Transformada de Fourier

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

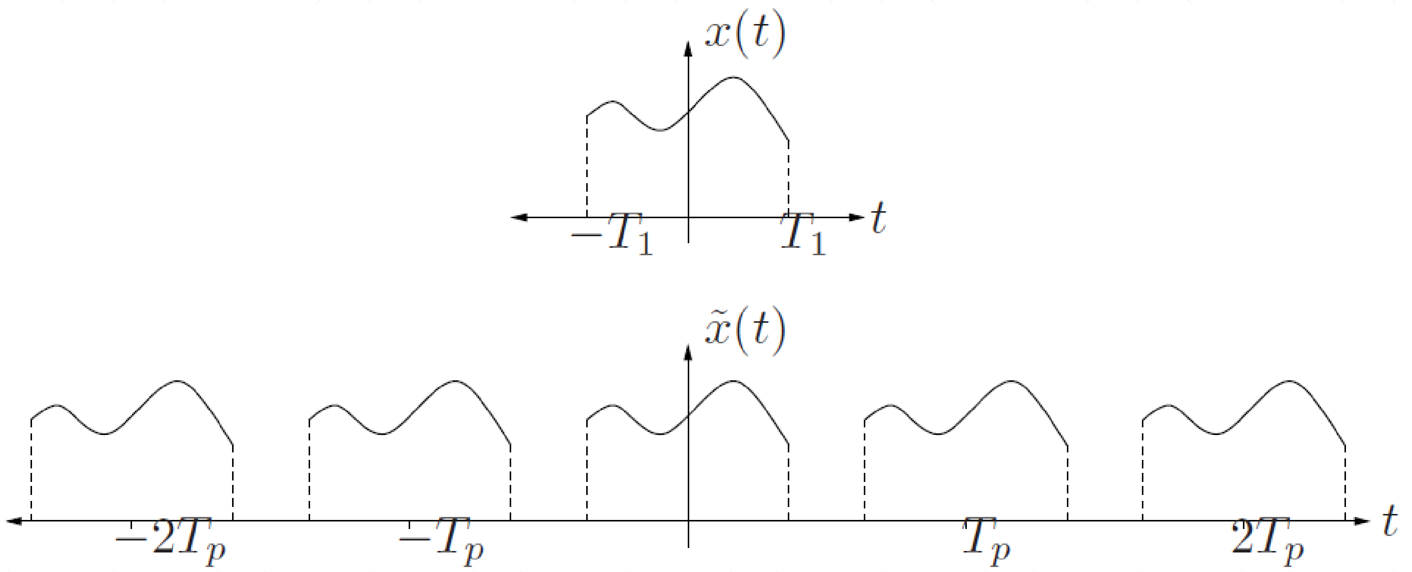
Verano 2019-2020

La transformada de Fourier es una extensión de los conceptos obtenidos para funciones **periódicas** hacia funciones **no periódicas**

Transformada de Fourier directa e inversa

Extensión periódica

- Sea $x(t)$ una función no periódica
- Sea $\tilde{x}(t)$ la extensión periódica de $x(t)$ con periodo T_p.



- Por ser periódica $\tilde{x}(t)$ tiene desarrollo de Fourier:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

Serie de Fourier de extensión periódica

- La distancia entre componentes espectrales es $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T_p$.
- El coeficiente c_k se asocia con la frecuencia $k\omega_0$ y se calcula con:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} \tilde{x}(t)e^{-j\omega_0 kt}dt$$

- Dentro del intervalo de integración $\left[-\frac{T_p}{2}, \frac{T_p}{2}\right]$ se cumple $x(t) = \tilde{x}(t)$, y para todo $|t| > \frac{T_p}{2}$, $x(t) = 0$, entonces

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} \tilde{x}(t)e^{-j\omega_0 kt}dt = \frac{1}{T_p}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt$$

Envolvente

$$T_p c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$$

Si ahora se define $X(j\omega)$ como la función envolvente de los coeficientes $T_p c_k$, que se expresa por

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Entonces los puntos c_k pueden verse como muestras cada $k\omega_0$ de dicha función:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0)$$

Transformada de Fourier

A

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

se le conoce como **Transformada de Fourier** de $x(t)$, y se utiliza el operador $\mathcal{F}\{\cdot\}$ para denotar la transformación de dominios:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

La relación entre estas dos funciones se designa además con el símbolo "○—●"

$$x(t) \;\; \text{“○—●”} \;\; X(j\omega)$$

Donde el círculo relleno denota siempre al dominio de la frecuencia, es decir, a la función $X(j\omega)$, y el círculo blanco al dominio del tiempo $(x(t))$.

Hacia la Transformada Inversa

Si se introduce

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0)$$

en

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega$$

Transformada Inversa

Si se hace $T_p \to \infty$ entonces $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T_p \to \mathrm{d}\omega$, el término discreto $k\Delta\omega \to \omega$, y $\tilde{x}(t) = x(t)$, por lo que la suma

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega$$

converge en la integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

conocida como **Transformada Inversa de Fourier**, y denotada con el operador $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

Espectros en magnitud y en fase

Espectro

$X(j\omega)$ es el espectro o la representación espectral de $x(t)$.

Espectro en magnitud

$|X(j\omega)|$ es el espectro en magnitud de $x(t)$

Espectro en fase

$\angle X(j\omega) = arg\, X(j\omega)$ es el espectro en fase de $x(t)$

Convergencia de la Transformada de Fourier

Convergencia de la Transformada de Fourier

Las **condiciones de Dirichlet** establecen cuándo

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

es equivalente con la función $x(t)$ que da origen a $X(j\omega)$:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}dt$$

Condiciones de Dirichlet

1. $x(t)$ debe ser absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. $x(t)$ solo puede tener un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.

3. $x(t)$ solo puede tener un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito, y esas discontinuidades deben ser finitas.

Estas condiciones son **suficientes**, mas **no necesarias**, puesto que existen ciertas funciones que no las cumplen y tienen una representación válida en el dominio de la frecuencia.

Algunas Transformadas de Fourier:

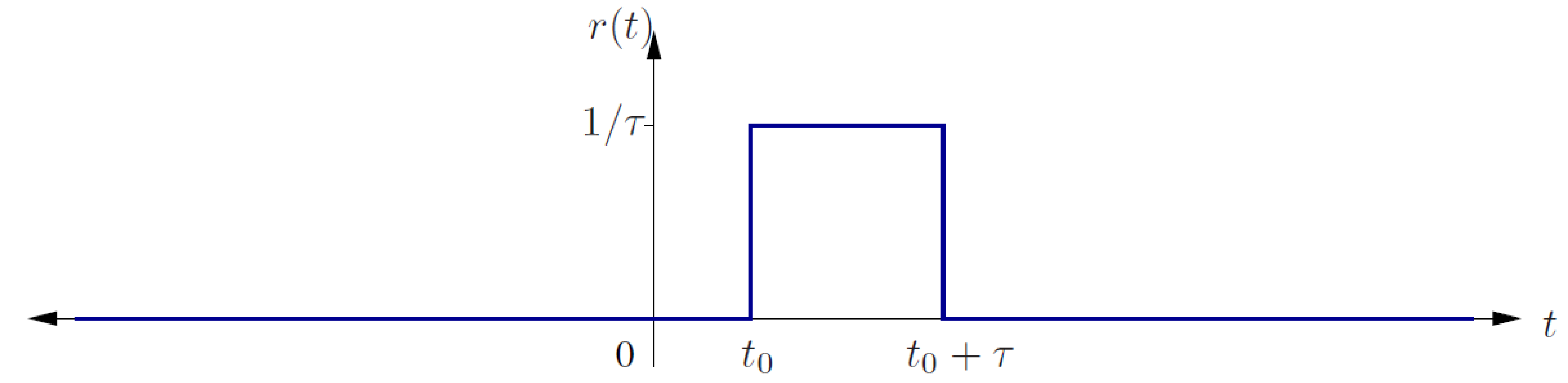
Ejemplos

Impulso rectangular

Impulso rectangular

El impulso rectangular $r(t)$ cumple con las condiciones de Dirichlet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)| dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{1}{\tau} dt = 1$$



Nivel CD del impulso rectangular

Con la definición

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t}dt$$

Se obtiene para $j\omega = 0$

$$R(j\omega)\Big|_{j\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{1}{\tau}dt = 1$$

Componentes frecuenciales de impulso rectangular

Para $j\omega \neq 0$

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-j\omega t} dt$$

$$= -\left.\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega\tau}\right|_{t_0}^{t_0+\tau} = \frac{e^{-j\omega t_0}}{j\omega\tau}\left(e^{-j\omega\tau} - 1\right)$$

$$= -\frac{e^{-j\omega t_0}}{j\omega\tau\frac{2}{2}} e^{-j\omega\tau/2}\left(e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right)$$

$$= e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)} \frac{sen(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

$$= e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)} sa(\omega\tau/2)$$

Espectro de la señal rectangular

$$R(j\omega) = e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)} sa(\omega\tau/2)$$

