

Análisis de sistemas de control por el método de respuesta en frecuencia

CONTROL AUTOMÁTICO

ESCUELA DE ELECTRÓNICA

II SEMESTRE 2020

ING. LUIS MIGUEL ESQUIVEL SANCHO

Introducción

- Se utilizan las gráficas de magnitud y de fase en función de la frecuencia (Bode)
- Este método es conveniente cuando tales gráficas son la única fuente disponible de información sobre el comportamiento del sistema.
- El diseño de sistemas de control utilizando las técnicas de Bode implica **determinar** y **redeterminar** los diagramas de magnitud y de fase hasta satisfacer las especificaciones del sistema.
- El método implica obtener valores a partir de gráficas, con los errores inherentes a este proceso; por lo que sus resultados son siempre aproximados y los requisitos laxos

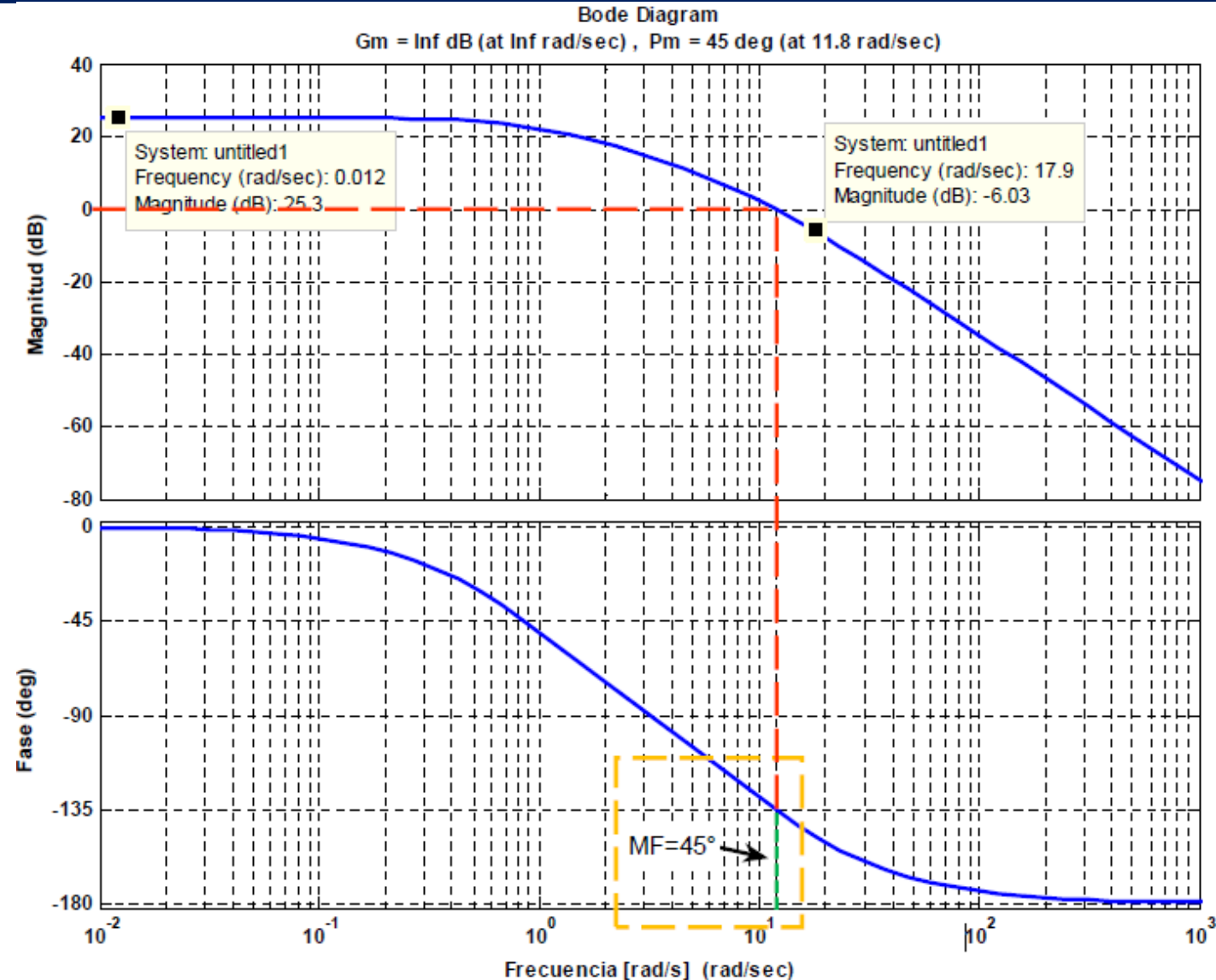
Conceptos Previos

Estabilidad:

Si la frecuencia de cruce de la ganancia es menor que 0 en la frecuencia de cruce de la fase (esto es $\omega_g < \omega_f$), entonces el sistema en lazo cerrado será estable. Esto equivale a que los márgenes de ganancia y de fase sean positivos.

