فصل اول: سیگنال ها و سیستم ها

۱. انرژی و توان سیگنال های زیر را به دست آورید.

$$x_1(t) = e^{-2t} u(t)$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-2t} u(t) \right|^2 dt = \int_0^{+\infty} \left| e^{-2t} \right|^2 dt = \frac{e^{-4t}}{-4} \Big|_0^{+\infty} =$$

$$0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$E$ محدود $\longrightarrow$ $P_\infty = 0$

$$x_2(t) = e^{j\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{j\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1^2 \, dt = +\infty$$

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| e^{j\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)} \right|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1 \, dt = 1$$

$$x_3[n] = e^{j\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}$$

$$E_\infty = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \left| x_3[n] \right|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} 1 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left| x_3[n] \right|^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 1 = 1$$

$$x_4 = \sin[n] \, u[9 - n^2]$$

$$E_\infty = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \left| \sin[n] \, u[9 - n^2] \right|^2 = (\sin[1])^2 + (\sin[2])^2 +$$

$$(\sin[3])^2 = (0/84)^2 + (0/9)^2 + (0/14)^2 = 1/535$$

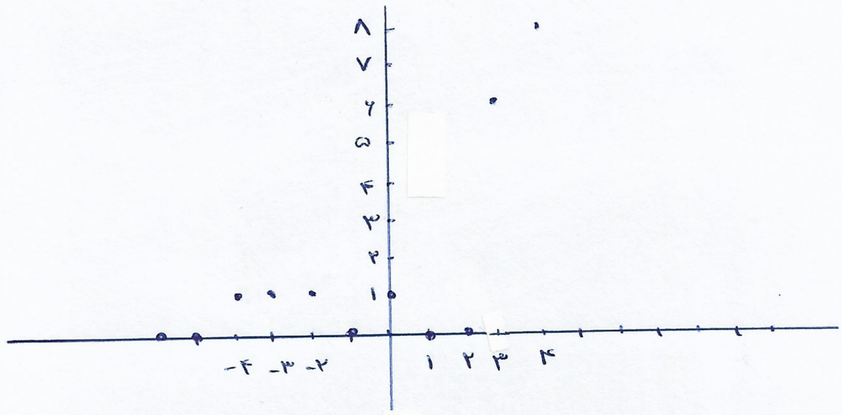
$E_\infty =$ محدود $\longrightarrow$ $P_\infty = 0$

۲. سیگنال های زیر را رسم کنید.

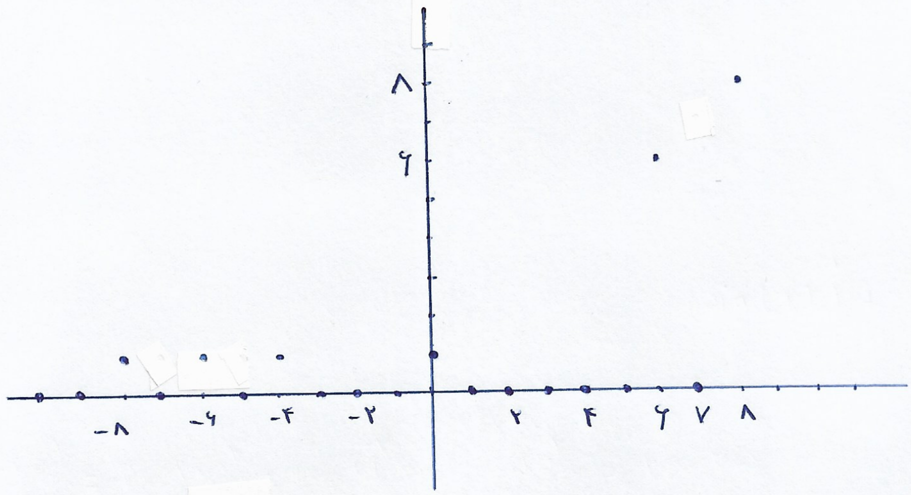
A. x[n] = u[n+۴] − u[n+۲] + δ[n] + ۲n u[n−۳]