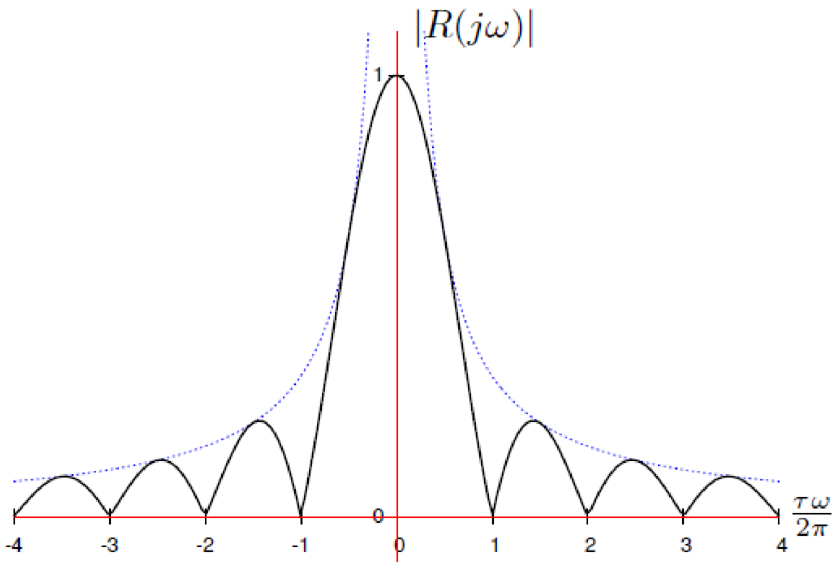
Donde se aprecia que los espectros de magnitud y fase son

$$|R(j\omega)| = |sa(\omega\tau/2)|$$

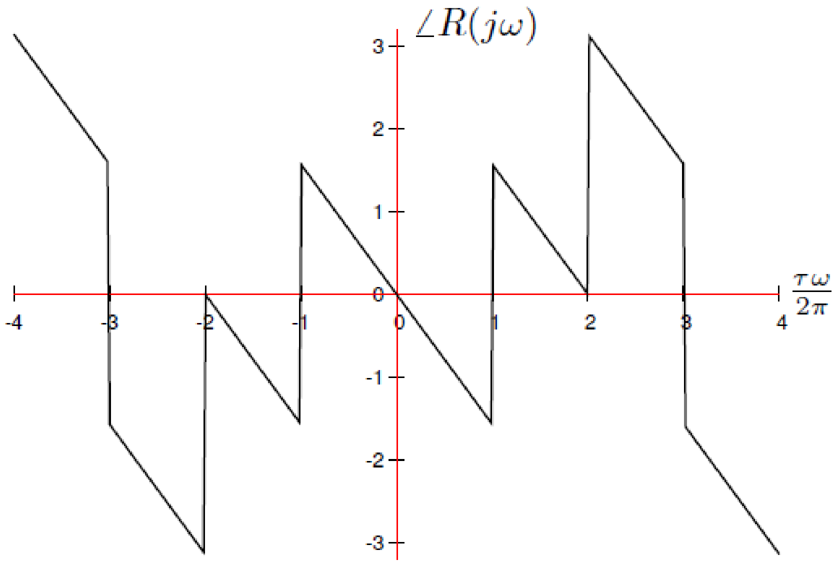
$$\angle R(j\omega) = \begin{cases} -\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)\omega & si\ sa(\omega\tau/2) \geq 0 \\ \pi - \left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)\omega & si\ sa(\omega\tau/2) < 0 \end{cases}$$

Que demuestra que la magnitud espectral depende solo del ancho del pulso τ, mientras que la posición del pulso t_0 afecta la pendiente de la fase lineal.

Espectro de $r(t)$



Junto a la magnitud se grafica $2/(|\omega|\tau) \geq |R(j\omega)|$.



Un resultado parcial (1)

De

$$r(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ R(j\omega) = e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)} sa(\omega\tau/2)$$

con $t_0 = -\tau/2$ el pulso queda centrado en el origen temporal y el espectro es real $R(j\omega) = sa(\omega\tau/2)$.

Utilizando la transformación inversa se debe cumplir

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{j\omega t} d\omega$$

de donde se nota para el caso especial $t = 0$,

$$x(0) = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\omega$$

Un resultado parcial (2)

De

$$x(0) = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) d\omega$$

con $\tau = 2$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} sa(\omega) d\omega = \pi$$

Puesto que la función $sa(\omega)$ es una función par, se cumple además

$$\int_{0}^{\infty} sa(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2}$$

Impulso Dirac

Impulso Dirac

El impulso unitario o impulso Dirac, denotado con $\delta(t)$ es

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & si\ t = 0 \\ 0 & si\ t \neq 0 \end{cases}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$$

Si se multiplica el impulso por una función cualquiera $x(t)$, se cumple $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$, por lo que

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(0)\delta(\tau)d\tau = x(0)\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

$$= \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ x(0) & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

Propiedad de muestreo de $\delta(t)$

Se cumple además

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = x(t_0)$$

Por lo que

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$

Escalón unitario

Escalón unitario

El escalón unitario, denotado usualmente como $u(t)$, y llamado también **función de Heaviside** es:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

A partir de esta relación se utiliza

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

¿Tiene $u(t)$ transformada de Fourier?

La definición de transformada aplicada a $u(t)$ resulta en

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{0}^{\infty} = \frac{e^{-j\omega\infty}}{-j\omega} + \frac{1}{j\omega}$$

Que no puede calcularse puesto que $e^{-j\omega\infty}$ **no converge**

Nótese que $u(t)$ **no** cumple con la primera condición de Dirichlet.

Transformada de Fourier de la función exponencial

La Transformada de Fourier de esta función $x(t) = e^{-at}u(t)$, con $a \in \mathbb{C}$ y $Re\{a\} > 0$, es

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

¿Transformada de $u(t)$? (1)

De

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

- Si $a \to 0$, entonces $x(t) \to u(t)$ y $X(j\omega) = 1/(j\omega)$
- Para verificar si $X(j\omega) = 1/(j\omega)$ corresponde a la transformada de $u(t)$ se utiliza la transformada inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

¿Transformada de $u(t)$? (2)

Para $t = 0$ esto equivale a

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(0) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{1}{j\omega}d\omega = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0^+}\left[\int_{-R}^{-r}\frac{1}{j\omega}d\omega + \int_{r}^{R}\frac{1}{j\omega}d\omega\right]\frac{1}{2\pi}$$

y haciendo un cambio de variable $\omega \to -\omega$ en la primera integral

$$x(0) = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0^+}\left[-\int_{r}^{R}\frac{1}{j\omega}d\omega + \int_{r}^{R}\frac{1}{j\omega}d\omega\right]\frac{1}{2\pi}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0^+}\left[\int_{r}^{R}\left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega}\right)d\omega\right]\frac{1}{2\pi} = 0$$

¿Transformada de $u(t)$? (3)

Para $t \neq 0$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Y haciendo un cambio de variable $\omega \rightarrow -\omega$ en la primera integral

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} 2t \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2tj\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} 2tsa(\omega t)\, d\omega$$

¿Transformada de $u(t)$? (4)

Con $\alpha = \omega t$ entonces $d\alpha = td\omega$y

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{t\infty} sa(\alpha)d\alpha$$

Si $t > 0$ entonces el límite superior de la integración es $+\infty$ y la ecuación anterior equivale a

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{t\infty} sa(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Si $t < 0$ entonces el límite superior de la integración es $-\infty$ y la ecuación anterior equivale a

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} sa(\alpha)d\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} sa(\alpha)d\alpha = -\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}$$

¿Transformada de $u(t)$? (5)

Resumiendo

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega}\right\} = u(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}sgn(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & para\, t > 0 \\ 0 & para\, t = 0 \\ -\frac{1}{2} & para\, t < 0 \end{cases}$$

Y esta función no tiene ningún nivel CD, a diferencia del escalón unitario, cuyo valor promedio es $1/2$.

Funciones con una sola componente espectral

- Considérese una función $x(t)$ cuya transformada de Fourier es $X(jw) = c\delta(\omega - \omega_0)$, con c constante.
- Utilizando la ecuación de la transformada inversa se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = \frac{c}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

Función constante

- A partir de

$$X(j\omega) = c\delta(\omega - \omega_0) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{c}{2\pi} e^{j\omega_0 t} = x(t)$$

con $\omega_0 = 0$ se tiene $x(t) = c/2\pi$, con c constante.

- Por tanto, la transformada de Fourier $X(j\omega) = 2\pi c\delta(\omega)$ con solo una componente espectral en $\omega_0 = 0$ equivale a $x(t) = c$.

Escalón

Anteriormente se obtuvo el escalón excepto por un nivel CD, que ahora puede introducirse considerando la propiedad mencionada y la linealidad de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Funciones Periódicas

Funciones periódicas

Al ser una generalización de la serie de Fourier, la transformada de una señal periódica debería corresponder con la serie de la misma:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[X(j\omega)]e^{j\omega t}d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

El candidato para $X(j\omega)$ debería cumplir con:

- Ser una combinación lineal,
- ser $\approx 2\pi$,
- ser $\approx c_k$,
- Muestrear $e^{j\omega t}$ cada $k\omega_0$.

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Funciones periódicas

Por lo tanto

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)\right)e^{j\omega t}d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

que es el desarrollo en serie de Fourier para $x(t)$. Esta debe ser entonces periódica con periodo $2\pi/\omega_0$.

Ejemplo: Transformada de Fourier del seno y coseno (1)

Calcule la transformada de Fourier de las funciones $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ y $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Ejemplo: Transformada de Fourier del seno y coseno (2)

Solución:

El desarrollo en serie de Fourier de $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ tiene como coeficientes

$$c_k = \begin{cases} 0 & para\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{1,-1\} \\ \frac{1}{2j} = -j\frac{1}{2} & para\ k = 1 \\ -\frac{1}{2j} = j\frac{1}{2} & para\ k = -1 \end{cases}$$

Por lo que la transformada de Fourier del seno es:

$$X(j\omega) = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Ejemplo: Transformada de Fourier del seno y coseno (3)

Del mismo modo el desarrollo del coseno utiliza

$$c_k = \begin{cases} 0 & para\ k \in \mathbb{Z} \backslash \{1, -1\} \\ \frac{1}{2} & para\ k = \pm 1 \end{cases}$$

Por lo que la transformada de Fourier del coseno es:

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Obsérvese que en este caso **no se cumple** la primera condición de Dirichlet, que establece que la función debe ser **absolutamente integrable**.

Transformadas de Fourier

Nombre	Señal en el tiempo	Transformada
Transformación	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Escalon unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
Impulso rectangular	$\frac{1}{\tau}[u(t-t_0) - u(t-t_0-\tau)]$	$e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}\,\mathrm{sa}(\omega\tau/2)$
Exponencial	$e^{-at}u(t)$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
Exponencial por rampa	$e^{-at}tu(t)$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
Laplaciana	$e^{-a\lvert t\rvert}$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
Exponencial compleja	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
Constante	c	$2\pi c\delta(\omega)$
Función periódica	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k\delta(\omega - k\omega_0)$
Impulso gaussiano	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$	$e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2}$
Seno	$\mathrm{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)]$
Coseno	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

Propiedades de la Transformada de Fourier

Linealidad

La linealidad de la transformada de Fourier especifica que

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

$$= \alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$$

Simetría par

Si se tiene simetría par, entonces $x(t) = x(-t)$ y

$$X(j\omega) = 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)\,dt$$

Si $x(t)$ es además real, y puesto que el coseno es una función par, entonces el espectro será también real y tendrá simetría par con respecto a ω.

