanarak Türev Hesaplama

Bir türevin hesaplama işlemine türev alma denir. Türev almanın $y = f(x)$ fonksiyonuna uygulanan bir işlem olduğunu vurgulamak için $f'(x)$ türevini göstermenin bir başka yolu olan

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

notasyonunu kullanırız. Örneğin,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2}x - 4 \right) = \frac{3}{2}$$

ve

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

gibidir. Aşağıdaki örnekler, türevin tanımının nasıl uygulanacağına yöneliktir. Örneklerin çözümleri adım adım olup, okuyucunun kolayca anlaması amaçlanmıştır.

Örnek 2.3.1. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ fonksiyonunun türevini alın.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x-1} \\ f(x+h) &= \frac{(x+h)}{(x+h)-1} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Örnek 2.3.2. (a) $x > 0$ için $y = \sqrt{x}$ 'in türevini bulunuz.

(b) $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $x = 4$ 'teki teğetini bulunuz.

Çözüm: (a) f' 'yi hesaplamak için eşdeğer formu kullanırız:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(b) $x = 4$ 'te eğrinin eğimi

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

tür. Teğet, $(4, 2)$ noktasından $1/4$ eğimiyle geçen doğrudur.

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$
$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

2.4. Gösterim

Bağımsız değişkenin x ve bağlı değişken y olduğu bir $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini göstermenin bir çok yolu vardır. Bazı yaygın alternatif gösterimler şunlardır:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

d/dx ve D sembolleri türev almanın bir işlem olduğunu belirtirler ve türev alma operatörleri olarak adlandırılırlar. dy/dx 'i " y 'nin ve x 'e göre türevi" olarak, df/dx ve $(d/dx)f(x)$ 'i de " f 'nin x 'e göre türevi" olarak okuruz. "Üs" gösterimleri y' ve f' Newton'un türev için kullandığı gösterimlerden gelir. d/dx gösterimleri Leibniz'in kullandıklarıyla aynıdır. $\frac{dy}{dx}$ sembolü bir oran olarak görülmemelidir.

$D(f)$ notasyonunu, türev fonksiyonu f' yerine f fonksiyonunun tanım kümesi ile karıştırmama konusunda dikkatli olun. Farklılık içerikten anlaşılmalıdır.

Bir türevin belirli bir $x = a$ sayısındaki değerini belirtmek için şu notasyonları kullanınız:

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}|_{x=a} = \frac{df}{dx}|_{x=a} = \frac{d}{dx}f(x)|_{x=a}$$

Örneğin, örnek 2.0.2de şunları yazabilirdik;

$$f'(4) = \frac{dy}{dx}\sqrt{x}|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Bazen bir ifadeyi hesaplamak için dik çizgi "|" yerine köşeli parantez "]" kullanınız.

2.5. Türevin Grafiğini Çizmek

Eğimleri f' 'nin grafiğinden tahmin ederek, çoğunlukla $y = f(x)$ 'in türevinin makul bir çizimini yapabiliriz. Yani, xy -düzleminde $(x, f'(x))$ noktalarını işaretler ve düzgün bir eğri ile onları birleştiririz. Bu eğri $y = f'(x)$ 'i temsil eder.

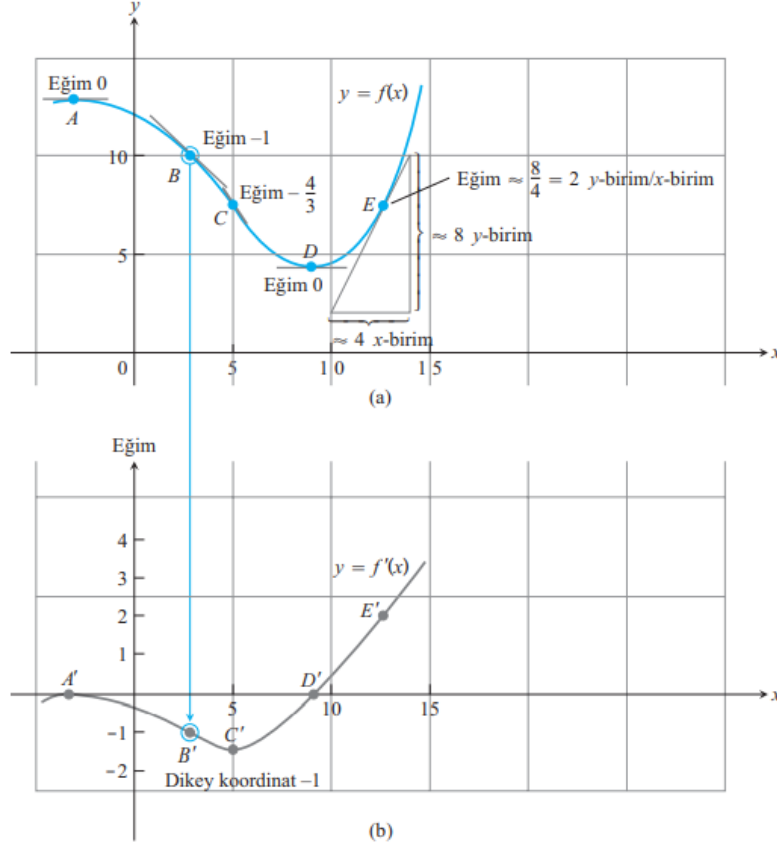
Örnek 2.5.1. Şekil 2.2a'daki $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini çizin.

Çözüm: Sık aralıklarla f grafiğine teğetler çizer ve teğetlerin eğimlerinden $f'(x)$ 'in bu noktalardaki değerlerini buluruz. Bunlara karşılık gelen $(x, f'(x))$ çiftlerini işaretler ve bunları Şekil 2.2b'de yapıldığı gibi düzgün bir eğriyle birleştiririz.

$y = f'(x)$ grafiğinden neler öğrenebiliriz? İlk bakışta şunlar görülebilir:

1. f' 'nin değişim oranının pozitif, negatif veya sıfır olduğu yerler;

2. Herhangir bir x değeriindeki büyüme oranının kabaca büyüklüğü ve bu büyüklüğün $f(x)$ 'in büyüklüğüyle ilişkisi;
3. Değişim oranının kendisinin artıp artmadığı.



Şekil 2.2. (a)'daki $y = f(x)$ grafiğinin eğimlerini işaretleyerek (b)'deki $y = f'(x)$ 'in grafiğini çizdik. Mesela, B' 'nin dikey koordinatı B 'deki eğimidir. f' 'in grafiği f 'nin eğiminin x ile nasıl değiştiğinin görsel kayıdır.

2.6. Bir Aralıkta Türevlenebilirlik; Tek Taraflı Türevler

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun (sonlu veya sonsuz) bir açık aralığın her noktasında türevi varsa, $f(x)$ 'e bu aralıkta türevlenebilir denir. Bir $[a, b]$ kapalı aralığının içi (a, b) açık aralığında türevlenebilirse ve uç noktalarında

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

limitleri varsa, $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir.

Bir fonksiyonun tanım aralığının herhangi bir noktasında sağdan ve soldan türevler tanımlanabilir. Tek taraflı ve iki taraflı limitler arasındaki ilişki bu türevler için de geçerlidir. Bir fonksiyonun, ancak ve yalnız bir noktada sağdan ve soldan türevleri varsa ve bu tek taraflı türevler eşitse o noktada türevi olabilir.

Örnek 2.6.1. $y = |x|$ Fonksiyonu Orijinde Türevlenebilir Değildir

$y = |x|$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında türevlenebilir olduğunu, fakat $x = 0$ 'da türevinin bulunmadığını gösterin.

Çözüm: Orijinin sağında,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = 1, \left(\frac{d}{dx}(mx + b) = m, |x| = x \right)$$

ve solunda

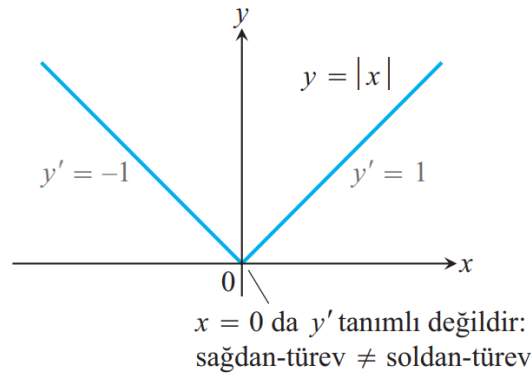
$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = -1, \left(\frac{d}{dx}(mx + b) = m, |x| = -x \right)$$

bulunur(Şekil 2.3). Orijinde türev olamaz, çünkü tek taraflı türevler bu noktada farklıdır: 0'da $|x|$ 'in sağdan türevi

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

0'da $|x|$ 'in soldan türevi

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{aligned}$$

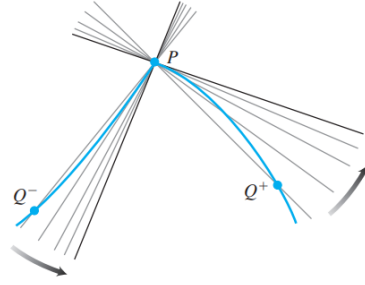


Şekil 2.3. $y = |x|$ fonksiyonu, grafiğinde bir "köşenin" bulunduğu orijinde türevlenemez.

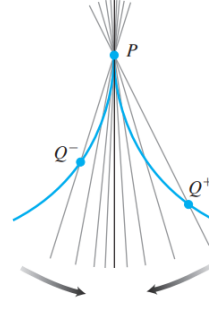
2.7. Ne Zaman Bir Fonksiyonun Bir Noktada Türevi Yoktur?

Bir fonksiyonun grafiğindeki $P(x_0, f(x_0))$ 'dan ve yakınındaki bir Q noktasından geçen kirişlerin eğimleri, Q P 'ye yaklaşırken bir limite gidiyorsa, fonksiyonun x_0 noktasında türevi vardır. Q P 'ye giderken, kirişler bir limit konuma ulaşamadıklarında veya dikey olduklarında, türev bulunmaz. Böylece, türevlenebilirlik bir f fonksiyonunun grafiği üzerinde "düzgünlük" koşuludur. Grafiği düzgün olan bir fonksiyonun ise birkaç sebepten dolayı bir noktada türevi bulunmayabilir, grafiğinde aşağıdaki durumlar bulunuyorsa türevi yoktur:

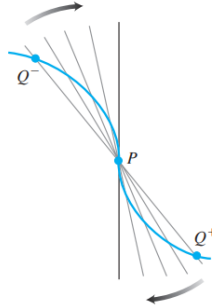
1. Bir *köşe*, tek taraflı türevler farklıdır.



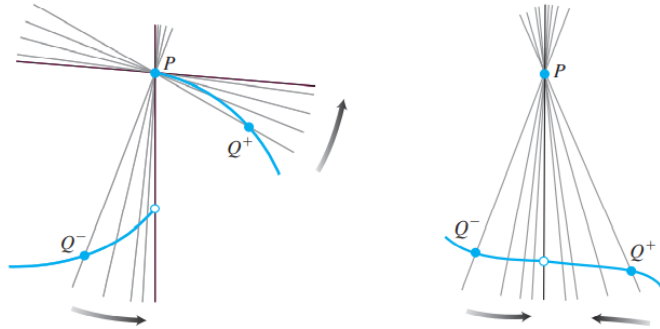
2. Bir *sivri uç*, PQ kirişinin eğimi bir taraftan ∞ 'a, diğer taraftan $-\infty$ 'a yaklaşır.



3. bir *dikey teğet*, PQ kirişinin eğimi iki taraftan da ∞ 'a veya iki taraftan da $-\infty$ 'a yaklaşır (Burada $-\infty$ 'a yaklaşmaktadır).



4. Bir *süreksizlik*.



2.8. Türevlenebilir Fonksiyonlar Sürekli

Bir fonksiyon, türevinin bulunduğu her noktada sürekli

Teorem 2.8.1. f 'nin $x = c$ 'de bir türevi varsa, f fonksiyonu $x = c$ 'de sürekli.

İspat: $f'(c)$ 'nin var olduğu verilmiştir, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ veya buna eşdeğer olarak $\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = f(c)$ olduğunu göstermemiz gerekir. $h \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} f(c + h) &= f(c) + (f(c + h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

yazılabilir.

Şimdi, $h \rightarrow 0$ iken limit alalım.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) + 0 \\ &= f(c). \end{aligned}$$

bulunur.

Tek taraflı limitlerdeki ifadelerin benzerleri f 'nin $x = c$ 'de bir taraftan (sağdan veya soldan) türevi varsa, f 'nin $x = c$ 'de o taraftan sürekli olduğunu gösterir. Bu teorem şunu söyler: bir fonksiyonun bir noktada süreksizliği varsa fonksiyon o noktada türevlenebilir olamaz. Bu teoremin tersi doğru olmak zorunda değildir. Örnek 2.6.1'de verdiğimiz $|x|$ fonksiyonu orijinde sürekli fakat türevlenebilir değildir.

2.9. Türevlerin Ara Değer Özelliği

İlk olarak, Fransız matematikçi Jean Gaston Darboux(1842-1917) tarafından, 1875 yılında ispat edilen aşağıdaki teoremden görülebileceği gibi, her fonksiyon bir başka fonksiyonun türevi olamaz.

Teorem 2.9.1. a ve b , f 'nin türevli olduğu bir aralıkta iki noktaysa, f' , $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri alır.

3. TÜREV KURALLARI

Bu bölüm, fonksiyon çeşitlerinden çok büyük bir bölümünün türevlerini almamızı sağlayan birkaç kural tanıtmaktadır. Bu kuralları burada ispat etmekle, her seferinde tanımlı uygulamadan fonksiyonların türevlerini alabileceğiz

3.1. Kuvvetler, Katlar, Toplamlar ve Farklar

Türev almanın birinci kuralı sabit her fonksiyonun türevi sıfır olduğudur.

3.1.1. Bir Sabit Fonksiyonun Türevi

f sabit fonksiyon $f(x) = c$ ise,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

olur.

İspat: Türev tanımını, sonuçları sabit c değeri olan $f(x) = c$ fonksiyonuna uyguluyoruz. Her x değerinde

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

olduğunu buluruz.

Örnek 3.1.1. f 'nin değeri sabit ve $f(x) = 8$ ise,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0$$

dır. Benzer şekilde,

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{3}) = 0$$

dır.

3.1.2. Pozitif Tamsayılar İçin Kuvvet Kuralı

n pozitif bir tamsayı ise,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

olur.

