Periyodik işaretlerin Fourier
Serisi Gösterimi

LTI Sistemlerin Komplex Exp. Cevabı

LTI sistemlerde işaretleri temel işaretlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde ifade etmek faydalı bir yaklaşımdır.

LTI bir sistemin çıkışı, girişin karmaşık bir sabit ile çarpımına eşitse girişe, sistemin öz fonksiyonu denilir. Öz fonk. ile ilişkili olan değere de (karmaşık sabit) sistemin öz değeri denir.

Sürekli zamanda:

Dürtü yanıtı $h(t)$ olan bir sisteme $x = e^{st}$ verildiğinde sistemin çıkışı, conv. integrali ile bulunur.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau \qquad x = e^{st}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{s(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau$$

giriş (öz fonk.)

$$y(t) = e^{st} \cdot H(s)$$

özdeğer

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau \qquad s = jw$$

Ayrık zamanda:

Dürtü yanıtı $h[n]$ olan bir sisteme $x = z^n$ verildiğinde sistemin çıkışı konvülusyon toplamı ile bulunur.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

$$\boxed{= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k}}$$

öz fonk. özdeğer

05.12.2019

$$y[n] = \underbrace{z^n}_{} \cdot \underbrace{H(z)}_{}$$

$$z^n = e^{jw}$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k}$$

Örnek

Dürtü yanıtı $h(t)$ olan sisteme

$$x(t) = a_1 \cdot e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

$y(t) = ?$

$$y(t) = a_1 e^{s_1 t} \cdot H(s_1) + a_2 e^{s_2 t} \cdot H(s_2) + a_3 e^{s_3 t} \cdot H(s_3)$$

Genelleştirme

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$y(t) = x(t) \cdot H(s_k)$$

$$x[n] = \sum_k a_k \cdot z_k^n$$

$$y[n] = x[n] \cdot H(z_k)$$

NOT: LTI sisteminin girişi (x^t), karmaşık üstel işaretlerin kombinasyonu ise çıkışı da aynı üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonudur.

Amaç: Herhangi bir periyodik işareti karmaşık üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonu biçi

Not: s ve z herhagi bir karmaşık sayı olabilir. Fourier analizinde s ve z sırasıyla jw, e^{jw} sayılmaktadır.

Örnek

$$y(t) = x(t-3) \qquad x(t) = e^{j2t} \qquad y(t) = ?$$

$$y(t) = e^{j2(t-3)}$$

$$y(t) = \underbrace{e^{j2t}}_{x(t)} \underbrace{e^{-j6}}_{H(s)}$$

$$h(t) = \delta(t-3)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-3s} \rightarrow s = j2 \rightarrow = e^{-j6}$$

Harmonik olarak bağlantılı komplex exponensiyellerin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebilen bir $x(t)$ olsun.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t} \qquad (1)$$

Örnek

$$2\pi f = w_0$$

$\sin(2\pi 10t)$

$$x(t) = \cos(2\pi 10t) + \cos(2\pi 40t) +$$

$$= \cos(w_0 t) + \cos(4w_0 t)$$

$$x(t) = \frac{e^{jwt}}{2} + \frac{e^{-jwt}}{2} + \frac{e^{4jwt}}{2} + \frac{e^{-4jwt}}{2}$$

$$+ \frac{e^{jwt}}{2j} - \frac{e^{jwt}}{2j}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2j}\right) e^{jwt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2j}\right) e^{-jwt}$$

(1) deki denklem $k=0$ için üstel işaret

$= a_k$ (sabittir)

$k = \mp 1$ için

Üstel işaretlerin temel frekansı w_0'dır. Bu terimler temel veya 1. harmonik bileşenler olarak adlandırılır.

$k = \mp 2$ için

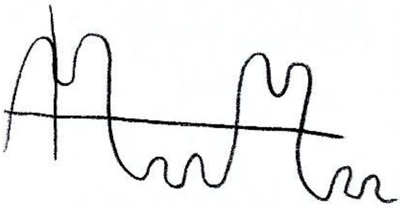
Temel frekansı $2w_0$'dır. Bu terimler 2. harmonik bileşenlerdir.

