Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL-4703 Señales y Sistemas
Profesores: M.Sc. José Miguel Barboza Retana
Dr. Pablo Alvarado Moya
Lic. Daniel Kohkemper Granados
M.Sc. Javier Rivera Alvarado
II Semestre, 2019
Examen Parcial

Total de Puntos:	78
Puntos obtenidos:	
Porcentaje:	
Nota:	

Nombre: ______________________________ Carné: ______________

Advertencias:

- Resuelva el examen en forma individual, ordenada y clara.
- Cada ejercicio debe indicar el procedimiento o justificación completa de la solución.
- No se aceptarán reclamos de desarrollos con lápiz, borrones o corrector de lapicero.
- Si trabaja con lápiz, debe marcar su respuesta final con lapicero.
- El uso de lapicero rojo **no** está permitido.
- El uso del teléfono celular no es permitido. Este tipo de dispositivos debe permanecer **totalmente apagado** durante el examen.
- No se permite el uso de **ningún tipo** de calculadora electrónica.
- El instructivo de examen debe ser devuelto junto con su solución.
- El incumplimiento de los puntos anteriores equivale a una nota igual a cero en el ejercicio correspondiente o en el examen.

Pregunta 1	de 8
Pregunta 2	de 5
Pregunta 3	de 8
Pregunta 4	de 5
Pregunta 5	de 8
Pregunta 6	de 6
Problema 1	de 18
Problema 2	de 20

Preguntas

40 Pts

Debe justificar sus respuestas a las preguntas. Para ello basta un esbozo de la idea o concepto requerido, y si necesita más espacio puede utilizar el cuaderno de examen indicando claramente la pregunta correspondiente con su solución.

1. Considere el circuito eléctrico en corriente alterna de la Figura 1. 8 Pts

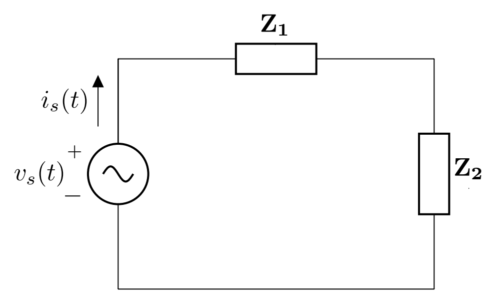


Figura 1: Diagrama del circuito eléctrico para la pregunta 1.

Considere que $\mathbf{Z_1}$ y $\mathbf{Z_2}$ son las dos impedancias que forman parte del circuito de la Figura 1. Además, se sabe lo siguiente:

- $v_s(t) = V_m \cos(\omega t)$ [V]
- $i_s(t) = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ [A]
- $\mathbf{Z_1} = \mathrm{R}\angle 0^o\ [\Omega]$
- $|\mathbf{Z_2}| = \mathrm{R}\ [\Omega]$

Considerando toda la información suministrada, determine gráficamente la impedancia equivalente $\mathbf{Z_{eq}}$ vista por la fuente de tensión senoidal. Especifique su respuesta en forma cartesiana.

2. Sea $f(z) = y^3 - 3x^2y + j(x^3 - 3xy^2 + 1)$ una función analítica para la variable compleja $z = x + jy$. Demuestre que $f'(z) = j3z^2$ utilizando las derivadas de las componentes real e imaginaria de dicha función. 5 Pts

3. La función de variable compleja $f(z)$ puede desarrollarse en una serie de Laurent dada por la siguiente expresión: 8 Pts

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1-j)^{n-2} \left(\frac{z-1-j}{2}\right)^n$$

Según la serie definida anteriormente para la función $f(z)$, determine la región de convergencia que presenta esta serie en el dominio $z \in \mathbb{C}$. *Sugerencia: Tenga presente que la función $f(z)$ es desconocida en este caso.*