$$M_g = 0 - L(j\omega) \Big|_{\angle L(j\omega) = -180^\circ}$$

$$M_f = 180^\circ + \angle L(j\omega) \Big|_{|L(j\omega)| = 0dB}$$



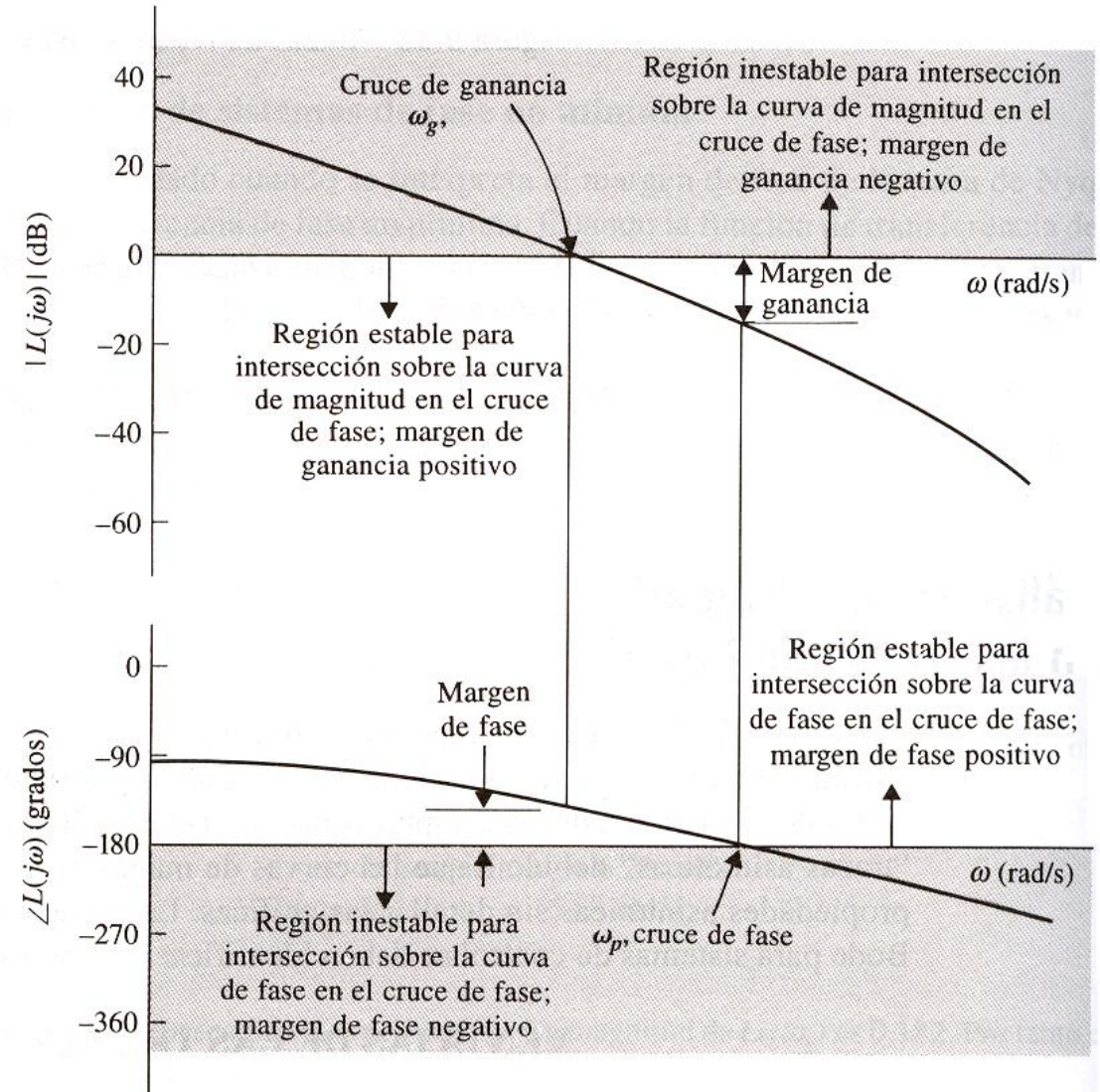
Conceptos Previos

Estabilidad:

Si la frecuencia de cruce de la ganancia es menor que 0 en la frecuencia de cruce de la fase (esto es $\omega_g < \omega_f$), entonces el sistema en lazo cerrado será estable. Esto equivale a que los márgenes de ganancia y de fase sean positivos.

$$M_g = 0 - |L(j\omega)|_{\angle L(j\omega) = -180^\circ}$$

$$M_f = 180^\circ + \angle L(j\omega)_{|L(j\omega)| = 0\text{dB}}$$



Conceptos Previos

Ancho de banda:

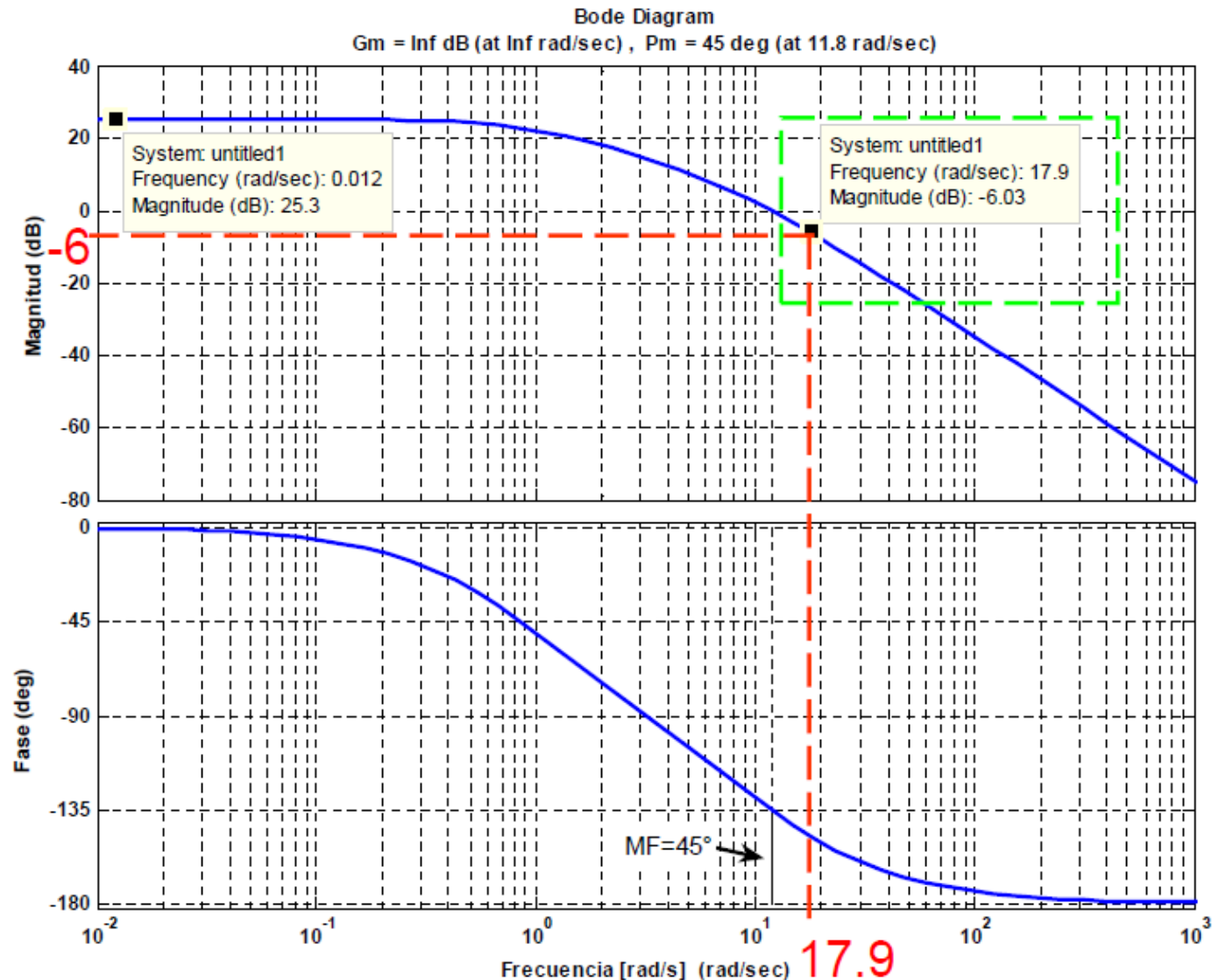
Se define como la frecuencia a la cual la respuesta de magnitud de **lazo cerrado** es igual a $-3dB$.

Si usamos una aproximación a un sistema de segundo orden, el ancho de banda de lazo cerrado es igual a la frecuencia en la cual la respuesta de magnitud de lazo abierto se encuentra entre -6 y $-7.5dB$, asumiendo que la fase de lazo abierto se encuentra entre -135° y -225°

Ancho de banda = 17.9 rad/s

Tiempo de subida:

$$t_r \geq \frac{1.8}{BW} = \frac{1.8}{17.9} = 0.1s$$



Conceptos Previos

Error de estado estacionario:

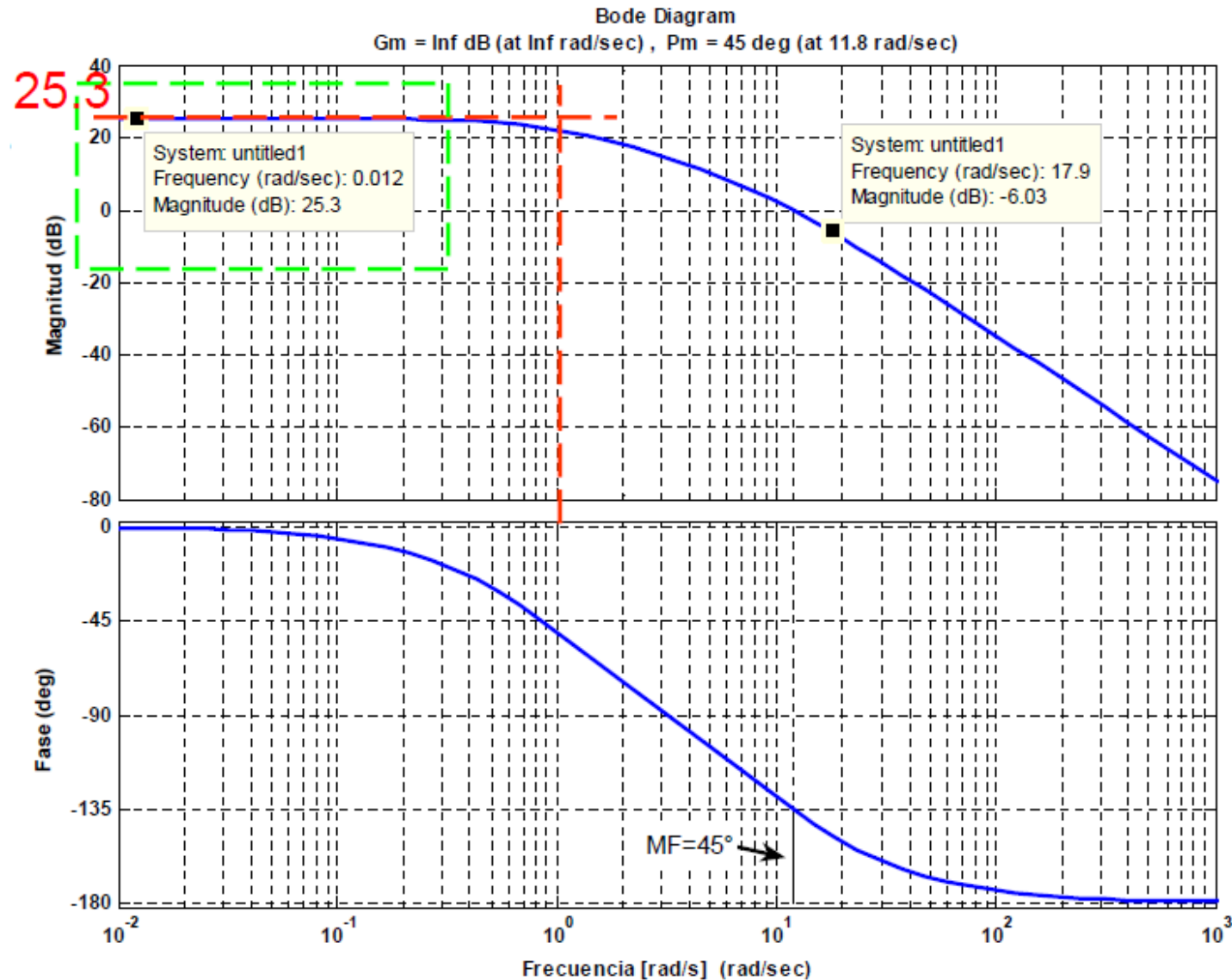
El valor en dB de los coeficientes de error (K_p , K_v y K_a , dependiendo del tipo de sistema) se obtienen leyendo la intersección de la recta en $\omega = 1$ con asíntota de la curva de magnitud a $\omega = 0$.

$$K_p[dB] = 25.3 \text{ dB}$$

$$K_p = 18.41$$

$$e_{ss} = 1/(1 + K_p)$$

$$e_{ss} = 1/(1 + 18.41) = 5.15\%$$



Conceptos Previos

Tiempo de subida:

Es el tiempo entre el 10% y el 90% del valor final de la respuesta

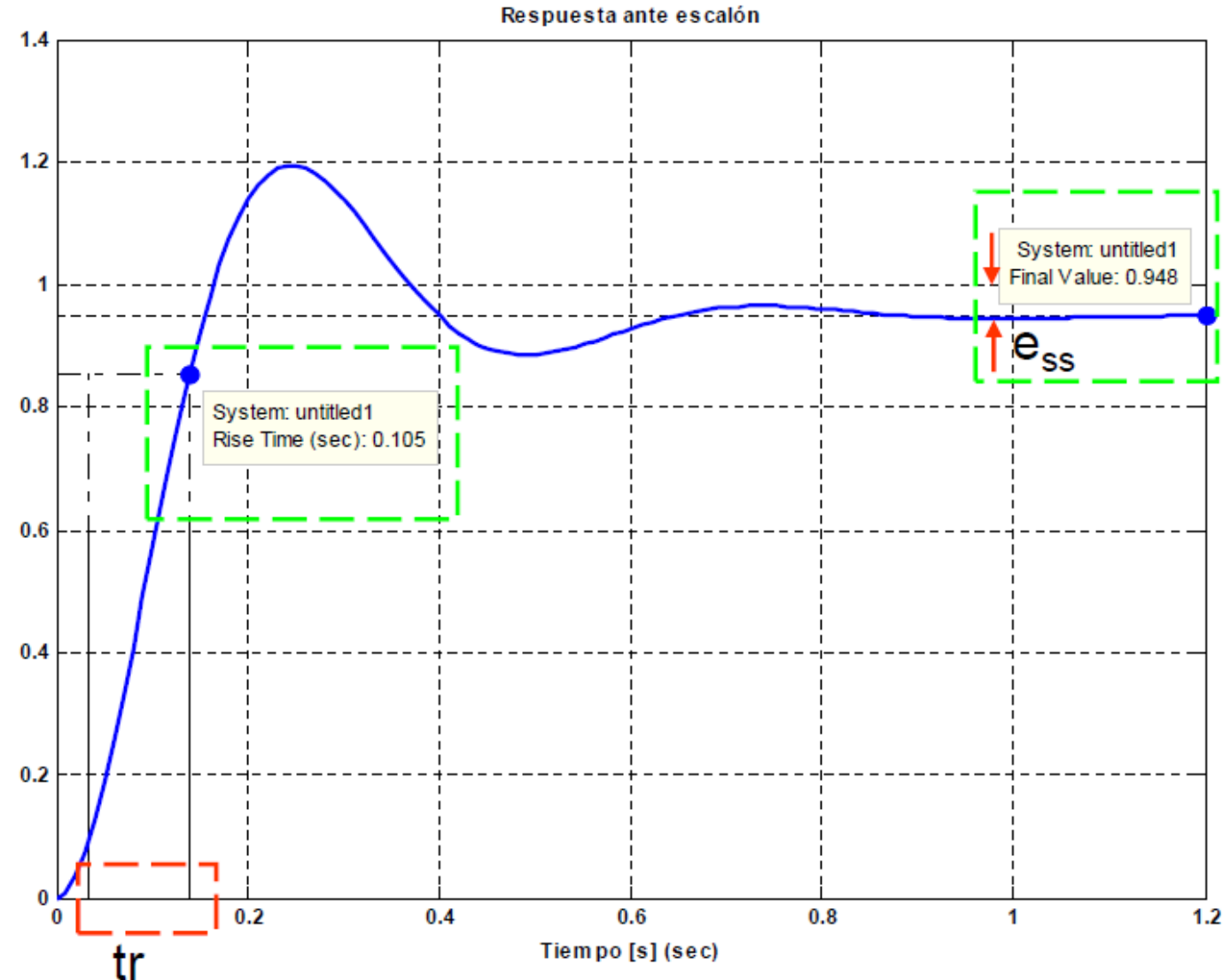
Error de estado estacionario:

$$t_r \geq \frac{1.8}{BW}$$

$$t_r \geq \frac{1.8}{17.9} = 0.1s$$

$$e_{ss} = 1/(1 + Kp)$$

$$e_{ss} = 1/(1 + 18.41) = 5.15\%$$



Relación entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia

- Convertimos las especificaciones en el dominio del tiempo a especificaciones de ζ y ω_n de un sistema prototipo de orden dos.
- La especificación de amortiguamiento relativo ζ , se convierte a margen de fase.
- La especificación de frecuencia natural ω_n , se convierte a ancho de banda.
- Dependiendo del tipo de sistema, la especificación de error de estado estacionario se convierte a un valor de coeficiente de error (K_p , K_v o K_a) adecuado.