$k = \mp n$ için

Temel frekans nw_0'dır. Bu terimler n. harmonik bileşenlerdir.

Örnek

$\cos(2w_0) + \cos(w_0)$



(Tek bir sinyal)

NOT: Periyodik bir işaretin (1) deki gibi harmonik olarak bağlantılı kompleks exponensiyellerin doğrusal bir kombinasyonu şeklinde ifade edilmesine fourier serisi gösterimi denir.

Örnek

Temel frekansı 2π olan sürekli zaman fourier gösterimini yazınız.

$a_0 = 1$ $\quad a_2 = a_{-2} = 1/2$ $\quad$ $x(t)$ işaretini sinosiodal formda yazınız.

$a_1 = a_{-1} = 1/4$ $\quad a_3 = a_{-3} = 1/3$

Örnek

$y(t) = x(t-3) \qquad x(t) = e^{j2t} \qquad y(t) = ?$

$y(t) = e^{j2(t-3)}$

$y(t) = \underbrace{e^{j2t}}_{x(t)} \; \underbrace{e^{-j6}}_{H(s)}$

$h(t) = \delta(t-3)$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-3)\, e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-3s} \rightarrow s = j2 \rightarrow = e^{-j6}$$

Harmonik olarak bağlantılı komplex exponensiyellerin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebilen bir $x(t)$ olsun.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk w_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t} \qquad (1)$$

Örnek

$2\pi f = w_0$

$\sin(2\pi 10 t)$

$x(t) = \cos(2\pi 10 t) + \cos(2\pi 40 t) +$

$= \cos(w_0 t) + \cos(4 w_0 t)$

$$x(t) = \frac{e^{jwt}}{2} + \frac{e^{-jwt}}{2} + \frac{e^{4jwt}}{2} + \frac{e^{-4jwt}}{2}$$

$$+ \frac{e^{jwt}}{2j} - \frac{e^{jwt}}{2j}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2j}\right) e^{jwt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2j}\right) e^{-jwt}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jkw_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk2\pi t}$$

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j2\pi t} + a_{-1} e^{-j2\pi t}$$
$$+ a_2 e^{j2(2\pi)t} + a_{-2} e^{-j2(2\pi)t}$$
$$+ a_3 e^{j3(2\pi)t} + a_{-3} e^{-j3(2\pi)t}$$

$$= a_0 + 2\,\frac{\left(a_1 e^{j2\pi t} + a_{-1} e^{-j2\pi t}\right)}{2}$$

$$= a_0 + \left(\frac{1}{4} e^{j2\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi t}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t)$$
$$+ \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

$$x(t) = 1.\cos(2\pi.0t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) +$$
$$+ \frac{2}{3}\cos(6\pi t) + \cos(4\pi t)$$

F.S Gösteriminde Sentez # Denklemi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\overset{\frac{2\pi}{T_0}}{w_0} t}$$

F.S Gösteriminde Analiz # Denklemi

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-jkw_0 t} \, dt$$

$\int_T$ = T uzunluklu herhangi bir aralık

Arda ...

Örnek

Not: Sinosiodal işaretler için fourier serisi doğrudan hesaplanabilir.

$$x(t) = 1 + \sin(w_0 t) + 2\cos(w_0 t) + \cos(2w_0 t + \pi/4)$$

Bu ifadeyi fourier serisi cinsinden yazın.

$$x(t) = 1 + \frac{e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}}{2j} + 2\left(\frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2}\right) + \frac{e^{j(2w_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2w_0 t + \pi/4)}}{2}$$

$$= 1 + \overbrace{\left(1 + \frac{1}{2j}\right)}^{a_1} e^{jw_0 t} + \overbrace{\left(1 - \frac{1}{2j}\right)}^{a_{-1}} e^{-jw_0 t} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} e^{j\pi/4}\right)}_{a_2} e^{j2w_0 t} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}_{a_{-2}} e^{-jw_0 t}$$