Pozitif tam sayılar için kuvvet kuralının birinci ispatı

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

formülü, sağ taraf çarpılarak sağlanabilir. Böylece, türev tanımının alternatif formundan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^n - x^n}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} (z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

bulunur.

Pozitif tam sayılar için kuvvet kuralının ikinci ispatı: $f(x) = x^n$ ise, $f(x+h) = (x+h)^n$ olur. n pozitif bir tam sayı olduğundan, Binom Teoremine göre $(x+h)^n$ yi açarak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

buluruz.

3.1.3. Sabitle Çarpım Kuralı

u x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve c bir sabit ise,

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

olur.

Özel olarak, n pozitif bir tamsayı ise,

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

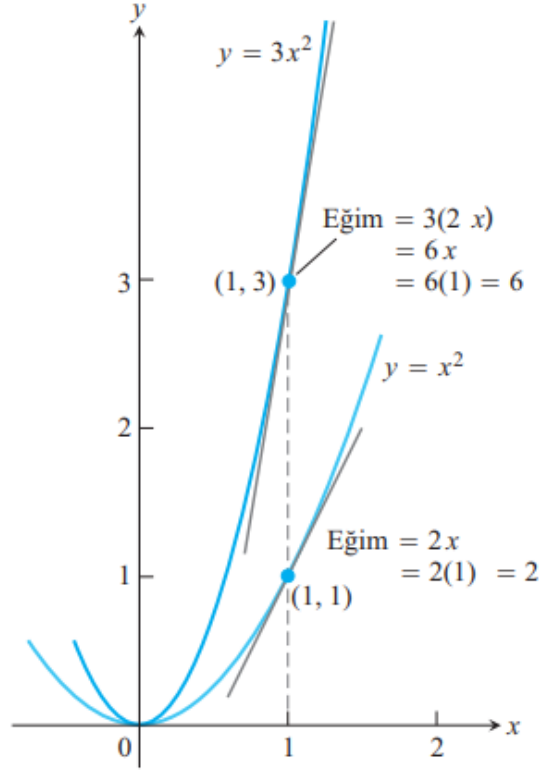
olur. İspat:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(cu) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ &= c \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Örnek 3.1.2.

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

türev formülü $y = x^2$ grafiğini her y koordinatını 3 ile çarparak yeniden ölçeklersek, her noktada eğimi 3 ile çarpacağımızı söyler(Şekil 3.1).



Şekil 3.1. $y = x^2$ ve $y = 3x^2$ grafikleri. y - koordinatlarını üçle çarpmak eğimi üç katına çıkarır.

Yararlı bir özel durum: Türevlenebilir bir fonksiyonun negatifinin türevi fonksiyonun türevinin negatiftir.

Sabitte çarpım kuralında $c = -1$ alırsak

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}$$

elde ederiz.

3.1.4. Türev Toplama Kuralı

u ve v ’in türevlenebilir fonksiyonları ise, toplamları $u + v$ her ikisinin de türevlenebildiği her noktada türevlenebilirdir. Bu şekildeki noktalarda

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

olur.

İspat: Türev tanımını $f(x) = u(x) + v(x)$ 'e uygularız.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

Toplam kuralını sabitle çarpım kuralıyla birleştirirsek, türevlenebilen fonksiyonların farkının türevinin, türevlerinin farkı olduğunu söyleyen fark kuralını elde ederiz

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

Toplam kuralı ayrıca, toplamda sonlu sayıda fonksiyon bulunması şartıyla, iki fonksiyondan fazla fonksiyonun toplamı için de geçerlidir. u_1, u_2, \dots, u_n x 'te türevlenebiliyorsa, $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ de türevlenebilirdir ve şu sonucu buluruz:

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}$$

ve bulunan bu sonuç tümevarım metoduyla ispatlanır.

Örnek 3.1.3. Bir Toplamın Türevi:

$$\begin{aligned}y &= x^4 + 12x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) \\ &= 4x^3 + 12\end{aligned}$$

Örnek 3.1.4. Bir Polinomun Türevi:

$$\begin{aligned}y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5\end{aligned}$$

Bu örnekten görebileceğiniz gibi, herhangi bir polinomun türevini terim terim alabileceğimize dikkat edin.

Örnek 3.1.5. Yatay Teğetleri Bulma:

$y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisinin yatay teğeti var mıdır? Varsa, nerededir?

Çözüm: Varsa, yatay teğetler eğiminin sıfır olduğu noktalarda bulunur yani $dy/dx = 0$ olmalıdır. Şu halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

dir.

Şimdi, x için $\frac{dy}{dx} = 0$ denklemini çözelim.

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

$y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisinin $x = 0, 1$ ve -1 'de yatay teğetleri vardır. Eğri üzerinde bunlara karşılık gelen noktalar $(0,2)$, $(1,1)$ ve $(-1,1)$ noktalarıdır.

3.1.5. Çarpım Kuralı

İki fonksiyonun toplamının türevi türevlerinin toplamına eşitken, iki fonksiyonun çarpımlarının türevi türevlerinin çarpımına eşit değildir. Örneğin,

$$\frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

iken

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

bulunur. İki fonksiyonun çarpımının türevi şimdi açıklayacağımız gibi iki çarpımın toplamına eşittir.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

olur.

uv çarpımının türevi u kere v 'nin türevi artı v kere u 'nun türevidir. Üslü gösterimle, $(uv)' = uv' + vu'$ yazılır. Fonksiyon notasyonu ile

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

yazılabilir.

İspat:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Bu kesri u ve v 'nin türevlerinin farklar oranını içeren bir hale dönüştürmek için kesrin pay kısmına $u(x+h)$ ekler çıkarırız.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \end{aligned}$$

h sıfıra yaklaşırken, $u(x+h)u(x)$ 'e yaklaşır, çünkü u , x 'te türevlenebildiği için, x 'te süreklidir. İki kesir de dv/dx ve du/dx 'in x 'teki değerlerine yaklaşır. Kısacası

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

bulunur.

Örnek 3.1.6. Çarpım Kuralını Kullanma:

$$y = \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

fonksiyonun türevini bulun.

Çözüm: $u = 1/x$ ve $v = x^2 + (1/x)$ ile çarpım kuralını uyguluyoruz.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \frac{1}{x} \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) + \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} \\ &= 1 - \frac{2}{x^3}\end{aligned}$$

Örnek 3.1.7. Sayasal Değerlerden Türev:

$y = uv$ u ve v fonksiyonlarının çarpımı olsun.

$$u(2) = 3, u'(2) = -4, v(2) = 1, v'(2) = 2$$

ise $y'(2)$ 'yi bulun.

Çözüm:

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

şeklinde yazılmış olan çarpım kuralından

$$\begin{aligned}y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\ &= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2\end{aligned}$$

buluruz.

Örnek 3.1.8. Bir Çarpımın Türevini İki Yolla Bulma:

$y = (x^2)(x^3 + 3)$ fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm: (a) Çarpım kuralından, $u = x^2 +$ ve $v = x^3 + 3$, alırsak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [(x^2 + 1)(x^3 + 3)] &= (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x) \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x.\end{aligned}$$

(b) Bu özel çarpımın türevi ayrıca, y 'nin orijinal ifadesindeki çarpımları yapıp ortaya çıkan polinomun türevini almakla da bulunabilir:

$$\begin{aligned}y &= (x^2 + 1)(x^3 + 3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3 \\ \frac{dy}{dx} &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\end{aligned}$$

Bu ilk sonucumuzla uyumludur. İki türevlenebilir fonksiyonun çarpımının türevi türevlerinin çarpımları olmadığı gibi, iki fonksiyonun bölümünün türevi de türevlerinin bölümü değildir.

3.1.6. Bölüm Kuralı

u ve v x 'te türevlenebilir ve $v(x) \neq 0$ ise, u/v bölümü x 'te türevlenebilir ve sonuç

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

olur.

Fonksiyon notasyonu ile:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

Örnek 3.1.9. $y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm: $u = t^2 - 1$ ve $v = t^2 + 1$ olarak bölüm kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(t^2 + 1).2t - (t^2 - 1).2t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Bölüm kuralının ispatı:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

Son kesr u ve v 'nin türevlerinin farklar oranını içeren bir kesre çevirmek için, kesrin pay kısmına $v(x)u(x)$ ekler ve çikartırız. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

buluruz. Bölünen ve bölenin limitini alarak, bölüm kuralını elde ederiz.

3.1.7. Negatif Tamsayılar İçin Kuvvet Kuralı

n negatif tam bir tamsayı is ve $v \neq 0$ ise

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

olur. Negatif tamsayılar için kuvvet kuralı pozitif tamsayılarınkile aynıdır.

Örnek 3.1.10. (a) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

(b) $\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{x^3} \right) = 4 \frac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$

Negatif tamsayılar için kuvvet kuralının ispatı yapılırken, daha önce ispatlanmış olan bölüm kuralını kullanır. n negatif bir tamsayı ise, m pozitif bir tamsayı olmak üzere $n = -m$ olur. Yani, $x^n = x^{-m} = 1/x^m$ olur ve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\ &= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} \\ &= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

Örnek 3.1.11. Bir Eğriye Teğet:

$$y = x + \frac{2}{x}$$

eğrisinin (1,3) noktasındaki teğetinin denklemini bulun.

Çözüm: Eğrinin eğimi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

olur. $x = 1$ 'deki eğim ise

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1.$$

olarak bulunur. (1,3) noktasından -1 eğimi ile geçen doğru

$$y - 3 = (-1)(x - 1)$$

$$y = -x + 1 + 3$$

$$y = -x + 4$$

doğrusudur.

Bir türev alma problemini çözerken hangi kuralların seçileceği ne kadar iş yapmamız gerektiğine bağlıdır.

Aşağıda bir örnek verilmektedir.

Örnek 3.1.12. Hangi Kuralın Kullanılacağını Seçme:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

fonksiyonunun türevini almak için bölüm kuralını kullanmak yerine kesrin üst tarafını açın ve x^4 ile bölün:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

Şimdi de toplam ve kuvvet kurallarını kullanın:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

3.2. İkinci ve Daha Yüksek Mertebe Türevler

$y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon ise $f'(x)$ türevi de bir fonksiyondur. f'' 'de türevlenebilirse, x 'in yeni bir fonksiyonunu f'' 'yü elde etmek için f' 'nin türevini alabiliriz. Böylece $f'' = (f')'$ olur. f'' fonksiyonuna f' 'nin ikinci türevi denir. Notasyonla

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x).$$

D^2 sembolü, türev alma işleminin iki defa uygulandığı anlamındadır.

$y = x^6$ ise, $y' = 6x^5$ 'dir ve

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^5) = 30x^4$$

olur. Böylece $D^2(x^6) = 30x^4$ dir.

y'' türevlenebilirse, türevi $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$, y' 'nin x 'e göre üçüncü türevidir. Verilen isimler, tahmin edebileceğiniz gibi, herhangi bir pozitif n sayısı için,

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

y' 'nin x 'e göre n . türevi olacak şekilde devam eder.

İkinci türevi, $y = f(x)$ 'in grafiğinin her noktasındaki eğetin eğiminin değişim oranı olarak yorumlayabiliriz. Bir sonraki bölümde ikinci türev bize şunu gösterecektir: değişme noktası hareket ettirilirken, eğri teğetten yukarıya doğru mu yoksa aşağıya doğru mu eğilmektedir. Bir sonraki alt bölümde ikinci ve üçüncü türevleri, bir doğru üzerinde hareket bakımından yorumlayacağız.

Örnek 3.2.1. Yüksek Mertebe Türevleri Bulma:

$y = x^3 - 3x^2 + 2$ 'nin ilk dört türevi:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

$$y^{(4)} = 0$$

Fonksiyonun, beşinci ve daha yüksek türevleri sıfır olmak üzere, her mertebeden türevi vardır.

4. BİR DEĞİŞİM ORANI OLARAK TÜREV

Bu bölümde, türevlerin, çevremizdeki dünyada değişen bazı şeylerin oranlarını modellemede kullanıldığı uygulamaları araştırmaya devam ediyoruz. Değişimi, zamana göre değişim olarak düşünmek doğaldır, ancak başka değişkenler de aynı şekilde incelenebilir. Örneğin, bir doktor bir ilacın miktarındaki değişikliklerin vücudun ilaca nasıl etkilediğini bilmek isteyebilir. Bir ekonomist, çelik üretim maliyetinin, üretilen miktar ton sayısına bağlı olarak nasıl değiştiğini araştırmak isteyebilir.

4.1. Anlık Değişim Oranları

$(f(x+h) - f(x))/h$ fark bölümünü, f 'nin x 'ten $x+h$ 'ye kadar olan aralık üzerindeki ortalama değişim oranı olarak yorumlarsak, $h \rightarrow 0$ iken limitini, f 'nin x 'teki değişim oranı olarak yorumlayabiliriz.

Tanım 4.1.1. f 'nin x_0 'da x 'e göre anlık değişim oranı

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

türevidir(limitin var olması koşuluyla).

Böylece, anlık oranlar ortalama oranların limitleridir.

x zamanı temsil etmese bile anlık kelimesini kullanmak alışkanlık halini almıştır. Ancak bu kelime genellikle ihmal edilir. *Değişim oranı* derken, *anlık değişim oranını* kastedeceğiz.

Örnek 4.1.1. Bir çemberin alanı A , çapa şu formülle bağlıdır:

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

Çap 10 m olduğunda, alan çapa göre ne hızla değişir?

Çözüm: Çapa bağlı olarak alanın(anlık) değişim oranı

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}$$

dir. $D = 10$ m olduğunda, alan $(\pi/2)10 = 5\pi$ m²/m hızıyla değişmektedir.

4.2. Bir Doğru Üzerinde Hareket-Yer Değiştirme, Hız,Sürat, İvme ve Çekme

Bir cismin bir koordinat doğrusu (mesela bir s -ekseni) boyunca hareket ettiğini ve bu doğru üzerindeki konumunu, s , zamanın, t , bir fonksiyonu olarak bildiğimizi varsayalım:

$$s = f(t)$$

Cismin t ile $t + \Delta t$ arasındaki zaman aralığında *yer değiştirmesi*

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ve cismin bu zaman aralığındaki *ortalama hızı*

$$v_{av} = \frac{\text{yer değiştirmesi}}{\text{gidiş zamanı}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

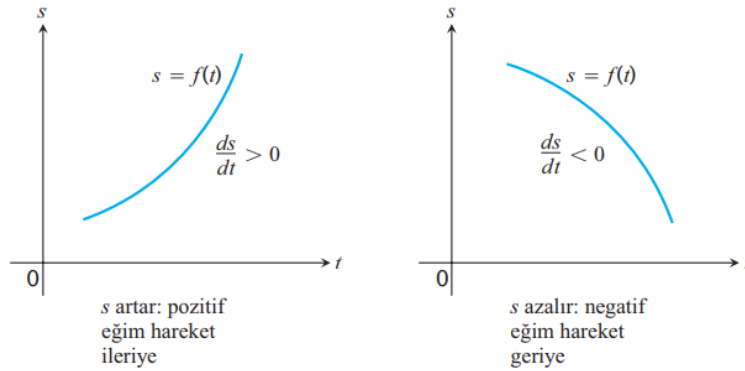
dir.