Resumen de fórmulas

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r}$$

$$t_{S2\%} \geq \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

$$\zeta \cong \frac{MF}{100}, MF \leq 60^\circ \quad \omega_n \cong BW$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ln M}{\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\ln M}{\pi}\right)^2}}$$

Tipo de sistema	0	1	2
Coeficiente	K_p	K_v	K_a
e_{ss}	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$

Respuesta en frecuencia

- En los métodos de respuesta en frecuencia, la frecuencia de la señal de entrada se varía en un cierto rango, para estudiar la respuesta resultante.
- Una ventaja del método de la respuesta en frecuencia es que se pueden utilizar los datos que se obtienen de las medidas sobre el sistema físico sin deducir su modelo matemático

Diagramas de Bode

La ventaja principal de utilizar un diagrama logarítmico es la facilidad relativa de dibujar las curvas de la respuesta en frecuencia. Los factores básicos que suele presentar una función de transferencia arbitraria $G(j\omega)H(j\omega)$ son:

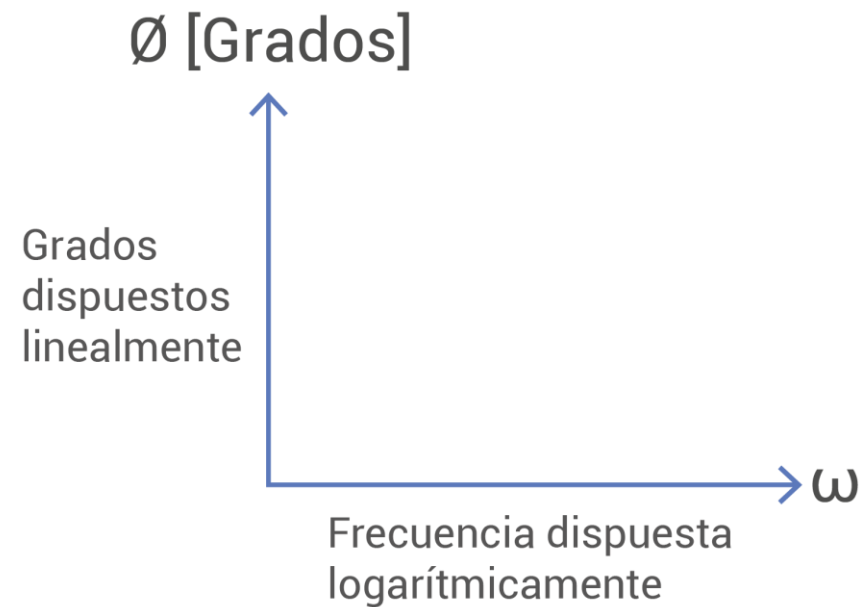
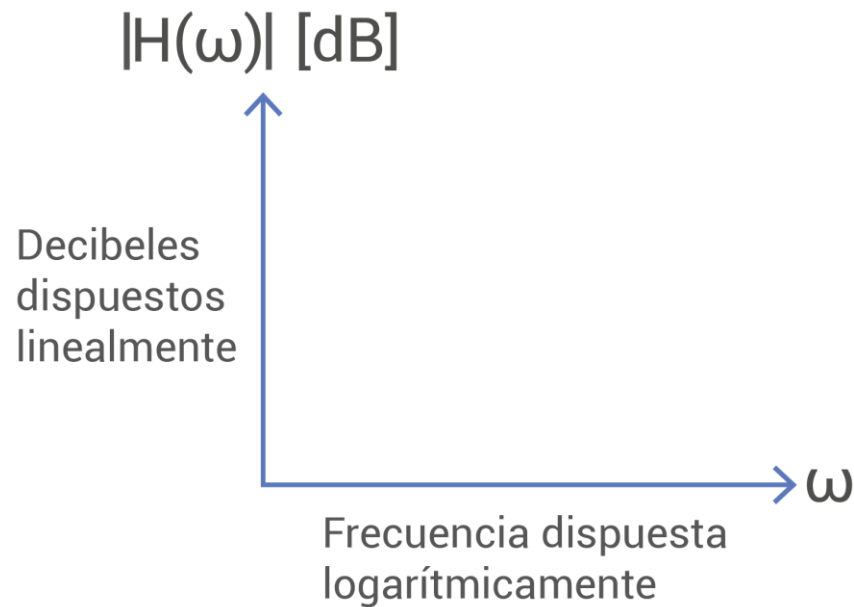
1. La ganancia K
2. Los factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\mp 1}$
3. Los factores de primer orden $(1 + j\omega)^{\mp 1}$
4. Los factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$

Diagramas de Bode

- Son generalmente utilizados para representar de manera gráfica la respuesta en frecuencia de magnitud y fase para una función de transferencia.
- Por lo general dicha gráfica se realiza en un papel **semi-logarítmico**, donde el **eje horizontal** posee una escala logarítmica para eje de las frecuencias y el **eje vertical** con una escala lineal, representa la **magnitud y fase**

Diagramas de Bode

El empleo de los **diagramas de Bode**, resulta conveniente debido a que se puede cubrir de manera gráfica un mayor rango de frecuencias dando una mejor visión global de lo que sucede, a continuación se muestra la estructura de un diagrama de Bode.



Diagramas de Bode

Entonces a partir de una función de transferencia se obtendrán varias representaciones:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm 1} (1 + j\omega/z_1)[1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]\cdots}{(1 + j\omega/p_1)[1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]\cdots}$$

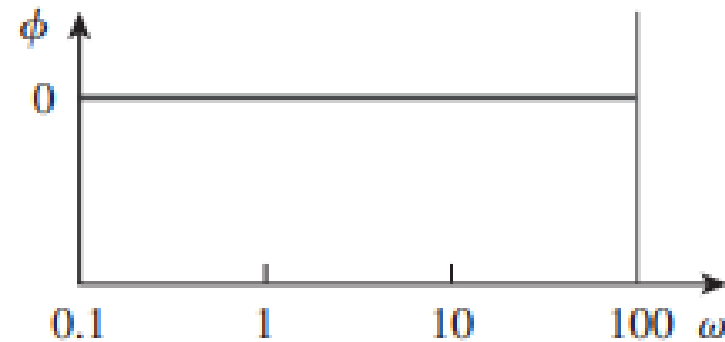
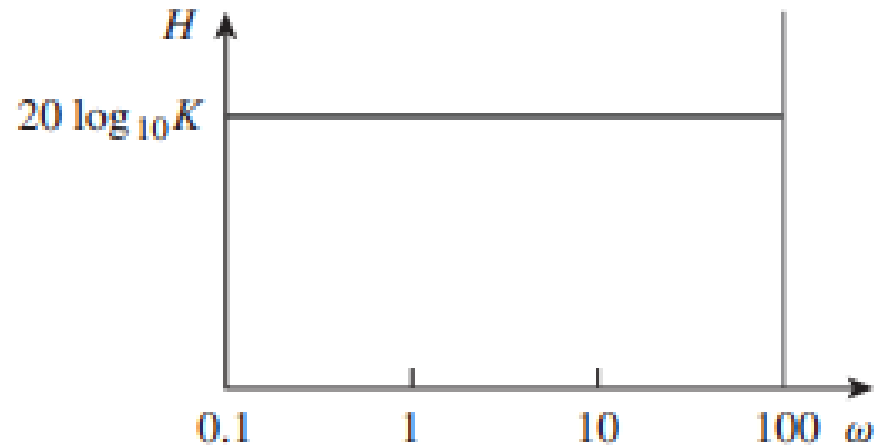
Diagramas de Bode

1. La ganancia K : Término constante

Para una ganancia K , la magnitud será calculada como $20 \log(K)$, y la fase será de 0° , de modo que:



- Si K es negativo, su magnitud será $20 \log|K|$, pero su **fase** será $\pm 180^\circ$



Diagramas de Bode

La ganancia K :