Simetría impar

Con la simetría impar se cumple $x(-t) = -x(t)$ y

$$X(j\omega) = -2j\int_{0}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)dt$$

Si $x(t)$ es real, y utilizando la simetría impar del seno se derivan que el espectro de una función impar es a su vez impar y puramente imaginario.

Desplazamiento en el tiempo

Si la función $x(t)$ tiene como transformada a $X(j\omega)$ entonces

$$x(t - t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Desplazamiento en la frecuencia

Ahora, si es el espectro $X(j\omega)$ quien se traslada en la frecuencia por una magnitud ω_0, entonces

$$X(j\omega - j\omega_0) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad e^{j\omega_0 t}x(t)$$

Modulación

Se dice que una función se modula a la frecuencia ω_0 cuando se multiplica por $\cos(\omega_o t)$. Esto es:

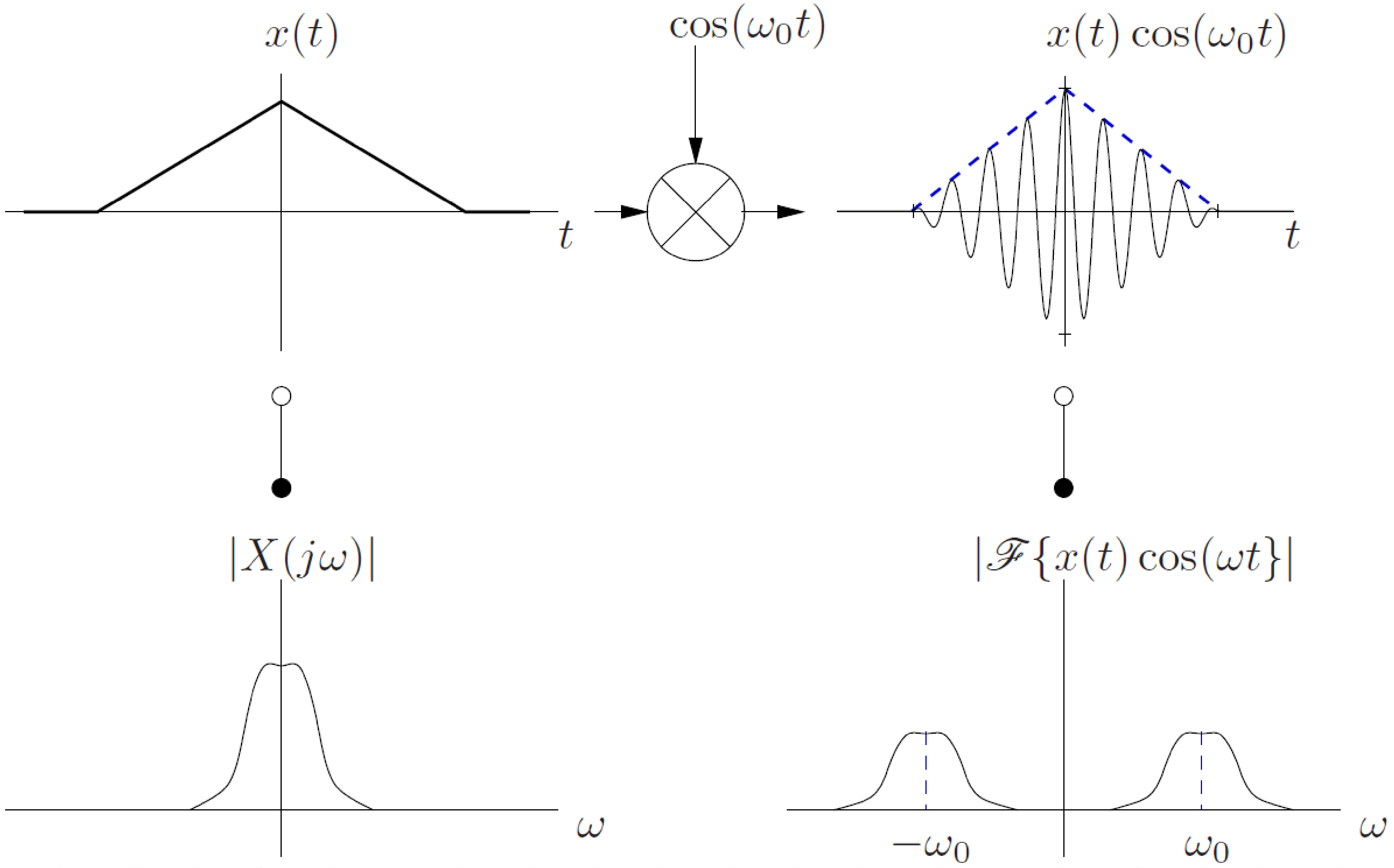
$$\cos(\omega_0 t)\, x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2} x(t) + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} x(t)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento y la linealidad:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, x(t)\} = \frac{1}{2} X(j\omega + j\omega_0) + \frac{1}{2} X(j\omega - j\omega_0)$$

Lo que implica que el espectro de $x(t)$ se divide en dos mitades, donde una se desplaza a $-\omega_0$ y otra a ω_0.

Modulación



$x(t)$
$\cos(\omega_0 t)$
$x(t)\cos(\omega_0 t)$
t
t
$|X(j\omega)|$
$|\mathscr{F}\{x(t)\cos(\omega t)\}|$
ω
$-\omega_0$
ω_0
ω

Modulación con el seno

De forma equivalente, con el seno se obtiene

$$\sin(\omega_0 t)\, x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2j} x(t) - \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2j} x(t)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento y la linealidad:

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\, x(t)\} = \frac{1}{2j} X(j\omega - j\omega_0) - \frac{1}{2j} X(j\omega + j\omega_0)$$

$$= \frac{e^{-j\pi/2}}{2} X(j\omega - j\omega_0) - \frac{e^{-j\pi/2}}{2} X(j\omega + j\omega_0)$$

$$= \frac{e^{-j\pi/2}}{2} X(j\omega - j\omega_0) + \frac{e^{j\pi/2}}{2} X(j\omega + j\omega_0)$$

Lo que implica que el espectro de $x(t)$ se divide en dos mitades, donde una se desplaza a $-\omega_0$ y otra invertida a ω_0, donde además la fase de cada mitad se desplaza en $\pi/2$.

Conjugación

Si la transformada de Fourier de $x(t)$ es $X(j\omega)$, entonces se cumple

$$x^*(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X^*(-j\omega)$$

Con $x(t) \in \mathbb{R}$, entonces $x(t) = x^*(t)$ por lo que $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

Diferenciación

Si la transformada de Fourier de $x(t)$ es $X(j\omega)$, entonces se cumple

$$\frac{d}{dt}x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; j\omega X(j\omega)$$

Diferenciación generalizada

Lo anterior se puede generalizar para derivadas de orden superior

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (j\omega)^n X(j\omega)$$

Derivada en el dominio de la frecuencia

De forma equivalente, para la derivada en el dominio de la frecuencia se obtiene

$$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad tx(t)$$

Propiedad de integración

De forma equivalente, integración en el dominio del tiempo se obtiene

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Escalamiento en tiempo y frecuencia

Si el tiempo se escala por α, entonces

$$\mathcal{F}\{x(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t)e^{-j\omega t}dt$$

Sustituyendo $\tau = \alpha t$

$$\mathcal{F}\{x(\alpha t)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/\alpha)\tau}d\tau & \alpha > 0 \\ -\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/\alpha)\tau}d\tau & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|\alpha|}X\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Inversión en el tiempo

- **Dilatación** temporal de $x(t)$ $\Rightarrow$ **contracción** espectral y aumento en magnitud.
- **Contracción** temporal de $x(t)$ $\Rightarrow$ **expansión** espectral y reducción en magnitud.
- De lo anterior se deriva directamente que si se invierte la señal $x(t)$ en el tiempo, entonces su espectro se invierte también:

$$x(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(-j\omega)$$

Dualidad

A partir de la **transformada inversa de Fourier** se obtiene:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Sustituyendo ω por ζ

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\zeta)e^{j\zeta t}d\zeta$$

y reemplazando t por $-\omega$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\zeta)e^{-j\zeta\omega}d\zeta$$

$$2\pi x(-\omega) = \mathcal{F}\{X(j\zeta)\}$$

Finalmente

$$\mathcal{F}\{X(jt)\} = 2\pi x(-\omega)$$

Relación energética en tiempo/frecuencia

- Interesa ahora observar la relación entre la energía de una señal en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.
- Partiendo de la definición de energía en el dominio del tiempo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Relación energética en tiempo/frecuencia

- La **relación de Parseval** establece que la energía total se puede calcular tanto a través de la energía por unidad de tiempo $|x(t)|^2$ como a través de la llamada densidad de energía $|X(j\omega)|^2/2\pi$.
- Las señales periódicas tienen energía infinita, pero potencia promedio finita.
- Las señales con potencia promedio **finita** se denominan señales de **potencia**.
- Las señales con energía **finita** se denominan señales de **energía**.

