

Tutoría 2: Números complejos

Ejercicio 1. Calcular la magnitud, argumento, parte real y parte imaginaria de los siguientes números complejos:

1. $(1 + j)^{1-j}$

Respuesta:

$$\begin{aligned} |(1 + j)^{1-j}| &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi+8\pi k}{4}} & \operatorname{Re}\{(1 + j)^{1-j}\} &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi+8\pi k}{4}} \cos\left(\frac{\pi - 2\ln(2)}{4}\right) \\ \angle\{(1 + j)^{1-j}\} &= \frac{\pi - 2\ln(2)}{4} & \operatorname{Im}\{(1 + j)^{1-j}\} &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi+8\pi k}{4}} \sin\left(\frac{\pi - 2\ln(2)}{4}\right) \end{aligned}$$

2. j^{-j}

Respuesta:

$$\begin{aligned} |j^{-j}| &= e^{\frac{\pi}{2}(1+4k)} & \operatorname{Re}\{j^{-j}\} &= e^{\frac{\pi}{2}(1+4k)} \\ \angle\{j^{-j}\} &= 0 & \operatorname{Im}\{j^{-j}\} &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Se sabe que $z+w = 2$, $|z| = 2$ y $\operatorname{Im}\{w\} = -1$. Encuentre gráficamente z y w .

Respuesta: Hay dos soluciones posibles.

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{j\pi/6} = \sqrt{3} + j \approx 1,7 + j & z_2 &= 2e^{j5\pi/6} = -\sqrt{3} + j \approx -1,7 + j \\ w_1 &= (2 - \sqrt{3}) - j \approx 0,3 - j & w_2 &= (2 + \sqrt{3}) - j \approx 3,7 - j \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Indique qué figura geométrica describen las siguientes ecuaciones con $z \in \mathbb{C}$:

■ $|j + z^*| = 3$

Respuesta: Círculo de radio 3 centrado en j .

■ $\angle(z + 2) = -\frac{3\pi}{4}$

Respuesta: Rayo iniciando en $z = -2$ con un ángulo de -135°

Ejercicio 4. Determine todas las raíces de $(-16)^{1/4}$.

Respuesta: $z = 2e^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Ejercicio 5. Calcule las soluciones de la ecuación $z^4 + (1 - j)z^2 + \frac{3}{2}j = 0$.

Respuesta:

$$z_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}e^{-j\frac{\pi}{8}} \quad z_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}e^{j\frac{7\pi}{8}} \quad z_2 = \sqrt[4]{\frac{9}{2}}e^{j\frac{3\pi}{8}} \quad z_3 = \sqrt[4]{\frac{9}{2}}e^{-j\frac{5\pi}{8}}$$

Ejercicio 6. El circuito de la figura 1 se utiliza para calcular el valor de R_C , la cual modela las pérdidas en el dieléctrico del condensador.

Con un voltímetro digital, se ha determinado que la tensión RMS en la fuente es $V_S = 1V$, la tensión RMS en la resistencia de medición R_m es $V_{R_m} = 0,3V$ y la tensión RMS en el condensador real (la región demarcada) es $V_c = 0,8V$.

Determine gráficamente cuál es el valor de C y R_C si se sabe que la fuente utiliza una frecuencia de 100 Hz y $R_m = 1 \text{ M}\Omega$.

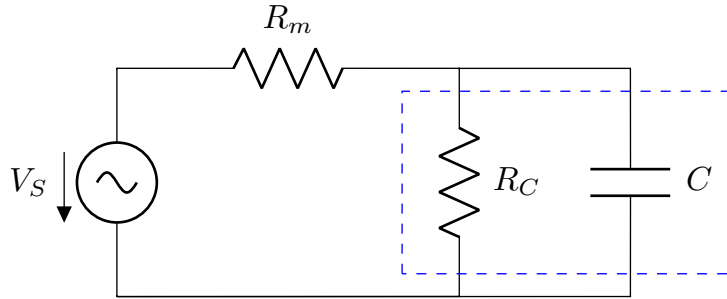


Figura 1: Circuito de referencia del ejercicio 6.

Respuesta: $R_C \approx 4,734 \text{ M}\Omega$ y $C \approx 0,493 \text{ nF}$

Ejercicio 7. Encuentre las ecuaciones de las siguientes rectas en el plano z para la forma cartesiana $y = mx + b$:

1. $|z - 2 + j| = |z - j + 3|$

Respuesta: $y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}$

2. $|z + z^* + 4j(z - z^*)| = 6$

Respuesta: Dos rectas que satisfacen la ecuación: $y = \frac{1}{4}x \pm \frac{3}{4}$

Ejercicio 8. Encuentre el punto de intersección y el ángulo de intersección de las rectas:

■ $|z - 1 - j| = |z - 3 + j|$

■ $|z - 1 + j| = |z - 3 - j|$

Respuesta: Las rectas se intersecan en $z = 2$ y forman un ángulo de 90° .

Ejercicio 9. Indique qué mapeos elementales (rotación, escalado y traslación) realiza el siguiente mapeo:

$$w = (\sqrt{3} + j)z - j$$

Respuesta: Escalado por 2, rotación en 30° y traslación en 1 hacia abajo.