Cismin tam t anındaki hızını bulmak için, t 'den $t + \Delta t$ 'ye olan aralık üzerindeki ortalama hızın, Δt sıfıra giderken limitini alırız. Bu limit f 'nin t 'ye göre türevidir.

Tanım 4.2.1. *Hız(Anlık hız)* konumun zamana göre türevidir. Bir cismin t anındaki konumunu $s = f(t)$ ise, cismin t anındaki hızı

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Bir cismin hızı, cismin ne kadar hızlı hareket ettiğini göstermesinin yanı sıra hareketin yönünü de göstermektedir. Cisim ileriye doğru hareket ederken (s artar), hız pozitiftir; cisim geriye doğru hareket ederken (s azalır), hız negatiftir.



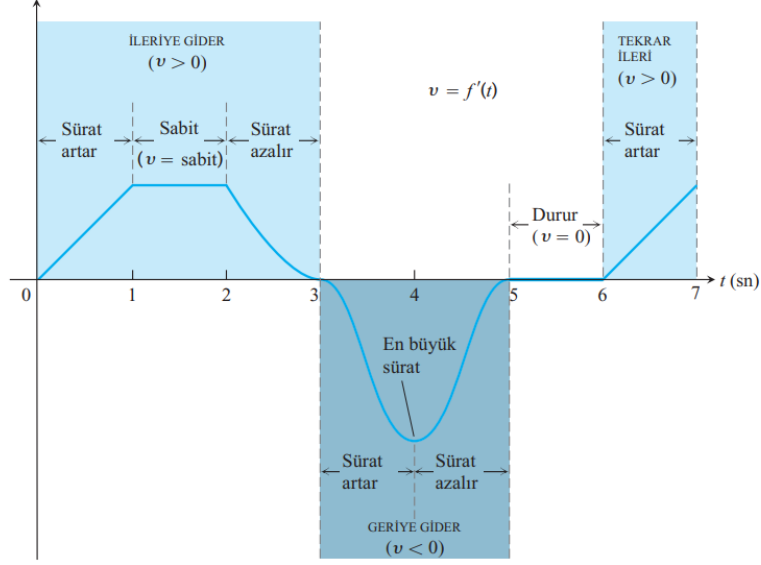
Şekil 4.1. Bir doğru boyunca $s = f(t)$ hareketi için $v = ds/dt$, s artarken pozitif, s azalırken negatiftir.

Bir arkadaşın evine gidip dönerken 30 mil/sa ile gidiyorsak, hız göstergesi giderken 30 mil/sa gösterirken, dönerken, evden uzaklığımız azaldığı halde, -30 mil/sa göstermeyecektir. Hız göstergesi her zaman hızın mutlak değeri olan sürati gösterir. Sürat yönden bağımsız olarak ileri gitme oranını ölçer.

Tanım 4.2.2. *Sürat* hızın mutlak değeridir

$$\text{Sürat} = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

Örnek 4.2.1. Şekil 4.2’de, bir koordinat doğrusu boyunca ilerleyen bir parçacığın hızı $v = f'(t)$ görülmektedir. Parçacık ilk 3 saniye boyunca ileri doğru, sonraki 2 saniye boyunca geri doğru hareket etmekte, bir saniye durmakta ve yine ileri doğru hareket etmektedir. Parçacık en yüksek sürata $t = 4$ anında, geriye doğru giderken ulaşır.



Şekil 4.2. Örnek İçin hız grafiği.

Bir cismin hızının değişim oranına *cismin ivmesi* denir. İvme, bir cismin ne kadar çabuk sürat kazandığını veya kaybettiğini ölçer.

İvmedeki ani bir değişime çekme denir. Bir otomobil veya bir otobüsteki yolculuk sarsıntılı olduğunda bu, ilgili ivmelerin mutlaka büyük olmasından değil ivmedeki değişimlerin ani olmasındandır.

Tanım 4.2.3. *İvme* hızın zamana göre türevidir. Bir cismin t anındaki konumu $s = f(t)$ ise, cismin t anındaki ivmesi şu şekildedir:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Silkinme ivmenin zamana göre türevidir:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Dünya yüzeyine yakın yerlerde bütün cisimler aynı sabit ivmeyle düşerler. Galileo’nun serbest düşme ile ilgili deneyi, s mesafe ve g de dünyanın yerçekiminden doğan ivme olmak üzere, bizi

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

denkleminde götürür. Bu denklem hava tepkisinin bulunmadığı vakumda geçerlidir, ancak kaya veya çelik aletler gibi yoğun, ağır cisimlerin, havanın tepkisinin onları yavaşlatmaya başlamadığı düşüşünün ilk birkaç saniyesini de çok iyi modeller.

$s = (1/2)gt^2$ denklemindeki g 'nin değeri t ve s 'yi ölçmekte kullanılan birimlere bağlıdır. t saniye (standart birim) iken, deniz seviyesindeki ölçümle tanımlanan g 'nin değeri, İngiliz birimleriyle yaklaşık 32 ft/sn² (fit bölü saniye kare) ve metrik birimle $g = 9.8$ m/sn²(metre bölü saniye kare)dır. (Bu yerçekimi sabitleri Dünyanın ağırlık merkezinden uzaklığa bağlıdır ve örneğin Everest teğesinde birazcık daha azdır.)

Sabit olan yer çekimi ivmesinin silkinmesi sıfırdır:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0$$

Bir cisim serbest düşme sırasında sarsılmaz.

4.3. Ekonomide Türevler

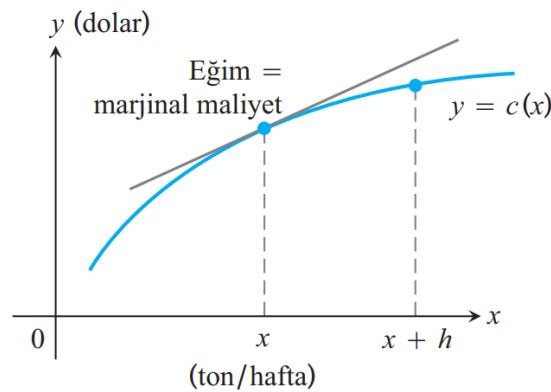
Mühendisler *hız* ve *ivme* gibi terimleri hareketi tanımlayan fonksiyonların türevlerini belirtmek için kullanırlar. Ekonomistlerin de değişim oranları ve türevler için özel kelimeleri vardır. Bunlara *marjinaler* derler.

Bir üretim işleminde *üretim maliyeti* $c(x)$ üretilen birim miktarı x 'in bir fonksiyonudur. *Marjinal üretim maliyeti* ise maliyetin (c) üretim seviyesine (x) göre değişim oranı, dolayısıyla $\frac{dc}{dx}$ 'tir.

Örneğin, $c(x)$ bir haftada x ton çelik üretmek için gereken dolar miktarı olsun. $x + h$ birim üretmek daha pahalı olacaktır ve h ile bölünmüş maliyet farkı bir haftada ton başına maliyetteki ortalama artıştır:

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{üretilen her } h \text{ ton fazla çeliğin ortalama maliyeti}$$

Bu oranın $h \rightarrow 0$ iken limiti, haftalık üretim x ton iken bir haftada daha fazla çelik üretmenin *marjinal maliyetidir*(Şekil 4.3):



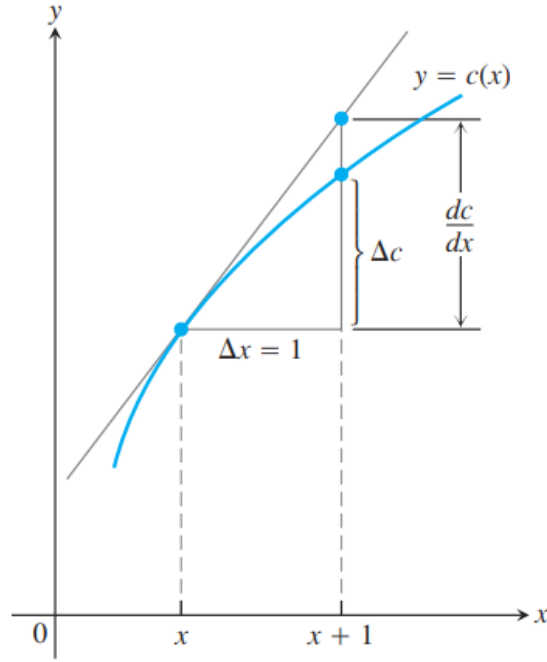
Şekil 4.3. Haftalık çelik üretimi: $c(x)$, haftada x ton üretimin maliyetidir. İlave h ton üretimin maliyeti $c(x+h) - c(x)$ dir.

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{marjinal üretim maliyeti}$$

Bazen, marjinal üretim maliyeti fazladan bir birim üretmenin maliyeti olarak da tanımlanır:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

Bu da yaklaşık olarak dc/dx 'in x 'teki değeridir. Bu yaklaşım, c 'nin grafiği x yakınlarında çok hızlı değişmiyorsa, kabul edilebilirdir. Bu durumda fark bölümü, limitine yani dc/dx 'e yakın olacaktır, bu da $\Delta x = 1$ is teğetteki yükselmedir (Şekil 4.4). Yaklaşım, büyük x değerlerinde daha iyi sonuç verir.



Şekil 4.4. Marjinal maliyet dc/dx üretimin $\Delta x = 1$ birim artmasıyla oluşacak Δc maliyetidir.

Ekonomistler, toplam maliyet fonksiyonunu genellikle

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

Şeklinde bir kübik polinomla temsil ederler. Burada γ kira, ısınma, ekipman ve yönetim giderleri gibi *sabit maliyetleri* temsil eder. Diğer terimler hammadde, vergiler ve işçilik gibi *değişken maliyetleri* temsil ederler. Sabit maliyetler üretilen birim sayısından bağımsızdırlar oysa değişken maliyetler üretim miktarına bağlıdırlar. Bir kübik polinom, ilgili nicelik aralığında maliyet davranışını yakalamaya yetecek kadar karmaşıktır.

Örnek 4.3.1. 8 ile 30 arasında radyatör üretilirken x radyatör üretmenin maliyetinin

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

dolar olduğunu ve x radyatör satılmasından elde edilen gelirin

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

dolar olduğunu varsayın. Dükkanınız normal olarak günde 10 radyatör üretmektedir. Günde bir radyatör daha üretmek maliyette ne kadar fark edecektir ve günde 11 radyatör satmakla gelirdeki tahmini artış ne olacaktır?

Çözüm: Normalde günde 10 radyatör üretilirken, bir radyatör daha fazla üretmenin maliyeti $c'(10)$ civarındadır:

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15 \\ c'(10) &= 3(100) - 12(10) + 15 = 195 \end{aligned}$$

Ek masraf 195 dolar civarında olacaktır. Marjinal gelir

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

dir. Marjinal gelir fonksiyonu da fazladan bir birim satıldığında elde edilecek geliri belirtmektedir. Günde 10 radyatör satarken satışınızı 11 radyatöre çıkarırsanız, geliriniz

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252\$$$

kadar artmasını bekleyebilirsiniz.

Örnek 4.3.2. Marjinal oranların diline biraz alışmak için, marjinal vergi oranlarını ele alalım. Marjinal gelir vergisi oranınız %28 ise ve gelirinizin 1000\$ artarsa, gelir vergisi olarak fazladan bir 280\$ vergi vermek zorunda kalacağınızı düşünebilirsiniz. Bu toplam gelirinizin %28'ini vergi olarak vereceğiniz anlamına gelmez. Sadece şu andaki I gelir düzeyinizde, gelire göre T vergisindeki artış oranının $dT/dI = 0.28$ olacağını söyler. Kazandığınız fazladan her dolar için 0.28\$ vergi vereceksinizdir. Elbette kazancınız daha fazla artarsa, vergi diliminiz değişebilir ve marjinal oranınız artabilir.

4.4. Değişikliğe Duyarlılık

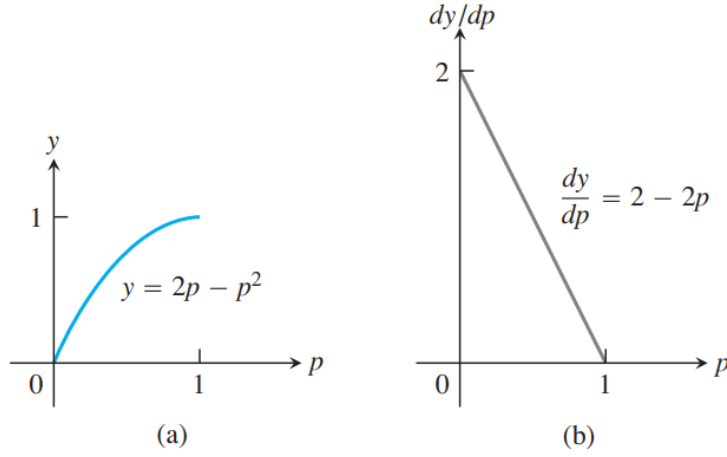
x 'teki küçük bir değişim bir fonksiyonun değerinde büyük bir değişime yol açtığında, fonksiyonun x 'teki değişime karşı duyarlı olduğunu söyleriz. $f'(x)$ türevi bu duyarlılığın ölçüsüdür.

Örnek 4.4.1. Bezelyeler ve başka bitkilerle uğraşan Avusturyalı keşiş Gregor Johann Mendel (1822-1884) melezlemenin ilk bilimsel açıklamalarını ortaya koymuştur.

