R4.04 : Méthodes d’optimisation
TD 1

Partie 1 : Formulation et résolution d’un programme linéaire

Exercice 1 :

Vous êtes en charge de la gestion de production d'une entreprise de fabrication de meubles. Vous disposez de deux types de matières premières : le bois et le métal. Vous pouvez utiliser ces matières premières pour produire deux types de meubles : des chaises et des tables. Chaque chaise nécessite 2 unités de bois et 3 unités de métal, et chaque table nécessite 5 unités de bois et 4 unités de métal. Vous avez un stock limité de bois (180 unités) et de métal (200 unités) disponibles pour produire des meubles. De plus, vous avez un nombre limité d'heures de travail disponibles pour produire des meubles (80 heures). Il est nécessaire 1 heure pour produire une chaise et 2 heures pour produire une table.

Enfin, chaque chaise rapporte un bénéfice de 15€ et chaque table rapporte un bénéfice de 20€.

Votre objectif est de maximiser les bénéfices en produisant le nombre optimal de chaises et de tables.

1. Modélisez mathématiquement le problème de production sous forme de programme linéaire.
2. Résolvez le modèle graphiquement en utilisant les techniques de programmation linéaire.
3. Résolvez le modèle en utilisant l'algorithme simplex.
4. L’entreprise souhaite réduire le nombre d’heures de travail à 75 heures. Reformulez le problème en prenant en compte la nouvelle contrainte.
5. Est-ce que le nouveau problème peut être résolu graphiquement ? pourquoi ?
6. Quelle méthode peut-on utiliser dans ce cas ?
7. Résoudre ce problème graphiquement en utilisant l’algorithme Branch and Bound
8. Donnez la solution optimale
9. Reformulez le problème cette fois pour déterminer le nombre d’heures minimum à travailler pour réaliser le gain précédent
10. Donnez le code correspondant en python
11. Donnez la solution optimale.

Partie 2 : Programmation linéaire avec simplexe :

Exercice 2 :

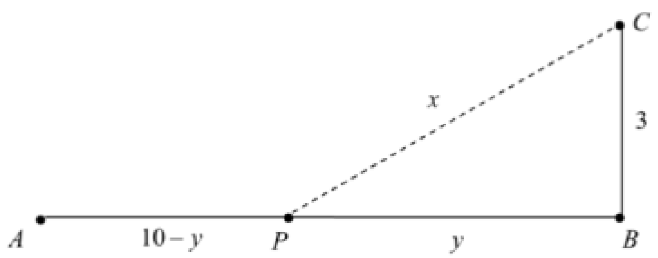
Le département « Usine de lampes » d'une entreprise ne fabrique que deux types de lampes à utilisation industrielle. La contribution au bénéfice de l'entreprise est évaluée à

- 15 euros l'unité pour la lampe de type SP-100,
- 22 euros l'unité pour la lampe de type SP-200.

Le temps de fabrication pour le type SP-200 est le double de temps de fabrication pour le type SP-100 et si toutes les lampes étaient du type SP-100, le département pourrait en fabriquer 60 unités par jour. Le faible taux de production est spécialement dû à la complexité de la fabrication des lampes. De plus, l'assemblage des lampes s'effectue en grande partie à l'aide d'opérations manuelles. La quantité totale des deux types de lampes qu'on peut fabriquer ne peut excéder 50 unités par jour parce qu'ils utilisent la même chaîne d'assemblage.

1. Formuler le programme linéaire correspondant à ce problème de fabrication et visant à maximiser les bénéfices de l'entreprise.
2. Vérifier que le problème formulé répond bien aux conditions de formulation d'un programme linéaire.
3. Déterminer, à l'aide de la méthode graphique, la zone des solutions réalisables.
4. Evaluer les solutions aux différents sommets de la zone des solutions réalisables. Donner le bénéfice et la quantité des lampes de chaque type à produire pour chaque solution.
5. Modifier le code Python de l'exercice 1 pour résoudre cet exercice et donner la solution optimale.
6. L'entreprise utilise des filaments spécifiques (un pour chaque type de lampes) pour la fabrication de ces lampes et qui ont un taux élevé de rejet et la quantité maximale disponible pour le type SP-100 est de 45 filaments par jour et de 25 par jour pour le type SP-200. Modifier le programme linéaire formulé à la question 1 pour prendre en compte la quantité de filaments disponibles.
7. Modifier le code python de votre exercice et donner la nouvelle solution optimale si elle existe.

Partie 3 : Programmation non linéaire :



Une ville B est à 10 km à l'est d'une ville A et la ville C est à 3 km au nord de la ville B. On veut réaliser un projet d'autoroute entre les villes A et C. Le coût de 1 km d'autoroute le long de la route existante entre A et B est de 400 000 euros, alors que le coût de 1 km d'autoroute ailleurs est de 500 000 euros. On désire déterminer où doit se situer le point pivot P (c'est-à-dire, à quelle distance de A, l'autoroute doit bifurquer pour être construite en plein champ) pour minimiser le coût de réalisation de l'autoroute. Enfin, on impose que la bifurcation ait lieu à au moins 3 km de l'entrée de la ville B, afin d'éviter qu'elle ne subisse une trop forte pollution au quotidien.

1. Formuler cette question comme un problème de minimisation d'une fonction f des deux variables x et y sous contraintes.
2. Ecrire un code en python sur Google Colab permettant de représenter la fonction objective en fonction des variables décision. Que remarquez-vous ?
3. Résoudre le problème obtenu en utilisant la méthode de scipy.optimize.minimize en Python (optimisation quadratique successive).

Pour aller plus loin :

Partie 2 : Programmation non linéaire avec simplexe :

Vous êtes en charge de la gestion de production d'une entreprise de fabrication de meubles. Vous disposez de deux types de matières premières : le bois et le métal. Vous pouvez utiliser ces matières premières pour produire deux types de meubles : des chaises et des tables. Chaque chaise nécessite 2 unités de bois et 1 unité de métal, et chaque table nécessite 3 unités de bois et 2 unités de métal. Vous avez un stock limité de bois (180 unités) et de métal (120 unités) disponibles pour produire des meubles. De plus, vous avez un nombre limité d'heures de travail disponibles pour produire des meubles (80 heures). Il est nécessaire 2 heures pour produire une chaise et 3 heures pour produire une table.

Enfin, chaque chaise rapporte un bénéfice de 15€ et chaque table rapporte un bénéfice de 20€.

Cependant, il y a un coût pour l'utilisation de bois et de métal. Le coût de l'unité de bois est de 2€ et le coût de l'unité de métal est de 3€.

Votre objectif est de maximiser les bénéfices nets en produisant le nombre optimal de chaises et de tables.

1. Modélisez mathématiquement le problème de production sous forme linéaire.
2. Ecrire un code Python sur Google Colab permettant de résoudre ce problème en utilisant l'algorithme simplexe (vous pouvez vous servir de la fonction `scipy.optimize.linprog`)
3. Supposons que le coût des matières premières est maintenant variable (en fonction de la quantité) tels que :
   - Le coût du bois suit la fonction suivante : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(x+1) * \frac{\pi}{2}}$
   - Le coût du métal suit la fonction suivante : $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x+1) * 3\frac{\pi}{4}}$

   Reformulez le problème précédent en prenant en compte les nouvelles contraintes sur le coût.

4. Résoudre le problème obtenu en utilisant la méthode de scipy.optimize.minimize en Python (optimisation quadratique successive).