Periyodik İşaretin Fourier Serisi Gösterimi

↳ LTI sistemlerin kompleks exponensiyel cevabı

Öz fonk: LTI bir sistemin çıkışı, girişin karmaşık bir sabit ile çarpımına eşitse girişe öz fonk. denir.

▶ Karmaşık sabite öz değer denir.

Sürekli zamanda

$x=e^{st}$ verildiğinde sistemin çıkışı conv. integrali ile bulunur.

$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$

$=e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-s\tau}d\tau$

$y(t)=e^{st}.H(s)$
öz fonk. öz değer

$s=j\omega$

Ayrık zamanda

$x=z^n$ verildiğinde sisteme konvolüsyon toplamı ile bulunur.

$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[n-k]$

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].z^{n-k}$

$=z^n\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].z^{-k}$

$y[n]=z^n.H(z)$

$z^n=e^{j\omega}$

Örnek

$x(t)=a_1e^{s_1t}+a_2e^{s_2t}$ $y(t)=?$

$y(t)=a_1.e^{s_1t}H(s_1)+a_2e^{s_2t}H(s_2)$

Genelleştirme

$x(t)=\sum_k a_k e^{s_kt}$

$x[n]=\sum_k a_k.z_k^n$

$y(t)=x(t).H(s_k)$

$y[n]=x[n].H(z_k)$

Not: LTI sis. girişi karmaşık üstel işaretlerin kombinasyonu ise çıkışı da aynı üstel işaretlerin doğrusal bir kombinasyonudur.

Amaç = Herhangi periyodik işareti karmaşık üstel işaretle'in doğrusal kombinasyonu biçiminde yazmaktır.

Örnek

$y(t)=x(t-3)$ $x(t)=e^{j2t}$

$h(t)=\delta(t-3)$ $y(t)=?$

$y(t)=e^{2j(t-3)}=e^{2jt}.e^{-6j}$

Fourier Serisi Gösterimi

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.e^{jk\omega_0t}$

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.e^{jk(2\pi/T_0)t}$

Örnek

$x(t)=\cos(2\pi 10t)+\cos(2\pi 40t)$
$\sin(2\pi 10t)$

Not = Üstel işaretlerin temel frekansları ω_0'dır. ($k=2$ $2\omega_0$ 2. harm)

Fourier Serisi

Periyodik bir işaretin (1)deki gibi harmonik olarak bağlantılı karmaşık exponensiyellerin doğrusal kombinasyonu şeklinde ifade edilmesine denir.

Örnek

Temel frekansı 2π olan sürekli zaman fourier serisi gösterimini yazın

$a_0=1$ $a_1=a_{-1}=1/4$

$a_2=a_{-2}=1/2$ $a_{-3}=a_3=\frac{1}{3}$

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.e^{jk\omega_0t}$

$1+\frac{1}{2}\cos(j2\pi t)+\cos(j4\pi t)+2/3\cos(j6\pi t)$

FS Gösteriminde Sentez Denklemi

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.e^{jk\omega_0t}$

F.S Gösteriminde Analiz Denklemi

$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0t}dt$

T uzunluklu herhangi bir aralık

Örnek

$x(t)=1+\sin(\omega_0t)+2\cos(\omega_0t)$

Fourier serisi cinsinden yazınız.

$x(t)=1+e^{j\omega_0t}-e^{-j\omega_0t}/2$

$+e^{j\omega_0t}+e^{-j\omega_0t}$

$1+(1+\frac{1}{2j})e^{j\omega_0t}+(1-\frac{1}{2j})e^{-j\omega_0t}$

Sürekli Zamanda Fourier Serisinin Ö.

① Lineerlik

$x(t)\leftrightarrow a_k$

$y(t)\leftrightarrow b_k$

$z(t)=Ax(t)+By(t)$

$z_k=Aa_k+Bb_k$

② Zamanda Öteleme

$x(t)\leftrightarrow a_k$

$x(t-t_0)\leftrightarrow a_ke^{-jk\omega_0t_0}$

③ Zamanda Ters Çevirme

$x(t)\leftrightarrow a_k$

$x(-t)\leftrightarrow a_{-k}$

④ Zamanda Ölçekleme

$x(t)\leftrightarrow a_k$

$x(mt)\leftrightarrow a_k$

⑤ Zamanda Çarpma

$x(t)\leftrightarrow a_k$

$y(t)\leftrightarrow b_k$

$x(t).y(t)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell.b_{k-\ell}$

⑥ Zamanda Türev

⑦ Parseval İlişkisi

İşaretin enerjisini zaman veya frekans uzayında hesaplamak aynı sonucu verir.