Dikkatlice yapılmış kayıtları, p (0 ile 1 arasında bir sayı) bezelyelerdeki düzgün kabuk geninin (baskın gen) sıklığı ve $(1 - p)$ de bezelyelerdeki kıvrık kabuk geninin (çekinik gen) sıklığıysa, düzgün kabuklu bezelyelerin topluluktaki oranının

$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2$$

olduğunu göstermiştir. Şekil 4.5a'daki $y - p$ grafiği y 'nin değerinin, p 'deki bir değişikliğe, p 'nin küçük değerleri için, p 'nin büyük değerleri için olduğundan daha fazla duyarlı olduğunu göstermektedir. Gerçekten de, bu, p 0 civarındayken dy/dp 'nin 2'ye, p 1 civarındayken de 0'a yakın olduğunu gösteren Şekil 4.5b'deki türev grafiğiyle daha iyi vurgulanmaktadır.



Şekil 4.5. (a)Düzgün bezelyelerin oranını belirleyen $y = 2p - p^2$ grafiği (b) dy/dp grafiği.

Genetik için anlamı şudur: Oldukça çekinik bir topluluk içine biraz daha baskın gen eklemek(kıvrık kabuklu bezelye sıklığının az olduğu yerde), oldukça baskın bir topluluktaki benzer artışa göre, sonraki jenerasyonlarda dramatik etkilere neden olacaktır.

5. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Hakkında bilgi edinmek istediğimiz bir çok olay yaklaşık olarak periyodiktir (elektromanyetik alanlar, kalp atışları, gel-gitler, hava). Sinüslerin ve kosinüslerin türevleri periyodik değişiklikleri tanımlamada anahtar rolü oynarlar. Bu bölüm altı temel trigonometrik fonksiyonun türevlerinin nasıl alınacağını göstermektedir.

5.1. Sinüs Fonksiyonunun Türevi

x , radyan olarak ölçülmek üzere $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevini almak için, sinüs için açılımla özdeşliği ile birleştiririz:

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$f(x) = \sin x$, ise

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Sinüs fonksiyonunun türevi kosinüs fonksiyonudur:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

Örnek 5.1.1. Sinüs içeren türevler:

(a) $y = x^2 - \sin x$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= 2x - \cos x.\end{aligned}$$

(b) $y = x^2 \sin x$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x \\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x.\end{aligned}$$

(c) $y = \frac{\sin x}{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\end{aligned}$$

5.2. Kosinüs Fonksiyonunun Türevi

Kosinüs için

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

açı toplama formülünün yardımıyla,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

Kosinüs fonksiyonunun türevi sinüs fonksiyonunun negatiftir:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Örnek 5.2.1. Kosinüs içeren türevler:

(a) $y = 5x + \cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= 5 - \sin x.\end{aligned}$$

(b) $y = \sin x \cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

(c) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \sin x}\end{aligned}$$

5.3. Diğer Temel Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$\sin x$ ve $\cos x$ 'in türevlenebilir fonksiyonları oldukları için bunlarla ilişkili

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

fonksiyonları da tanımlı oldukları bütün x değerlerinde türevlenebilirdirler. Bölüm kurallarıyla bulunan türevleri aşağıdaki formüllerle verilir. Kotanjant ve kosekant fonksiyonlarının türev formüllerindeki eksi işareti dikkat edin.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x\end{aligned}$$

Örnek 5.3.1. $d(\tan x)/dx$ 'i bulun.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

Örnek 5.3.2. $y = \sec x$ ise y'' 'nü bulun.

Çözüm:

$$\begin{aligned}y &= \sec x \\y' &= \sec x \tan x \\y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\&= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) \\&= \sec x (\sec^2 x) + \tan x (\sec x \tan x) \\&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x\end{aligned}$$

Trigonometrik fonksiyonların, tanım kümelerinin tamamında türevlenebilir olmaları, tanım kümelerinin her noktasında sürekliliklerinin bir başka ispatıdır(bkz. Teorem 2.8.1). Dolayısıyla, trigonometrik fonksiyonların cebirsel kombinasyonlarının ve bileşkelerinin limitlerini doğrudan yerine yazma ile hesaplayabiliriz.

Örnek 5.3.3. Bir trigonometrik limit bulma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2 + 1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

6. ZİNCİR KURALI ve PARAMETRİK DENKLEMLER

$y = f(u) = \sin u$ ve $u = g(x) = x^2 - 4$ fonksiyonlarının türevlerini nasıl alacağımızı biliyoruz, fakat $F(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 - 4)$ gibi bir bileşkenin türevini nasıl alırız? Yani $F(x) = f \circ g$ 'nin türevini nasıl buluruz? Cevap, iki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesinin türevinin, iki fonksiyonun da uygun noktalarda alınmış türevlerinin çarpımı olduğunu söyleyen zincir kuralıdır. Zincir kuralı büyük olasılıkla matematikte en sık kullanılan türev alma yöntemidir. Bu bölüm, kuralı ve nasıl kullanılacağını tanımlamaktadır.

6.1. Bir Bileşke Fonksiyonun Türevi

Örnek 6.1.1. Türevleri ilişkilendirmek

$y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ fonksiyonu $y = \frac{1}{2}u$ ve $u = 3x$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Bu üç fonksiyonun türevlerinin arasındaki ilişki nedir?

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \text{ ve } \frac{du}{dx} = 3$$

olduğunu biliyoruz. $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$ olduğundan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

buluruz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olması bir tesadüf müdür? Türevi bir değişim oranı olarak düşünürsek, şimdiye kadar öğrendiklerimiz bu ilişkinin mantıklı olduğunu gösterir. $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ için, y u 'nun yarısı kadar hızlı değişiyor ve u da x 'in üç katı kadar hızlı değişiyorsa, y 'nin x 'in $3/2$ katı kadar hızlı değişmesini bekleriz.

Örnek 6.1.2.

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

$y = u^2$ ve $u = 3x^2 + 1$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Türevleri hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Türevleri açık formülden hesaplırsak

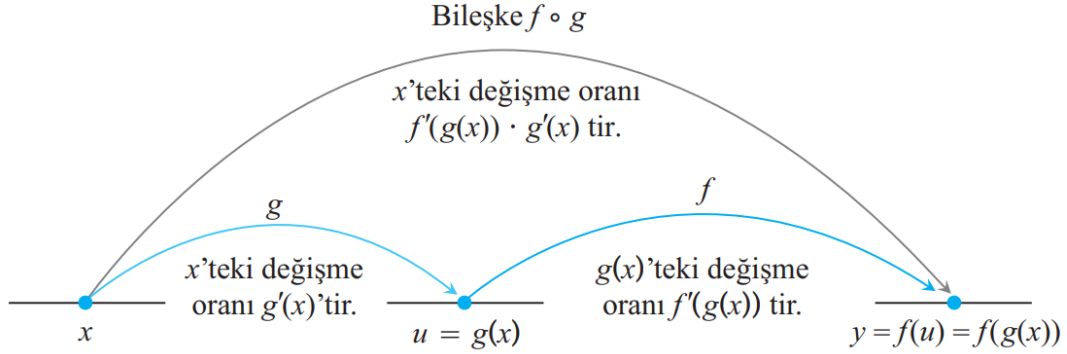
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

elde ederiz. Bir kere daha

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

ile karşılaşıyoruz.

$f(g(x))$ bileşke fonksiyonunun x 'teki türevi f 'nin $g(x)$ 'teki türevi çarpı g 'nin x 'teki türevidir. Buna zincir kuralı denir(Şekil 6.1).



Şekil 6.1. Değişim oranları çarpılır: $f \circ g$ 'nin x 'teki türevi f 'nin $g(x)$ noktasındaki türevi çarpı g 'nin x 'teki türevidir.

Teorem 6.1.1. *Zincir Kuralı:*

$f(u)$ $u = g(x)$ noktasında türevlenebiliyorsa ve $g(x)$ de x 'te türevlenebiliyorsa $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ bileşke fonksiyonu da x 'te türevlenebilir ve bu türev

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

olur. Leibnitz gösterimiyle, $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ ise, bu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olarak yazılır. Burada dy/du $u = g(x)$ 'te hesaplanmaktadır.

İspat: *Zincir Kuralının Sezgisel "İspatı":*

x 'teki Δx değişimine karşılık u 'daki değişme Δu olsun, yani

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

olsun. Buna karşılık y 'deki değişme

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

olur.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (6.1)$$

yazmak ve $\Delta x \rightarrow 0$ iken limitini almak ilginç olabilir:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Bu akıl yürütmedeki tek pürüz (6.1) denkleminde $\Delta u = 0$ olabilir ($\Delta u \neq 0$ olduğu halde) ve şüphesiz ki 0 ile bölemeyiz. İspat, bu pürüzün üstesinden gelmek için farklı bir yaklaşım gerektirmektedir ve "Lineerizasyon ve Diferansiyeller" konusunda tam ispatını vereceğiz. \square

Örnek 6.1.3. *Zincir Kuralını Uygulamak* x -ekseni üzerinde hareket eden bir cismin her $t \geq 0$ zamanındaki konumu $x(t) = \cos(t^2 + 1)$ ile veriliyor. Cismin hızını, t 'nin bir fonksiyonu olarak bulun.

Çözüm: Hızın dx/dt olduğunu biliyoruz. Bu arada, x bir bileşke fonksiyondur: $x = \cos(u)$ ve $u = t^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -\sin(u) \\ \frac{du}{dt} &= 2t \end{aligned}$$

buluruz. Zincir kuralına göre,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= -\sin(u) \cdot 2t \\ &= -\sin(t^2 + 1) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2 + 1) \end{aligned}$$

bulunur.

6.2. "İç-Dış" Kuralı

Bazen zincir kuralını şu şekilde düşünmek yararlı olabilir: $y = f(g(x))$ ise

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dir. Yani, "dış" fonksiyon f 'in türevini alın ve "iç" fonksiyon $g(x)$ 'e dokunmayın; sonra da iç fonksiyon $g(x)$ 'in türeviyle çarpın.

Örnek 6.2.1. *Dıştan İçe Türev Almak*

$\sin(x^2 + x)$ 'in x 'e göre türevini alın.

Çözüm:

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2 + x) = \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

6.3. Zincir Kuralının Üst Üste Kullanılması

Bazen bir türevi bulabilmek için zincir kuralını iki veya daha fazla defa kullanmamız gerekebilir. Aşağıda buna bir örnek verilmektedir.

Örnek 6.3.1. *Üç Halkalı Bir "Zincir"*

$g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$ fonksiyonunun türevini bulun.

Çözüm: Burada şuna dikkat edin, teğet $5 - \sin 2t$ 'nin fonksiyonudur. Oysa sinüs fonksiyonu, kendisi de t 'nin bir fonksiyonu olan $2t$ 'nin fonksiyonudur. Bu nedenle Zincir Kuralı'ndan

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t)) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \left(0 - \cos 2t \cdot \frac{d}{dt}(2t) \right) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\ &= -2(\cos 2t \sec^2(5 - \sin 2t)) \end{aligned}$$

elde edilir.

6.4. Zincir Kuralı ve Bir Fonksiyonun Kuvveti

f , u 'nun türevlenebilir bir fonksiyonu ve u da x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

zincir kuralından $y = f(u)$ yazmak

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \frac{du}{dx}$$

formülüne götürür.

Nasıl çalıştığına dair bir örnek aşağıdadır: n bir tamsayıysa, pozitif veya negatif, ve $f(u) = u^n$ ise, Kuvvet Kuralı $f'(u) = nu^{n-1}$ olduğunu söyler. u , x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise bunu, Zincir Kuralını *Kuvvet Zincir Kuralı*'na genişletmek için kullanabiliriz:

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Örnek 6.4.1. Kuvvet Zincir Kuralını Uygulamak

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6 \frac{d}{dx}(5x^3 - x^4) \\
&= 7(5x^3 - x^4)^6 (5 \cdot 3x^2 - 4x^3) \\
&= 7(5x^3 - x^4)^6 (15x^2 - 4x^3)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3x-2} \right) &= \frac{d}{dx} (3x-2)^{-1} \\
&= -1(3x-2)^{-2} \frac{d}{dx} (3x-2) \\
&= -1(3x-2)^{-2} (3) \\
&= -\frac{3}{(3x-2)^2}
\end{aligned}$$

Örnek 6.4.2. Radyan ve derece

$\sin x$ ve $\cos x$ 'in türev formüllerinin x 'in derece değil, radyan olarak ölçüldüğü varsayımı altında çıkarıldığını unutmamak çok önemlidir. Zincir kuralı bu ikisi arasındaki farkı anlamaya daha iyi yardımcı olur. $180^\circ = \pi$ radyan olduğu için, $x^\circ = \pi x/180$ radyan olur.

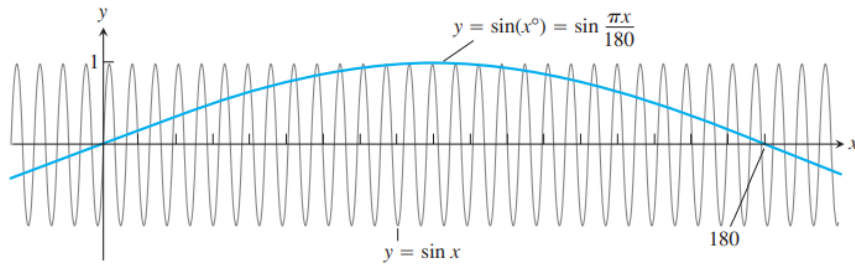
Zincir kuralını kullanarak

$$\frac{d}{dx} \sin(x^\circ) = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180} \cos(x^\circ)$$

buluruz. Şekil 6.2 bakın. Aynı şekilde, $\cos(x^\circ)$ 'in türevi $-(\pi/180) \sin(x^\circ)$ olur.

Daha ilk türevde rahatsız edici görünen $\pi/180$ faktörünü üst üste türev almayla daha da belirginleşecektir.

Bir bakışta radyan ölçü kullanmanın neden daha çekici olduğu anlaşılmaktadır.



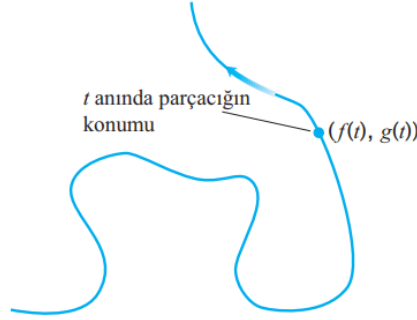
Şekil 6.2. $\sin x$ 'in salınmasına karşın $\sin(x^\circ)$ sadece $\pi/180$ defa fazla salınır. Maksimum eğim, $x = 0$ da $\pi/180$ 'dir.

