Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL-4703 Señales y Sistemas
Profesores: M.Sc. José Miguel Barboza Retana
Dr. Pablo Alvarado Moya
Lic. Daniel Kohkemper Granados
M.Sc. Javier Rivera Alvarado
II Semestre, 2019
Examen Final

Total de Puntos:	100
Puntos obtenidos:	
Porcentaje:	
Nota:	

Nombre: ______________________ Carné: ____________

Advertencias:

- Resuelva el examen en forma individual, ordenada y clara.
- Cada ejercicio debe indicar el procedimiento o justificación completa de la solución.
- No se aceptarán reclamos de desarrollos con lápiz, borrones o corrector de lapicero.
- Si trabaja con lápiz, debe marcar su respuesta final con lapicero.
- El uso de lapicero rojo **no** está permitido.
- El uso del teléfono celular no es permitido. Este tipo de dispositivos debe permanecer **totalmente apagado** durante el examen.
- No se permite el uso de **ningún tipo** de calculadora electrónica.
- El instructivo de examen debe ser devuelto junto con su solución.
- El incumplimiento de los puntos anteriores equivale a una nota igual a cero en el ejercicio correspondiente o en el examen.

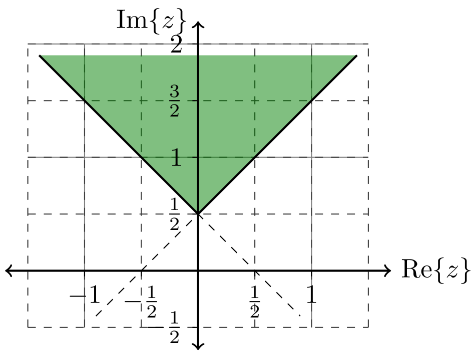
Pregunta 1	de 6
Pregunta 2	de 6
Pregunta 3	de 8
Pregunta 4	de 6
Pregunta 5	de 5
Problema 1	de 22
Problema 2	de 22
Problema 3	de 25

Preguntas

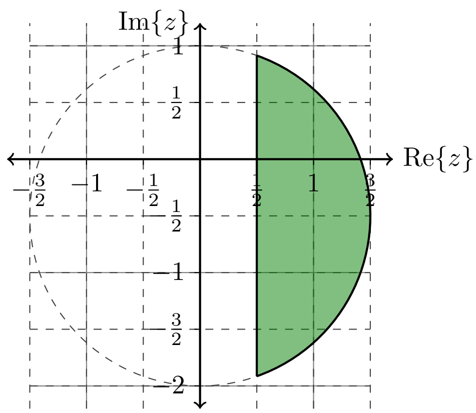
31 Pts

Debe justificar cada una de sus respuestas. Para ello puede utilizar el espacio disponible o un cuaderno de examen indicando claramente la pregunta correspondiente a su solución.

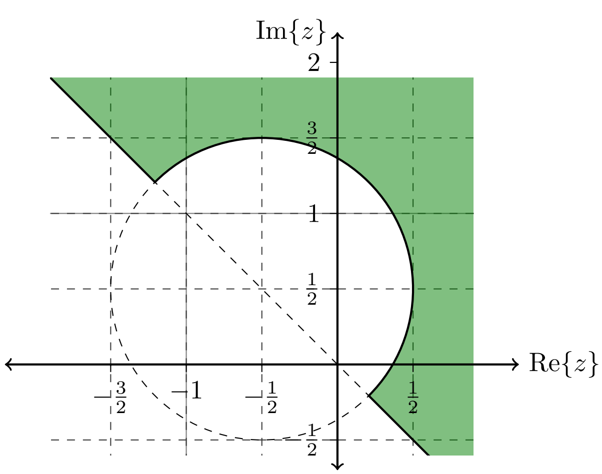
1. Para cada región sombreada descrita en el plano complejo $z = x + jy$ defina una expresión analítica funcional que describa a todos los puntos que pertenecen a dicha región. 6 Pts



$R = \Bigg\{$



$R = \Bigg\{$



$R = \Bigg\{$

2. Defina la equivalencia correcta entre las expresiones relacionadas a números complejos de la segunda columna con las expresiones de la cuarta columna. Para ello escriba la letra respectiva en el espacio que corresponda según su equivalencia. 6 Pts