Convolución en el dominio del tiempo

Si se define la transformada de Fourier $X(j\omega)$ de la función $x(t)$ como el producto de las transformadas $X_1(j\omega)$ y $X_2(j\omega)$ de dos funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ entonces

$$X(j\omega) = X_1(j\omega)X_2(j\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

Convolución en el tiempo equivale a producto en la frecuencia

Convolución en la frecuencia

De forma equivalente se obtiene que el producto de dos funciones $x_1(t)x_2(t)$ tendrá como espectro

$$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

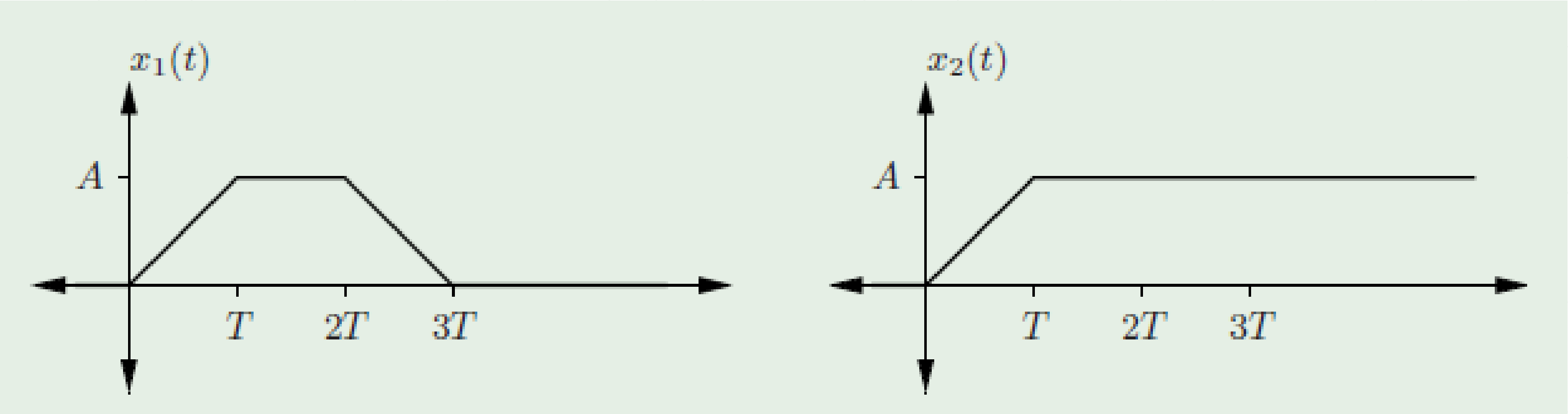
Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(j\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(j\omega)$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$2\int_0^{\infty} x(t)\cos(\omega t)\,dt$ $X(j\omega) \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$-2j\int_0^{\infty} x(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt$ $X(j\omega) \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
Dualidad	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-j\omega\tau}X(j\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j\omega - j\omega_0)$
Modulación	$\cos(\omega_0 t)x(t)$	$\frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(j\omega)\rvert^2\,d\omega$	

Ejemplos de Transformadas de Fourier

Ejemplo: Propiedad de derivación (1)

Utilice la propiedad de derivación de la transformada de Fourier para encontrar la transformada de las siguientes funciones.



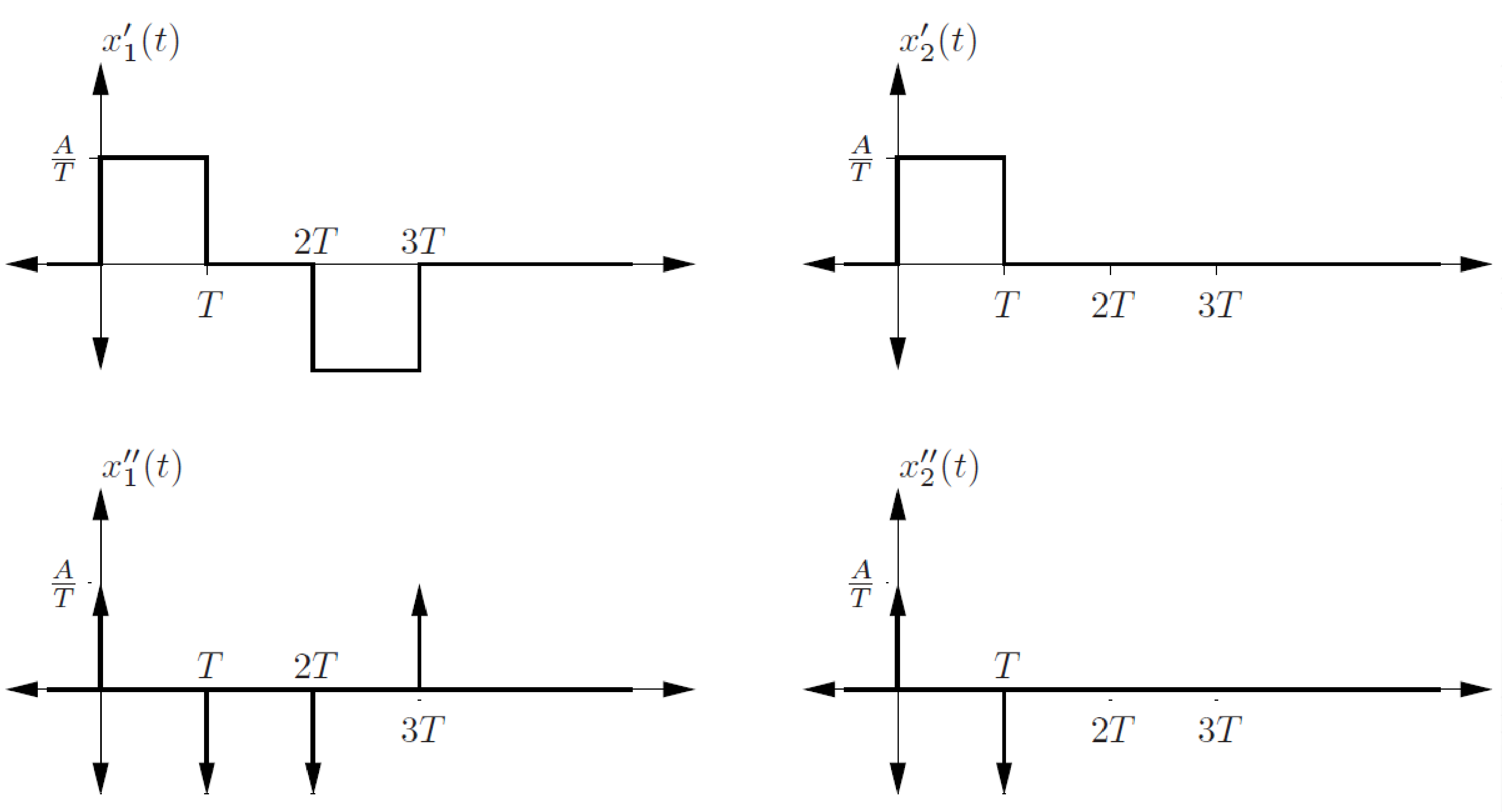
Ejemplo: Propiedad de derivación (2)

Solución:

La propiedad de derivación puede utilizarse para calcular fácilmente la transformada de Fourier de funciones que son formadas por segmentos de recta, como las mostradas.

En el procedimiento a seguir, se derivan las funciones hasta obtener impulsos de Dirac, donde debe tomarse en cuenta que si la función original tiene un valor promedio finito (o nivel CD), al derivar la primera vez dicha información se pierde, y puede reinsertarse posteriormente.

Ejemplo: Propiedad de derivación (3)



Ejemplo: Propiedad de derivación (4)

La figura anterior muestra la primera y segunda derivadas de las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$. La función $x_1(t)$ tiene valor promedio igual a cero:

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}x_1(t)dt=\lim_{L\to\infty}\frac{TA}{L}=0$$

Puesto que la transformada de Fourier de $\delta(t)$ es 1, entonces por las propiedades de linealidad, desplazamiento y derivación:

$$(j\omega)^2X_1(j\omega)=\frac{A}{T}\left[1-e^{-\omega T}-e^{-\omega 2T}+e^{-\omega 3T}\right]$$

$$=\frac{A}{T}\left[e^{-j\omega\frac{3}{2}T}\left(e^{j\omega\frac{3}{2}T}+e^{-j\omega\frac{3}{2}T}\right)-e^{-j\omega T}e^{-j\omega\frac{T}{2}}\left(e^{j\omega\frac{T}{2}}+e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right)\right]$$

$$=2\frac{A}{T}e^{-j\omega\frac{3}{2}T}\left(\cos\left(\frac{3\omega T}{2}\right)-\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)$$

Ejemplo: Propiedad de derivación (5)

Finalmente se obtiene:

$$(j\omega)^2 X_1(j\omega) = 2\frac{A}{\omega^2 T} e^{\frac{-j3\omega T}{2}} \left(\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\omega T}{2}\right) \right)$$

Es posible agrupar otros pares de impulsos por ejemplo los impulsos en 0 y en $2T$, y por otro lado en T y $3T$ para obtener senos.

Otro ejercicio será agrupar los impulsos en 0 y T, y por otro lados los impulsos en $2T$ y $3T$.

Ejemplo: Propiedad de derivación (6)

Para el caso de la función $x_2(t)$, el valor promedio es diferente de cero:

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} x_2(t)dt = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \left[\frac{AT}{2} + A(L-T) \right] = \frac{A}{2}$$

Este nivel es eliminado en la derivación, pero se sabe que su transformada de Fourier es $\pi A \delta(\omega)$, que deberá considerarse en la transformada.