6.5. Parametrik Denklemler

Bir eğriyi eğri üzerindeki bir $P(x, y)$ noktasının y - koordinatını x 'in bir fonksiyonu olarak ifade etmekle tanımlamak yerine, bazen her iki koordinatı da bir üçüncü değişken t cinsinden ifade etmek daha uygundur.

Şekil 6.3 de bir cismin, bir çift denklem $x = f(t)$, $y = g(t)$, ile tanımlı yolu görülmektedir. Hareket

incelemesinde t genellikle zamanı gösterir. Bu gibi denklemler, herhangi bir t anında parçacığın $(x, y) = (f(t), g(t))$ konumunu verdikleri için bir kartezyen formülden daha iyidirler.



Şekil 6.3. xy - düzleminde ilerleyen bir parçacığın izlediği yol her zaman x 'in veya y 'nin bir fonksiyonun grafiği değildir.

Tanım 6.5.1. Parametrik Eğri

x ve y , bir t değerleri aralığında

$$x = f(t), y = g(t)$$

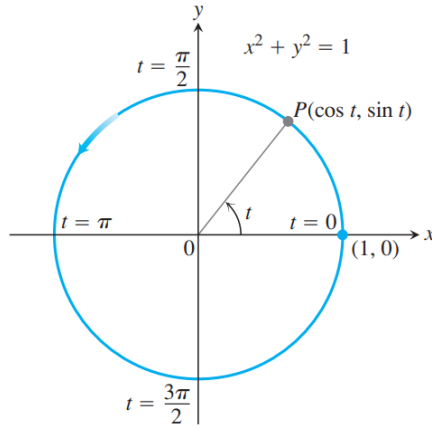
fonksiyonları olarak verilmişse, bu denklemlerle tanımlanan $(x, y) = (f(t), g(t))$ noktalarının kümesi *bir parametrik eğridir*. Denklemler, eğrinin *parametrik denklemleridir*.

t değişkeni eğrinin bir parametresi ve tanım kümesi I , *parametre aralığıdır*. I kapalı aralıksa, $a \leq t \leq b$, $(f(a), g(a))$ noktası eğrinin başlangıç noktası ve $(f(b), g(b))$ noktası eğrinin bitiş noktasıdır. Düzlemdeki bir eğri için parametrik denklemleri ve parametre aralığını verirse, eğriyi *parametrize* ettiğimizi söyleriz. Denklemler ve aralık eğrinin *parametrizasyonunu* verir.

Örnek 6.5.1. Bir Çember Üzerinde Saat Yönünün Tersine Hareket

Aşağıdaki parametrik eğrilerin grafiklerini çizin.

(a) $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. (b) $x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.



Şekil 6.4. $x = \cos t, y = \sin t$ denklemleri $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki hareketi tanımlarlar. Ok artan t yönünü göstermektedir.(Örnek 6.5.1)

Çözüm:

(a) $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ olduğundan, parametrik eğri $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindedir. t 0'dan 2π 'ye artarken $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ noktası $(1, 0)$ 'dan başlar ve saat yönünün tersine olarak bütün çemberi çizer (Şekil 6.4).

(b) $x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ için $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2$ dir. Parametrizasyon, $(a, 0)$ başlayıp $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini saat yönünün tersine bir defa kat eden ve $t = 2\pi$ 'de $(a, 0)$ noktasına dönen hareketi tanımlar.

Örnek 6.5.2. Bir Parabol Boyunca Hareket

xy -düzleminde ilerleyen bir parçacığın $P(x, y)$ konumu

$$x = \sqrt{t}, y = t, t \geq 0$$

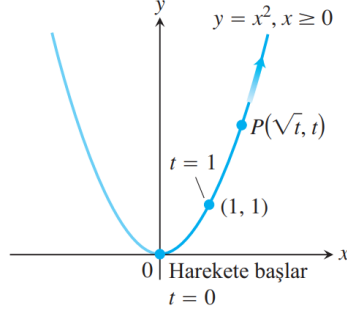
denklemleri ve parametre aralığıyla verilmektedir. Parçacığın izlediği yolu belirleyin ve hareketi tanımlayın.

Çözüm: İzlenen yolu $x = \sqrt{t}$ ve $y = t$ denklemleri arasında t 'yi yok ederek bulmaya çalışırız. Şansımız varsa, bu x ve y arasında tanımlanabilir bir cebirsel bağıntı verecektir. Bu şekilde

$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2$$

buluruz. Bu, parçacığın konum koordinatlarının $y = x^2$ denklemini sağladığını gösterir, dolayısıyla parçacık $y = x^2$ parabolü boyunca hareket eder.

Ancak parçacığın izlediği yolun tüm $y = x^2$ parabolü olduğunu düşünmek bir hatadır—bu yol parabolün sadece yarısıdır. Parçacığın x koordinatı hiçbir zaman negatif değildir. Parçacık $t = 0$ iken $(0,0)$ 'dan harekete başlar ve t arttıkça birinci dördte bir bölgede yükselir.(Şekil 6.5). Parametre aralığı $[0, \infty)$ dur ve bir bitiş noktası yoktur.



Şekil 6.5. $x = \sqrt{t}$ ve $y = t$ denklemleri ve $t \geq 0$ aralığı, $y = x^2$ parabolünün sağ kolunda ilerleyen bir parçacığın hareketini tanımlar(Örnek 6.5.2).

6.6. Parametrize Eğrilerin Eğimleri

f ve g fonksiyonları t 'de türevlenebiliyorsa, parametrize $x = f(t)$, $y = g(t)$ eğrisi de t 'de türevlenebilir, y 'nin de x 'in sürekli bir fonksiyonu olduğu türevlenebilir parametrize bir eğrinin üzerindeki bir noktada dy/dt , dx/dt ve dy/dx türevleri Zincir Kuralı'na göre bağlıdır:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$dx/dt \neq 0$ ise, denklemin iki tarafını da dx/dt ile bölerek, dy/dx 'i çözebiliriz.

6.6.1. dy/dx İçin Parametrik Formül

Her üç türev varsa ve $dx/dt \neq 0$ ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad (6.2)$$

dir.

Örnek 6.6.1. Parametre ile Türetmek

$x = 2t + 3$ ve $y = t^2 - 1$ ise dy/dx 'in $t = 6$ 'daki değerini bulun.

Çözüm: (6.2) denklemini dy/dx 'i t 'nin bir fonksiyonu olarak verir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}$$

$t = 6$ için $dy/dx = 6$ olur. Şuna dikkat edin, dy/dx türevini x 'in bir fonksiyonu olarak da bulabiliriz.

Örnek 6.6.2. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ Elipsi Boyunca Hareket

t anındaki konumu $P(x, y)$

$$x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

ile verilen bir parçacığın hareketini tanımlayın, $t = \pi/4$ olduğu $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, noktasında eğriye teğet olan doğruyu bulun (a ve b sabitlerinin her ikisi de pozitiftir).

Çözüm:

$$\cos t = \frac{x}{a}, \sin t = \frac{y}{b}$$

denklemlerinden t 'yi yok ederek, parçacığın konumu için bir Kartezyen denklem buluruz. Bunu $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ bağıntısını kullanarak yaparız. Bu bağıntı

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \text{ veya } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

verir. Parçacığın (x, y) koordinatları $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ denklemini sağlar, dolayısıyla parçacık bu elips üzerinde hareket eder. $t = 0$ iken parçacığın koordinatları

$$x = a \cos(0) = a, y = b \sin(0) = 0$$

olur, dolayısıyla hareket $(a, 0)$ 'da başlar. t artarken, parçacık yükselir ve saat yönünün tersine sola doğru hareket eder. Elipsi bir kere dolaşarak $t = 2\pi$ iken başlangıç noktası $(a, 0)$ 'a döner.

$t = \pi/4$ için elipse teğet olan doğrunun eğimi

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\pi/4} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \Big|_{t=\pi/4} \text{ Denklem(6.2)} \\ &= \frac{b \cos t}{-a \sin t} \Big|_{t=\pi/4} \\ &= \frac{b/\sqrt{2}}{-a/\sqrt{2}} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

dir.

Teğet doğru

$$\begin{aligned} y - \frac{b}{\sqrt{2}} &= -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \\ y &= \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

veya

$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$

Parametrik denklemler y 'yi x 'in iki kere türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlıyorsa, d^2y/dx^2 'yi t 'nin bir fonksiyonu olarak hesaplamak için Denklem(6.2) yi $dy/dx = y'$ 'ye uygulayabiliriz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. (\text{Denklem(6.2)de } y \text{ yerine } y' \text{ yazılmış.})$$

6.6.2. d^2y/dx^2 İçin Parametrik Formül

$x = f(t)$, $y = g(t)$ denklemleri y' 'yi x 'in iki kere türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımlanıyorsa, $dx/dt \neq 0$ olan her noktada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \quad (6.3)$$

Örnek 6.6.3. Parametrize Bir Eğri İçin d^2y/dx^2 'yi Bulmak

$x = t - t^2$ ve $y = t - t^3$ ise d^2y/dx^2 'yi bulun.

Çözüm: 1. $y' = dy/dx$ 'i t cinsinden ifade edin:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

2. y' 'nin t 'ye göre türevini alın:

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3} \text{ (Denklem(6.3)'ten)}$$

6.6.3. Standart Parametrizasyonlar ve Türev Kuralları

ÇEMBER $x^2 + y^2 = 1$:

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

ELİPS $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

FONKSİYON $y = f(x)$:

$$x = t$$

$$y = f(t)$$

TÜREVLER

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

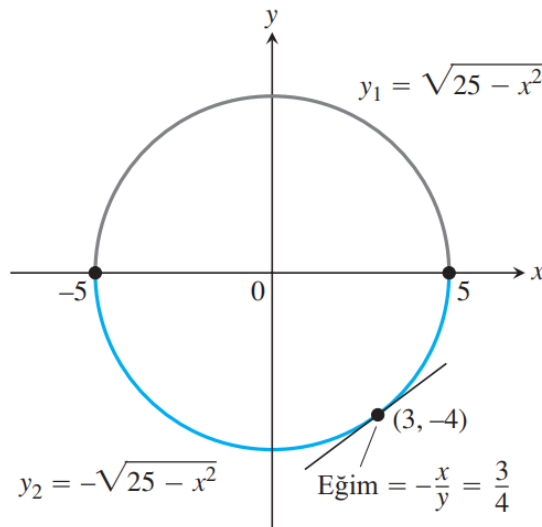
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

7. KAPALI TÜREV ALMA

Şimdiye kadar ilgilendiğimiz fonksiyonların bir çoğu y yi x değişkeni cinsinden açıkça ifade eden $y = f(x)$ şeklindeki bir denklemle tanımlamıştı. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonların türevlerini almak için kurallar öğrendik. Bölüm 6'da ayrıca, bir eğri $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ denklemleriyle parametrik olarak tanımlandığında dy/dx türevinin nasıl bulunacağını öğrendik. Üçüncü bir durum

$$x^2 + y^2 - 25 = 0, y^2 - x = 0 \text{ veya } x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

şeklinde denklemlerle karşılaştığımızda ortaya çıkar(bkz. Şekil 7.2 ve 7.3). Bu denklemler x ve y değişkenleri arasında kapalı bir bağıntı tanımlarlar. Bazı durumlarda böyle bir denklemden y 'yi x 'in açık fonksiyonu olarak (veya belki birkaç fonksiyon) çözebiliriz. Bir $F(x, y) = 0$ denklemini bildiğimiz şekilde türevini alabilmek için $y = f(x)$ haline sokamadığımızda, kapalı türev alma yöntemiyle dy/dx 'i yine de bulabiliriz. Bu, denklemin her iki tarafının da x 'e göre türevini almaktan ve sonra sonuç denklemini y' 'ye göre çözmekten ibarettir. Bu bölümde bu yöntem anlatılmakta ve bu yöntem kullanılarak kuvvet kuralı, tüm rasyonel üsleri kapsayacak şekilde genişletilmektedir. Bu bölümdeki örneklerde verilen denklemlerin, daima y 'yi ve x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu olarak tanımladıkları kabul edilmektedir.



Şekil 7.1. Çember iki fonksiyonun grafiklerini birleştirir. y_2 grafiği alt yarı çemberdir ve (3,-4) noktasından geçer.

7.1. Kapalı Olarak Tanımlı Fonksiyonlar

Örnek 7.1.1. Kapalı Olarak Türev Alma

$y^2 = x$ ise dy/dx 'i bulun.

Çözüm: $y^2 = x$ denklemi x 'in türevlenebilir ve aslında bulabileceğimiz iki fonksiyonunu tanımlar, yani $y_1 = \sqrt{x}$ ve $y_2 = -\sqrt{x}$ (Şekil 7.2). İkisinin de $x > 0$ türevlerinin nasıl alınacağını biliyoruz:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ve } \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

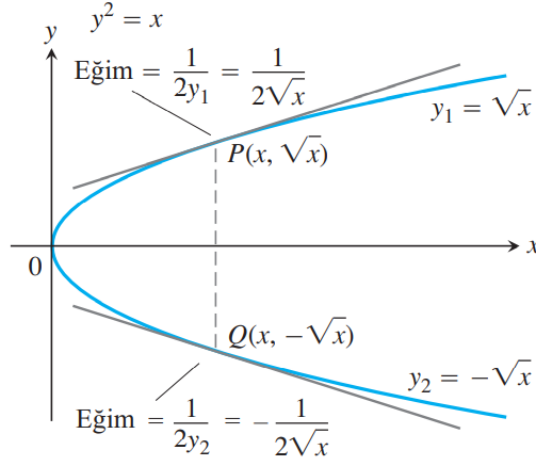
Ama sadece $y^2 = x$ denklemini sağlayan y 'yi $x > 0$ için x 'in bir veya daha fazla türevlenebilir fonksiyonu olarak tanımladığını bildiğimizi varsayalım (açık olarak bilmesek de). Hala dy/dx 'i bulabilir miyiz?