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | n < −۴ | ۰ | n < −۲ | ۱ | n = ۰ | ۰ | n < ۳ |
| ۱ | n ≥ −۴ | −۱ | n ≥ −۲ | ۰ | n ≠ ۰ | ۲n | n > ۳ |

| | |
|---|---|
| ۰ | n < −۴ |
| ۱ | −۴ ≤ n < −۲ |
| ۰ | −۲ ≤ n < ۰ |
| ۱ | n = ۰ |
| ۰ | ۰ < n < ۳ |
| ۲n | n > ۳ |

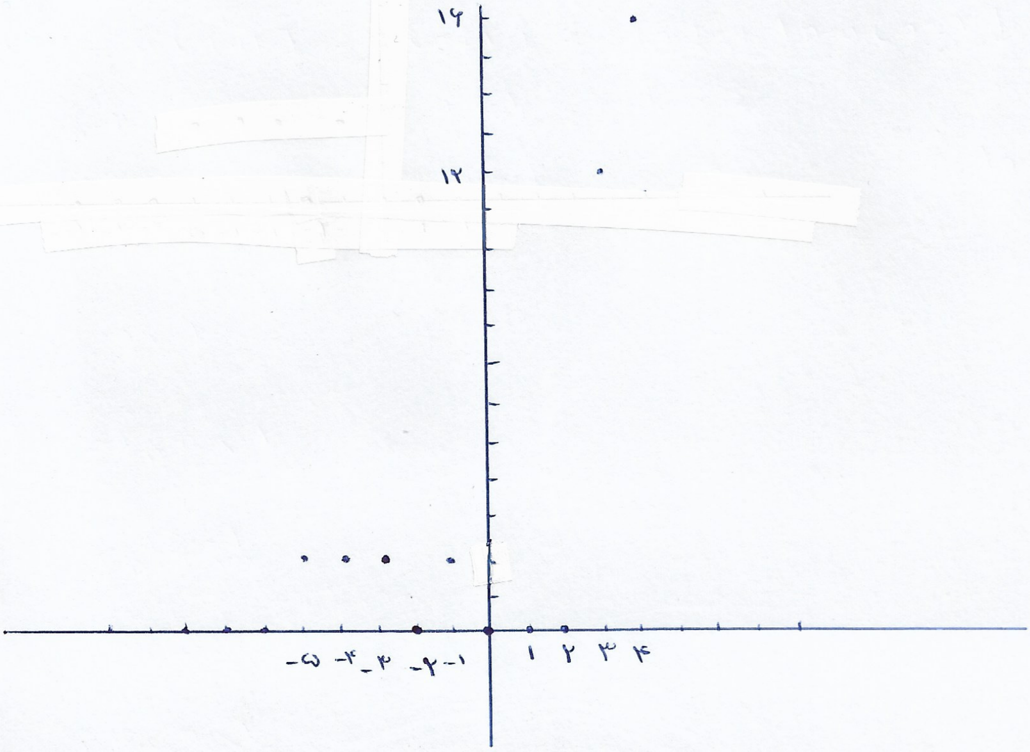



B x[n/۲]

