Data Communication HW1

Melika Mohammadi Fakhar - 99522086
Mohammad Hosein Hasani - 99521199

Q1)

می‌دانیم:

$$x(t) = \ tri(t) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & OW \end{cases}$$

همچنین می‌دانیم:

$$tri(t) = rect(t) * rect(t)$$

و همچنین طبق تبدیل فوریه داریم:

$$\mathscr{F}(tri(t)) = sinc^2(f)$$

حال برای بخش a سوال خواهیم داشت:

$$x(t) = 2rect(\frac{t}{4}) - 2tri(\frac{t}{2}) = 2(4sinc(4f) - 2sinc^2(2f))$$

و برای بخش b داریم:

$$x(t) = 2rect(\frac{t}{4}) - tri(t) = 8(sinc(4f) - sinc^2(f))$$

Q2)

با استفاده از خواص تبدیل فوریه برای بخش اول عبارت داریم:

$$\mathscr{F}(tri(t)) = sinc^2(f)$$
$$\mathscr{F}(tri(t+3)) = e^{2\pi f 3j} sinc^2(f)$$
$$\mathscr{F}(tri(-2t+3)) = \frac{1}{2} e^{-\pi f 3j} sinc^2(\frac{-f}{2})$$
$$\mathscr{F}(4tri(-2t+3)) = 2e^{-\pi f 3j} sinc^2(\frac{-f}{2})$$

و برای بخش دوم عبارت داریم:

$$\mathscr{F}(sinc(t)) = rect(-f) = rect(f)$$
$$\mathscr{F}(sinc(t-3)) = e^{-\pi 2 f 3j} rect(f)$$
$$\mathscr{F}(sinc(2t-3)) = \frac{1}{2} e^{\frac{-\pi 2 f 3j}{2}} rect(\frac{f}{2})$$

از حاصل جمع این دو بخش خواهیم داشت:

$$2e^{-\pi f 3j} sinc^2(\frac{-f}{2}) + \frac{1}{2} e^{-\pi f 3j} rect(\frac{f}{2})$$

Q3)

می‌دانیم:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

همچنین داریم:

$$h(\tau) = rect(4\tau + 6),\, h(t-\tau) = rect(-4\tau + 4t + 6)$$

بنابراین:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau}u(\tau)rect(-4\tau + 4t + 6)d\tau$$

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-3\tau}rect(-4\tau + 4t + 6)d\tau$$

$$y(t) = \int_{max(0,\ t+\frac{11}{8})}^{max(0,\ t+\frac{13}{8})} e^{-3\tau}d\tau$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} = 0 & t < \frac{-13}{8} \\ \frac{-1}{3}(e^{-3t-\frac{39}{8}} - 1) & \frac{-13}{8} < t < \frac{-11}{8} \\ \frac{-1}{3}(e^{-3t-\frac{39}{8}} - e^{-3t-\frac{33}{8}}) & \frac{-11}{8} < t \end{cases}$$

Q4)

$$x_1(t) = tan(\pi t + \frac{\pi}{4})$$

تانژانت یک تابع متناوب است که در یک تناوب با بازه زمانی محدود، سطح زیر نمودار آن محدود نیست، بنابراین نه توان است و نه انرژی.

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta(t-4k)$$

از آن‌جا که تابع متناوب و دارای دامنه محدود است، سیگنال توان است.

$$x_3(t) = e^{3\pi tj}$$

$$e^{j\theta} = cos(\theta) + j\,.\,sin(\theta),\ e^{-j\theta} = cos(\theta) - j\,.\,sin(\theta)$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \infty$$

$$P(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|x(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1$$

با توجه به نامحدود بودن انرژی و محدودیت توان، سیگنال توان است.

Q5)

$$i(t) = 2r(t) - 2r(t-1) - u(t-1) + \frac{1}{2}r(t-1) - \frac{1}{2}r(t-3) + u(t-3) - 3r(t-3) + 3r(t-4)$$

$$= 2r(t) - \frac{3}{2}r(t-1) - u(t-1) - \frac{7}{2}r(t-3) + u(t-3) + 3r(t-4)$$

و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$r(t) = tu(t) \rightarrow r'(t) = t'u(t) + tu'(t) = u(t)$$

$$i'(t) = 2u(t) - \frac{3}{2}u(t-1) - \delta(t-1) - \frac{7}{2}u(t-3) + \delta(t-3) + 3u(t-4)$$

Q6)

طبق خواص فوریه می‌دانیم اگر $\mathscr{F}(x(t)) = X(f)$ آن‌گاه:

$\mathscr{F}(x(-t)) = X^*(f)$ و $\mathscr{F}(x^*(t)) = X^*(-f)$

همچنین می‌دانیم اگر $x(t)$ یک سیگنال زوج باشد: $x(t) = x(-t)$

و اگر $x(t)$ یک سیگنال حقیقی باشد: $x(t) = x^*(t)$

حال به اثبات صورت سوال می‌پردازیم:

$$x(t) = x(-t) \rightarrow \mathscr{F}(x(t)) = \mathscr{F}(x(-t)) \rightarrow X(f) = X^*(f)$$

بنابراین $X(f)$ حقیقی است.

$$x(t) = x^*(t) \rightarrow \mathscr{F}(x(t)) = \mathscr{F}(x^*(t)) \rightarrow X(f) = X^*(-f) = X(-f)$$

بنابراین $X(f)$ زوج نیز هست.

Q7)

$$x(t) * \delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(T)\delta(t-\tau-T)dT = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(t-\tau-T)dT$$

$$= x(t-\tau)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau-T)dT = x(t-\tau)$$