Sürekli Zamanda Fourier Serisinin Özellikleri

① **Lineerlik**

$$x(t) \xleftrightarrow[\text{T.F.S}]{\text{F.S}} a_k$$

$$y(t) \longleftrightarrow b_k$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t)$$

$$z_k = Aa_k + Bb_k$$

② **Zamanda Öteleme**

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-jkw_0 t_0} a_k$$

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

③ Zamanda Ters Çevirme

$$x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k$$

$$x(-t) \longleftrightarrow a_{-k}$$

④ Zamanda Ölçekleme

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$x(mt) \longleftrightarrow a_k$$

⑤ Zamanda Çarpma

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$y(t) \longleftrightarrow b_k$$

$$x(t).y(t) \longleftrightarrow h_k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell . b_{k-\ell}$$

⑥ Zamanda Türev Alma

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) = a_k \, (jkw_0)$$

⑦ Parseval ilişkisi

İşaretin enerjisini zaman veya frekans uzayında hesaplamak aynı sonucu verir.

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Sürekli Zaman Fourier Dönüşümü

* Periyodik olmayan bir işaret periyodu sonsuz olan periyodik bir işaret gibidir.

* Periyodik bir işaretin periyodu büyürse, frekansı küçülür. Fourier serisindeki üstel işaretlerin frekansı birbirine yakınlaşır.

* Periyot sonsuz ise frekans bileşenleri sürekli hale gelir. Fourier serisi toplamı, integrale dönüşür.

* Fourier serisinin periyodunun sonsuza gitmesi durumundaki limit haline Fourier dönüşümü denir.

* Fourier serisi → Periyodik
  Fourier dönüşüm → Periyodik
  Aperiyodik

Periyodik Olmayan Bir İşaretin Fourier Dönüşümü

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

Ters Fourier

$$x(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

Örnek

$x(t) = e^{-at} . u(t)$ $a>0$ için Fourier dönüşümünü bulunuz. ($x(jw) = ?$)

$(0,\infty)$ aralığında

$$x(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) . e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} . u(t) . e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at} . e^{-jwt}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+jw)}\, dt$$

$$= \frac{e^{-t(a+jw)}}{-(a+jw)} \Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+jw}$$

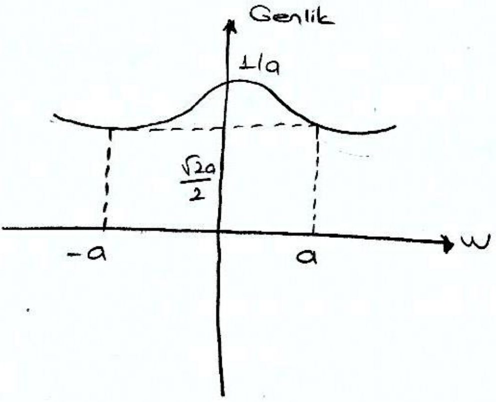
12.12.2019
Perşembe

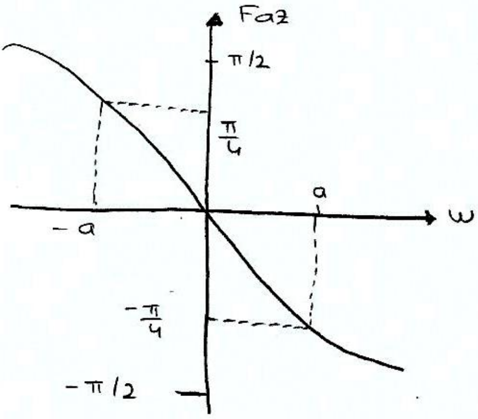
$$\text{Genlik}\,(X(jw)) = |X(jw)|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}}$$

$$\text{Faz}\,(X(jw)) = -\tan^{-1}\left(\frac{w}{a}\right)$$

$$= -\arctan(w/a)$$





Örnek

$x(t) = \delta(t)$ Fourier dönüşümü $(X(jw) = ?)$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-jwt}\, dt = 1$$