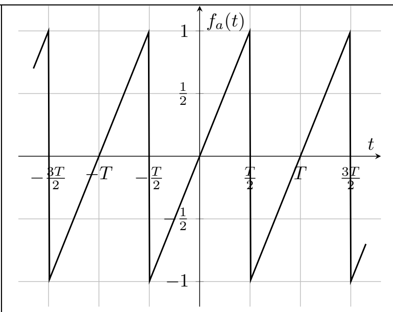
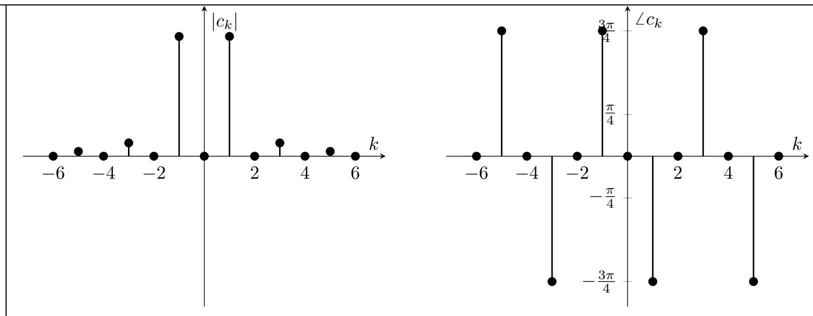
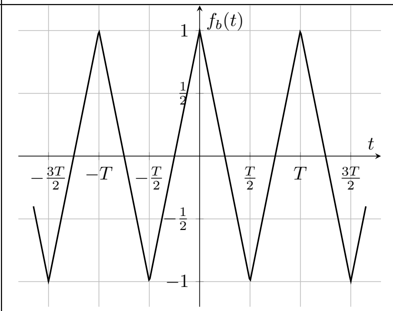
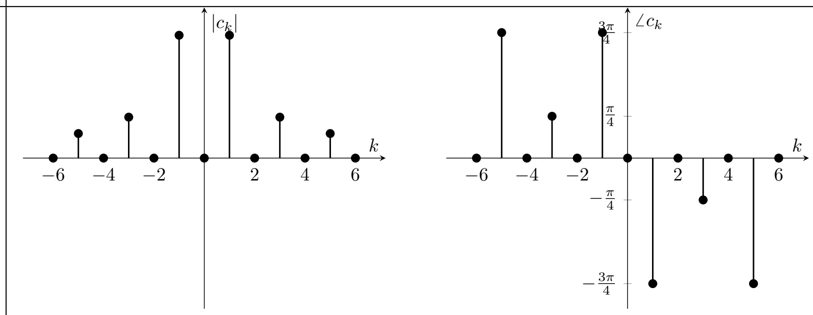
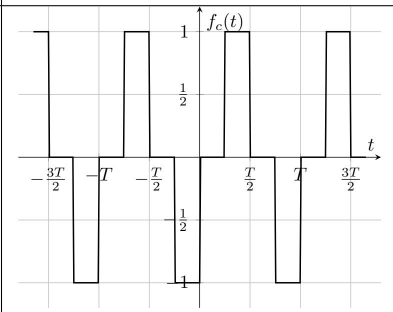
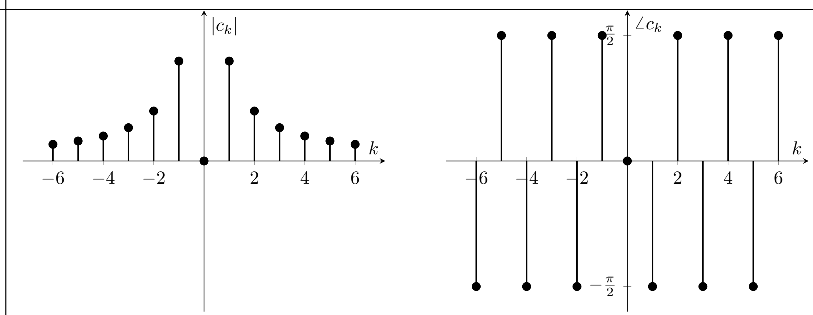
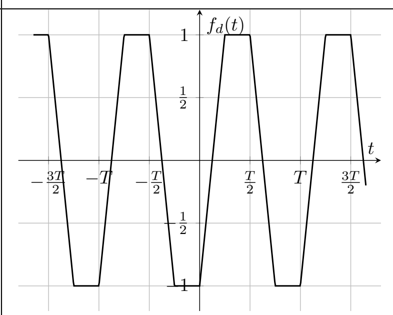
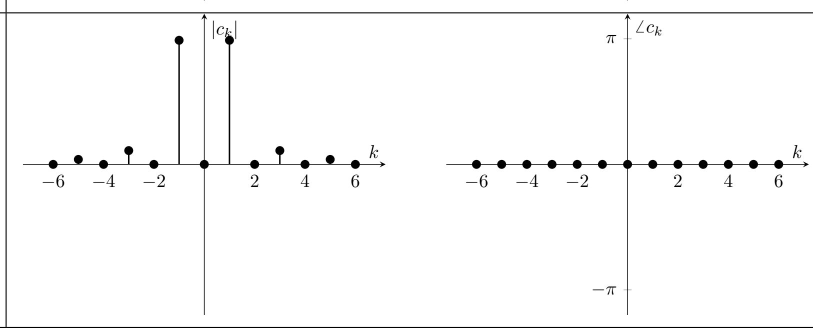
4. La columna izquierda contiene 5 regiones de convergencia para posibles desarrollos de serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2(z+1)}$. En la columna de la derecha se tienen 7 expansiones de serie de Laurent de la función $f(z)$. Asocie cada región de convergencia de la columna de la izquierda con su respectiva serie de Laurent en la columna de la derecha. 5 Pts