$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2dt$

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$

Sürekli Zamanda Fourier Dönüşümü

▶ Periyodik olmayan bir işaret, periyodu sonsuz olan periyodik gibidir.

▶ Periyodik işaretin periyot ↑ frekansı ↓
Fourier serisindeki üstel işaretlerin frekansı birbirine yaklaşır.

▶ Periyot sonsuz ise frekans bileşenleri sürekli hale gelir. Fourier serisi toplamı integrale dönüşür.

Periyodik olmayan Bir İşaretin Fourier Dönüşümü

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$x(t)\to X(j\omega)$ Fourier

$X(j\omega)\to x(t)$ Ters fourier

Örnek

$x(t)=e^{-at}.u(t)$

$X(j\omega)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}$

$=1/a+j\omega$

Genlik $(X(j\omega))=|X(j\omega)|$

$=1/\sqrt{a^2+\omega^2}$

Faz$(X(j\omega))=-\tan(\frac{\omega}{a})$

$=-\arctan(\omega/a)$

$x(t)=\delta(t)$ F.D = ?

$=1$

$x(t)=\delta(t-t_0)=e^{-j\omega t_0}$

Not = Kare dalganın Fourier sinc, sinc'inki kare dalga

③ Türev Alma

$n\,x[n]\leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{d(z)}$

① Zamanda Öteleme

$x[n]\xrightarrow{z}X(z)$

$x[n-n_0]\to z^{-n_0}X(z)$

② Konvolüsyon

$y[n]=x[n]*h[n]$

$=X(z).H(z)$

Z Dönüşümü

$x[n]=u[n]$

$X(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}u[n]z^{-n}$

$=1/(1-z^{-1})$ $|z|>1$ Roc

Ortak çözüm

Periyodik İşaretlerin Fourier Dönüşümü

▶ Periyodik bir işaretin Fourier dönüşümü frekans uzayında bir dürtü katarından oluşur

▶ Dürtünün altında kalan alan Fourier serisi katsayıları ile orantılıdır.

Örnek

$X(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}$

$x(t)=e^{j\omega_0t}$

$y(t)=e^{-j\omega_0t}$

$Y(j\omega)=2\pi\delta(\omega+\omega_0)$

$z(t)=\frac{e^{j\omega_0t}+e^{-j\omega_0t}}{2}$

$z(t)=\cos(j\omega_0t)$

$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$

$k=1$ için $k=-1$ için

$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_ke^{jk\omega_0t}$

Periyodik Fourier Serisi

$X(j\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0k)a_k$

Periyodik Fourier Dön.

Sürekli Zamanda Fourier Dönüşüm Özellikleri

$x(t)\xrightarrow{F.D}X(j\omega)$

$x(t)=F^{-1}\{X(j\omega)\}$

① Lineerlik

$x(t)\to X(j\omega)$

$y(t)\to Y(j\omega)$

$ax(t)+by(t)\to aX(j\omega)+bY(j\omega)$

② Zamanda Öteleme

$x(t)\to X(j\omega)$

$x(t-t_0)\to X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

③ Türev Özelliği

$x(t)\xrightarrow{FD}X(j\omega)$

$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)\to j\omega X(j\omega)$

④ Parseval İlişkisi

$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$

⑤ Konvolüsyon Özelliği

$y(t)=h(t)*x(t)$

$=x(t)*h(t)$

$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega t}dt$

$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}$

$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega t}H(j\omega)$

$=H(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega t}$

$Y(j\omega)=H(j\omega).X(j\omega)$

Örnek

$h(t)=e^{-at}u(t)$

$x(t)=e^{-bt}u(t)$ $y(t)=?$

$H(j\omega)=1/a+j\omega$

$X(j\omega)=1/b+j\omega$

$Y(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}+\frac{1}{b+j\omega}$

kesirlere ayır

$Y(j\omega)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)+\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b+j\omega}\right)$

$y(t)=\frac{1}{b-a}e^{-at}.u(t)+\frac{1}{a-b}e^{-bt}u(t)$

Ayrık Zamanda Fourier Dönüşümü

$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

(sentez denklemi)

$X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$

(Analiz Denklemi)

▶ $X(e^{j\omega})$ işareti 2π periyodu ile periyodiktir.