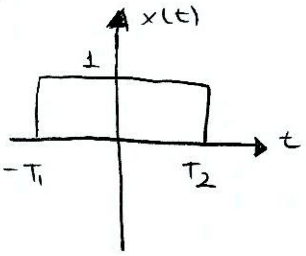
Örnek

$x(t) = \delta(t - t_0)$ $X(jw) = ?$

$$X(jw) = e^{-jwt_0}$$

Örnek (önemli)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \qquad X(jw) = ?$$



$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

❗ $[-T_1, T_1]$ aralığı dışında 0 yüzden aralık değişi

$x(t)$'nin genliği 1

$$\int_{-T_1}^{T_1} \underbrace{x(t)}_{1} . e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jwt} \Rightarrow \left. \frac{e^{-jwt}}{-jw} \right|_{-T_1}^{T_1}$$

$$= \frac{e^{-jwT_1}}{-jw} - \frac{e^{+jwT_1}}{-jw} \Rightarrow$$ sin (x) elde etmeye çalış

$$= \frac{-2j . \sin(wT_1)}{-jw}$$

$$= \frac{2\sin(wT_1)}{2\pi \frac{1}{T}} = \frac{T_1 (\sin(wT_1))}{\pi}$$

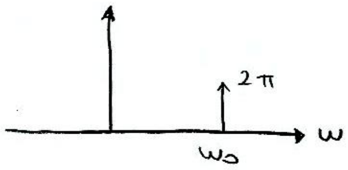
* Kare dalganın Fourier dönüşümü sinc, sinc'in F.D'si kare dalgayı verir.

Periyodik İşaretlerin Fourier Dönüşümü

* Periyodik bir işaretin Fourier dönüşümü frekans uzayında bir dürtü katarından oluşur.

* Dürtünün altındaki alan, Fourier serisi katsayılarıyla orantılıdır.

① $x(jw) = 2\pi\,\delta(w-w_o)$



Ters Fourier Dönüşümü ?

② $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(jw)\, e^{jwt}\,.dw$

③ $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(w-w_o)\,.\,e^{jwt}\,dw$

④ $= e^{jw_o t}$

⑤ $x(t) = e^{jw_o t} \xrightarrow{F.D} X(jw) = 2\pi\,\delta(w-w_o)$

$y(t) = e^{-jw_o t} \xrightarrow{F.D} Y(jw) = 2\pi\,\delta(w+w_o)$

⑥ $z(t) = \dfrac{x(t)+y(t)}{2} = \dfrac{e^{jw_o t} + e^{-jw_o t}}{2}$

⑦ $\cos(w_o t) = \dfrac{e^{jw_o t} + e^{-jw_o t}}{2}$

F.D $\Downarrow$

⑧ $\underbrace{\pi\,\delta(w-w_o)}_{k=1 \text{ için}} + \underbrace{\pi\,\delta(w+w_o)}_{k=-1 \text{ için}}$

⑨ $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,.\,e^{jkw_o t} \longleftrightarrow$

(Periyodik Fourier Serisi)

$x(jw) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k\,.\,\delta(w-kw_o)$

(Periyodik Fourier Dönüşümü)

⑧ - ⑩

Sürekli Zamanda Fourier Dönüşüm Özellikleri

$$x(t) \xrightarrow{F.D} X(jw)$$

$$x(t) = F^{-1}\{X(jw)\}$$

① Lineerlik

$$x(t) \longrightarrow X(jw)$$

$$y(t) \longrightarrow Y(jw)$$

$$ax(t) + by(t) \xrightarrow{F.D} aX(jw) + bY(jw)$$

② Zamanda Öteleme

$$x(t) \xrightarrow{F.D} X(jw)$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-jwt_0} X(jw)$$

③ Türev Özelliği

$$x(t) \xrightarrow{F.D} X(jw)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) \xrightarrow{F.D} jw \cdot X(jw)$$

④ Parseval İlişkisi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(jw)|^2 \, dw$$

⑤ Konvolüsyon Özelliği

Zamanda konvolü frekansta çarpım

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$= x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \, d\tau$$

$$Y(jw) = F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-jwt} \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \, d\tau \right] \cdot e^{-jw_0 t} \, dt$$

