Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL-4703 Señales y Sistemas
Profesores: M.Sc. José Miguel Barboza Retana
Lic. Daniel Kohkemper Granados
M.Sc. Javier Rivera Alvarado
Dr. Pablo Alvarado Moya
I Semestre, 2019
Examen Final

Total de Puntos:	105
Puntos obtenidos:	
Porcentaje:	
Nota:	

Nombre: ______________________________ Carné: ______________

Advertencias:

- Resuelva el examen en forma individual, ordenada y clara.
- Cada ejercicio debe indicar el procedimiento o justificación completa de la solución.
- No se aceptarán reclamos de desarrollos con lápiz, borrones o corrector de lapicero.
- Si trabaja con lápiz, debe marcar su respuesta final con lapicero.
- El uso de lapicero rojo **no** está permitido.
- El uso del teléfono celular no es permitido. Este tipo de dispositivos debe permanecer **totalmente apagado** durante el examen.
- No se permite el uso de **ningún tipo** de calculadora electrónica.
- El instructivo de examen debe ser devuelto junto con su solución.
- El incumplimiento de los puntos anteriores equivale a una nota igual a cero en el ejercicio correspondiente o en el examen.

Preguntas 1-10	de 13
Pregunta 11	de 4
Pregunta 12	de 5
Pregunta 13	de 4
Pregunta 14	de 4
Problema 1	de 30
Problema 2	de 15
Problema 3	de 30

Preguntas

30 Pts

Debe justificar sus respuestas a las preguntas. Para ello basta un esbozo de la idea o concepto requerido, y si necesita más espacio puede utilizar el cuaderno de examen indicando claramente la pregunta correspondiente con su solución.

1. Un mapeo de variable compleja de la forma $w = \alpha z + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se denomina degenerado si **1 Pt**

- ◯ a) α y β son diferentes de cero
- ◯ b) α es diferente de cero y β es cero
- ◯ c) α es cero
- ◯ d) β es cero

2. La expresión $j^{-j\frac{4}{\pi}}$ equivale al valor: **1 Pt**

- ◯ a) -1
- ◯ b) je^2
- ◯ c) $\frac{\pi}{2}$
- ◯ d) e^2

3. Una condición necesaria para que la función de variable compleja $f(z)$ *no* sea conforme es que **1 Pt**

- ◯ a) $f(z)$ sea analítica
- ◯ b) la derivada de $f(z)$ sea cero
- ◯ c) la derivada de $f(z)$ no sea cero
- ◯ d) $f(z)$ cumpla las ecuaciones de Cauchy-Riemann

4. Para una integral de variable compleja existe independencia de trayectoria si **1 Pt**

- ◯ a) la trayectoria cerrada encierra un polo de primer orden
- ◯ b) la trayectoria es cerrada
- ◯ c) el integrando es analítico
- ◯ d) está expresada como funciones de variable real

5. Sean las funciones periódicas de variable y valor real $x(t)$ e $y(t)$ con coeficientes de serie de Fourier de exponenciales complejos c_k y d_k respectivamente. Si se cumple la relación $y(t) = -x\left(t - \frac{T_p}{2}\right)$ con T_p el periodo de las señales, entonces los coeficientes d_k se pueden expresar como: **2 Pts**

- ◯ a) $d_k = c_{-k}(-1)^k$
- ◯ b) $d_k = c_{-k}e^{-j\frac{\pi}{2}k}$
- ◯ c) $d_k = -c_k(-1)^k$
- ◯ d) $d_k = c_k j^k$

6. La magnitud del ángulo entre dos funciones ortogonales es $\boxed{\text{1 Pt}}$

- ◯ a) $\pi/3$
- ◯ b) $\pi/4$
- ◯ c) π
- ◯ d) $\pi/2$

7. Sea un sistema causal en tiempo continuo expresado por la función de transferencia: $\boxed{\text{2 Pts}}$

$$H(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 + s - 6}$$

Si este sistema se pone en cascada con otro sistema causal de función de transferencia $G(s)$, indique con cuál de las siguientes funciones de transferencia el sistema total resultante sería estable:

- ◯ a) $G(s) = \dfrac{s+2}{s-1}$
- ◯ b) $G(s) = \dfrac{s-2}{s+1}$
- ◯ c) $G(s) = \dfrac{s+2}{s+1}$
- ◯ d) $G(s) = \dfrac{s-2}{s-1}$

8. Indique cuál de las siguientes regiones de convergencia en el plano s correspondería a la función de transferencia de un sistema anticausal y estable: $\boxed{\text{1 Pt}}$

- ◯ a) $\sigma > 2$
- ◯ b) $\sigma < -1$
- ◯ c) $-1 < \sigma < 2$
- ◯ d) $\sigma < 2$

9. Se desean obtener muestras homogéneamente distribuidas de dos señales analógicas con espectros limitados en banda de anchos 4 kHz y 10 kHz. Indique con cuál de las siguientes tasas de muestreo se asegura una representación digital que permitiría teóricamente reconstruir sin pérdida de información la señal original, y que a su vez garantiza el menor uso de memoria computacional si dichas señales tuviesen que ser almacenadas: $\boxed{\text{1 Pt}}$

- ◯ a) 11,025 kHz
- ◯ b) 22,050 kHz
- ◯ c) 44,100 kHz
- ◯ d) 98,200 kHz

10. La función de variable compleja $f(z) = ze^z$ puede expresarse en funciones de valor y variables reales $u(x, y) + jv(x, y)$, $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, como: $\boxed{\text{2 Pts}}$

- ◯ a) $e^x(y\cos y + x \operatorname{sen} x) - je^x(y \operatorname{sen} y - x\cos y)$
- ◯ b) $e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + je^x(x \operatorname{sen} y + y\cos y)$
- ◯ c) $e^x(x\cos x - y \operatorname{sen} x) - je^x(y \operatorname{sen} x - y\cos x)$
- ◯ d) $e^x(y\cos y + x \operatorname{sen} y) + je^x(x \operatorname{sen} y + x\cos y)$

11. Construya series de potencias con las características dadas en cada uno de los siguientes casos, considerando que dichas series corresponden a desarrollos de una función $f(z)$, que deben ser válidos en regiones de convergencia que contienen al punto z_0 (donde la serie se centra) como punto límite y que k está asociado al término $(z - z_0)^k$. $\boxed{\text{4 Pts}}$

a. Polo de orden 3 en $z = 1$ con coeficientes $a_k = (-1)^k$

b. Singularidad esencial en $z = 0$ con $b_k = \frac{j^k}{|k|!}$, con tres términos en la parte de Taylor.

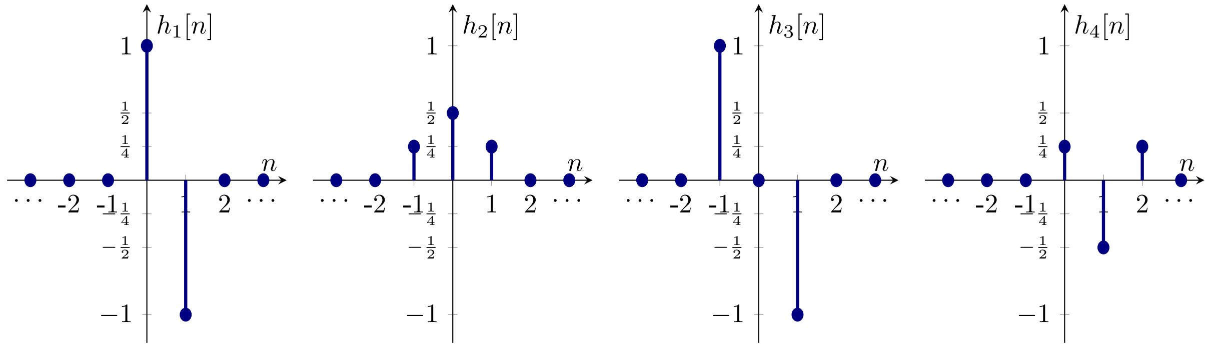
c. Cero de orden 2 en $z = -1$ con $c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