▶ 2π'nin çift katlarına yakın değerler düşük frekans, tek katlarına yakın değerleri yüksek frekanstır.

▶ A.D sonsuz toplam S.D 2π'de sonlu integraldir

Örnek

$x[n]=a^n.u[n]$

Fourier dönüşümü

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n.e^{-j\omega n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n$

$=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

Ayrık Zamanda Periyodik İşare Fourier Dönüşü

$X[n]=e^{j\omega_0 n}$

$X(e^{j\omega})=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}2\pi\delta$

$2\pi\delta(\omega-\omega_0+$

$e^{j\omega_0 n}$ F.D

$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0$

Örnek

$x[n]=\cos(\omega_0$

$=\frac{e^{j\omega_0 n}}{2}+\frac{e^{-j\omega_0 n}}{2}$

$=\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi\ell)$

$+\pi\delta(\omega+\omega_0-2\pi$

Ayrık Zamanda F.D Dönüşüm Özellik

① Periyodiklik

$X(e^{j(\omega+2\pi)})$

$=X(e^{j\omega})$ 2π i per

② Lineerlik

$x_1[n]\xrightarrow{F.D}X_1(e^{j\omega})$

$x_2[n]\to X_2(e^{j\omega})$

$ax_1[n]+bx_2[n]$.

$aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$

③ Zamanda Öte

$x[n]\xrightarrow{F.D}X(e^{j\omega}$

$x[n-n_0]\to X(e^{j\omega})$

④ Fark Özelliği

$x[n]-x[n-1]$ —

$X(e^{j\omega})-(X(e^{j\omega})$

$=X(e^{j\omega})(1-e^{-j\omega}$

⑤ Tersini Alma

$x[-n]\to X(e^{-j\omega}$

⑥ Frekansta Türev

$n.x[n]\to j\frac{d(X(e}{d\omega}$

⑦ Konvolüsyon

$y[n]=x[n]*h[$

$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega}).H$

Z Dönüşümü

Girdi → z^n $z=e^{j\omega}$

$y[n]=H(z).z^n$

$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n].z$

$x[n]\leftrightarrow X(z)$

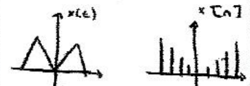
...netlerin Sınıflandırıl...
.Sürekli ayrık zaman
Analog sayısal
Periyodik - aperiyodik
Rastgele - rast. olmayan
Tek ve Çift
...rekli ve Ayrık zamanda ...emler
...celeme (t-to)
...manda ters çevirme (-t) düşeyde ters)
...ele-ters çevirme
öteleme-ters (normal)
ters-ötele (terse ötele)
...sıştırma (b'deki 3)
...işletme (doldurma yap)
...ekli-Ayrık özellikler
...rim basamak
...im dürtü (Alan 1)
...c fonksiyonu
...el üstel ($x=c.a^t$ $a=e^{\lambda}$)
...maşık " ($x=c.e^{\lambda t}$ $\lambda=jw$)
...üsoidal
...yodik ditlik
...ekli ve Ayrık Sistemler
...stemlerin bağlanması
...temlerin özellikleri
...afızalı-hafızasız
...ersi alınabilir
...edensel (Gelecek x)
...anla değişmeyen
...er sistem
...uperpozisyon
...TO-LTI Sistemler
...külasyon

...ller ve Sistemler
...i = Fiziksel bir durum ...nda bilgi taşıyan bir ...iyondur.
...mler = istenilen nitelikle... üretmek veya giriş ...lerine göre çıkışlar ... düzenleyenlerdir.
...i = sistem analizi ve ...zinde işaretle isteni... ...eğişiklikleri yerine getir... yani işareti işlemek.
...nalizi = sistemin farklı ...ere nasıl yanıt verdi... bulunmasıdır. (sistemin ...n prensibinin tespiti)
...sentezi = sistemin kullan... ...tiyaçları doğrultusunda ...lanmasıdır. Yani belirli ...nksiyonu yerine getire... sistemin geliştirilmesi ..., gürültülü işaretlen...
...kli - Ayrık zaman
...kli zamanda işaretin ...olduğu değişken süre... ...işaret, değişkenin tüm ...larında tanımlıdır.
...ayrık işaret = Hem zaman... ...de genliğe göre ...ikli ise buna denir.
...al (sayısal) işaret = ...zamana hem de ...ğe göre ayrık ise.
...alog → dijital için ...ce örnekleme sonra ...zalama yapılmalıdır. ...ekli değerleri sınırlandır... ...ayda yap. Sonra ...lara bil yuvarlama yap
...ekli
...t)
değişken
∈ R
...k

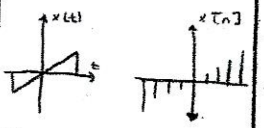
▶ Bir işaretin herhangi anda alacağı değeri bilirik. Deterministiktir. Buna rastgele olmayan işaret denir.
▶ Rastgele işaretler ortalama standart sapma gibi istatistiksel değerlerle tanımlanabilir.