19.12.19

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, e^{-j\omega t} dt}_{} \Big] d\tau$$

$$F\{h(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau} \cdot H(j\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot H(j\omega)\, d\tau$$

$$= H(j\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau}_{X(j\omega)}$$

$$\boxed{Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)}$$

Frekans yanıtı

Örnek

$h(t) = e^{-at} \cdot u(t) \quad a > 0$

$x(t) = e^{-bt} \cdot u(t) \quad b > 0 \qquad y(t) = ?$

$$H(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \qquad X(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$$= \frac{1}{a+j\omega} \cdot \frac{1}{b+j\omega} = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{b+j\omega}$$

$$= A(b+j\omega) + B(a+j\omega) = 1 + 0j$$

$Ab + Ba = 1 \qquad j\omega(A+B) = 0 \cdot j\omega$

$A = -B$

$$B = \frac{1}{a-b}$$

$$A = \frac{-1}{a-b}$$

$$Y(j\omega) = -\frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{a+j\omega}\right) + \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b+j\omega}\right)$$

$$y(t) = -\frac{1}{a-b} \cdot e^{-at} u(t) + \frac{1}{a-b} e^{-bt} u(t)$$

Ayrık Zamanda Fourier Dönüşümü

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{jw}) e^{jwn} dw \sim SD$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jwn} \sim AD$$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

Not: $X(e^{jw})$ işareti 2π periyodu ile periyodiktir.

Not: 2π'nin çift katlarına yakın değerleri düşük frekans, tek katlarına yakın değerleri yüksek frekanstır.

Not: Sürekli zamanda SD ve AD'ler ikisi de integral ve ağırlığı sonsuzdu. AZD'de ise A.D sonsuz bir toplama iken SD 2π aralığında sonlu bir integraldir.

Örnek

$$x[n] = a^n \cdot u[n] \qquad |a| < 1$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \cdot u[n] \cdot e^{-jwn}$$

$X(jw) = ?$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-jw}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - a \cdot e^{-jw}}$$

Örnek

$$x[n] = \delta[n]$$

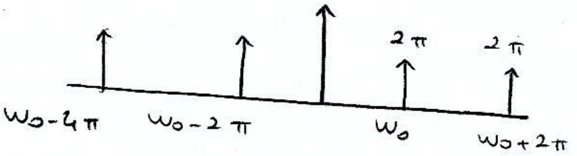
! Tüm frekanslarda eşit bileşen vardır.

Ayrık Zamanda Periyodik İşaretlerin Fourier Dönüşümü

$x[n] = e^{jw_0 n}$ işaretinin F.D'si = ?

$$X(e^{jw}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(w-w_0-2\pi l)$$

$w-(w_0+2\pi l)$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jw})\,e^{jwn}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} 2\pi\,\delta(w-w_0)\,e^{jwn}\,dw$$

$$= e^{jw_0 n}$$

* $e^{jw_0 n} \xrightarrow{F.D} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(w-w_0-2\pi l)$

Örnek

$x[n] = \cos(w_0 n)$

$$= \frac{e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n}}{2}$$

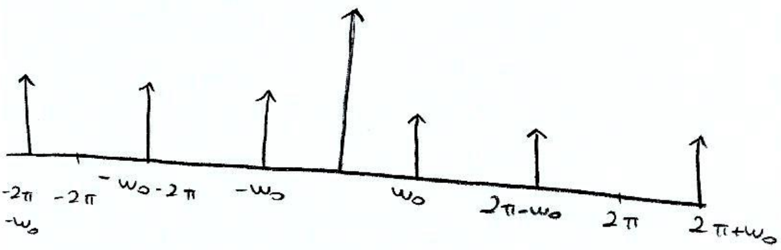
$$\frac{1}{2}e^{jw_0 n} \xrightarrow{F.D} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot 2\pi\,\delta(w-w_0-2\pi l)$$

$$\frac{1}{2}e^{-jw_0 n} \xrightarrow{F.D} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot 2\pi\,\delta(w+w_0-2\pi l)$$

$(w + w_o - 2\pi l)$

$w - (2\pi - w_o)$ $\quad l = 1$

$w - (-2\pi - w_o)$ $\quad l = -1$



Ayrık Zamanda Fourier Dönüşü Özellikleri

① Periyodiklik

$$X\left(e^{j(w+2\pi)}\right) = X\left(e^{jw}\right)$$

$X(e^{jw})$ işareti 2π ile periyodiktir.