d. Punto regular en $z = j$ con $d_k = \frac{k+1}{2^k}$

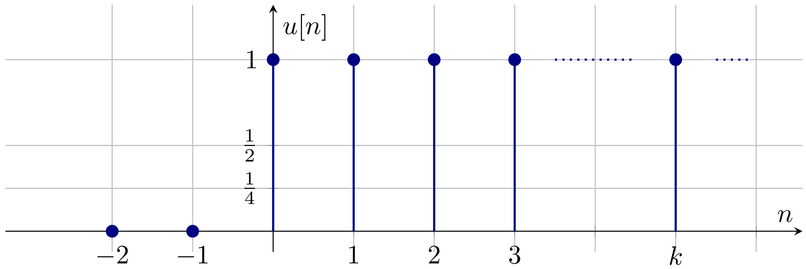
12. Un sistema LTI responde ante la entrada $\delta(t)$ con la salida $y(t) = e^{-t}u(t)$. Utilizando el formulario, especifique concretamente a qué funciones corresponden: $\boxed{\text{5 Pts}}$

Respuesta al impulso:	
Respuesta en frecuencia:	
Función de transferencia:	
Respuesta en magnitud:	
Respuesta en fase:	

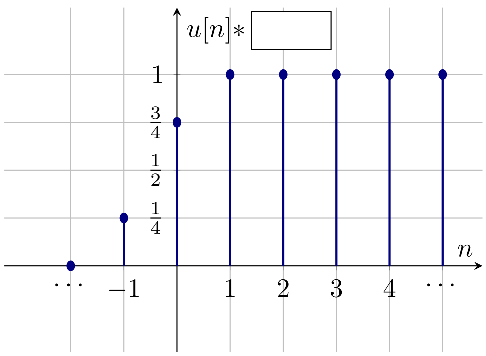
13. Las siguientes figuras representan las respuestas al impulso de cuatro sistemas LTI en tiempo discreto:

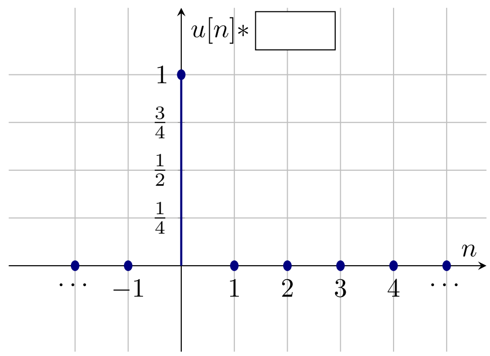


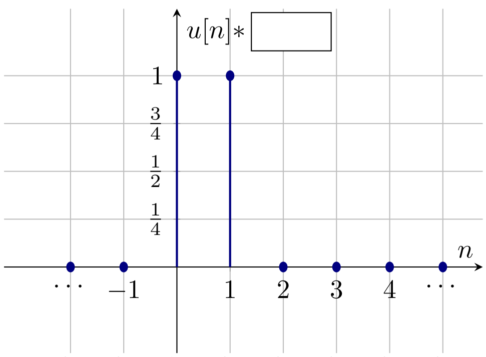
Ante la entrada $u[n]$ (escalón unitario):