A	$e^{-\pi}$		$j^{\alpha} + j^{\alpha+2}$
B	e^{π}		j^{39}
C	0		j^{-2j}
D	1		$e^{-j7\pi}$
E	$-j$		$j^{4n};\ n \in \mathbb{N}$
F	j		$\mathrm{Ln}(je)$
G	-1		
H	e^{2}		
I	$\frac{\pi}{2} + j$		
J	$1 + j\frac{\pi}{2}$		
K	$j\frac{\pi}{2}$		

3. Un sistema LTI reacciona ante un impulso de Dirac $\delta(t)$ con la señal $f(t)$.
Se cumple que $F(j\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\}$, $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, $X(j\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$, $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ con $x(t)$ una entrada absolutamente integrable al sistema, y de forma equivalente $Y(j\omega) = \mathscr{F}\{y(t)\}$, $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$, con $y(t)$ la salida del sistema ante la entrada $x(t)$. El operador '$*$' denota convolución.
Asocie el término o fórmula a la derecha que mejor corresponda a cada ítem al lado izquierdo: 8 Pts

a.	$X(s)$		respuesta al impulso
b.	$y(t)$		función de transferencia
c.	$F(j\omega)$		respuesta en fase
d.	$\lvert F(j\omega)\rvert$		respuesta en magnitud
e.	$\angle F(j\omega)$		respuesta en frecuencia
f.	$F(s)$		respuesta al escalón
g.	$Y(j\omega)$		respuesta Bode
h.	$f(t)$		respuesta natural
			$x(t)f(t)$
			$x(t) * f(t)$
			$X(s)F(s)$
			$Y(s) * F(s)$
			$X(j\omega)F(j\omega)$
			$X(j\omega) * F(j\omega)$
			$Y(s)/F(s)$

4. Considere el sistema LTI descrito por la figura 1 donde la función $h(t)$ corresponde a la respuesta al impulso de dicho sistema. 6 Pts

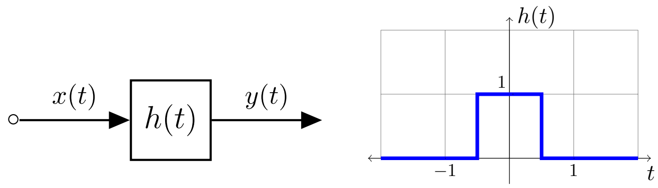
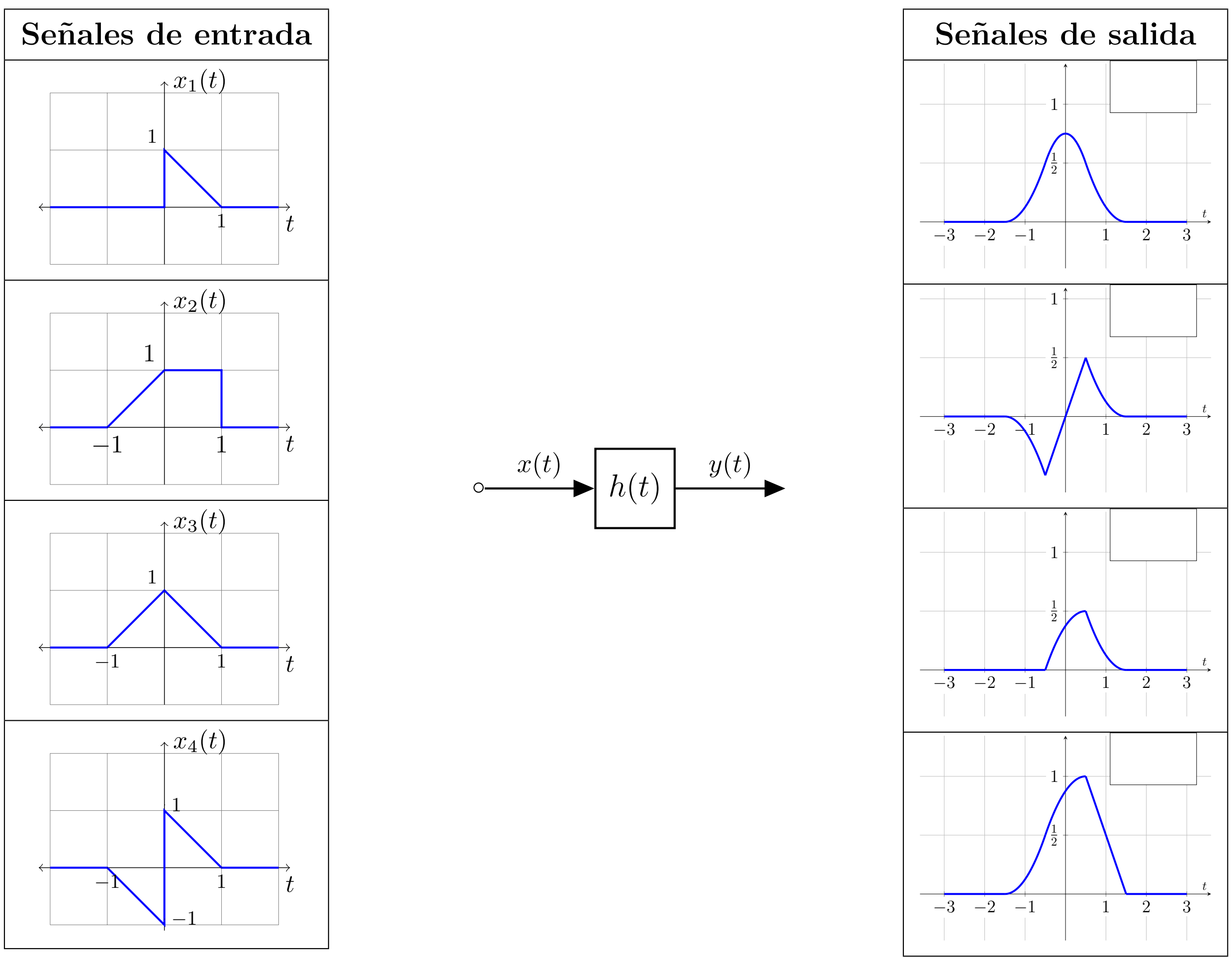