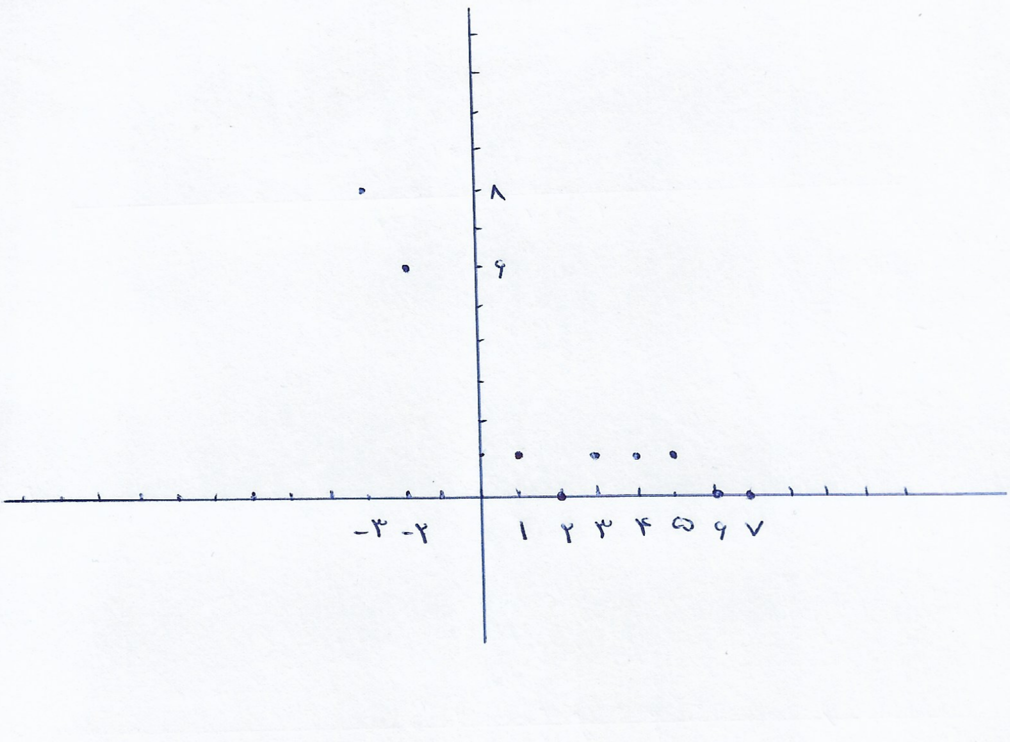


page 3

C. ۲ x[n+1]




D. x[-n+1]



۴. متناوب بودن سیگنال های زیر را بررسی کنید و در صورت متناوب بودن ، دوره تناوب اصلی را به دست آورید.

$$x_1(t) = 2\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$$

دوره تناوب $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ دوره تناوب $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

ک.م.م $\left(\frac{\pi}{5} , \frac{\pi}{2}\right) = \pi$

$$x_2(t) = \sin\left(\frac{5\pi}{3} t\right)$$

$\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5}$ متناوب با دوره تناوب

$$x_3[n] = \sin\left(\frac{5\pi}{3} n\right)$$

$\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5}$ کسر گویا متناوب است $\Rightarrow$ $6$ دوره ی تناوب

$$x_4[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{3} n\right)} + e^{j\left(\frac{3\pi}{4} n\right)}$$

متناوب $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$ متناوب $\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3} \longrightarrow$ دوره تناوب $= 8$

دوره تناوب کلی $=$ ک.م.م $(3, 8) = 24$

$$x_5[n] = e^{j\left(\frac{2}{3} n\right)} + e^{j\left(\frac{3}{4} n\right)}$$

$\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 6\pi$ غیر گویا نامتناوب

$\frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$ غیر گویا نامتناوب

$$x_۶(t) = \underbrace{e^{j(\frac{۲}{۳}t)}}_{\downarrow} + \underbrace{e^{j(\frac{۳}{۴}t)}}_{\downarrow}$$

$$T_1 = \frac{۲\pi}{\frac{۲}{۳}} = ۳\pi \qquad T_۲ = \frac{۲\pi}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۸}{۳}\pi$$

$$\text{ک.م.م}(T_1, T_۲) = \frac{\text{lcm}(۳\pi, ۸\pi)}{\text{gcd}(۱, ۳)} = \frac{۲۴\pi}{۱}$$ دوره تناوب

$$x_۷(t) = \underbrace{e^{j(\frac{۲\pi}{۳}t)}}_{\downarrow} + \underbrace{e^{j(\frac{۳}{۴}t)}}_{\downarrow}$$

$$T_1 = \frac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{۳}} = ۳ \qquad T_۲ = \frac{۲\pi}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۸\pi}{۳}$$

$$\text{ک.م.م}(T_1, T_۲) = \frac{\text{lcm}(۳, ۸\pi)}{\text{gcd}(۱, ۳)} = \frac{۲۴\pi}{۱}$$ دوره تناوب