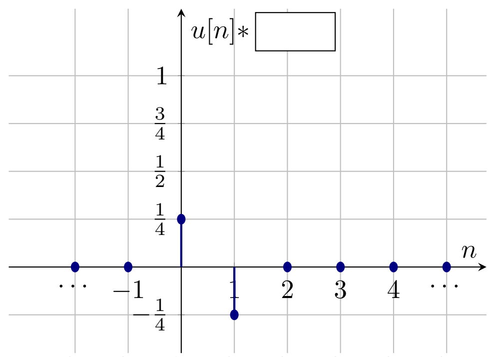


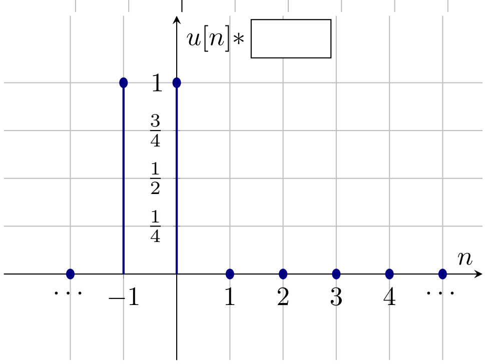
indique dentro de las cuadros marcados en las siguientes figuras, cuál es la respuesta al impulso ($h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ ó $h_4[n]$) correspondiente con la salida del sistema ilustrada en cada figura: 4 Pts

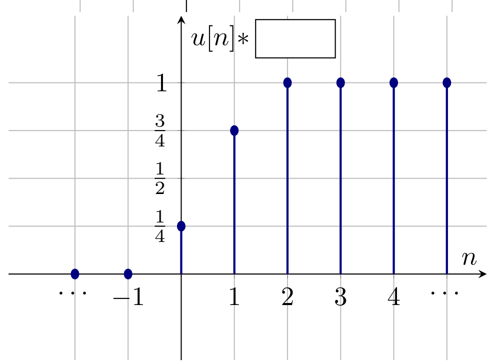












14. Durante el funcionamiento de un sistema invariante en el tiempo se han observado las siguientes parejas de entrada-salida: $\boxed{\text{4 Pts}}$

$$x_1[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 0, 2 \right\} \xrightarrow{\mathcal{T}} y_1[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 1, 2 \right\}$$
$$x_2[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 0, 3 \right\} \xrightarrow{\mathcal{T}} y_2[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 1, 0, 2 \right\}$$
$$x_3[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 1 \right\} \xrightarrow{\mathcal{T}} y_3[n] = \left\{ 1, \underset{\uparrow}{2}, 1 \right\}$$

a) Determine si el sistema propuesto es lineal o no. Justifique su respuesta a partir de los resultados propuestos. $\boxed{\text{2 Pts}}$

b) Encuentre la respuesta al impulso $h(n)$ del sistema a partir de los resultados mostrados sin utilizar la transformada z. $\boxed{\text{2 Pts}}$

Problemas

Problema 1 Análisis de Fourier **30 Pts**

Sea el impulso rectangular unitario centrado

$$\operatorname{rect}(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{2}-t\right)$$

1.1. Grafique la función $\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$. Indique claramente los valores alcanzados en los ejes. 2 Pts

Advertencia: Note que el argumento de rect solicitado es t/τ y no solo t.

1.2. Utilizando la tabla de transformadas del formulario, encuentre la transformada de Fourier $R_\tau(j\omega) = \mathscr{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\}$ 2 Pts

1.3. Una ventana de Hanning centrada se define como

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)\right)\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \tag{1.1}$$

Esboce gráficamente dicha función, etiquetando claramente los ejes 2 Pts

1.4. Utilizando las propiedades de multiplicación, convolución, modulación y/o linealidad, demuestre que $H(j\omega) = \mathscr{F}\{h(t)\}$ está dado por 5 Pts

$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{\tau}{2}\operatorname{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}_{H_a(j\omega)} + \underbrace{\frac{\tau}{4}\operatorname{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}-\pi\right)}_{H_b(j\omega)} + \underbrace{\frac{\tau}{4}\operatorname{sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}+\pi\right)}_{H_c(j\omega)} \tag{1.2}$$