Figura 1: Sistema LTI y su respuesta al impulso $h(t)$

Según el sistema descrito en la figura 1, establezca las relaciones entrada-salida que correspondan para las señales de entrada presentes a continuación. Por ejemplo, para la señal de entrada $x_1(t)$ usted debe buscar la señal de salida correspondiente y anotar $y_1(t)$ en la caja blanca de la figura.



Según el análisis realizado del sistema LTI anterior, determine y justifique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- ◯ a) Es sistema presenta un comportamiento causal y estable.
- ◯ b) El sistema presenta un comportamiento no causal y críticamente estable.
- ◯ c) No se puede determinar la causalidad y estabilidad del sistema.
- ◯ d) El sistema es no causal y estable para cualquier entrada acotada.
- ◯ e) Es sistema presenta un comportamiento causal y no estable.

5. Seleccione marcando con una **X** en el recuadro al lado de cada señal $f(x)$ aquellas que sean ortogonales con la función $h(x)$ mostrada en la figura 2, en un periodo fundamental de $h(x)$. $\boxed{\text{5 Pts}}$

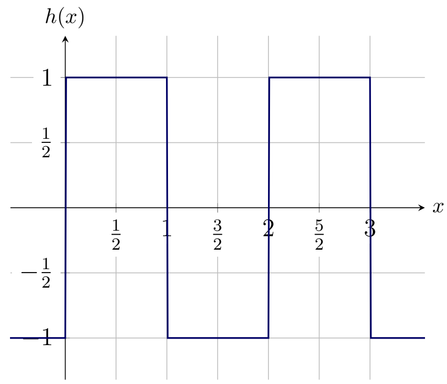
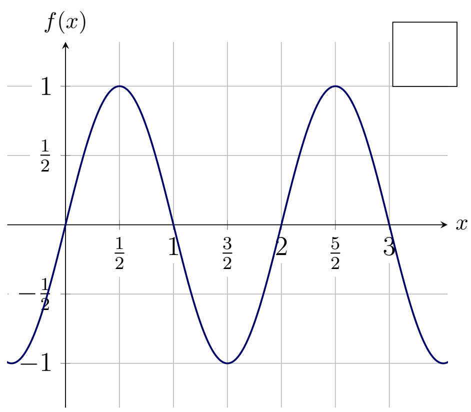
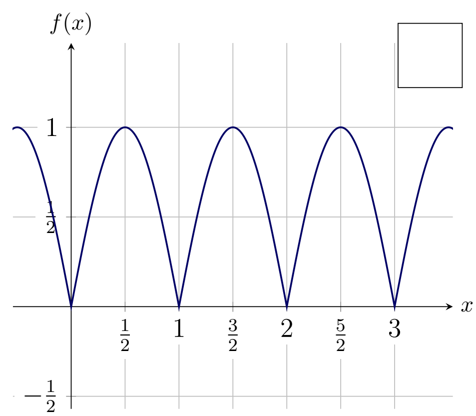
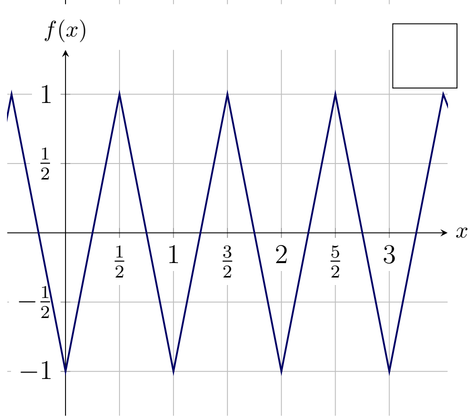
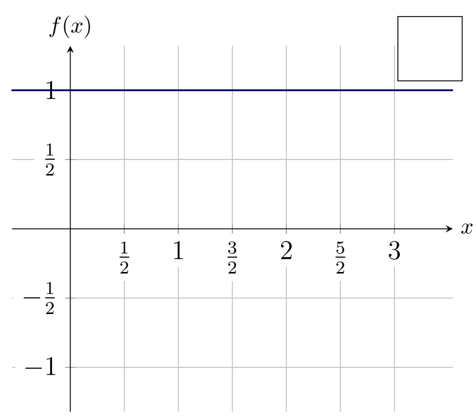