۴. در سیستم های زیر خواص عمومی سیستم ها (خطی بودن، علی بودن، پایداری، تغییرناپذیری با زمان و حافظه دار بودن) را بررسی کنید.

$$y_1[n] = x[n-n_0]$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x[n]\} = \alpha x[n-n_0] \\ T\{x[n]\} = x[n-n_0] \end{cases} \qquad T\{\alpha x[n]\} = \alpha T\{x[n]\}$$

خاصیت همگنی را دارد

$$\begin{cases} T\{x_1[n]\} = x_1[n-n_0] \\ T\{x_۲[n]\} = x_۲[n-n_0] \\ T\{x_1[n] + x_۲[n]\} = x_1[n-n_0] + x_۲[n-n_0] \end{cases} \rightarrow$$ خطی است ⇐

$$T\{x_1[n] + x_۲[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_۲[n]\}$$

خاصیت جمع پذیری را دارد

علّی بودن

خروجی در لحظه‌ی $n$ به ورودی لحظه‌ی $n-n_0$ بستگی دارد. $n_0$ می‌تواند منفی باشد که در این صورت خروجی در لحظه‌ی $n$ به لحظات بعد از $n$ بستگی دارد که یعنی سیستم غیرعلّی است.

پایداری

سیستم پایدار است چون به ازای ورودی‌های کراندار (محدود) خروجی محدود می‌دهد.

تغییرناپذیری با زمان

$$T\{x[n-n_0]\} = x[n-2n_0]$$

$$y[n-n_0] = x[n-n_0-n_0] = x[n-2n_0]$$

$\Rightarrow$ سیستم تغییرناپذیر با زمان است

حافظه‌دار بودن

خروجی در لحظه‌ی $n$ به ورودی در لحظه‌ی $n-n_0$ بستگی دارد که لحظه‌ی قبل یا بعد $n$ است

پس سیستم حافظه دارد

$$y_2[n] = x[-n]$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x[n]\} = \alpha x[-n] \\ T\{x[n]\} = x[-n] \end{cases} \Rightarrow T\{\alpha x[n]\} = \alpha T\{x[n]\}$$

خاصیت همگنی را دارد

$$\begin{cases} T\{x_1[n]\} = x_1[-n] \\ T\{x_2[n]\} = x_2[-n] \\ T\{x_1[n] + x_2[n]\} = x_1[-n] + x_2[-n] \end{cases} \Rightarrow$$

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$$

خاصیت جمع‌پذیری را دارد

خطی است

علّی بودن

خروجی در نقطه‌ی ۲- به ورودی در نقطه‌ی ۲ بستگی دارد پس سیستم غیرعلی است.

پایداری

سیستم پایدار است چون به ازای ورودی های کراندار (محدود) خروجی محدودی دهد

تغییر ناپذیری با زمان

$$T\{x[n-n_0]\} = x[-n-n_0]$$

$$\Rightarrow$$

$$y[n-n_0] = x[-(n-n_0)] = x[-n+n_0]$$

$$T\{x[n-n_0]\} \neq y[n-n_0]$$ تغییر پذیر با زمان

حافظه دار بودن

خروجی در نقطه‌ی $n$ به ورودی در نقطه‌ی $n-$ بستگی دارد که نقطه‌ی قبل یا بعد است

پس سیستم حافظه دار است.

$$y_3[n] = x[n] + 3u[n+1]$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x[n]\} = \alpha x[n] + 3u[n+1] \\ T\{x[n]\} = x[n] + 3u[n+1] \end{cases} \Rightarrow T\{\alpha x[n]\} \neq \alpha T\{x[n]\}$$

خاصیت همگنی را ندارد

$$\begin{cases} T\{x_1[n]\} = x_1[n] + 3u[n+1] \\ T\{x_2[n]\} = x_2[n] + 3u[n+1] \\ T\{x_1[n] + x_2[n]\} = x_1[n] + x_2[n] + 3u[n+1] \end{cases}$$

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} \neq T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$$

خاصیت جمع پذیری را ندارد

غیر خطی است.