a	$\lvert z\rvert > 1$		$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2} - \dfrac{4}{(z-1)^3} + \dfrac{11}{(z-1)^4} - \dfrac{26}{(z-1)^5} + \cdots$
b	$1 < \lvert z-1\rvert < 2$		$f(z) = \dfrac{-2}{z+1} - 3 - 4(z+1) - 5(z+1)^2 - 6(z+1)^3 - \cdots$
c	$0 < \lvert z+1\rvert < 1$		$f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} - \dfrac{1}{(z+1)^4} - \dfrac{2}{(z+1)^5} - \dfrac{3}{(z+1)^6} - \dfrac{4}{(z+1)^7} - \cdots$
d	$2 < \lvert z-1\rvert$		$f(z) = \cdots - \dfrac{3}{(z-1)^2} + \dfrac{2}{z-1} - 1 + \dfrac{1}{2}(z-1) - \dfrac{1}{4}(z-1)^2 + \cdots$
e	$\lvert z-1\rvert < 1$		$f(z) = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{2}{z^3} + \dfrac{2}{z^4} - \dfrac{2}{z^5} + \dfrac{2}{z^6} - \dfrac{2}{z^7} + \dfrac{2}{z^8} - \cdots$
			$f(z) = \dfrac{1}{2}(z-1) - \dfrac{5}{4}(z-1)^2 + \dfrac{17}{8}(z-1)^3 - \dfrac{49}{16}(z-1)^4 + \cdots$
			$f(z) = \dfrac{-1}{z^2} + \dfrac{2}{z} - 2 + 2z - 2z^2 + 2z^3 - 2z^4 + \cdots$

5. Utilizando una integral de contorno apropiada en el plano complejo $z \in \mathbb{C}$, evalúe la siguiente integral de una función de variable real. Justifique adecuadamente su procedimiento. 8 Pts

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{(2x^2+2)^2} dx$$

6. Asocie las funciones periódicas en el tiempo al lado izquierdo de la siguiente figura con los espectros en magnitud y fase de los coeficientes de series de Fourier con base de exponenciales complejas armónicamente relacionadas ilustradas a la derecha. Justifique su asignación para cada caso. 6 Pts

A			
B			
C			
D			

Problemas

Problema 1 Mapeos $\boxed{\textbf{18 Pts}}$

Al cabito de lápiz mostrado en la figura 1.1 ya no se le puede hacer más punta y por eso fue desechado.