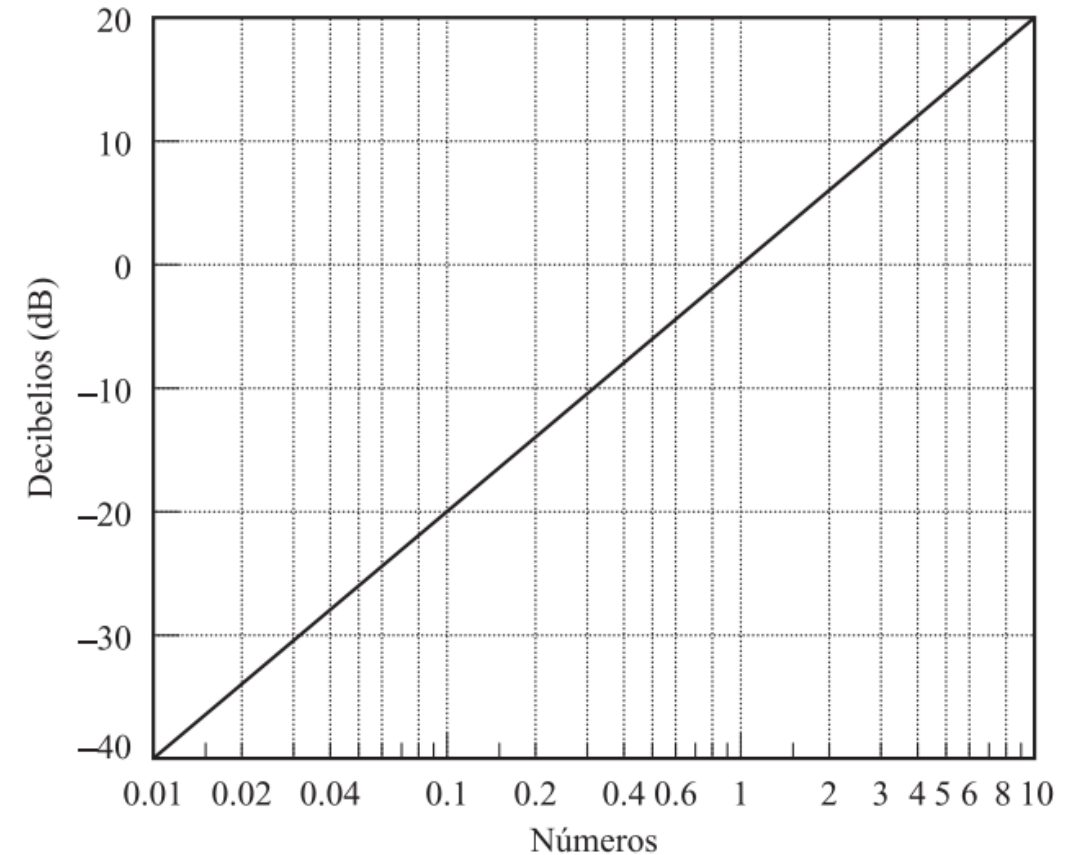
Un número mayor que la unidad tiene un valor positivo en decibels, mientras que un número menor que la unidad tiene un valor negativo.

El ángulo de fase de la ganancia K es cero. El efecto de variar la ganancia K en la función de transferencia es que sube o baja la curva de magnitud logarítmica de la función de transferencia en la cantidad constante correspondiente, pero no afecta a la curva de fase

$$20 \log (K \times 10) = 20 \log K + 20$$

$$20 \log K = -20 \log \frac{1}{K}$$

$$20 \log (K \times 10^n) = 20 \log K + 20n$$



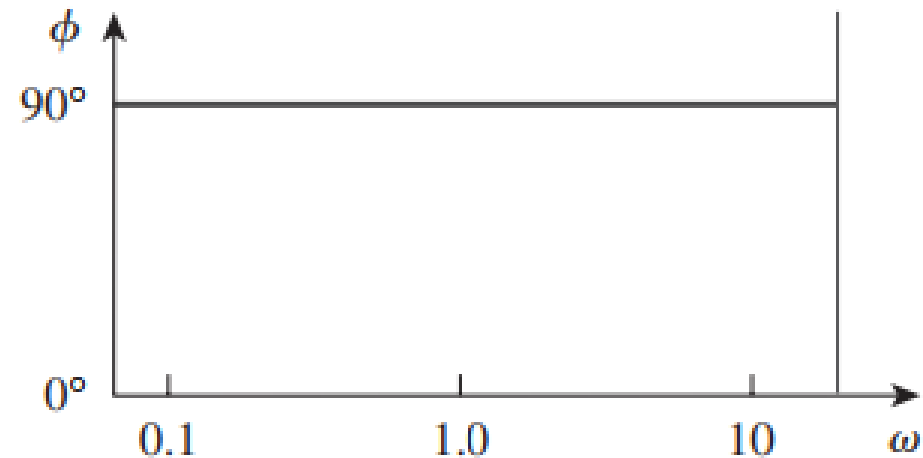
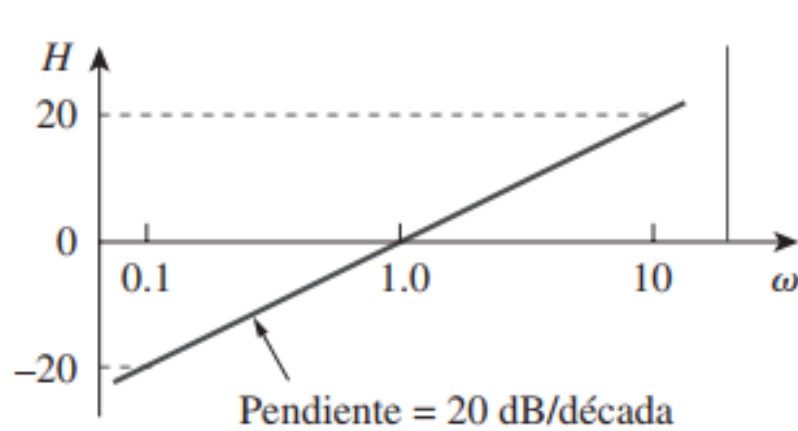
Diagramas de Bode

2. Los factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\mp 1}$: Polo y cero en el origen

Para un cero en el origen $j\omega$, considere lo siguiente:



- La **magnitud** es de $20 \log(\omega)$
- La **fase** corresponde a 90° ,
- Se advierte que cada pendiente es de 20 dB/década ,
- Si $(j\omega)^N$, su pendiente será de $20N \text{ dB/década}$ y su fase será de $90N^\circ$



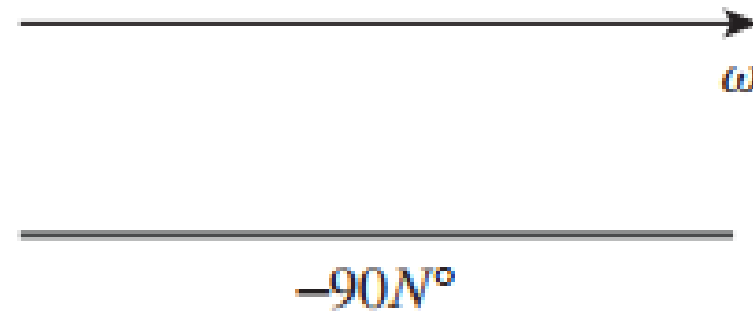
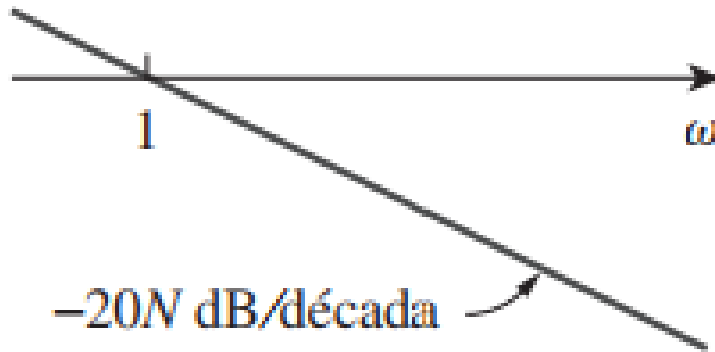
Diagramas de Bode

2. Los factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\mp 1}$: Polo y cero en el origen

Para un polo en el origen $(j\omega)^{-1}$, considere lo siguiente:



- La **magnitud** es de $20 \log(\omega)$
- La **fase** corresponde a -90° ,
- Se advierte que cada pendiente es de -20 dB/década ,
- Si $(j\omega)^{-N}$, su pendiente será de $-20N \text{ dB/década}$ y su fase será de $-90N^\circ$



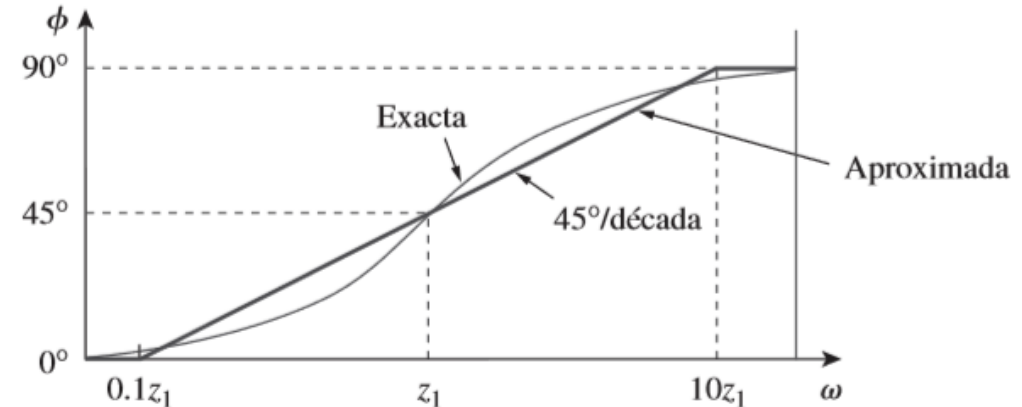
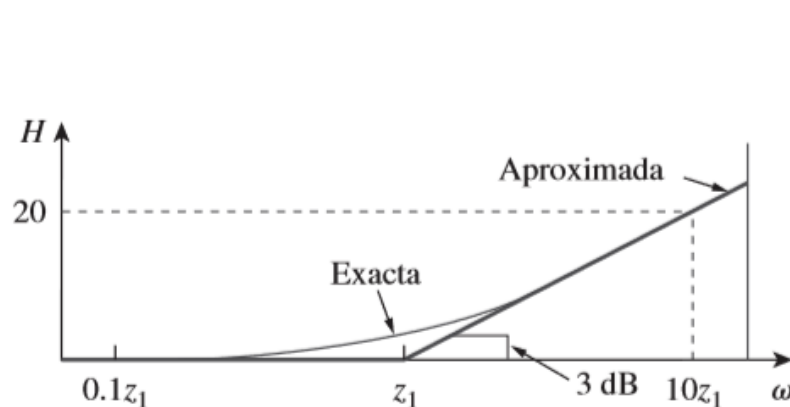
Diagramas de Bode

3. Los factores de primer orden $(1 + j\omega)^{\mp 1}$: Polo y cero simple

Para un cero simple en $(1 + \frac{j\omega}{z_1})$, considere lo siguiente:



- La **magnitud** es de $20 \log \left| \left(1 + \frac{j\omega}{z_1} \right) \right|$
- La **fase** corresponde a $\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{z_1} \right)$,
- Se advierte que cada pendiente es de 20 dB/década ,
- Si $\left(1 + \frac{j\omega}{z_1} \right)^N$, su pendiente será de $20N \text{ dB/década}$ y su fase será de $90N^\circ$



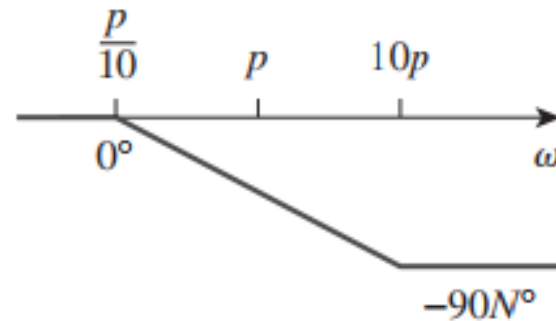
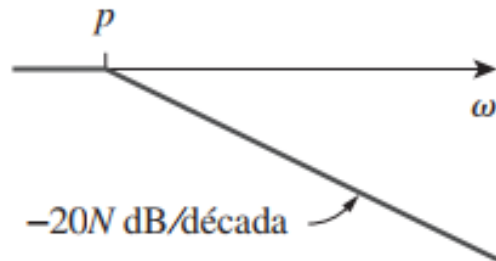
Diagramas de Bode

3. Los factores de primer orden $(1 + j\omega)^{\mp 1}$: Polo y cero simple

Para un polo simple en $\left(1 + \frac{j\omega}{p_1}\right)^{-1}$, considere lo siguiente:



- La **magnitud** es de $20 \log \left| \left(1 + \frac{j\omega}{p_1}\right)^{-1} \right|$
- La **fase** corresponde a $-\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{p_1} \right)$,
- Se advierte que cada pendiente es de -20 dB/década ,
- Si $\left(1 + \frac{j\omega}{z_1}\right)^{-N}$, su pendiente será de $-20N \text{ dB/década}$ y su fase será de $-90N^\circ$



Diagramas de Bode

$$(1 + j\omega T)^{\mp 1}$$

La magnitud Logarítmica es:

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

Para bajas Frecuencias:

$$\omega \ll 1/T$$

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Para Altas Frecuencias:

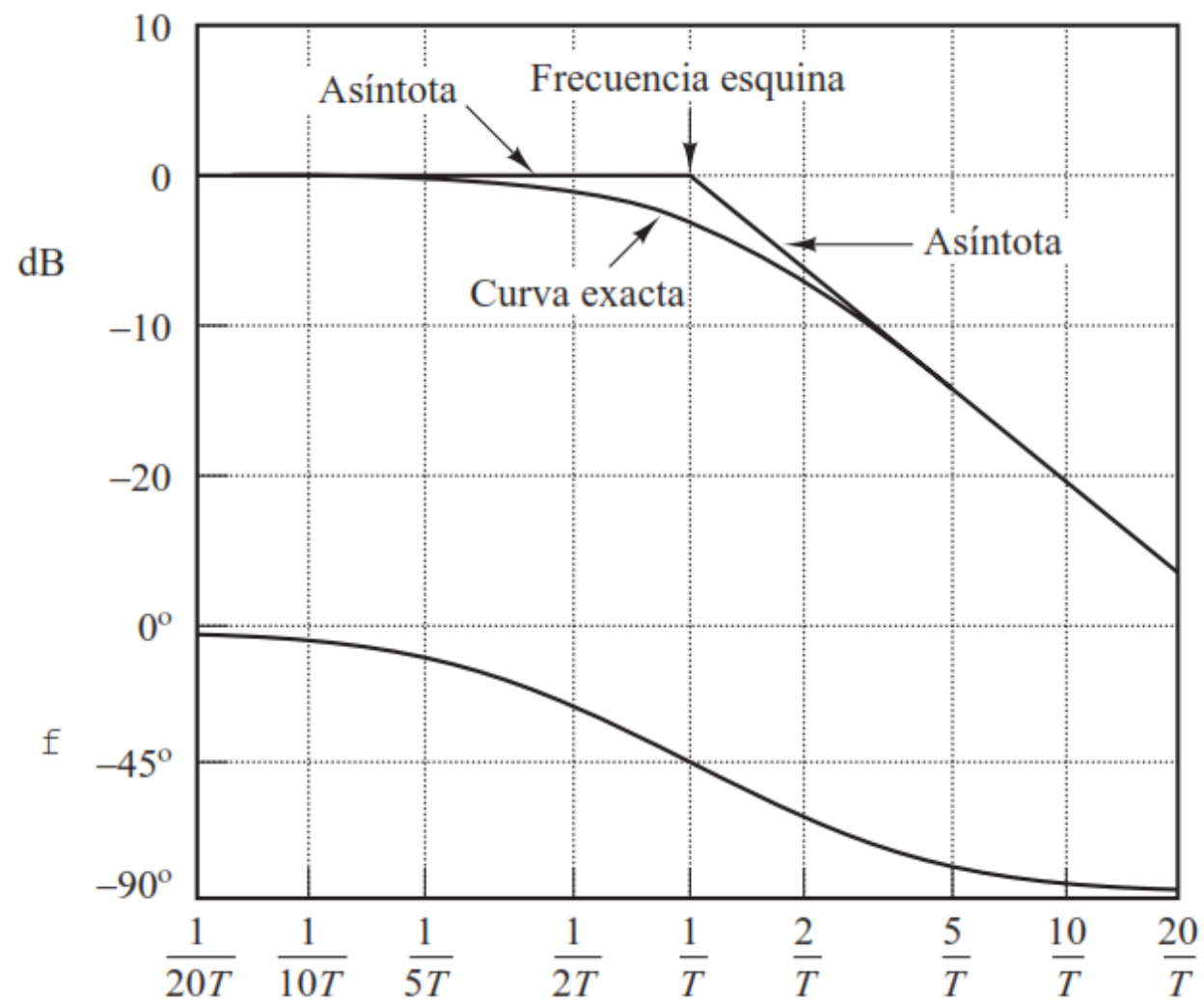
$$\omega \gg 1/T$$

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteq -20 \log \omega T \text{ dB}$$

NOTA. Estas son aproximaciones

Frecuencia esquina: $\omega = 1/T$

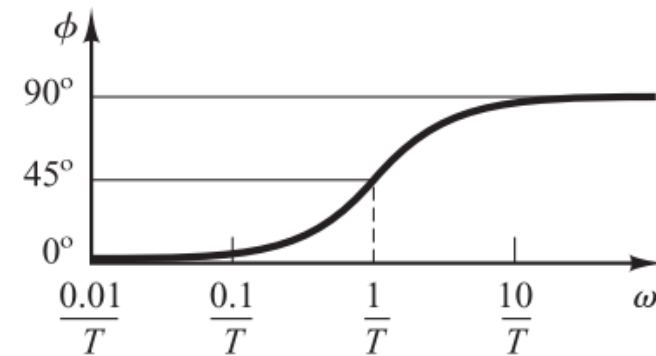
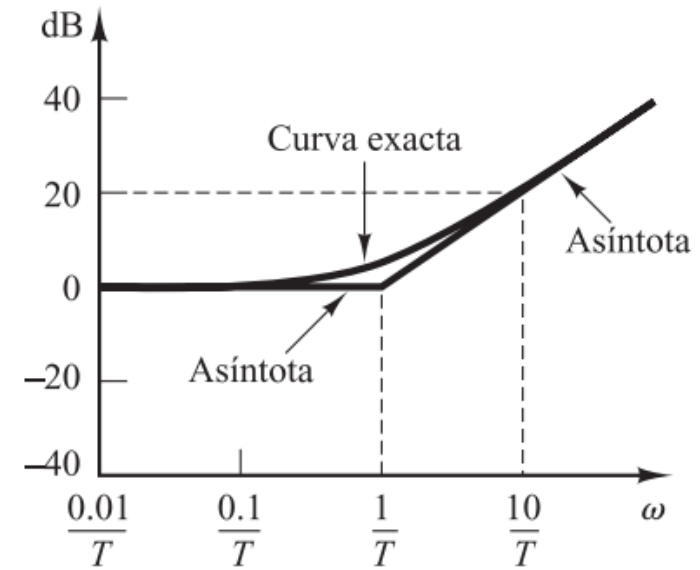
Diagramas de Bode



Diagramas de Bode

$$20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$\angle 1 + j\omega T = \tan^{-1} \omega T = - \angle \frac{1}{1 + j\omega T}$$



Diagramas de Bode

4. Los factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$: Polo y cero cuadrático

Para un polo cuadrático en $\left(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{-1}$, considere lo siguiente:



- La **magnitud** es de:

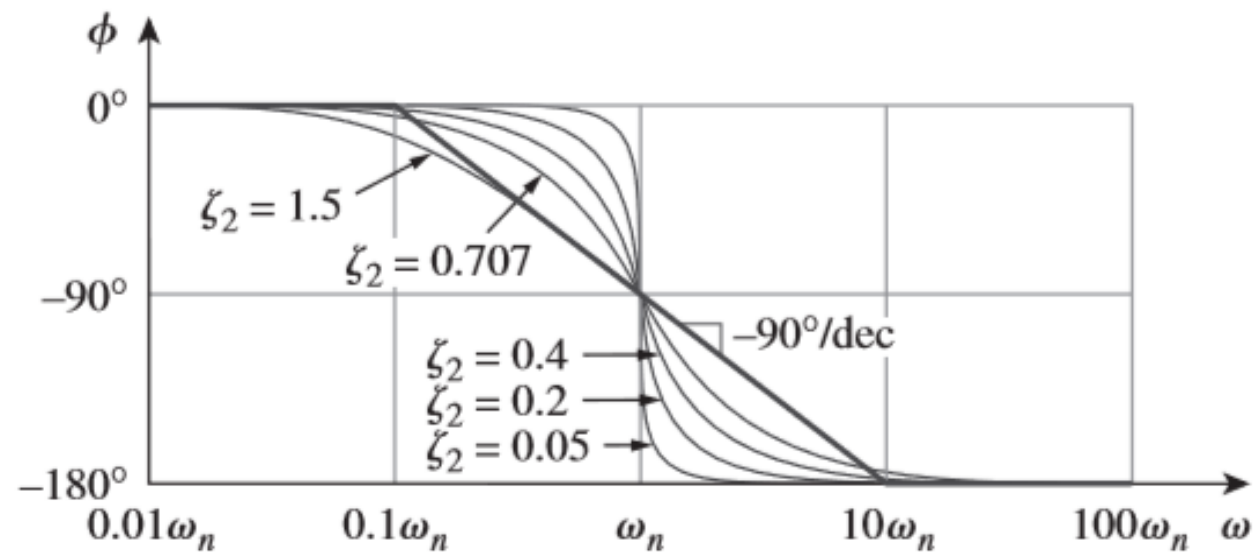
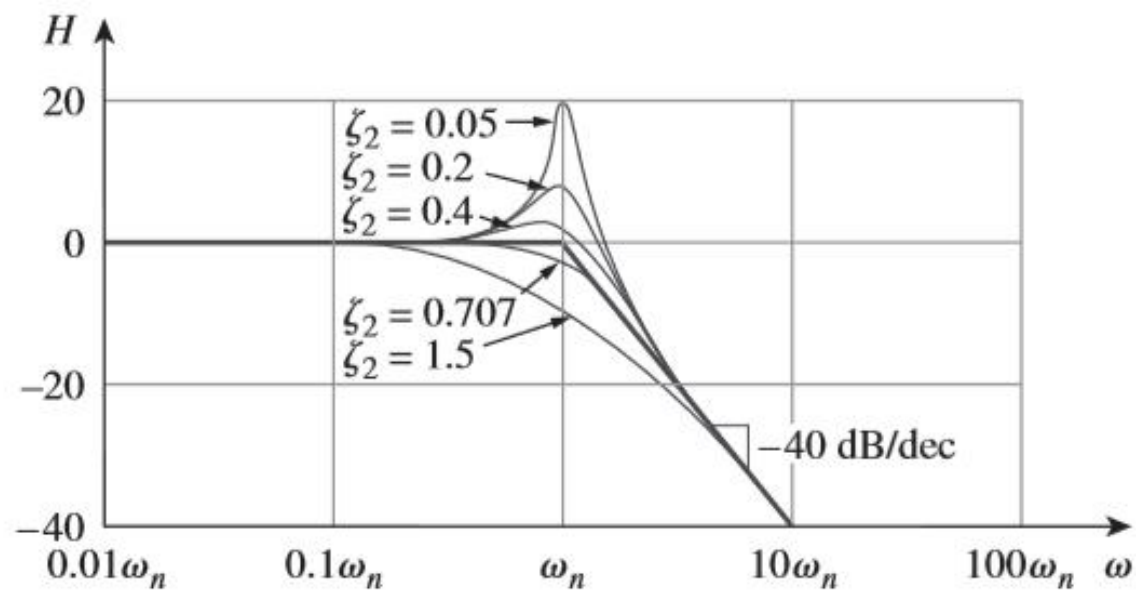
$$H_{dB} = -20 \log \left| \left(1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \right|$$