علّی بودن

خروجی در نقطه‌ی $n$ به ورودی نقطه‌ی $n+1$ بستگی دارد پس سیستم غیرعلّی است

پایدار بودن

سیستم پایدار است چون به ازای ورودی های کراندار (محدود) خروجی محدودی دهد

تغییر ناپذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x[n-n_0]\} = x[n-n_0] + 3u[n+1] \\ y[n-n_0] = x[n-n_0] + 3u[n-n_0+1] \end{cases} \Rightarrow$$

$$T\{x[n-n_0]\} \neq y[n-n_0]$$ تغییر پذیر با زمان

حافظه دار بودن

سیستم حافظه‌دار است چون ورودی در نقطه‌ی $n$ به ورودی در نقطه‌ی $n+1$ بستگی دارد

$$y_4[n] = e^{x[n]}$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x[n]\} = e^{\alpha x[n]} \\ T\{x[n]\} = e^{x[n]} \end{cases} \Rightarrow \quad T\{\alpha x[n]\} \neq \alpha T\{x[n]\}$$

خاصیت همگنی را ندارد

$$\begin{cases} T\{x_1[n]\} = e^{x_1[n]} \\ T\{x_2[n]\} = e^{x_2[n]} \\ T\{x_1[n] + x_2[n]\} = e^{x_1[n]+x_2[n]} \end{cases} \Rightarrow$$

$$T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \neq T\{x_1[n] + x_2[n]\}$$

خاصیت جمع پذیری را ندارد

غیرخطی است

علّی بودن

خروجی در لحظه‌ی $n$ به ورودی در لحظات بعد از $n$ بستگی ندارد پس سیستم علّی است

پایدار بودن

سیستم پایدار است چون به ازای ورودی های کراندار (محدود) خروجی محدود می دهد.

تغییر ناپذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x[n-n_0]\} = e^{x[n-n_0]} \\ y[n-n_0] = e^{x[n-n_0]} \end{cases} \Rightarrow \quad T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$$

تغییر ناپذیر با زمان است

حافظه دار بودن

سیستم بدون حافظه است چون ورودی در لحظه‌ی $n$ به ورودی یا خروجی در لحظات قبل و بعد از $n$ بستگی ندارد.

$$y_{\omega} = n\, x[n]$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x[n]\} = n\, \alpha x[n] \\ T\{x[n]\} = n\, x[n] \end{cases} \Rightarrow \quad T\{\alpha x[n]\} = \alpha T\{x[n]\}$$

خاصیت همگنی را دارد

$$\begin{cases} T\{x_1[n]\} = n\, x_1[n] \\ T\{x_2[n]\} = n\, x_2[n] \\ T\{x_1[n] + x_2[n]\} = n\,(x_1[n] + x_2[n]) \end{cases} \Rightarrow$$

$$T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = T\{x_1[n] + x_2[n]\}$$

خاصیت جمع پذیری را دارد

سیستم خطی است.

علّی بودن

خروجی در لحظه‌ی n به مقدار ورودی در لحظه‌های بعد از n بستگی ندارد پس سیستم علّی است

پایدار بودن

سیستم ناپایدار است چون به ازای $n \to +\infty$ خروجی نامحدود می‌شود.