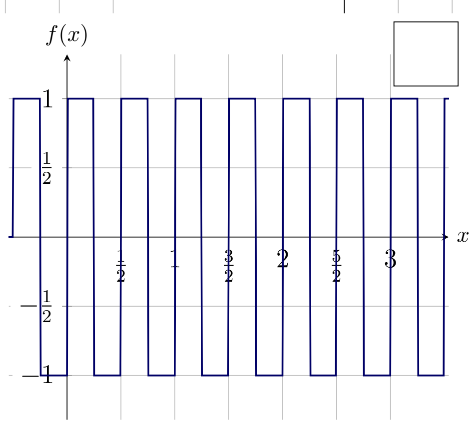
Figura 2: Función $h(x)$











Problemas

Problema 1 Análisis de Fourier **22 Pts**

Sea el circuito mostrado en la figura 1.1 un sistema LTI con comportamiento causal y estable. Además, la señal de tensión $v_s(t)$ es la entrada del sistema y la tensión $v_o(t)$ la señal de salida.

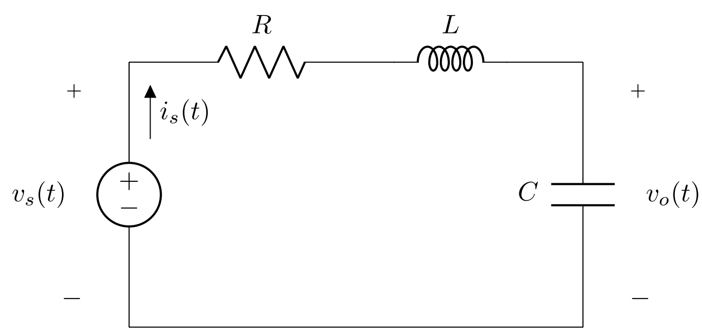


Figura 1.1: Circuito RLC.

Para un capacitor la relación entre la tensión y la corriente en sus terminales se define por la siguiente ecuación:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{1.1}$$

Para un inductor la relación entre la tensión y la corriente en sus terminales se define por la siguiente ecuación:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{1.2}$$

1.1. Demuestre que la función de respuesta en frecuencia del circuito de la figura 1.1 está definida por la ecuación 1.3. 5 Pts

$$H(j\omega) = \frac{1}{LC}\left[\frac{1}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{1}{LC}}\right] \tag{1.3}$$

1.2. Considerando $R = 2\,\Omega$, $L = 1\,\mathrm{H}$ y $C = 1\,\mathrm{F}$, determine la respuesta al impulso $h(t)$ del circuito y realice un bosquejo de dicha función. 3 Pts

1.3. Según los valores de R, L y C definidos en el ítem 1.2, obtenga las funciones de respuesta en magnitud y respuesta en fase del circuito de la figura 1.1 y realice un bosquejo de dichas funciones. En el bosquejo de ambas funciones debe indicar aquellos valores importantes y abarcar el rango de frecuencias de $-\infty < \omega < \infty$. 4 Pts