Ejemplo: Propiedad de derivación (7)

Procediendo de modo similar al caso anterior, se cumple:

$$X_2(j\omega) = \frac{A}{T(j\omega)^2}\left[1 - e^{-j\omega T}\right] + \pi A\delta(\omega)$$

$$= -\frac{A}{T\omega^2}\left[e^{\frac{-j\omega T}{2}}\left(e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{\frac{-j\omega T}{2}}\right)\right] + \pi A\delta(\omega)$$

$$= -2j\frac{A}{T\omega^2}e^{\frac{-j\omega T}{2}} sen\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \pi A\delta(\omega)$$

Ejemplo: Dualidad de la transformada de Fourier (1)

Determine la transformada de Fourier de la señal

$$g(t) = sa(\alpha t)$$

Ejemplo: Dualidad de la transformada de Fourier (2)

Solución: La transformada del impulso rectangular está dada por

$$r(t) = \frac{1}{\tau}[u(t - t_0) - u(t - t_0 - \tau)] \circ\!\!-\!\!\bullet \; R(j\omega) = e^{-j\omega\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)} sa(\omega\tau/2)$$

y con $t_0 = -\tau/2$, y $\tau = 2\alpha$

$$r(t) = \frac{1}{2\alpha}[u(t + \alpha) - u(t - \alpha)] \circ\!\!-\!\!\bullet \; R(j\omega) = sa(\alpha\omega)$$

Donde, empleando la propiedad de dualidad se cumple

$$R(jt) = sa(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; 2\pi r(-\omega) = \frac{\pi}{\alpha}[u(-\omega + \alpha) - u(-\omega - \alpha)]$$

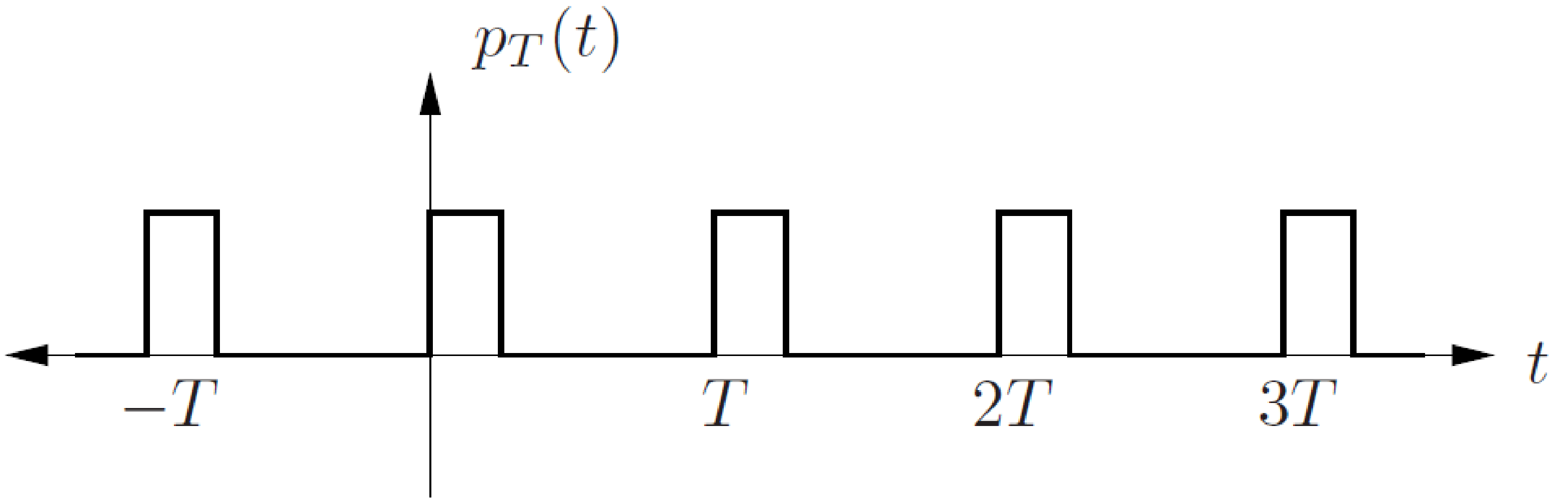
$$= \frac{\pi}{\alpha}[u(\omega + \alpha) - u(\omega - \alpha)]$$

La función $sa(\alpha t)$ tiene entonces un espectro rectangular real con componentes espectrales iguales para el intervalo entre $\omega \in [-\alpha, \alpha]$.

Teorema del Muestreo

Ejemplo: Muestreo de señales (1)

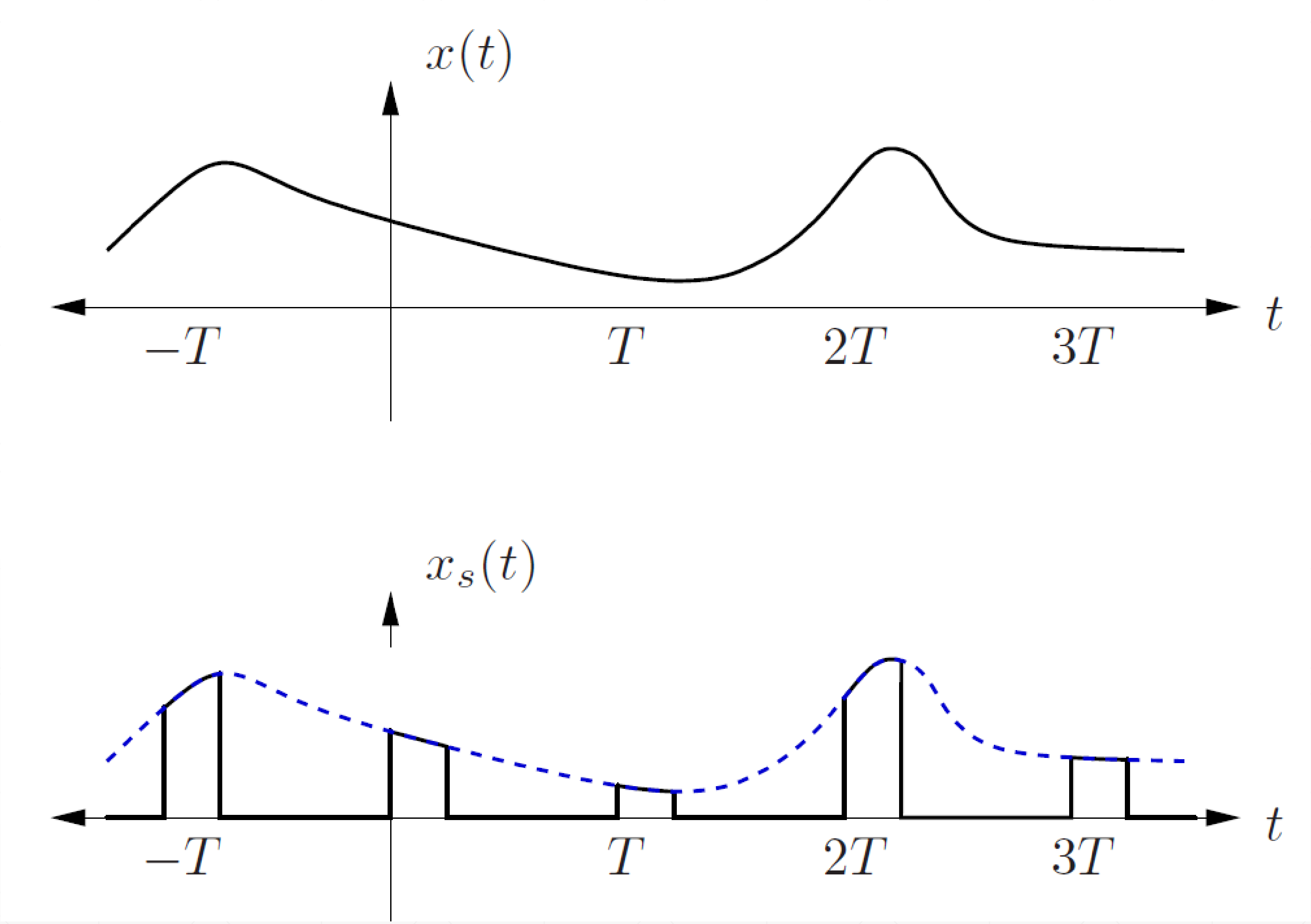
La función puente $p_T(t)$ se utiliza para tomar muestras cada T segundos de alguna señal $x(t)$ definida en el tiempo.



La señal muestreada $x_s(t)$ se obtiene entonces a través del producto de la señal $x(t)$ y $p_T(t)$:

$$x_s(t) = x(t)p_T(t)$$

Ejemplo: Muestreo de señales (2)



Ejemplo: Muestreo de señales (3)

Al periodo T se le conoce como **periodo de muestreo**, y a su inverso $f_s = 1/T$ se le denomina **frecuencia de muestreo**.

¿Cuál es el espectro de la señal muestreada $X_s(j\omega)$ en términos del espectro de la señal sin muestrear $X(j\omega)$?

Ejemplo: Muestreo de señales (4)

Solución: Puesto que la función puente $p_T(t)$ es periódica, entonces tiene una serie de Fourier con coeficientes P_n:

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}\,; \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

De modo que se cumple

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}$$

Ejemplo: Muestreo de señales (5)

Transformando a ambos lados de la ecuación y utilizando la propiedad de linealidad se obtiene

$$X_s(j\omega) = \mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\left\{x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \mathcal{F}\left\{x(t)e^{jn\omega_0 t}\right\}$$

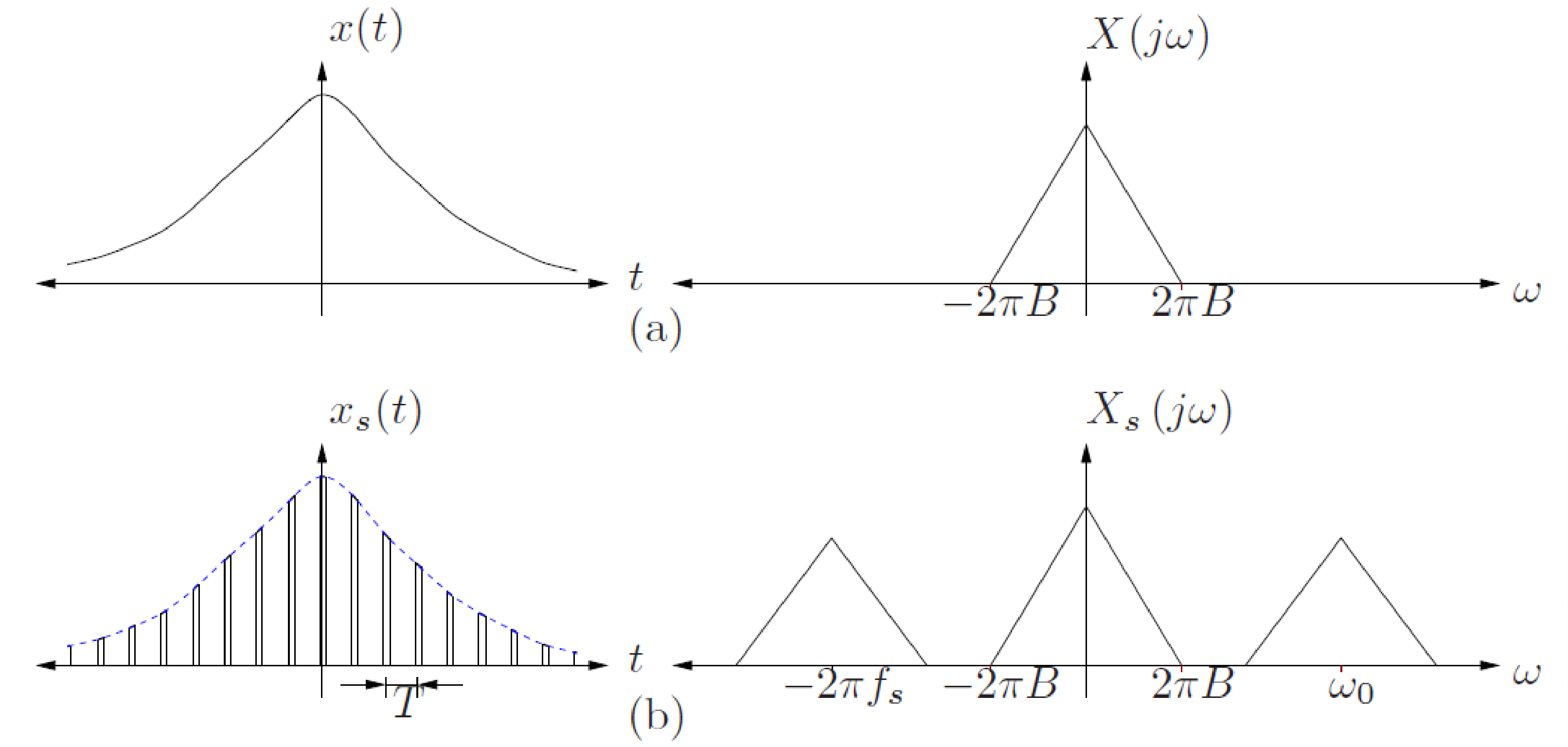
y considerando la propiedad de desplazamiento en frecuencia lo anterior equivale a