② Lineerlik

$$x_1[n] \xrightarrow{F.D} X_1(e^{jw})$$

$$x_2[n] \xrightarrow{F.D} X_2(e^{jw})$$

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xrightarrow{F.D} a X_1(e^{jw}) + b X_2(e^{jw})$$

③ Zamanda Öteleme

$$x[n] \xrightarrow{F.D} X(e^{jw})$$

$$x[n-n_o] \longrightarrow e^{-jw_o n} \cdot X(e^{jw})$$

④ Fark Özelliği

$$x[n] - x[n-1] \longrightarrow X(e^{jw}) - e^{-jw} X(e^{jw})$$

$$\longrightarrow X(e^{jw})\left(1 - e^{-jw}\right)$$

⑤ Tersini Alma

$x[-n] \longrightarrow x(e^{-jw})$

⑥ Frekansta Türev Alma

$n \cdot x[n] \longrightarrow j\dfrac{d(x(e^{jw}))}{dw}$

⑦ konvolüsyon Özelliği

$y[n] = x[n] * h[n]$

$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw})$

Z Dönüşümü

Dürtü Yanıtı = $h[n]$

Girdi = z^n $\Rightarrow$ $z = e^{jw}$ $\quad (e^{jw})^n = z^n$

$$y[n] = H(z) \cdot z^n$$

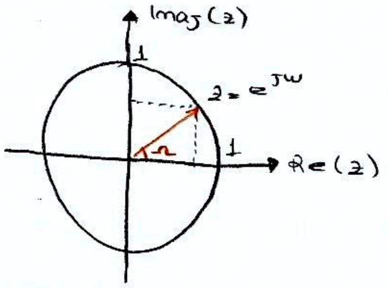
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n}$$

$z = e^{jw}$ $\quad |z| = 1$ için $H(z)$ ifadesi **$h[n]$**'in ayrık zaman F.D'sidir. $|z| = 1$ olmak zorunda değildir. Bu durumda $H(z)$ ifadesine **Z dönüşümü** denir. z karmaşık bir sayı olmak üzere

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

$$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

z dönüşümü, karmaşık z düzleminde birim çember üzerinde hesaplanırsa ($|z| = 1$) ayrık zaman fourier dönüşümüne karşılık gelir.



z Düzlemi

$|z| = r \cdot e^{jw}$ ise $\quad X(z) = X(r \cdot e^{jw})$ olur.

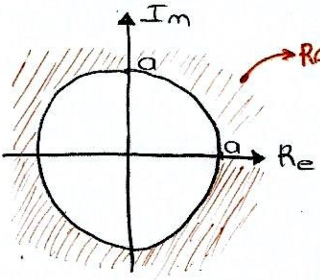
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \, (r \cdot e^{jw})^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot r^{-n} \cdot e^{-jwn}$$

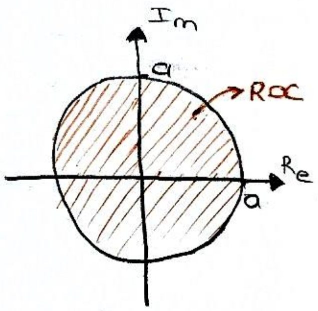
$X(r \cdot e^{jw}) = F\left\{ x[n] \cdot r^{-n} \right\}$ eşitliği elde edilir.