Yanıt evettir. dy/dx 'i bulmak için, $y = f(x)$ 'e x 'in türevlenebilir bir fonksiyonuymuş gibi davranarak, $y^2 = x$ denkleminin iki tarafının da x 'e göre türevini alırsız:

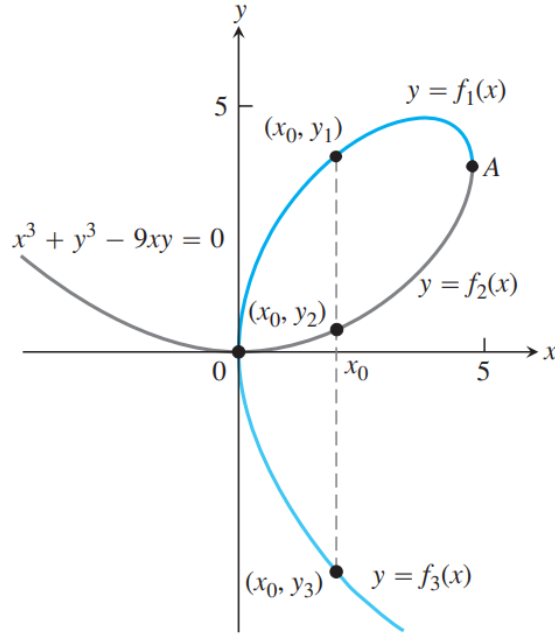
$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

Bu tek formül, $y_1 = \sqrt{x}$ ve $y_2 = -\sqrt{x}$ açık çözümlerinin ikisi için de bulmuş olduğumuz türevleri vermektedir:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ve } \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$



Şekil 7.2. $y^2 - x = 0$, veya genelde yazıldığı şekliyle $y^2 = x$ denklemi $x \geq 0$ aralığında x 'in türevlenebilir iki fonksiyonunu tanımlar. Örnek 1'de, $y^2 = x$ denklemini y 'ye göre çözmeden bu fonksiyonların türevlerinin nasıl alınacağını göstermektedir.



Şekil 7.3. $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisi x 'in tek bir fonksiyonunun grafiği değildir. Ancak, eğri x 'in fonksiyonlarının grafikleri olan ayrı yaylara bölünebilir. *Folyum* olarak adlandırılan bu özel eğrinin geçimi 1638'den Descartes'e kadar uzanır.

Örnek 7.1.2. Bir Çemberin Bir Noktadaki Eğimi

$x^2 + y^2 = 25$ çemberinin (3,-4) noktasındaki eğimini bulun.

Çözüm: Çember x 'in tek bir fonksiyonunun grafiği değildir. İki türevlenebilir fonksiyonun, $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ ve $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ fonksiyonlarının grafiklerinin birleşimidir (Şekil 7.1). (3,-4) noktası y_2 'nin grafiğinde bulunmaktadır, dolayısıyla eğimi açıkça hesaplayarak bulabiliriz:

$$\frac{dy_2}{dx} \Big|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = -\frac{-6}{2\sqrt{25-9}} = \frac{3}{4}$$

Ancak, verilen çember denkleminin x 'e göre kapalı olarak türevini alırsak, problemi daha kolay çözebiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

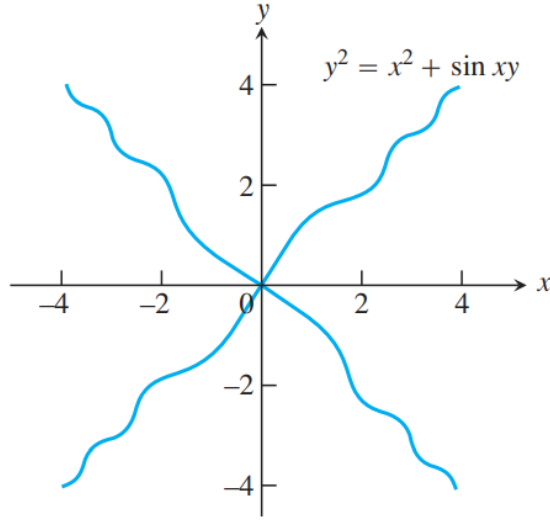
(3,-4) noktasındaki eğim $-\frac{x}{y} \Big|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$ 'tür.

Sadece x ekseninin altındaki noktalarda geçerli olan dy_2/dx formülünün aksine, $dy/dx = -x/y$ formülünün çemberin eğiminin bulunduğu her yerde geçerli olduğuna dikkat edin. Ayrıca, türevin sadece bağımsız değişken x 'i değil, x ve y değişkenlerinin ikisini de içerdiğine dikkat edin.

Kapalı olarak tanımlanmış başka fonksiyonların türevlerini hesaplamak için, Örnek 7.1.1 ve 7.1.2'deki gibi ilerleriz: y 'ye x 'in türevlenebilir kapalı bir fonksiyonu gibi davranır ve bilinen kuralları uygulayarak tanımlayıcı denklemin iki tarafının da türevini alırız.

Örnek 7.1.3. *Kapalı Olarak Türev Alma*

$y^2 = x^2 + \sin xy$ ise dy/dx 'i bulun.(Şekil 7.4)



Şekil 7.4. Örnek 7.1.3'teki $y^2 = x^2 + \sin xy$ 'nin denklemi. Örnek, kapalı olarak tanımlanmış bu eğri üzerinde eğimlerin nasıl bulunacağını göstermektedir.

Çözüm:

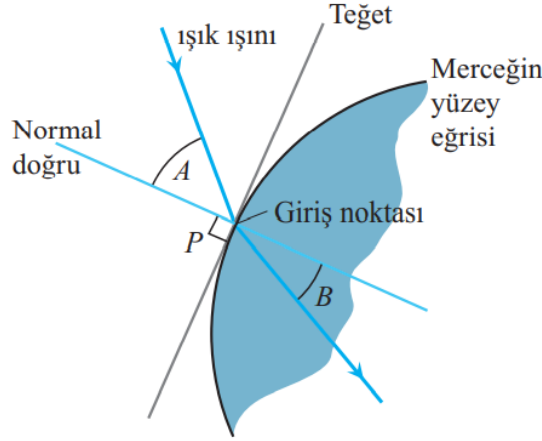
$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + \sin xy \\ \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy) \\ 2y \frac{dy}{dx} &= 2x + (\cos xy) \frac{d}{dx}(xy) \\ 2y \frac{dy}{dx} &= 2x + (\cos xy) \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) \\ 2y \frac{dy}{dx} - (\cos xy) \left(x \frac{dy}{dx} \right) &= 2x + (\cos xy)y \\ (2y - x \cos xy) \frac{dy}{dx} &= 2x + y \cos xy \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy} \end{aligned}$$

dy/dx formülünün, kapalı olarak tanımlanmış eğrinin eğiminin tanımlı olduğu her yere geçerli olduğuna dikkat edin. Ayrıca, türevin sadece bağımsız değişken x 'i değil, x ve y değişkenlerinin *ikisini* de içerdiğine dikkat edin.

Kapalı Türev Alma 1. y 'ye x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu gibi davranarak, denklemin iki tarafının da x 'e göre türevini alın. 2. dy/dx 'li terimleri eşitliğin bir tarafında toplayın. 3. dy/dx 'i çözün.

7.2. Mercekler, Teğetler ve Normal Doğrular

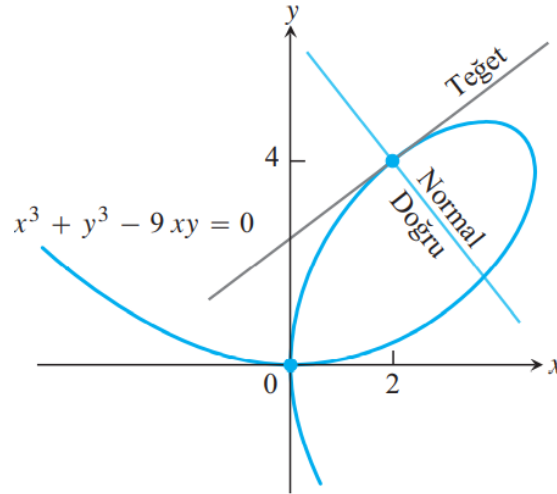
Bir merceğe girerken ışığın nasıl yön değiştirdiğini tanımlayan yasada, önemli açılar ışığın merceğe giriş noktasında merceğin yüzeyine dik olan doğruyla yaptığı açılardır (Şekil 7.5’dek A ve B açıları). Bu doğruya giriş noktasında yüzeyin *normali* adı verilir. Şekil 7.5’deki gibi bir merceğin yandan görünüşünde, normal, eğrinin ışığın giriş noktasındaki teğetine dik olan doğrudur.



Şekil 7.5. Bir ışık ışınının, merceğin yüzeyinden geçerken kırılmasını gösteren mercek profili.

Örnek 7.2.1. *Descartes Folyumunun Teğeti ve Normali*

(2,4) noktasının $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisi üzerinde olduğunu gösterin. Sonra, bu eğrinin buradaki teğetini ve normalini bulun (Şekil 7.6).



Şekil 7.6. Örnek 7.2.1, Descartes folyumunun (2,4)’teki teğetinin ve normalinin denklemlerinin nasıl bulunacağını göstermektedir.

Çözüm: (2,4) noktası eğrinin üzerindedir çünkü koordinatları eğrinin denklemini sağlar:

$$2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0.$$

Eğrinin (2,4)'teki eğimini bulmak için, önce kapalı türev kullanarak dy/dx 'in formülünü buluruz:

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 - 9xy &= 0 \\
 \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) &= \frac{d}{dx}(0) \\
 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 9 \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right) &= 0 \\
 (3y^2 - 9x) \frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y &= 0 \\
 3(y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} &= 9y - 3x^2 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}
 \end{aligned}$$

Sonra $(x, y) = (2, 4)$ noktasında türevi hesaplarız:

$$\frac{dy}{dx}|_{(2,4)} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(2,4) noktasındaki teğet, (2,4) noktasından 4/5 eğimiyle geçen doğrudur:

$$\begin{aligned}
 y &= 4 + \frac{4}{5}(x - 2) \\
 y &= \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}
 \end{aligned}$$

Eğrinin (2,4) noktasındaki normali ise burada teğete dik olan doğru, (2,4) noktasından -5/4 eğimiyle geçen doğrudur:

$$\begin{aligned}
 y &= 4 - \frac{5}{4}(x - 2) \\
 y &= -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}
 \end{aligned}$$

Kuadratik formül, $y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$ şeklindeki ikinci derece bir denklemden y 'yi x cinsinden çözmemizi sağlar. Üçüncü dereceden bir denklemin üç kökünü veren, kuadratik formül gibi bir formül vardır fakat çok daha karmaşıktır. Eğer bu formül $x^3 + y^3 = 9xy$ denkleminde y 'yi x cinsinden çözmek için kullanılsaydı, denklem tarafından tanımlanan üç fonksiyon

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}$$

ve

$$y = \frac{1}{2} \left[-f(x) \pm \sqrt{-3} \left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} \right) \right]$$

olurdu. Örnek 7.2.1'de kapalı türev almak, dy/dx 'i yukarıdaki formüllerden herhangi birinden doğrudan doğruya hesaplamaktan çok daha kolaydır. Daa yüksek dereceden denklemlerin tanımladığı eğriler üzerinde eğim bulmak genellikle kapalı türev alma gerektirir.

7.3. Yüksek Mertebe Türevler

Kapalı türev alma daha yüksek mertebeden türevler almak için de kullanılabilir. Aşağıda örnek verilmiştir.

Örnek 7.3.1. *Bir İkinci Mertebe Türevi Kapalı Olarak Bulma*

$2x^3 - 3y^2 = 8$ ise d^2y/dx^2 'yi bulun.

Çözüm: Başlangıç olarak denklemin iki tarafının da x 'e göre türevini alarak, $y' = dy/dx$ 'i buluruz:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) &= \frac{d}{dx}(8) \\ 6x^2 - 6yy' &= 0 \\ x^2 - yy' &= 0 \\ y' &= \frac{x^2}{y}, y \neq 0\end{aligned}$$

Şimdi y'' 'nü bulmak için Bölüm Kuralını uyguluyoruz.

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{y} \right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot y'$$

Son olarak y'' 'nü x ve y cinsinden yazabilmek için $y' = x^2/y$ 'yi yerine yazalım.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \left(\frac{x^2}{y} \right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, y \neq 0$$

7.4. Türevlenebilir Fonksiyonların Rasyonel Kuvvetleri

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

kuvvet kuralının n bir tamsayı olduğundan geçerli olduğunu biliyoruz. Şimdi bunu rasyonel n sayısı için de doğru olduğunu göstereceğiz.

Teorem 7.4.1. *Rasyonel Üsler İçin Kuvvet Kuralı*

p/q bir rasyonel sayıysa, $x^{p/q}, x^{(p/q)-1}$ 'in tanım kümesinin her iç noktasında türevlenebilir.

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

Örnek 7.4.1. *Rasyonel Üs Kuralını Kullanmak*

- (a) $\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$ için
- (b) $\frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{-1/3}, x \neq 0$ için
- (b) $\frac{d}{dx}(x^{-4/3}) = \frac{-4}{3}x^{-7/3}, x \neq 0$ için

İspat: p ve $q, q > 0$ olmak üzere iki tamsayı olsun ve $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$y^q = x^p$$

olur. p ve q 'nin ikisi de tamsayı olduğu için (ki tamsayılar için kuvvet kuralını ispatlamıştık), denklemin iki tarafının da x 'e göre kapalı türevini alabiliriz:

$$qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

$y \neq 0$ ise, denklemin iki tarafını da qy^{q-1} ile bölüp, dy/dx 'i bulabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1} \end{aligned}$$

böylece kural ispatlanır.

□

8. İLİŞKİLİ ORANLAR

Bu bölümde, bazı değişkenlerin değişim oranlarının sorulduğu problemlere bakacağız. Her durumda oran, değiştiği bilinen başka bir değişkenin (belki birkaç değişkenin) değişim oranından hesaplanması gereken bir türevidir. Bunu bulmak için, ilgili değişkenleri birbirine bağlayan bir denklem yazar ve aradığımız oranı bildiğimiz oranlara bağlayan bir denklem elde etmek için türevini alırız. Değişimini ölçebildiğimiz bazı oranlardan kolayca elde edemediğimiz bir oran bulma problemine *iliskili oranlar problemi* denir.