1.5. La respuesta en frecuencia del sistema se ilustra en la figura 1.1, así como sus partes. 4 Pts

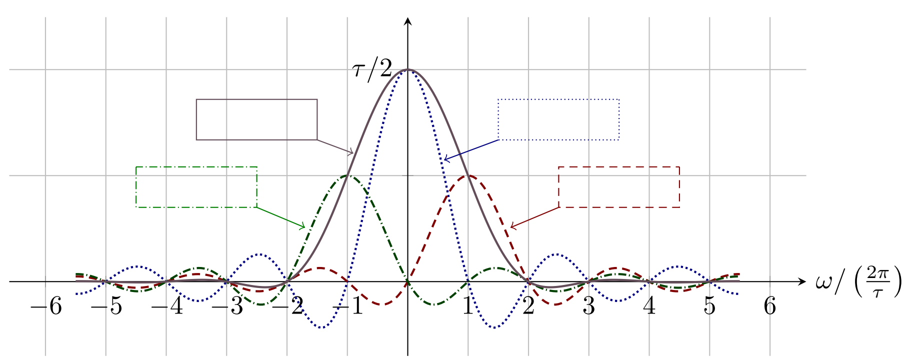


Figura 1.1: Respuesta en frecuencia de una ventana de Hanning centrada.

Indique en dicha figura a qué trazas corresponden los términos $H(j\omega)$, $H_a(j\omega)$, $H_b(j\omega)$ y $H_c(j\omega)$ de (1.2).

1.6. La función $x(t)$ ilustrada en la figura 1.2, tiene como transformada de Fourier:

$$X(j\omega) = \frac{\tau}{4}\operatorname{sa}^2\left(\frac{\tau}{8}\omega\right) \tag{1.3}$$

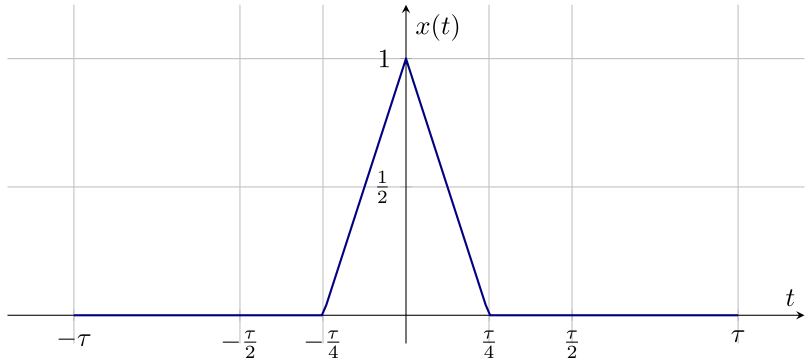


Figura 1.2: Función $x(t)$ cuya transformada de Fourier debe calcularse en el punto 1.6.

Sea $\hat{x}(t)$ la continuación periódica de la función $x(t)$ (figura 1.2):

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - k\tau) \tag{1.4}$$

Grafique $\hat{x}(t)$ para $t \in [-2\tau, 2\tau]$. $\boxed{\text{3 Pts}}$

1.7. Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier de $\hat{x}(t)$ a partir de $X(j\omega)$, y con ellos la transformada de Fourier $\mathscr{F}\{\hat{x}(t)\}$. $\boxed{\text{4 Pts}}$

1.8. Si un sistema LTI responde ante el impulso con la ventana de Hanning $h(t)$, encuentre entonces la respuesta en el tiempo de dicho sistema ante la entrada periódica $\hat{x}(t)$. $\boxed{\text{8 Pts}}$

Problema 2 Análisis de Sistemas en Tiempo Continuo $\boxed{\textbf{15 Pts}}$

Acerca de la función de transferencia de un sistema LTI en tiempo continuo causal, se conoce lo siguiente:

a. Posee el diagrama de polos y ceros ilustrado en la figura 2.1.