26.12.19

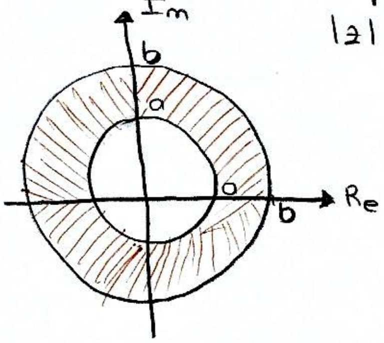
Not: $x[n]$ işaretinin z dönüşümü olması için $x[n].r^{-n}$ işaretinin ayrık zamanlı Fourier dönüşümü yakınsamalıdır. $x[n]$ işareti için z dönüşümünün hesaplanabildiği ve sonlu $X(r.e^{j\omega})$ değerlerinin elde edildiği r değerler kümesine Yakınsaklık bölgesi (ROC) denir.
ROC, birim çemberi kapsıyorsa işaretin Fourier dönüşümü de vardır.
Yakınsaklıkta belirleyici olan genliktir. Bazın fazla bir etkisi yoktur.



$|z|>a$



$|z|<a$



$a<|z|<b$

Örnek

$x[n]=u[n]$ ifadesin z dönüşümü nedir?

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^{n}$$

$$=\frac{(z^{-1})^{\infty}-(z^{-1})^{0}}{z^{-1}-1}$$

$$=\frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{ROC } |z|>1$$

! z dönüşümünün sonlu olabilmesi için $|z^{-1}|<0$ olması gerekir. $(|z|>1)$ olur.

Örnek

$X(n) = a^n . u[n]$ z dönüşümü nedir

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) . z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n . z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a.z^{-1})^n = \frac{(a.z^{-1})^{\infty} - (a.z^{-1})^0}{a.z^{-1} - 1}$$

$$= \frac{1}{1 - a.z^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad \text{ROC } |z| > |a|$$

Örnek

$$X[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n . u[n] - 6.\left(\frac{1}{2}\right)^n . u[n]$$

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} 7\left(\frac{1}{3}\right)^n . z^{-n}$$

$$= 7 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} . z^{-1}\right)^n$$

$$= 7. \frac{\left(\frac{1}{3} . z^{-1}\right)^{\infty} - \left(\frac{1}{3} . z^{-1}\right)^0}{\left(\frac{1}{3} . z^{-1}\right) - 1}$$

$$= \frac{7}{1 - \frac{1}{3} . z^{-1}}$$

$$= \frac{7}{1 - \frac{1}{3} . z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{2} . z^{-1}} \Rightarrow \begin{array}{l} |z| > \frac{1}{3} \\ |z| > \frac{1}{2} \end{array}$$

! Bu durumlarda ortak çözüm yapılır. Hangisi büyükse o alınır.

$\text{Roc} : |z| > \frac{1}{2}$

Örnek

$x[n] = \delta[n]$ z dönüşümü ?

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] . z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] . z^{-n}$$

$$= 1 \qquad ROC : \forall z$$

Örnek

$x[n] = \delta[n-1] \qquad X(z) = z^{-1} \qquad ROC : \forall z$

$x[n] = \delta[n+1] \qquad X(z) = z \qquad ROC : \forall z$

z dönüşümü verilmiş bir işaretten orjinal haline dönülmek istenirse basit kesire ayırma kuralları uygulanır.

z Dönüşümünün Özellikleri

① Zamanda Öteleme

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z)$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} . X(z)$$

② Konvolüsyon Özelliği

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z) . H(z)$$

③ z Uzayında Türev Alma

$$n . x[n] \xleftrightarrow{z} -z . \frac{dX(z)}{dz}$$

Örnek

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3} x[n-1]$$

(Sabit katsayılı Fark Denklemleri)

$$Y(z) - \frac{1}{2} \cdot z^{-1} \cdot Y(z) = X(z) + \frac{1}{3} \cdot z^{-1} \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x}$$

yaparak $H(n)$ ifadesini bulabiliriz.

! $H(z)$, transfer fonksiyon denir.

C1: $|z| > \frac{1}{2}$

$$h[n] = \frac{1}{2}^{n} \cdot u^{n} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

C2: $|z| < \frac{1}{2}$

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot u[-n]$$