8.1. İlişkili Oranlar Denklemleri

Küresel bir balon içine hava pompaladığımızı varsayın. Balonun hem hacmi hem de yarıçapı zamanla artar. Belirli bir anda balonun hacmi V ve yarıçapı r ise

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

olur. Zincir Kuralını kullanarak, ilişkili oranlar denklemi bulmak için türev alırız:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

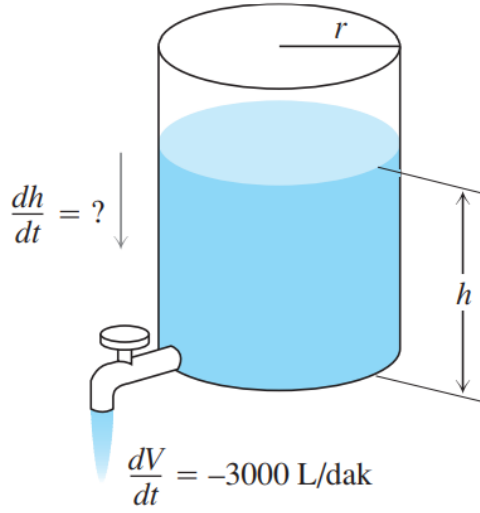
Dolayısıyla, verilen belirli bir zaman anında balonun yarıçapını ve hacminin dV/dt artış oranını biliyorsak, son denklemlerden dr/dt 'yi çözebilir ve verilen anda yarıçapının ne kadar hızlı arttığını bulabiliriz. Hacmin artış oranının doğrudan ölçümünün, yarıçapın artış oranının doğrudan ölçümünden daha kolay olduğuna dikkat edin. İlişkili oranlar denklemi dr/dt 'yi dV/dt 'den hesaplamamızı sağlar

Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, çoğu zaman, bir ilişkili oranlar problemindeki değişkenleri ilişkilendirmenin anahtarı, değişkenler arasındaki geometrik ilişkileri gösteren bir şekil çizmektir.

Örnek 8.1.1. Bir Tanktan Dışarı Sıvı Pompalamak

Dikey bir depolama tankının içindeki sıvı seviyesi, sıvıyı 3000 L/dak hızla pompalarsak ne hızla düşecektir?

Çözüm: Bir kısmı dolu dik bir silindir tank çizer ve yarıçapını r , sıvının yüksekliğini ise h ile belirtiriz (Şekil 8.1). Sıvının hacmini ise V ile gösteririz.



Şekil 8.1. Bir silindirik tank içindeki sıvı hacminin değişim oranı, tank içindeki sıvı seviyesinin değişim oranına bağlıdır(Örnek 8.1).

Zaman geçtikçe, yarıçap sabit kalır, fakat V ve h değ.i,r. V ve h 'yı zamanın türevlenebilir fonksiyonları olarak kabul eder ve zamanı t ile gösteririz. Bize

$$\frac{dV}{dt} = -3000 \text{ (Sıvıyı dışarıya 3000L/dak hızla pompalıyoruz. Oran negatiftir, çünkü hacim azalmaktadır.)}$$

olduğu verilmiştir ve bulmamız istenen

$$\frac{dh}{dt} \text{ (Sıvı seviyesi ne hızla düşecektir?)}$$

dir. dh/dt 'yi bulmak için önce h 'yi V 'ye bağlayan bir denklem yazarız. Denklem V, r ve h için seçilen birimlere bağlıdır. V litre ve r ile h metre ise, silindirin hacmi için uygun denklem

$$V = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt} \text{ (} r \text{ sabittir)}$$

Bilinen $dV/dt = -3000$ değerini yerine koyar ve dh/dt 'yi çözeriz:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

Sıvı seviyesi $3/(\pi r^2)$ m/dak hızla düşecektir.

$dh/dt = -3/\pi r^2$ denklemi sıvı seviyesinin düşüş oranının tankin yarıçapına nasıl bağlı olduğunu göstermektedir. r küçükse, dh/dt büyük olacaktır; r büyükse, dh/dt küçük olur.

$$\begin{aligned} r = 1m : \frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{\pi} \approx -0.95m/dak \\ r = 10m : \frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095m/dak \end{aligned}$$

8.1.1. İlişkili Oranlar Denklemleri

1. Bir resim çizin ve değişkenlerle sabitleri isimlendirin. t 'yi zaman için kullanın. Bütün değişkenlerin zamanın fonksiyonu olduklarını varsayın.
2. Sayısal bilgileri yazın (seçtiğiniz sembolleri kullanarak).
3. Neyi bulmak istediğinizi yazın (genellikle bir türev olarak ifade edilen bir orandır).
4. Değişkenleri birbirine bağlayan bir denklem yazın. Bilmek istediğiniz oranı bildiğiniz oranlarla birleştirecek tek bir denklem yazmak için iki veya daha fazla denklemi birleştirmeniz gerekebilir.
5. t 'ye göre *türev* alın. Bilmek istediğiniz oranı değerini bildiğiniz oran ve değişkenler cinsinden ifade edin.
6. Hesaplayın. Bilinen değerleri kullanarak bilinmeyen oranı bulun.

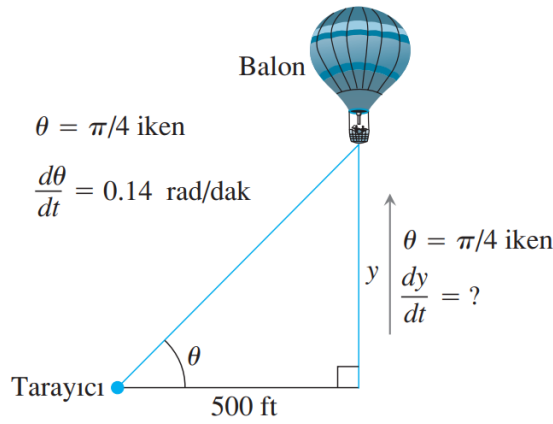
Örnek 8.1.2. Yerden yukarı doğru yükselen bir sıcak hava balonu kalkış noktasından 500 ft uzakta bir tarayıcı ile izlenmektedir. Tarayıcının balonla yaptığı açı $\pi/4$ olduğu anda, açı 0.14 rad/dak. hızıyla artmaktadır. Balon o anda ne hızla yükselmektedir?

Çözüm: (1). Bir resim çizin ve sabitlerle değişkenleri isimlendirin(Şekil 8.2) Resimdeki değişkenler

θ =tarayıcının yer ile yaptığı açı(radyan)

y = balonun feet olarak yüksekliği

dir. t zamanı temsil eder ve θ ile y 'nin t 'nin türevlenebilir fonksiyonları olduğunu varsayınız.



Şekil 8.2. Balon yüksekliğinin değişim oranı telemetrenin yer ile yaptığı açının değişim oranına bağlıdır(Örnek 8.1.1).

Resimdeki tek sabit tarayıcının kalkış noktasına olan uzaklığıdır(500ft). Buna özel bir sembol atamanın gereği yoktur.

(2). Diğer sayısal bilgileri yazın.

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ iken } \frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/dak.}$$

(3). Neyi bulmamız gerektiğini yazın. $\theta = \pi/4$ iken dy/dt 'yi istiyoruz. (4). y ve θ değişkenlerini ilişkilendiren bir denklem yazın.

$$\frac{y}{500} = \tan \theta (\text{ya da}) y = 500 \tan \theta$$

(5). Zincir kuralını kullanarak t 'ye göre türev alın. Sonuç dy/dt 'nin $d\theta/dt$ ile ilişkisinin nasıl olduğunu gösterir.

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sin^2 \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

(6). $\theta = \pi/4$ ve $d\theta/dt = 0.14$ değerlerini yerine koyun dy/dt 'yi bulun.

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sqrt{2})^2(0.14) = 140$$

Söz konusu anda, balon 140 ft/dak hızıyla yükselmektedir.

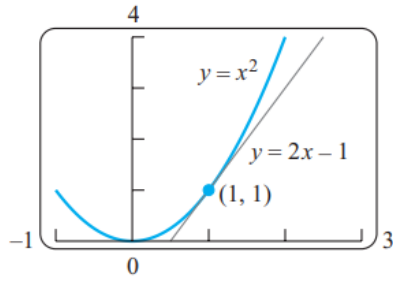
9. LİNEERİZASYON ve DİFERANSİYELLER

Bazen fonksiyonlara, özel uygulamalar için istediğimiz hassaslığı veren ve çalışılması daha kolay olan fonksiyonlarla yaklaşımda bulunuruz. Bu bölümde tartışılan yaklaşım fonksiyonlarına *lineerizasyonlar* denir ve teğet doğrularını temel alırlar.

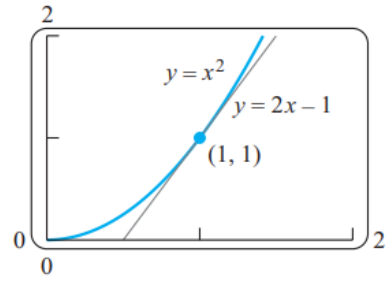
Diferansiyeller adı verilen yeni dx ve dy değişkenlerini tanıttık ve bunları, türevin dy/dx Leibniz gösterimine gerçek bir oran anlamı verecek şekilde tanımlayacağız. dy 'yi ölçümlerdeki hatayı ve bir fonksiyonun değişikliklere karşı duyarlılığı ölçmekte kullanacağız. Bu fikirlerin uygulamaları Zincir Kuralını tam ispatını sağlayacaktır(Bölüm 6).

9.1. Lineerizasyon

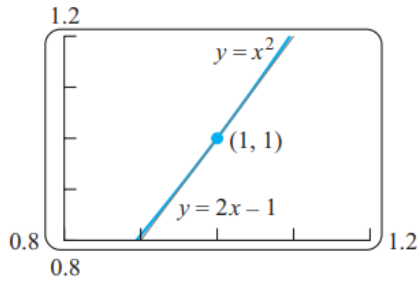
Şekil 9.1'de göreceğiniz gibi, $y = x^2$ eğrisinin teğeti değme noktası civarında eğriye yakın bulunur. İki tarafta da kısa bir aralıkta, teğet doğrusu üzerindeki y değerleri eğri üzerindeki y değerlerinin oldukça iyi bir yaklaşımını verir. Bu olayı, her iki grafik üzerinde değme noktasına yakından bakarak veya değme noktasının x -koordinatı yakınlarında $f(x)$ ile teğeti arasındaki değer farkları tablosuna bakarak görebiliriz. Yerel olarak her türevlenebilir eğri bir doğru gibi davranır.



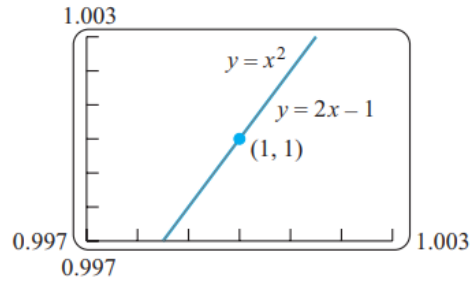
(1, 1) de $y = x^2$ ve teğeti $y = 2x - 1$.



(1, 1)'in çok yakınında teğet ve eğri



Teğet ve eğri gösterilen x -aralığının tamamında çok yakındır



Teğet ve eğri hala yakın. Bilgisayar ekranı bu x -aralığı üzerinde teğeti eğriden ayırt edemiyor.

Şekil 9.1. Bir fonksiyonun türevlenebilir olduğu bir noktadaki grafiğini büyüttükçe grafik düzleşir ve teğetine benzerliği artar.

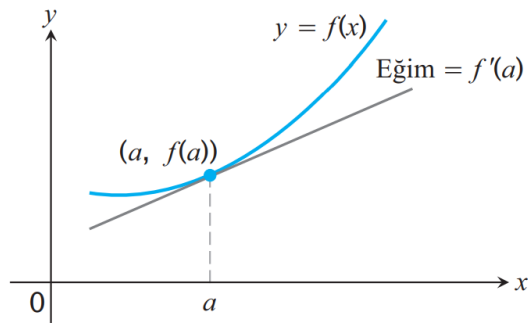
Genel olarak, $y = f(x)$ 'in türevlenebilir olduğu bir $x = a$ noktasındaki teğeti(Şekil 9.2) $(a, f(a))$ noktasından geçer, dolayısıyla nokta-eğim denklemi şu şekildedir:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Yani, teğet

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

lineer fonksiyonunun grafiğidir. Doğru f 'nin grafiğine yakın kaldığı sürece, $L(x)$ $f(x)$ 'e iyi bir yaklaşım verecektir.



Şekil 9.2. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ daki teğet doğrusunun denklemi $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ 'dir.

Tanım 9.1.1. f fonksiyonu $x = a$ 'da türevlenebilirse,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

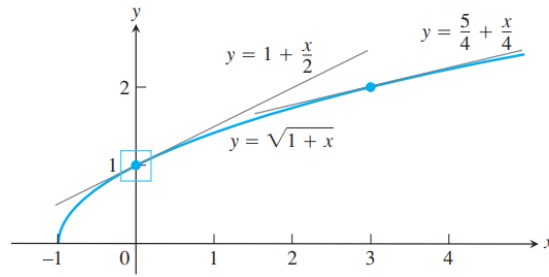
yaklaşırma fonksiyonu, f 'nin a 'daki *lineerizasyonudur*. f 'ye L tarafından yapılan

$$f(x) \approx L(x)$$

yaklaşımı f 'nin a 'daki *standart lineer yaklaşımıdır*. $x = a$ noktası yaklaşımın *merkezidir*.

Örnek 9.1.1. *Bir Lineerizasyon Bulmak*

$f(x) = \sqrt{1+x}$ 'in $x = 0$ 'daki lineerizasyonunu bulun(Şekil 9.3)



Şekil 9.3. $y = \sqrt{1+x}$ 'in grafiği ve $x = 0$ ve $x = 3$ 'teki lineerizasyonları. Şekil 9.4 de y -eksenindeki 1 civarında küçük bir çerçevenin büyütülmüş görüntüsü verilmiştir.

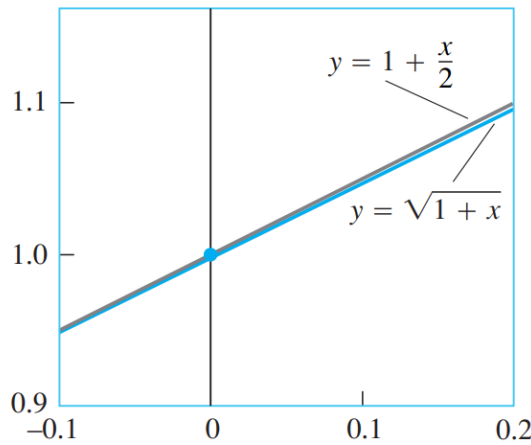
Çözüm:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

olduğu için, $f'(0) = 1/2$ 'dir. Buradan

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}$$

bulunur. Şekil 9.4'e bakın.



Şekil 9.4. Şekil 9.3'teki çerçevenin büyütülmüş görüntüsü.

