# Control por realimentación de estados - 03

Control Automático (EL-5408)

Escuela de de Ingeniería Electrónica

## Observador de estado

Se define como un dispositivo que estima u observa las variables de estado, y se pueden clasificar de orden completo, de orden reducido, o de orden mínimo, dependiendo de la cantidad de variables n de estado. Un vector de estado observado se denota como: $\tilde{x}$.

Se define un sistema de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

$$y = Cx \tag{2}$$

El modelo de un observador de estado se caracteriza por incluir un término que contiene el error de estimación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}) \\ &= (A - K_e C)\tilde{x} + Bu + K_e y \end{aligned} \tag{3}$$

Donde $\tilde{x}$ es el estado estimado, y la matriz $K_e$ es la matriz de ganancia del observador.

- Observador de estado de orden completo

Al haber definido las ecuaciones de un modelo observador, se procede con el cálculo del error del observador, a partir de las ecuaciones (1) y (3):

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x}) \tag{4}$$

Simplificando la ecuación anterior se obtiene:

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = (A - K_eC)(x - \tilde{x}) \tag{5}$$

Y al saber que el error se define como:

$$e = x - \tilde{x} \tag{6}$$

Y por lo tanto al sustituir (6) en (5), se obtiene:

$$\dot{e} = (A - K_eC)e \tag{7}$$

## Problema dual

Si el sistema descrito es completamente observable, se puede seleccionar la matriz $K_e$ y los valores propios, de manera que el error sea asintóticamente estable, para lo que se considera un sistema como el descrito en (1) y en (2), y el sistema dual:

$$\dot{z} = A^T z + C^T v \tag{8}$$

$$n = B^T z \tag{9}$$

Suponiendo que la señal de control $v$ es:

$$v = -Kz \tag{10}$$

Si el sistema dual es completamente controlable, se puede determinar la matriz de realimentación de estado $K$ del modo anteriormente estudiado, utilizando la matriz $A^T - C^T K$, llegando a considerar que los valores característicos son iguales a los de $A - K^T C$, se determina la relación:

$$K_e = K^T \tag{11}$$

Condición necesaria y suficiente para la observación del estado

Al ser el sistema descrito por (8) y (10), se conoce que este debe ser completamente controlable, por lo que:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} C^T & A^T C & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{array}\right] \tag{12}$$

Debe tener rango $n$, lo que a su vez es la condición de observabilidad completa.

Método de transformación para obtener la matriz de ganancia del observador de estado $K_e$

$$K_e = Q \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (WN^T)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$N = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} C^T & A^T C & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{array} \right] \quad (14)$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Método de sustitución directa para obtener la matriz de ganancia del observador de estado $K_e$

En este caso, se determina la ecuación:

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ \vdots \\ k_{en} \end{bmatrix} \tag{16}$$

La cual se sustituye en el polinomio característico:

$$|sI - (A - K_e C)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \ldots (s - \mu_n) \tag{17}$$

### Fórmula de Ackermann

Al conocer las ecuaciones que definen un sistema dual:

$$\dot{z} = A^T z + C^T v \tag{18}$$

$$n = B^T z \tag{19}$$

La fórmula de Ackermann para asignación de polos se reescribe de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T & | & A^T C & | & \dots & | & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^{-1} \phi(A^T) \tag{20}$$

De modo que se define la ecuación:

$$K_e = K^T = \phi(A^T)^T \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

## Ejemplo 4 [Ejercicio 10-6 [1]]

Sea el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{22}$$

$$y = Cx \tag{23}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

El cual utiliza la realimentación de estado observada tal que:

$$u = -K\tilde{x} \tag{25}$$

Diseñe un observador de estado de orden completo suponiendo que los valores propios deseados de la matriz del observador son: $\mu_1 = -10$ y $\mu_2 = -10$.

Solución:

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} C^T & A^T C^T \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Método de transformación

Se determina la ecuación característica:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -20.6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \qquad (29)$$

Por lo que se determina que $a_1 = 0$ y $a_2 = -20.6$. De la misma manera, se sabe que la ecuación característica deseada es:

$$(s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 \qquad (30)$$

Por lo que $\alpha_1 = 20$ y $\alpha_2 = 100$

Como se trata de un sistema que se encuentra en la forma canónica observable, la matriz de transformación $Q$ es una matriz identidad, en este caso 2x2. Por lo anterior, y sustituyendo los valores de $\alpha_n$ y $a_n$, se obtiene:

$$K_e = (WN^T)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 + 20.6 \\ 20 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Método de sustitución

En este caso, se utiliza la ecuación es

$$\dot{e} = (A - K_e C)e \tag{32}$$

Por lo que la ecuación característica del observador se obtiene:

$$|sI - A + K_e C| = 0 \tag{33}$$

Definiendo también:

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Sustituyendo la información en (33),

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -20.6 + k_{e1} \\ -1 & s + k_{e2} \end{vmatrix}$$
$$= s^2 + K_{e2}s - 20.6 + k_{e1} = 0 \tag{35}$$

Como se mencionó en el método anterior en (30), se obtiene que $k_{e1} = 120.6$ y $k_{e2} = 20$:

$$K_e = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Fórmula de Ackermann

$$K_e = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Sustituyendo $A$ en la ecuación característica, obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi(A) &= A^2 + 20A + 100I \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + 20 \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

Sustituyendo lo valores obtenidos:

$$K_e = \begin{bmatrix} 120.6 & 412 \\ 20 & 120.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación de para el observador de estado completo se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} y \tag{40}$$

# Bibliografía


K. Ogata.
*Ingeniería de control moderna*.
Pearson educación, EE.UU., 2010.