Tek ve Çift işaretler

Çift
↳ $x(-t) = x(t)$
↳ $x[-n] = x[n]$



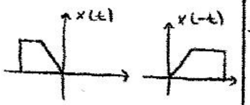
Tek işaretler
↳ $x(-t) = -x(t)$
↳ $x[-n] = -x[n]$



$x_ç[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\}$
$x_T[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\}$
$x[n] = x_T[n] + x_ç[n]$

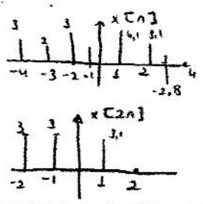
④ işlemler
① öteleme
$y(t) = y(t-t_o)$
$x[n] = x[n-n_o]$
if ($t_o > 0$ || $n_o > 0$)
o zaman gecikme olur
else if ($t_o < 0$ || $n_o < 0$)
o zaman ilerleme olur.
$x[n] \to x[n-2]$ sağa

② Zamanda ters çevirme
↳ Düşeye göre simetri
$y(t) = x(-t)$
$y[n] = x[-n]$



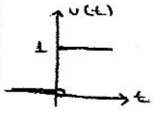
③ Zaman ters - ötele
$y(t) = x(-t-t_o)$
$y[n] = x[-n-n_o]$
↳ önce ötele sonra çevir
↳ önce çevir sonra ötele

④ Zamanda sıkıştırma
$y(t) = x(bt)$
$b \in R$ $b>1$ $b<-1$
$y[n] = x[\alpha n]$
$\alpha \in Z$ $\alpha \neq \{-1, 0, 1\}$



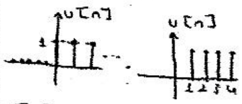
⑤ Zamanda Genişletme
$y(t) = x(t/b)$
$y[n] = x[n/a]$
▶ Doldurma yap

① Birim Basamak



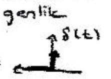
$u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

$u[n] = \begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$

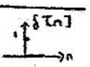


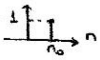
$u[n] = u[n-1] - u[n-5]$

② Birim Dürtü
$x(t) = \delta(t)$
↳ t=0 'da uzun işaret
↳ Alanı daima 1
↳ küçük genlik

$\delta(t) =$ 

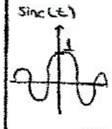
$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t)$
$\int_c^d x(t).\delta(t)dt = x(0)$
$x(t).\delta(t-t_o) = x(t_o)\,\delta(t-t_o)$
$\delta(t) = u'(t) = du(t)/dt$

$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$ 

$\delta[n-n_o] =$ 

Özellikleri — konum
a) $x[n]\,\delta[n] = x[0].\delta[n]$
$x[n_o].\delta[n-n_o] = x[n_o].\delta[n-n_o]$
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

③ Sinc Fonksiyonu
$Sinc(t) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ \frac{\sin(t)}{t} & t\neq 0 \end{cases}$



▶ $f(v) = f(-v)$ Çift fonk.
$\int_{-\infty}^{\infty} sinc(t)dt = \pi$

⑥ Genel üstel işaretler
$x(t) = c.a^t$ $a = e^{\lambda}$
$x(t) = c.e^{\lambda t}$

⑤ Karmaşık üstel
$x(t) = c.e^{\lambda t}$
$\lambda \to$ sanal bileşen
$\lambda \to jw_0$
$x(t) = c.e^{jw_0 t}$
$e^{jw_0 t} = \cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t)$
$\cos(w_0 t) = (e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t})/2$
$x[n] = C.e^{\Omega n j}$
$z = r.e^{\theta j} \to r=1$ $\theta = \Omega$