Örnek 9.1.1'deki $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ yaklaşımının 0'a yakın x 'ler için ne kadar doğru olduğuna bakın. Sıfırdan uzaklaştıkça doğruluğu kaybederiz. Örneğin, $x = 2$ için, lineerizasyon $\sqrt{3}$ için yaklaşım olarak 2'yi verir ki, bir ondalık basamağa kadar bile doğru değildir.

Bu hesaplamalarla lineerizasyonla bütün yapacaklarımızın bir hesap makinesiyle yapılmasının daha iyi olacağı fikrine kapılmayın. Pratikte, asla belirli bir karekökü bulmak için bir lineerizasyon kullanmayız. Bir lineerizasyonun yararı karmaşık bir fonksiyonu bütün bir değer aralığında daha basitiyle değiştirme becerisidir. 0'a yakın x değerlerinde $\sqrt{1+x}$ ile çalışmak zorundaysak ve ortaya çıkacak küçük bir hataya göz yumabilecek durumdaysak $1+(x/2)$ ile çalışabiliriz. Elbette, bu durumda da hatanın ne kadar olduğunu bilmemiz gerekir.

Yaklaşım	Gerçek değer	Gerçek değer-Yaklaşım
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

Normalde bir lineer yaklaşım merkezinde uzakta hassaslığını yitirir. Şekil 9.3'ün gösterdiği gibi, $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ yaklaşımı büyük olasılıkla $x = 3$ civarında yararlı olamayacak kadar kaba olacaktır. O noktada, $x = 3$ 'teki lineerizasyona ihtiyacımız vardır.

Örnek 9.1.2. *Başka Bir Noktada Bir Lineerizasyon Bulmak*

$f(x) = \sqrt{1+x}$ 'in $x = 3$ 'teki lineerizasyonunu bulun.

Çözüm: $L(x)$ 'i tanımlayan denklemi $a = 3$ 'te hesaplarız.

$$f(3) = 2, f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

olduğu için,

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

$x = 3.2$ 'de, Örnek 9.1.2'deki lineerizasyon

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

verir, ki bu da gerçek değer $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ 'dan binde birden daha az bir oranda değişir. Örnek 9.1.1'deki lineerizasyon

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6,$$

ise gerçek değerden %25'ten daha fazla fark gösteren bir sonuçtur.

9.2. Diferansiyeller

Bazen y 'nin x 'e göre türevini göstermek için dy/dx Liebniz notasyonunu kullanırız. Görünüşünün tersine, bu bir oran değildir. Şimdi, oranları tanımlı olduğunda türeve eşit olacak olan iki yeni değişken, dx ve dy tanımlayacağız.

Tanım 9.2.1. *Diferansiyeller* $y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. dx diferansiyeli bağımsız bir değişkendir. dy diferansiyeli

$$dy = f'(x)dx$$

olarak tanımlanır.

Bağımsız değişken dx 'in aksine, dy değişkeni her zaman bağımlı bir değişkendir. Hem x 'e hem de dx 'e bağlıdır. dx belirli bir değerse ve x , f fonksiyonunu tanım kümesinde özel bir sayı ise dy 'nin sayısal değeri tanımlıdır.

Örnek 9.2.1. *dy Diferansiyelini Bulmak*

(a). $y = x^5 + 37x$ ise dy 'yi bulun.

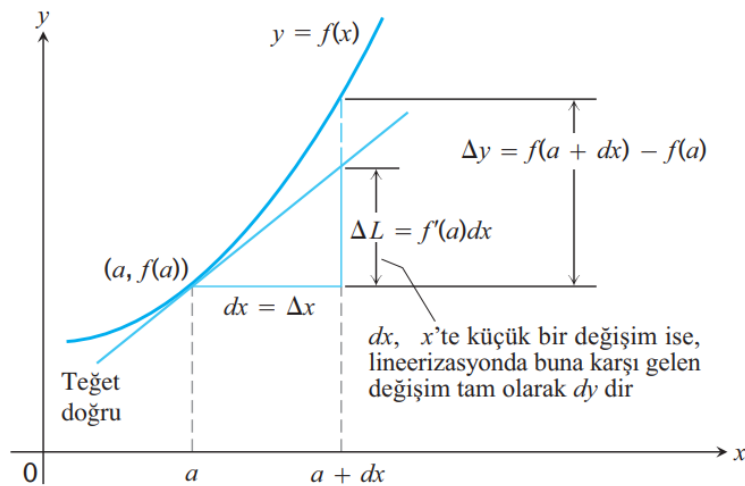
(b). $x = 1$ ve $dx = 0.2$ ise, dy 'nin değerini bulun.

Çözüm: (a). $dy = (5x^4 + 37)dx$

(b). dy 'nin ifadesinde $x = 1$ ve $dx = 0.2$ yazarsak;

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4$$

buluruz.



Şekil 9.5. Geometrik olarak, dy diferansiyeli f 'nin $x = a$ 'daki lineerizasyonunun $dx = \Delta x$ değişimine karşı gelen ΔL değişimidir.

Diferansiyellerin geometrik anlamı Şekil 9.5'te gösterilmiştir. $x = a$ ve $dx = \Delta x$ koyun. Buna karşılık $y = f(x)$ 'teki değişme

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a)$$

Buna karşılık L teğet doğrusundaki değişim

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a) \\ &= \{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]\} - \{f(a)\} \\ &= f'(a)dx\end{aligned}$$

dir. Yani, $x = a$ ve $dx = \Delta x$ olduğunda f' 'nin lineerizasyonundaki değişim tam olarak dy diferansiyelinin değeridir. Bu nedenle dy , x 'te $dx = \Delta x$ kadar bir değişim meydana geldiğinde, teğet doğrunun buna karşı gelen yükselmesini veya alçalmasını gösterir

$dx \neq 0$ ise, dy diferansiyelinin dx diferansiyeline oranı $f'(x)$ türevine eşittir çünkü:

$$dy \div dx = \frac{f'(x)dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

olur. Bazen $dy = f'(x)dx$ yerine df 'e f 'nin diferansiyeli diyerek

$$df = f'(x)dx$$

yazarız. Örneğin, $f(x) = 3x^2 - 6$ ise

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x dx$$

gibi

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \text{ veya } \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

gibi her türev formülüne karşılık

$$d(u + v) = du + dv, \text{ veya } d(\sin u) = \cos u du$$

şeklinde bir diferansiyel form karşılık gelir.

Örnek 9.2.2. Fonksiyonların Diferansiyellerini Bulmak

$$(a) d(\tan 2x) = \sec^2 2x d(2x) = 2 \sec^2 2x dx$$

$$(b) d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)dx - xd(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{xdx + dx - xdx}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

9.2.1. Diferansiyellerle Tahmin Etme

Türevlenebilir $f(x)$ fonksiyonunun bir a noktasındaki değerini bildiğimizi ve bu değer çok yakınındaki bir $a + dx$ noktasına gittiğimizde nasıl değiştiğini tahmin etmek istediğimizi varsayalım. dx küçükse, Şekil 9.5'ten Δy 'nin yaklaşık olarak dy diferansiyeline eşit olduğunu görebiliriz, çünkü

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y,$$

olduğundan diferansiyel yaklaşımı $dx = \Delta x$ olmak üzere

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

verir. Böylece, $\Delta y \approx dy$ yaklaşımı, $f(a)$ biliniyorsa ve dx küçükse $f(a + dx)$ 'i hesaplamak için kullanılır.

Örnek 9.2.3. Diferansiyellerle Tahmin Etme

Bir çemberin yarıçapı r , $a = 10m$ 'den $10.1 m$ 'ye artıyor. Çemberin alanı A 'daki artışı tahmin etmek için dA 'yı kullanın. Genişletilmiş çemberin alanını tahmin edin ve bunu gerçek alanla karşılaştırın.

Çözüm: $A = \pi r^2$ olduğu için, tahmin edilen artış

$$dA = A'(a)dr = 2\pi a dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi m^2$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} A(10 + 0.1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi \end{aligned}$$

dir. Yarı çapı $10.1 m$ olan çemberin alanı yaklaşık olarak $102\pi m^2$ dir.

Gerçek alan

$$\begin{aligned} A(10.1) &= \pi(10.1)^2 \\ &= 102.01\pi m^2 \end{aligned}$$

dir. Tahminimizdeki hata $\Delta A - dA$ farkı olan $0.01\pi m^2$ dir.

9.2.2. Diferansiyel Yaklaşımındaki Hata

$f(x)$ fonksiyonu $x = a$ da türevlenebilir olsun ve x 'teki bir artma $dx = \Delta x$ olsun. x a 'dan $a + \Delta x$ 'e değişirken f 'deki değişimi tanımlamanın iki yolu vardır:

Gerçek değişim: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

Diferansiyel tahmin: $df = f'(a)\Delta x$

df 'nin Δf 'e yaklaşımı ne kadar iyidir?

Yaklaşımındaki hatayı Δf 'ten df 'i çıkararak buluruz:

$$\begin{aligned} \text{Yaklaşım hatası} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(a)\Delta x \\ &= f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x \\ &= \left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) \right) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) \right) = \epsilon$ dersek eşitliğimiz $\epsilon \cdot \Delta x$ olur.
 $\Delta x \rightarrow 0$ iken

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

fark oranı $f'(a)$ 'ya yaklaşır ($f'(a)$ 'nın tanımını hatırlayın), dolayısıyla parantez içindeki değer çok küçük bir sayı haline gelir (bu yüzden ona ϵ dedik). Aslında, $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\epsilon \rightarrow 0$ 'dır. Δx küçük ise $\epsilon \Delta x$ yaklaşım hatası daha küçüktür.

Δf 'e gerçek değişim, $f'(a)\Delta x$ 'e tahmini değişim ve $\epsilon \Delta x$ 'e de hata dersek,

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

olur. Hatanın tam olarak ne kadar küçük olduğunu bilmememize ve bunun üzerine daha fazla ilerleme yapmayacak olmamıza rağmen, burada bahsedilmeye değer bir şey vardır, yani denklemin aldığı form şu şekildedir:

$x = a$ yakınında $y = f(x)$ 'teki değişim $y = f(x)$ $x = a$ 'da türevlenebiliyor ve x a'dan $a + \Delta x$ 'e değişiyorsa, f 'deki Δy değişimi

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \epsilon \Delta x \quad (9.1)$$

formunda bir denklemle verilir. Burada $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\epsilon \rightarrow 0$ olur.

(9.1) denklemi Zincir Kuralının ispatını başarılı bir şekilde sonlandırmamızı sağlar.

İspat: Zincir Kuralının İspatı

Amacımız $f(u)$ u 'nun türevlenebilir bir fonksiyonu ve $u = g(x)$ de x 'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise, $y = f(g(x))$ bileşkesi x 'in türevlenebilir bir fonksiyonudur.

Daha açık olarak, g x_0 'da türevlenebiliyorsa ve f de $g(x_0)$ 'da türevlenebiliyorsa, bileşke x_0 'da türevlenebilir:

$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Δx x 'in bir artımı ve Δu ve Δy de u ve y 'de buna karşılık gelen artırımlar olsun. Denklem (9.1)'i uygulamakla

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

elde ederiz. Burada $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\epsilon_1 \rightarrow 0$ olur. Aynı şekilde,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

olur ve yine $\Delta u \rightarrow 0$ iken $\epsilon_2 \rightarrow 0$ 'dır. Ayrıca $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\Delta u \rightarrow 0$ olduğuna dikkat edin. Δu ve Δy denklemlerini birleştirmek

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

verir, dolayısıyla

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2 \epsilon_1$$

olur. Δx sıfıra giderken ϵ_1 ve ϵ_2 de sıfıra gittiği için, denklemin sağ tarafındaki dört terimin üçü limitte sıfır olur ve

$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0)$$

kalır. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

9.3. Değişime Karşı Duyarlılık

$df = f'(x)dx$ denklemi f 'nin çıktısının farklı x değerleri için girdilerdeki değişikliklere ne kadar duyarlı olduğunu göstermektedir. f' 'nin x 'teki değeri ne kadar büyükse, dx 'e verilen bir değişikliğin etkisi de o kadar büyüktür. Bir a noktasından yakınındaki bir $a + dx$ noktasına giderken f 'deki değişimi üç şekilde tanımlayabiliriz.

	Gerçek	Tahmin edilen
Mutlak değişim	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a) dx$
Bağıl değişim	$\frac{\Delta f}{f(a)}$	$\frac{df}{f(a)}$
Yüzde değişim	$\frac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\frac{df}{f(a)} \times 100$

Örnek 9.3.1. Bir Kuyunun Derinliğini hesaplamak

$s = 16t^2$ denkleminde, attığınız ağır bir taşın suya ne kadar zamanda düştüğünü ölçerek bir kuyunun derinliğini hesaplamak istiyorsunuz. Hesabınız zamanı ölçerken yapacağınızı 0.1 sn'lik bir hataya ne kadar duyarlıdır?

Çözüm:

$$ds = 32tdt$$

denkleminde ds 'nin boyutu t 'nin ne kadar büyük olduğuna bağlıdır.

Eğer $t = 2$ sn ise, $dt = 0.1$ 'in yol açacağı hata sadece

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4ft.$$

olacaktır. Üç saniye sonra, $t = 5$ sn iken, aynı dt 'nin yol açtığı hata

$$ds = 32(5)(0.1) = 16ft$$

olacaktır. Kuyunun tahmin edilen derinliğinin gerçek derinliğinden farkı, zaman ölçümündeki verilen bir hata için, atılan aşağıdaki suya çarpmasına kadar geçen süre arttıkça büyür.

10. TARTIşMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Türev, doğadaki bir çok olayı tanımlamamıza ve birbirleriyle ilişkilendirilmesine yardımcı olan bir araçtır. Hangi değişkenleri seçtiğimize bağlı olarak, günlük hayattaki karşılaştığımız her şeyde hatta karşılaşmadıklarımızda bile anlam kazandırır, yorum yaptırır. Yapılan bu yorumlar için de günümüze kadar birikerek gelmiş ispatlar yardımıyla doğruluğuna ve mantıklılığına karar veririz. Sonuç olarak bazı şeyler bağımlı, bazı şeyler de bağımsız olarak değişmekte ve türev bu değişimlerin birbirlerine göre durumlarını bilime dayalı ve akla uygun olarak gösteren bir araçtır.

KAYNAKLAR

- [1] Thomas Calculus Onbirinci Baskı, 11. Baskıdan çeviri 1. Baskı - Ağustos 2009 - İSTANBUL,147-242s.)