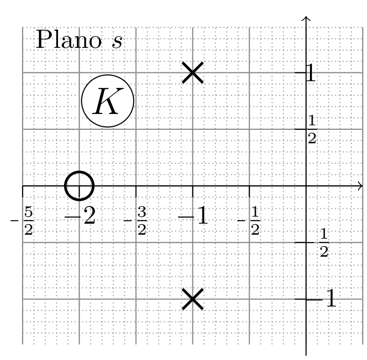


Figura 2.1: Diagrama de polos y ceros del sistema causal del problema 2.

b. La respuesta del sistema ante un escalón tiende a 2 cuando $t \to \infty$

2.1. Indique gráficamente y con una expresión algebraica cuál es la región de convergencia del sistema $\boxed{\text{2 Pts}}$

2.2. Indique si el sistema es estable. Justifique. 1 Pt

2.3. Determine la función de transferencia del sistema. 2 Pts

2.4. Determine el valor de K. Considere la información conocida para el sistema. 4 Pts

2.5. Determine la respuesta al impulso del sistema. 6 Pts

Problema 3 Análisis de sistemas en tiempo discreto **30 Pts**

Considere el sistema en tiempo discreto causal $y[n] = \mathcal{T}[x[n]]$ descrito por el diagrama de bloques mostrado en la Figura 3.1, donde todas las constantes del sistema son reales.

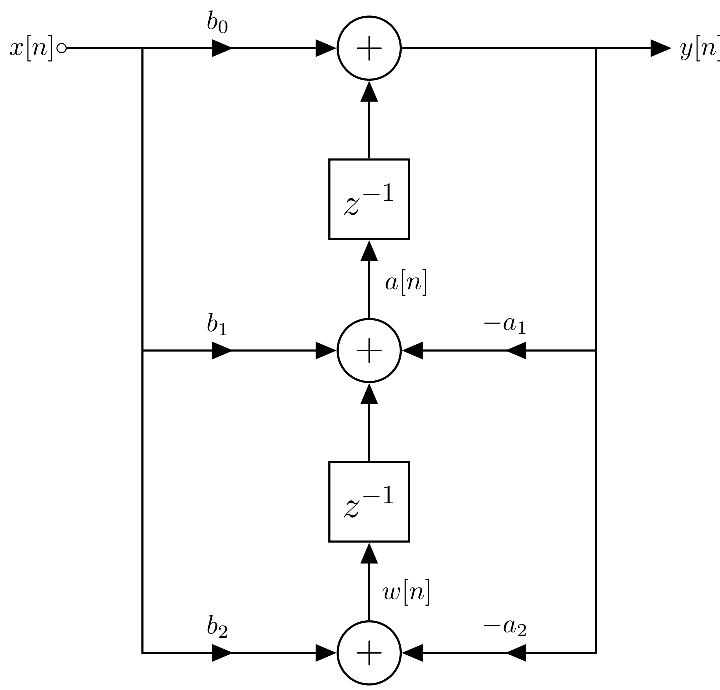


Figura 3.1: Diagrama de bloques del sistema en tiempo discreto $y[n] = \mathcal{T}[x[n]]$

3.1. Realizando un análisis del diagrama de bloques del sistema mostrado en la figura 3.1, demuestre que la expresión algebraica de la función de transferencia del mismo está dada por: 6 Pts

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{3.1}$$

3.2. Determine la ecuación de diferencias que permite describir la salida del sistema $y(n)$. 2 Pts

3.3. Determine el rango de valores que puede tomar la constante a_1 del sistema $H(z)$ de forma que este tenga un comportamiento estable considerando que: $a_2 = -1/2$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ y $b_2 = -2$. 10 Pts

3.4. Obtenga la respuesta forzada del sistema con función $H(z)$ para la entrada

$$x[n] = 2^n u[-n] + u[n-1]$$

Para ello considere que $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -2$, $a_1 = 0$ y $a_2 = -1/4$. $\boxed{\text{10 Pts}}$

3.5. Considere el sistema inverso del sistema $H(z)$ definido por $H_I(z) = 1/H(z)$. Si $b_0 = 1$, $b_1 = 1$,$b_2 = -2$, $a_1 = 0$ y $a_2 = -1/4$, determine si el sistema inverso $H_I(z)$ es estable o no para un comportamiento causal del mismo. $\boxed{\text{2 Pts}}$