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n X(j\omega - jn\omega_0)$$

$$= P_0 X(j\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} P_n X(j\omega - jn\omega_0)$$

Ejemplo: Muestreo de señales (6)

Con el muestreo se producen réplicas del espectro original de la señal $X(j\omega)$, separadas en el dominio de la frecuencia por $\omega_0 = 2\pi/T$ y ponderadas por los coeficientes de la representación de la función puente como serie de Fourier.



Ejemplo: Muestreo de señales (7)

- Si el espectro original $X(j\omega)$ es de banda limitada ($X(j\omega) = 0,\ \omega > 2\pi B$), entonces eligiendo el periodo de muestreo suficientemente pequeño es posible evitar que las réplicas se traslapen con el espectro original.

- Si $x(t)$ es real, entonces la magnitud de su espectro es par, y por tanto para evitar el traslape la siguiente réplica se deberá posicionar al menos en $\omega_0 > 4\pi B$ lo que es equivalente a afirmar que la frecuencia de muestreo f_s debe ser **al menos el doble del ancho de banda B del espectro** $X(j\omega)$ para evitar que las replicas se traslapen.

- Se puede demostrar que si no hay traslape entonces es posible rescatar a partir de la señal muestreada $x_s(t)$ la señal original $x(t)$ utilizando un filtro paso bajos que permita pasar únicamente el rango de frecuencias angulares desde $-2\pi B$ hasta $2\pi B$.

Ejemplo: Muestreo de señales (8)

Estos principios se resumen en el llamado **Teorema del Muestreo** que puede resumirse de la siguiente manera:

Para muestrear una señal analógica sin pérdidas de información se requiere una tasa de muestreo de **al menos el doble del ancho de banda** del espectro de la señal.

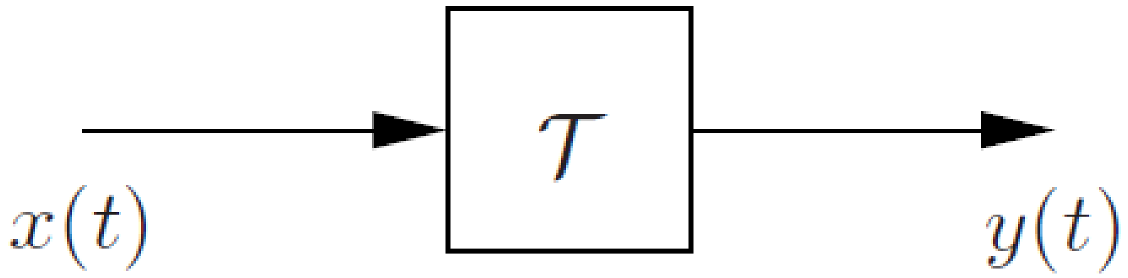
Linealidad e invarianza en el tiempo

Sistema

Un sistema transforma una señal de entrada $x(t)$ en una señal de salida $y(t)$:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

Donde el operador $\mathcal{T}[\cdot]$ denota la transformación hecha a la señal por el sistema.



Sistema lineal

Si

$$y_1(t) = \mathcal{T}[x_1(t)]$$
$$y_2(t) = \mathcal{T}[x_2(t)]$$

el sistema es lineal si

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \mathcal{T}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]$$

y generalizando

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(t) = \mathcal{T}\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) =\right]$$

para n entradas diferentes con $y_i = \mathcal{T}[x_i(t)]$

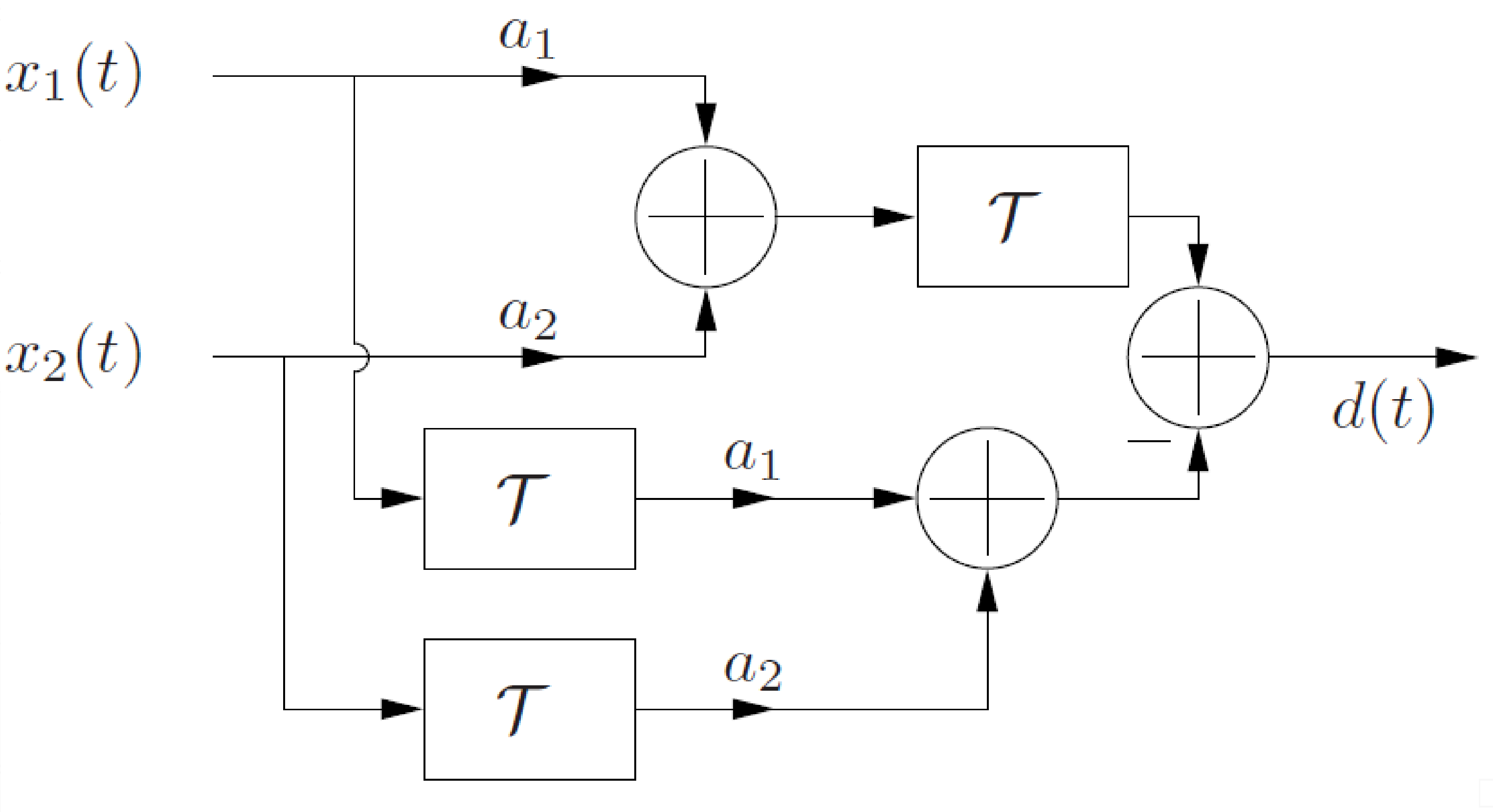
Ejemplo: Sistemas lineales (1)

Determine si los sistemas $y(t) = \mathcal{T}[x\,(t)]$ son lineales.

1. $\mathrm{y}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
2. $\mathrm{y}(t) = x(-t)$
3. $\mathrm{y}(t) = x(t) + 1$

Ejemplo: Sistemas lineales (2)

Solución: Para comprobar la linealidad se calcula por un lado la combinación lineal de las respuestas a diferentes entradas por separado, y luego se verifica que dicha combinación equivale a la respuesta del sistema a la combinación lineal de las entradas.



Ejemplo: Sistemas lineales (3)

1. Si $y_1(t) = \frac{d}{dt} x_1(t)$ y $y_2(t) = \frac{d}{dt} x_2(t)$ entonces

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 \frac{d}{dt} x_1(t) + \alpha_2 \frac{d}{dt} x_2(t)$$

Por otro lado, si $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ y se calcula $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ entonces

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 \frac{d}{dt} x_1(t) + \alpha_2 \frac{d}{dt} x_2(t)$$

por lo que el sistema es **lineal**.