تغییر ناپذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x[n-n_0]\} = n\,x[n-n_0] \\ y[n-n_0] = (n-n_0)\,x[n-n_0] \end{cases} \Rightarrow T\{x[n-n_0]\} \neq y[n-n_0]$$

سیستم تغییر پذیر با زمان است

حافظه‌دار بودن

سیستم بدون حافظه است چون خروجی در لحظه‌ی n به ورودی یا خروجی در لحظات قبل

یا بعد n بستگی ندارد.

$$y_4(t) = x(t-2) + x(2-t)$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x(t)\} = \alpha x(t-2) + \alpha x(2-t) \\ T\{x(t)\} = x(t-2) + x(2-t) \end{cases} \Rightarrow T\{\alpha x(t)\} = \alpha T\{x(t)\}$$

خاصیت همگنی را دارد

$$\begin{cases} T\{x_1(t)\} = x_1(t-2) + x_1(2-t) \\ T\{x_2(t)\} = x_2(t-2) + x_2(2-t) \\ T\{x_1(t) + x_2(t)\} = x_1(t-2) + x_2(t-2) + x_1(2-t) + x_2(2-t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\} = T\{x_1(t) + x_2(t)\}$$

خاصیت جمع پذیری را دارد

سیستم خطی است

علی بودن

خروجی در نقطه‌ی $t=-1$ به ورودی در نقطه‌ی $t=3$ بستگی دارد پس سیستم غیر علی است

پایدار بودن

خروجی به ازای ورودی کراندار (محدود) محدود است پس سیستم پایدار است.

تغییر ناپذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x(t-t_0)\} = x(t-2-t_0) + x(2-t-t_0) \\ y(t-t_0) = x(t-t_0-2) + x(2-t+t_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$T\{x(t-t_0) \neq y(t-t_0)$$ سیستم تغییر پذیر با زمان است

حافظه دار بودن

سیستم حافظه دار است چون خروجی در نقطه‌ی $t$ به ورودی در لحظات قبل و بعد از $t$ بستگی دارد.

$$y_2(t) = x(t)\cos(3t)$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x(t)\} = \alpha x(t)\cos(3t) \\ T\{x(t)\} = x(t)\cos(3t \end{cases} \Rightarrow \quad T\{\alpha x(t)\} = \alpha T\{x(t)\}$$

خاصیت همگنی را دارد

$$\begin{cases} T\{x_1(t)\} = x_1(t)\cos(3t) \\ T\{x_2(t)\} = x_2(t)\cos(3t) \\ T\{x_1(t) + x_2(t)\} = (x_1(t) + x_2(t))\cos(3t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\} = T\{x_1(t) + x_2(t)\}$$

خاصیت جمع پذیری را دارد

خطی است.

علّی بودن

خروجی در نقطه‌ی $t$ به ورودی در نقطه‌ی بعد از $t$ بستگی ندارد سیستم علّی است

پایدار بودن

خروجی به ازای ورودی محدود (کراندار)، کراندار است پس سیستم پایدار است

تغییر ناپذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x(t-t_0)\} = x(t-t_0)\cos(3t) \\ y(t-t_0) = x(t-t_0)\cos(3(t-t_0)) \end{cases} \Rightarrow T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$$

تغییر پذیر با زمان است

حافظه دار بودن

خروجی در نقطه‌ی $t=\frac{1}{2}$ به ورودی نقطه‌ی $t=1$ بستگی دارد پس سیستم حافظه‌دار است

$$y_8(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x(t)\} = \int_{-\infty}^{2t} \alpha x(\tau)\, d\tau \\ T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau \end{cases} \Rightarrow T\{\alpha x(t)\} = \alpha T\{x(t)\}$$

خاصیت همگنی را دارد

$$\begin{cases} T\{x_1(t)\} = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\, d\tau \\ T\{x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\, d\tau \\ T\{x_1(t)+x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)+x_2(\tau)\, d\tau \end{cases} \Rightarrow$$

$$T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\} = T\{x_1(t)+x_2(t)\}$$