⑥ Sinüsoidal işaretler
$x(t) = A\sin(w_0 t + \theta)$
genlik açısal faz
$x[n] = A\cos(w_0 t + \theta)$
$\cos(-\Omega n) = \cos(n(2\pi + \Omega))$
$= \cos(2\pi n).\cos(-\Omega n) - \sin$

① Periyodik sinyaller
$x[n] = x[n+N_0]$
$\cos(\Omega n) = \cos(\Omega(n+N_0))$
$\cos(\Omega n) = \cos(\Omega n + \Omega N_0)$
$\Omega N_0 = 2\pi r$
$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{r}{N_0}$

③ Sürekli ve Ayrık Sis.
① Hafızalı - Hafızasız
Hafızalı
$y[n+1] = x[n+1]$
Hafızasız
$y[n] = x[n] + u[n-1]$

② Tersi Alınabilir
! Her girdi için farklı çıktı olmalıdır.

③ Nedensel Sistemler
! Geçmişe ya da o ana bağlıdır.
Girenlere bağlı değildir

④ Zamanda Değişmeyen
↳ öteleme haricinde değişmez
$x[n] \to y[n]$
$x[n-n_o] \to y[n-n_o]$
Örnek
$y[n] = x[n] + x^2[n]$
$x_1[n] \to y_1[n]$
$y_1[n] = x_1[n] + x_1^2[n]$
$x_2[n] = x_1[n-n_o]$
$y_2[n] = x_2[n] + x_2^2[n]$
$y_2[n] = x_1[n-n_o] + x_1^2[n-n_o]$
(elde ettiğim)

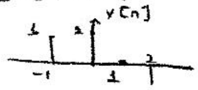
⑤ Doğrusal Sistemler
↳ ölçeklenebilir
↳ Toplanabilir
$x(t) \to y(t)$
$ax(t) \to ay(t)$
$x_1(t) \to y_1(t)$
$x_2(t) \to y_2(t)$
$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$
Süper Pozisyon
$ax_1[n] + bx_2[n] \to$
$ay_1[n] + by_2[n]$
Örnek
$y(t) = x(t) + x^2(t)$
$x_1(t) = ax(t)$
$ay(t) = ax(t) + ax^2(t)$
↳ istenilen
$y_1(t) = x_1(t) + x_1^2(t)$
$y_1(t) = ax(t) + a^2x(t)$
↳ elde edilen

$y_1(t) = x_1(t) + x_1^2(t)$
$y_2(t) = x_2(t) + x_2^2(t)$
$ax_1[n] + bx_2[n] = x_3[n]$

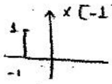
↳ Hem lineer
↳ zamanla değişmez
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$ konvolüsyon toplamı
$\delta[n] \to h[n]$
$y[n] = x[n] * h[n]$
$y(t) = x(t) * h(t)$
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$

① Analitik Çözüm
$a[n] = (0,2)^n.u[n]$
$b[n] = (0,6)^n.u[n]$
$c[n] = a[n] * b[n]$
$= \sum_{-\infty}^{\infty} a[k].b[n-k]$
$= (0,2)^k.u[n].(0,6)^{n-k}$
$u[n-k]$
$= \sum_{k=0}^{n} (0,2)^k.(0,6)^{n-k}$
$= \left(\frac{0,2}{0,6}\right)^k.(0,6)^n$
$= (0,6)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

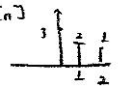
② Grafiksel



$x[-1].\delta[n+1]$



h[n]



Sonra yap yap topla

③ Pratik Çözüm
1 2 0 -1 x[n]
(3 2 1) h[n] ters
1 2 0 -1
1 2 3
3 8 5

LTI özellikleri
① Yer Değiştirme
$y[n] = x[n] * h[n]$
$= h[n] * x[n]$
② Dağılma özelliği
$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$
$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$
$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
$x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$
$= x(t) * h(t)$
③ Birleşme
$y[n] = x[n] * h[n]$
$x[n] \to \square - \square \to y[n]$

Melike OĞUZ
170201028

$y(t) = \cos[x(t)]$
$x(t) \to y(t)$
$x(t-t_o) \to y(t-t_o)$
$y_1(t) = \cos[x_1(t)]$
$x_2(t) = x_1(t-t_o)$
$y_2(t) = \cos[x_2(t)]$
$y_2(t) = \cos[x_1(t-t_o)]$
↳ Elde edilen
↳ $y_1(t-t_o) = \cos[x_1(t-t_o)]$
(istenilen)