Ejemplo: Sistemas lineales (4)

2. Si $y_1(t) = x_1(-t)$ y $y_2(t) = x_2(-t)$ entonces

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 x_1(-t) + \alpha_2 x_2(-t)$$

Por otro lado, si $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ y se calcula $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ entonces

$$y(t) = x(-t) = \alpha_1 x_1(-t) + \alpha_2 x_2(-t)$$

lo que indica que el sistema es **lineal**.

Ejemplo: Sistemas lineales (5)

3. Si $y_1(t) = x_1(t) + 1$ y $y_2(t) = x_2(t) + 1$ entonces

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_1 + \alpha_2$$

Por otro lado, si $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ y se calcula $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ entonces

$$y(t) = x(t) + 1 = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + 1$$

lo que indica que el sistema es **no lineal**.

Sistema Invariante en el Tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] \quad \Longrightarrow \quad y(t - t_0) = \mathcal{T}[x(t - t_0)]$$

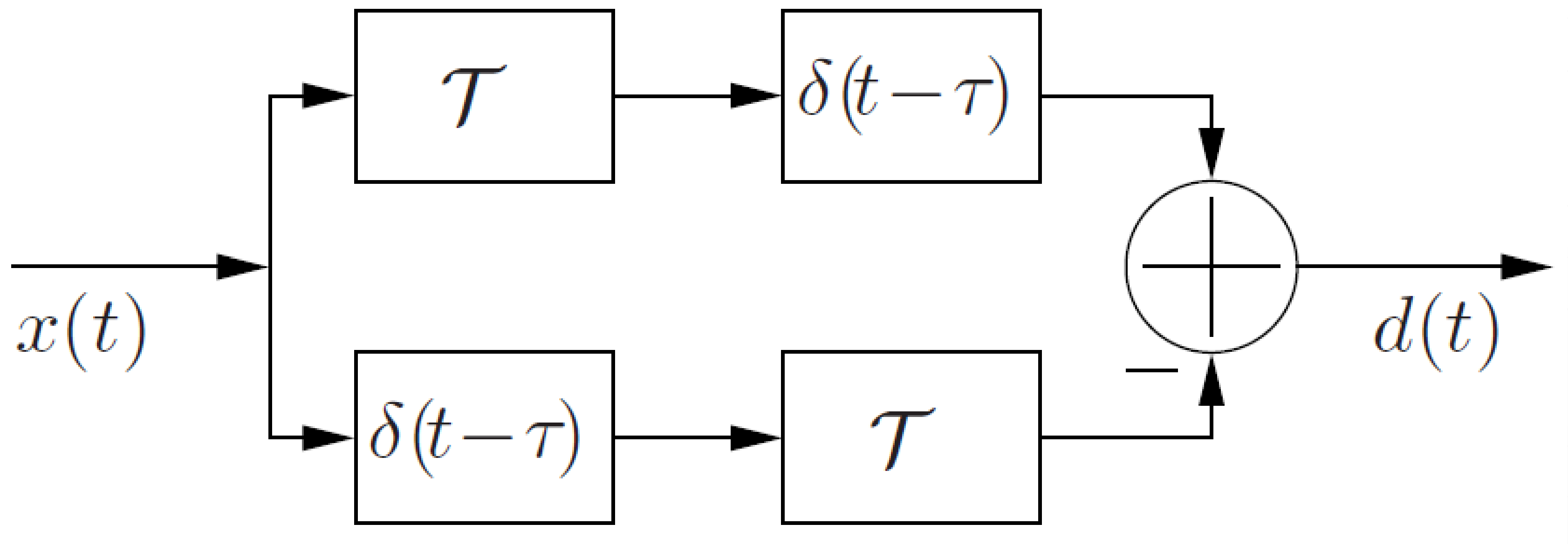
Ejemplo: Sistemas invariantes en el tiempo (1)

Determine si los sistemas $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ son invariantes en el tiempo.

1. $\mathrm{y}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
2. $\mathrm{y}(t) = x(-t)$
3. $\mathrm{y}(t) = x(t) + 1$

Ejemplo: Sistemas invariantes en el tiempo (2)

Solución: Para corroborar la invarianza en el tiempo se calcula primero la respuesta del sistema a la señal desplazada en el tiempo, y luego se compara esto con la respuesta a la entrada sin desplazar, desplazada en el tiempo.



Ejemplo: Sistemas invariantes en el tiempo (3)

1. Si $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ entonces la respuesta a $x(t - t_0)$ es $\frac{d}{dt}x(t - t_0)$.

La salida $y(t)$ desplazada en el tiempo es también $\frac{d}{dt}x(t - t_0)$ por lo que el sistema es **invariante** en el tiempo.

Ejemplo: Sistemas invariantes en el tiempo (4)

2. Si $y(t) = x(-t)$ entonces la respuesta a la señal $x(t)$ desplazada en el tiempo es $x\big(-(t - t_0)\big) = x(-t + t_0)$. Por otro lado, si se desplaza la salida correspondiente a $x(t)$ entonces $y(t - t_0) = x(-t - t_0)$.

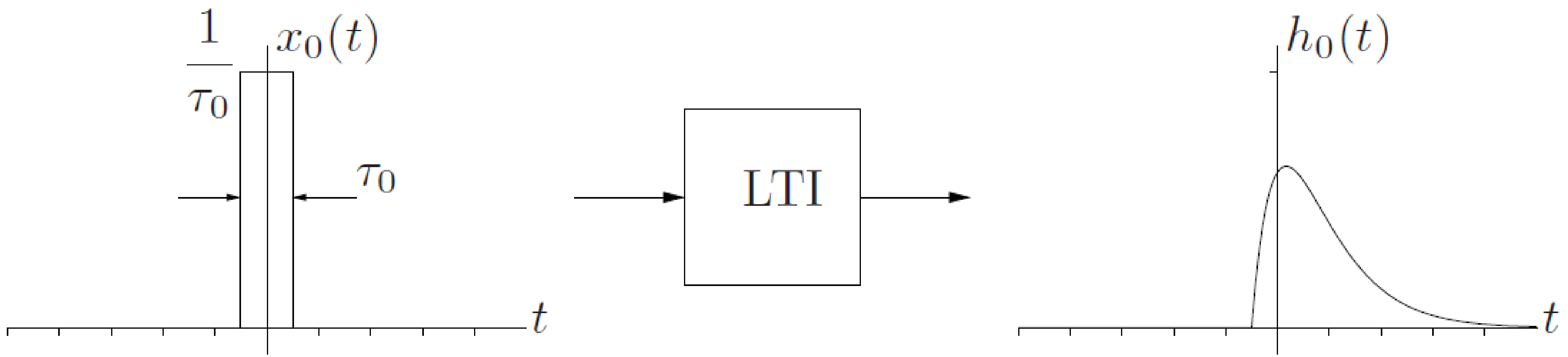
Esto implica que el sistema es **variante** en el tiempo.

Ejemplo: Sistemas invariantes en el tiempo (5)

3. Si $y(t) = x(t) + 1$ entonces la respuesta a la entrada desplazada es $x(t - t_0) + 1$, y la respuesta desplazada correspondiente a $x(t)$ también es $y(t - t_0) = x(t - t_0) + 1$ por lo que el sistema es **invariante** en el tiempo.

LTI: Linear and Time Invariant

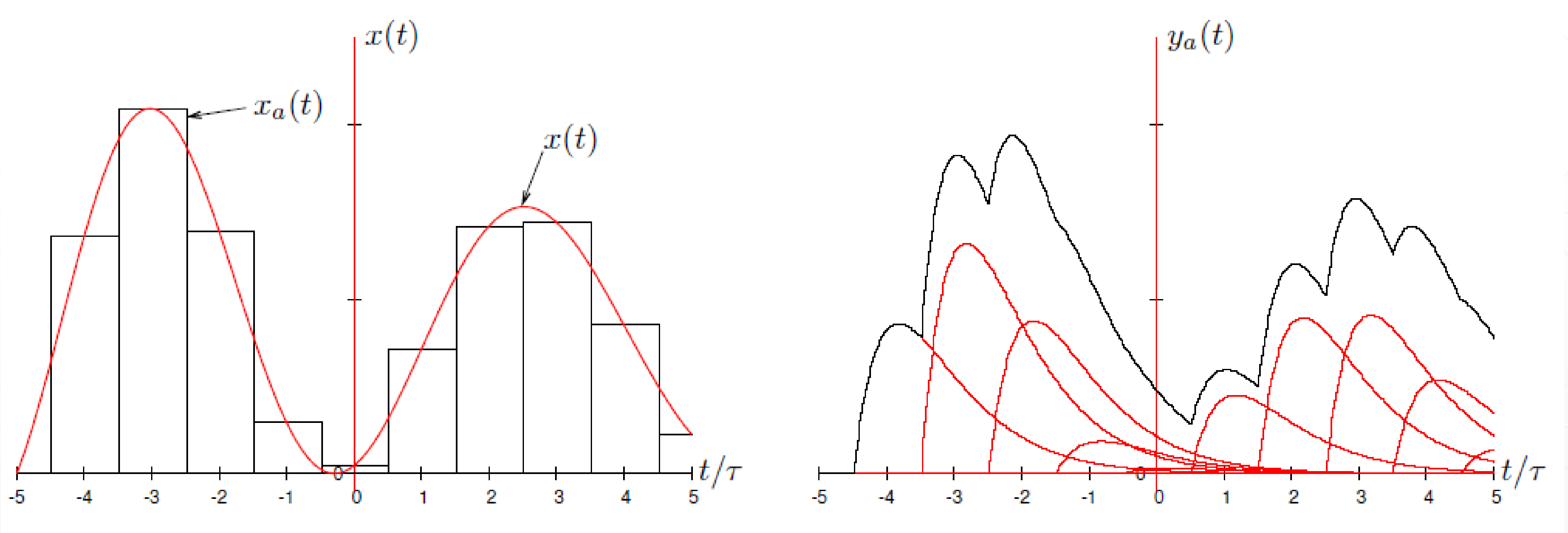
Considérese un impulso rectangular $x_0(t)$ de duración τ_0 y amplitud $1/\tau_0$ como entrada a un sistema LTI, que corresponde a él con la salida $h_0(t)$ tal y como lo muestra la figura.