خاصیت جمع پذیری را دارد

خطی است

علّی بودن

خروجی در نقطه‌ی $t=+2$ برابر است با $y(+2)=\int_{-\infty}^{+4} x(\tau)d\tau$ که به ورودی $x(\tau)$

از $\tau=-\infty$ تا $\tau=4$ وابسته است پس در نقطه‌ی $t=2$ به $x(3)$ نیز بستگی

دارد پس سیستم غیرعلّی است

پایدار بودن

$$x(t)=A \longrightarrow x(\tau)=A$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{2t} A\,d\tau = A\times+\infty$$

سیستم ناپایدار است

تغییر ناپذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{2t} x(\tau-t_0)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t-t_0} x(\alpha)\,d\alpha \\ \qquad \tau-t_0=\alpha \quad \text{تغییر متغیر} \\ y(t-t_0)=\int_{-\infty}^{2(t-t_0)} x(\tau)\,d\tau \end{cases} \Rightarrow$$

$T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$ سیستم تغییرپذیر با زمان است

حافظه دار بودن

خروجی در نقطه‌ی $t=2$ به ورودی $x(\tau)$ از $\tau=-\infty$ تا $\tau=4$ بستگی دارد

پس سیستم حافظه داراست

$$y_9(t)=x\left(\frac{t}{3}\right)$$

خطی بودن

$$\begin{cases} T\{\alpha x(t)\}=\alpha x\left(\frac{t}{3}\right) \\ T\{x(t)\}=x\left(\frac{t}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow T\{\alpha x(t)\}=\alpha T\{x(t)\}$$

خاصیت همگنی را دارد

$$\begin{cases} T\{x_1(t)\} = x_1(\frac{t}{3}) \\ T\{x_2(t)\} = x_2(\frac{t}{3}) \\ T\{x_1(t)+x_2(t)\} = x_1(\frac{t}{3}) + x_2(\frac{t}{3}) \end{cases} \Rightarrow T\{x_1(t)+x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\}$$

خاصیت جمع پذیری را دارد

خطی است

علی بودن

خروجی در نقطه‌ی $t=-3$ به ورودی در نقطه‌ی $t=-1$ بستگی دارد که نقطه‌ی بعد از $t=-3$ است

پس سیستم غیر علی است.

پایدار بودن

خروجی به ازای ورودی محدود (کراندار)، محدود است پس سیستم پایدار است

تغییر ناپذیری با زمان

$$\begin{cases} T\{x(t-t_0)\} = x(\frac{t}{3} - t_0) \\ y(t-t_0) = x(\frac{t-t_0}{3}) \end{cases} \Rightarrow T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$$

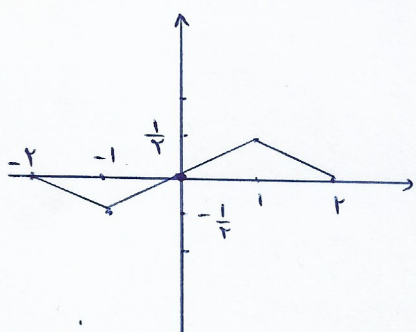
سیستم تغییر پذیر با زمان است

حافظه دار بودن

خروجی در نقطه‌ی $t=-3$ به ورودی در نقطه‌ی $t=-1$ بستگی دارد که ورودی نقطه‌ی بعد است پس

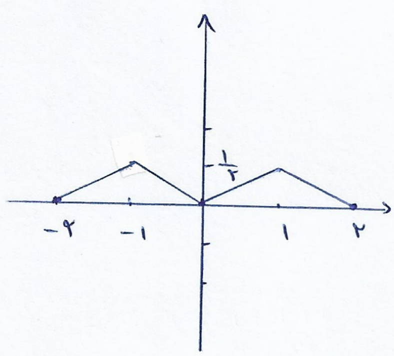
سیستم حافظه دار است

۵) بخش های زوج و فرد سیگنال زیر را تعیین و رسم کنید.




فرد

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$




زوج

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$