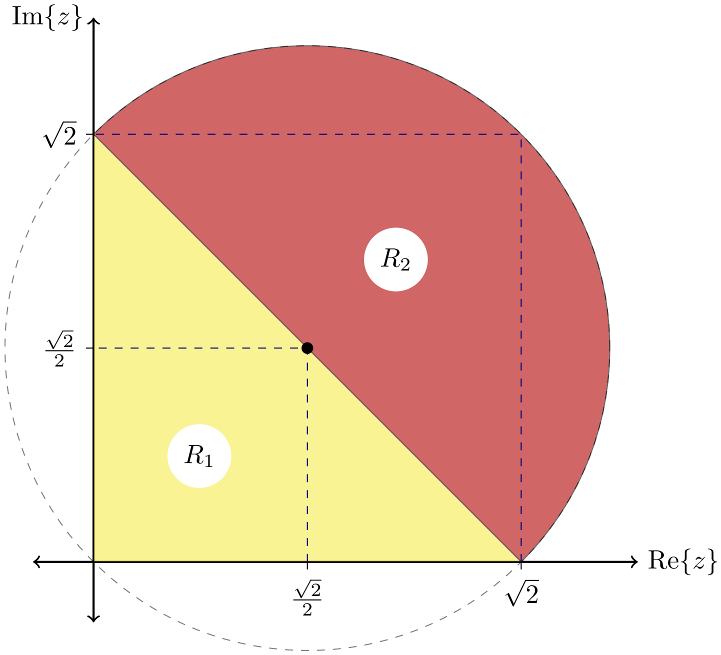


Figura 1.1: Cabito de lápiz

La planta de tratamiento de desechos le va a aplicar el siguiente mapeo:

$$f(z) = w = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}\right) z - j}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}\right) z} \tag{1.1}$$

1.1. Exprese analíticamente cada una de las regiones (R_1 y aparte R_2) que describen al cabito de lápiz mostrado en la figura 1.1. $\boxed{\text{4 Pts}}$

1.2. Descomponga el mapeo dado en mapeos elementales (rotaciones, traslaciones, escalados e inversiones) e indique la secuencia correspondiente. $\boxed{\text{7 Pts}}$

1.3. Utilizando el mapeo $f(z)$ dado, determine y bosqueje la transformación que va a sufrir el lápiz por la planta de tratamiento en el plano w. $\boxed{\text{7 Pts}}$

Problema 2 Ortogonalidad y series generalizadas de Fourier **20 Pts**

Considere la familia de funciones

$$u_k(t) = \cos\left(\frac{k\pi t}{\tau}\right) \qquad k \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

que tienen un dominio de definición restringido a $t \in [0; \tau]$.

Nota: *obsérvese que esto corresponde a una base distinta a los cosenos usados en las series de Fourier clásicas: en particular el contexto no asume funciones periódicas sino solo definidas en el rango $t \in [0; \tau]$, y el término equivalente a la frecuencia en el coseno difiere a lo usual en series de Fourier.*

2.1. Grafique las tres primeras funciones $u_0(t)$, $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en el dominio de definición. Demarque bien los cruces por cero y posición de máximos y mínimos locales cuando corresponda. 3 Pts

2.2. Verique si la familia de funciones $u_k(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (incluyendo a $k = 0$) conforma una base ortogonal en el dominio $t \in [0; \tau]$. 3 Pts

2.3. Calcule la norma de $u_k(t)$ para $k \in \mathbb{N}$. 5 Pts

Advertencia: *Preste cuidado a evitar divisiones por cero.*

2.4. Demuestre que los coeficientes obtenidos del análisis de la función 6 Pts

$$f(t) = \frac{t}{\tau}$$

para la base funcional indicada están dados por

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{2}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k - 1\right] & k \neq 0 \end{cases}$$

2.5. Ahora se debe ignorar el rango de definición en los subpuntos anteriores y se debe interpretar la función $g(t)$ sintetizada como

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(t)$$

en un rango de $t \in [-2\tau, 2\tau]$ con exactamente los mismos coeficientes c_k y funciones $u_k(t)$ dadas en los puntos anteriores. Grafique $g(t)$. Justifique. 3 Pts