Combinación lineal de respuestas al impulso rectangular

Por linealidad se debe cumplir

$$x(t) \approx x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau_0)x_0(t - n\tau_0)\,\tau_0$$



Combinación lineal de respuestas al impulso rectangular

Al ser el sistema LTI, cada impulso $x(n\tau_0)x_0(t-n\tau_0)\tau_0$ a la entrada conduce a una salida $x(n\tau_0)h_0(t-n\tau_0)\tau_0$ y por lo tanto

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau_0)h_0(t-n\tau_0)\,\tau_0$$

Integrales de convolución

Para $\tau_0 \rightarrow d\tau$ entonces $n\tau_0 \rightarrow \tau$ y $x_0(t) \rightarrow \delta(t)$, por lo que:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

que son **integrales de Convolución**

Convolución y sistemas LTI

Convolución en sistemas LTI

La señal de **salida** de un sistema LTI se calcula con la **convolución** de la señal de **entrada** con la **respuesta al impulso** $h(t)$ del sistema.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Producto de respuestas en frecuencia

Considerando la propiedad de convolución de la **transformada de Fourier** si se cumple $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega)$ y $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega)$, entonces

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t) * \delta(t)\} = X(j\omega)1 = X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(j\omega)H(j\omega)$$

Cálculo de respuesta en frecuencia

Nótese que si se conoce que un sistema es **LTI**, entonces, obteniendo su salida $Y(j\omega)$ para una entrada $X(j\omega)$ en el dominio de la frecuencia, la **respuesta en frecuencia** $H(j\omega)$ del sistema se puede calcular como

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Convolución

Conmutatividad y asociatividad de la convolución

La convolución de $x(t)$ y $h(t)$ se expresa como

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$\Longrightarrow$ la convolución es un operador **conmutativo**. Además es asociativo y distributivo:

$$x(t) * g(t) * h(t) = [x(t) * g(t)] * h(t) = x(t) * [g(t) * h(t)]$$

$$x(t) * [g(t) + h(t)] = [x(t) * g(t)] + [x(t) * h(t)]$$

Interpretación gráfica de la convolución

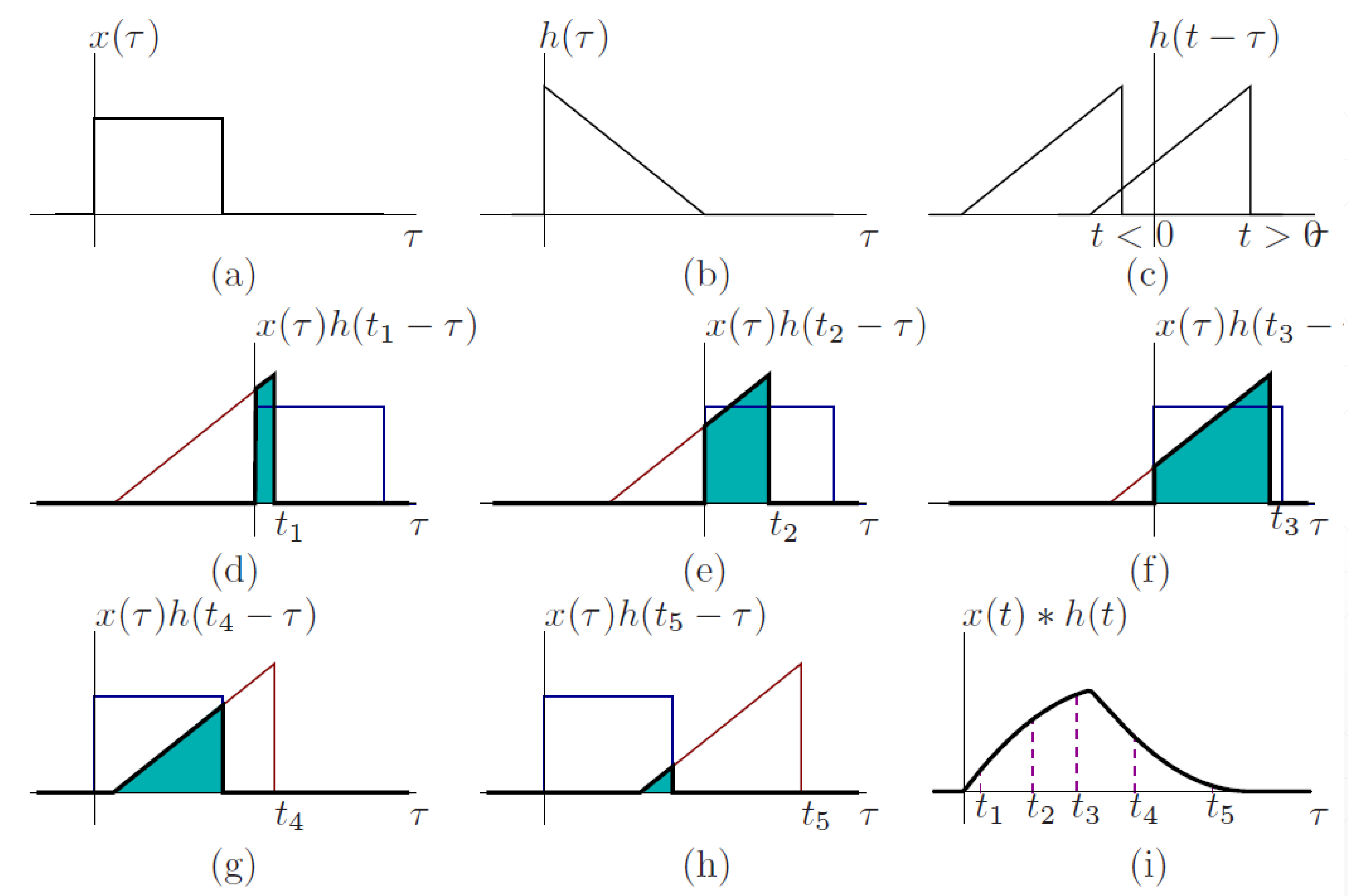
La integral de convolución

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

permite identificar varios pasos:

1. **Inversión de $h(\tau)$**. Debido a que la variable de integración es τ y la función aparece en la integral como $h(t-\tau)$.
2. **Desplazamiento a t**. Se debe desplazar el origen de $h(-\tau)$ hacia el punto t que se desea calcular.
3. **Producto** punto a punto de la función $x(\tau)$ con $h(t-\tau)$.
4. **Integral** del producto, que calcula, que calcula área bajo la curva de ese producto.

Convolución



Funciones propias

Un sistema LTI con entrada $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ tendrá como salida

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = h(t) * x(t) = h(t) * e^{j\omega_0 t}$$

En el dominio de la frecuencia y considerando la respuesta en frecuencia $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ se tiene

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega) = H(j\omega)\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$= H(j\omega)2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$= H(j\omega_0)2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

y la transformada inversa de esto es

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega_0)2\pi\delta(\omega - \omega_0)\} = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

La forma de la señal de entrada se mantiene, pero $H(j\omega)$ cambia su magnitud y fase de salida.

Respuesta de sistema real

Si se asume que la respuesta al impulso $h(t)$ es una función real, entonces $H(-j\omega_0) = H^*(j\omega_0)$. Puesto que

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Entonces por linealidad, y asumiendo que $H(j\omega_0) = |H(j\omega_0)|e^{j\phi_0}$ la salida será

$$y(t) = \frac{|H(j\omega_0)|}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\phi_0)} + e^{-(j\omega_0 t+\phi_0)}\right] = |H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Por lo tanto, un sistema **LTI** no puede alterar las frecuencias presentes en la señal de entrada. Esto solo ocurrirá en sistemas no lineales o variantes en el tiempo.

Causalidad y estabilidad

Sistemas causales

En cuanto a la reacción temporal, los sistemas pueden ser

1. **Causales**: salida diferente de cero solo durante o después de que ocurra algún evento.

   Un sistema **LTI** es causal si y solo si $h(t) = 0$ para todo $t < 0$, o de otro modo:

   $$h(t) = h(t)u(t)$$

   En analogía a este hecho se dice que cualquier señal $x(t)$, con $x(t) = 0$ para $t < 0$, es causal.

2. **No causales**: respuesta a una entrada antes de que la entrada misma ocurra.

Implicaciones de la causalidad en el dominio de la frecuencia

Puesto que $h(t)$ tiene componentes par e impar diferentes de cero, entonces $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ no puede ser ni puramente real ni puramente imaginaria.

En otras palabras, si $h(t)$ es real entonces $H(j\omega)$ tiene magnitud par y fase impar, pero el hecho de que el sistema sea causal implica que la fase de $H(j\omega)$ no puede ser cero o $\pi/2$ en todo el rango de frecuencias.

Implicaciones de la estabilidad en el dominio de la frecuencia

Un sistema se dice que es estable o estable en amplitud si para cualquier entrada $x(t)$ acotada en amplitud

$$|x(t)| < A_x, \qquad A_x \in \mathbb{R}, A_x > 0$$

el sistema reacciona con la salida $y(t)$ también acotada en amplitud

$$|y(t)| < A_y, \qquad A_y \in \mathbb{R}, A_y > 0$$

A estos sistemas se les denomina **BIBO**, por las siglas en inglés ***Bounded Input Bounded Output.***

Condiciones de estabilidad: Dominio del tiempo y frecuencia

Si el sistema es **LTI**, entonces se cumple

$$
\begin{aligned}
|y(t)| = |x(t) * h(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau) h(t-\tau)| d\tau \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} A_x |h(t-\tau)| d\tau = A_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau
\end{aligned}
$$

El sistema es estable si y solo si su respuesta al impulso es **absolutamente integrable**.

Condiciones de estabilidad: Relación con Dirichlet

La estabilidad garantiza la primera condición de Dirichlet para la existencia de la transformada de Fourier de la respuesta al impulso de un sistema estable.

Límites de aplicación de la Transformada de Fourier

La transformada de Fourier no es adecuada entonces para manejar sistemas inestables.

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.