Sugerencia: *La expresión utilizada por usted en el punto anterior para encontrar en el formulario $h(t)$ simplifica enormemente el cálculo de las respuestas de fase y magnitud.*

1.4. Según los valores de R, L y C definidos en el ítem 1.2, determine la respuesta de tensión $v_o(t)$ del circuito utilizando la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ y considerando que la tensión de entrada es $v_s(t) = u(t)\,\mathrm{V}$. 8 Pts

1.5. Según los valores de R, L y C definidos en el ítem 1.2, encuentre la respuesta de tensión $v_o(t)$ del circuito para una entrada de $v_s(t) = 2u(t-1)\,\mathrm{V}$. 2 Pts

Problema 2 Análisis de sistemas LTI en tiempo continuo **22 Pts**

Considere el sistema de control LTI en tiempo continuo de la Figura 2.1, en donde al subsistema $C(s)$ se le llama *controlador*, a $P(s)$ se le llama *planta* (que es el sistema a controlar) y $K(s)$ es un bloque de retroalimentación.

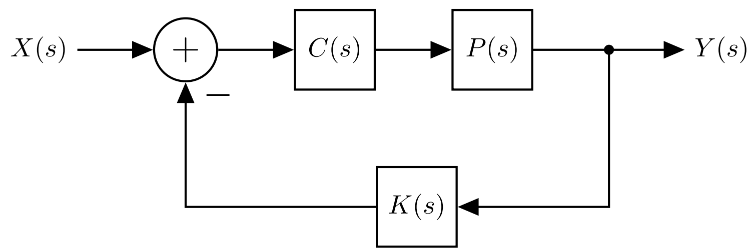


Figura 2.1: Sistema de control en tiempo continuo.

2.1. Demuestre matemáticamente y de manera completa que la función de transferencia del sistema está dada por: 3 Pts

$$H(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + K(s)C(s)P(s)} \tag{2.1}$$

2.2. Se sabe que la *planta* reacciona ante un impulso $\delta(t)$ de la forma: 2 Pts

$$p(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t) \tag{2.2}$$

con $\tau > 0$. Encuentre la función de transferencia de la planta $P(s)$ y su respectiva región de convergencia.

2.3. Encuentre los polos, ceros y constante del sistema completo si se sabe que: 5 Pts

$$C(s) = \frac{1}{s} \quad ROC : \sigma > 0, \qquad K(s) = K$$

y $P(s)$ corresponde a la expresión encontrada en el punto 2.2.

2.4. De acuerdo a los polos del sistema encontrados en el punto 2.3, provea expresiones para K en las que el sistema presenta un comportamiento críticamente amortiguado, subamortiguado y sobreamortiguado. 3 Pts

2.5. Indique el rango de valores de K para el cual el sistema completo es estable y presenta una respuesta sobreamortiguada. 2 Pts

2.6. Encuentre la respuesta del sistema al escalón unitario $u(t)$, si $K = 1/(4\tau)$. Indique cuál es el comportamiento del sistema bajo estas condiciones, en cuanto al amortiguamiento de la respuesta. 7 Pts

Problema 3 Análisis en tiempo discreto $\boxed{\textbf{25 Pts}}$

Un sistema LTI en tiempo discreto causal tiene como expresión algebraica de su función de transferencia:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + z^{-2}} \tag{3.1}$$

3.1. Encuentre todos los polos y ceros, finitos e infinitos del sistema, con su respectivo orden. $\boxed{\text{4 Pts}}$

3.2. Indique qué región de convergencia debe corresponder a la función de transferencia en la ecuación (3.1). $\boxed{\text{1 Pt}}$

3.3. Grafique el diagrama de polos y ceros, y la correspondiente región de convergencia. $\boxed{\text{3 Pts}}$

3.4. Indique si el sistema es o no estable. Justifique $\boxed{\text{2 Pts}}$

3.5. Encuentre la ecuación de diferencias que rige el sistema. $\boxed{\text{3 Pts}}$

3.6. Dibuje el diagrama de bloques equivalente del sistema $\boxed{\text{3 Pts}}$

3.7. Encuentre la respuesta $y[n]$ del sistema ante la entrada $\boxed{\text{4 Pts}}$

$$x[n] = u[n] + u[n-2] \tag{3.2}$$

3.8. Encuentre la respuesta natural (o respuesta de entrada cero) del sistema si $y[-1] = 0$ y $y[-2] = -1$. $\boxed{\text{5 Pts}}$