- La **fase** corresponde a:

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \right) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ -90^\circ, & \omega = \omega_n \\ -180^\circ, & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

- Se advierte que cada pendiente es de -40 dB/década

Diagramas de Bode



Diagramas de Bode

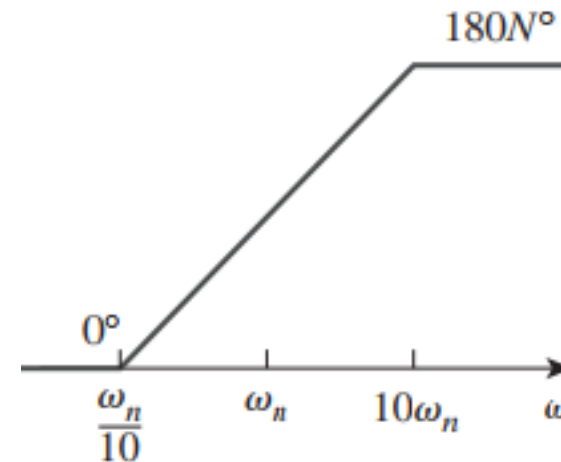
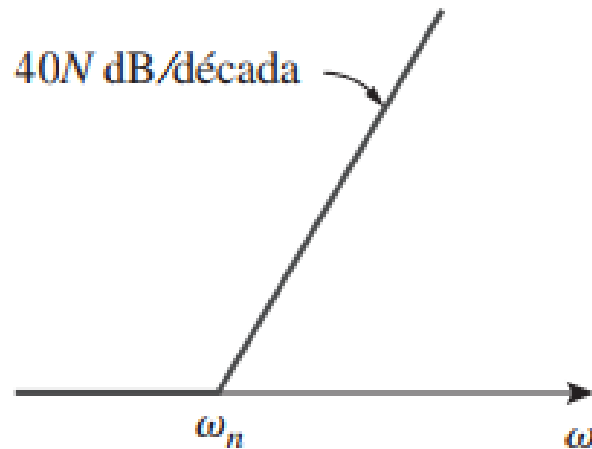
4. Los factores cuadráticos $\left[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2\right]^{\mp 1}$: Polo y cero cuadrático

Para un cero cuadrático el proceso de cálculo es similar al del polo cuadrático,



considerando los siguientes diagramas:

$$\left[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$



Factores cuadráticos

Los sistemas de control suelen tener factores cuadráticos de la forma: $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^\mp 1$

La curva asintótica de respuesta en frecuencia se obtiene como:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Donde:

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\omega \ll \omega_n$$

$$-20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_n$$

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

Factores cuadráticos

La ecuación para la asíntota de alta frecuencia es una recta con pendiente de -40 dB/década , debido a que:

$$-40 \log \frac{10\omega}{\omega_n} = -40 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

La asíntota de alta frecuencia corta a la de baja frecuencia en $\omega = \omega_n$ debido a que en esta frecuencia:

$$-40 \log \frac{\omega_n}{\omega_n} = -40 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Las dos asíntotas recién obtenidas son independientes del valor de ζ

Factores cuadráticos

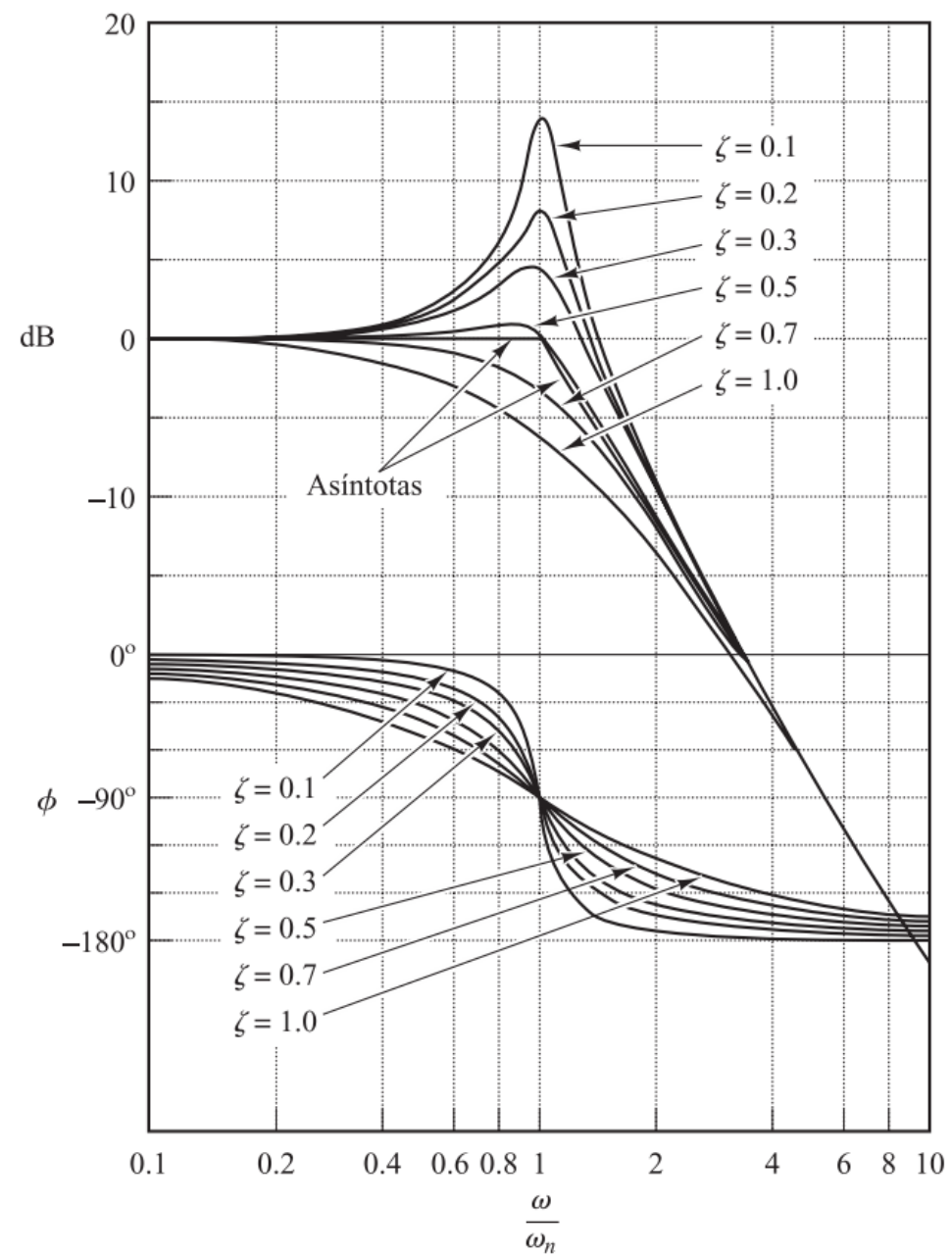
El ángulo de fase del factor cuadrático:

$$\phi = \angle \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

El ángulo de fase es una función de ω y de ζ . En $\omega = 0$, el ángulo de fase es igual a 0. En la frecuencia esquina $\omega = \omega_n$, el ángulo de fase es -90° sin considerar ζ , debido a que:

En $\omega = \infty$ el ángulo de fase se convierte en -180°

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta}{0} \right) = -\tan^{-1} \infty = -90^\circ$$

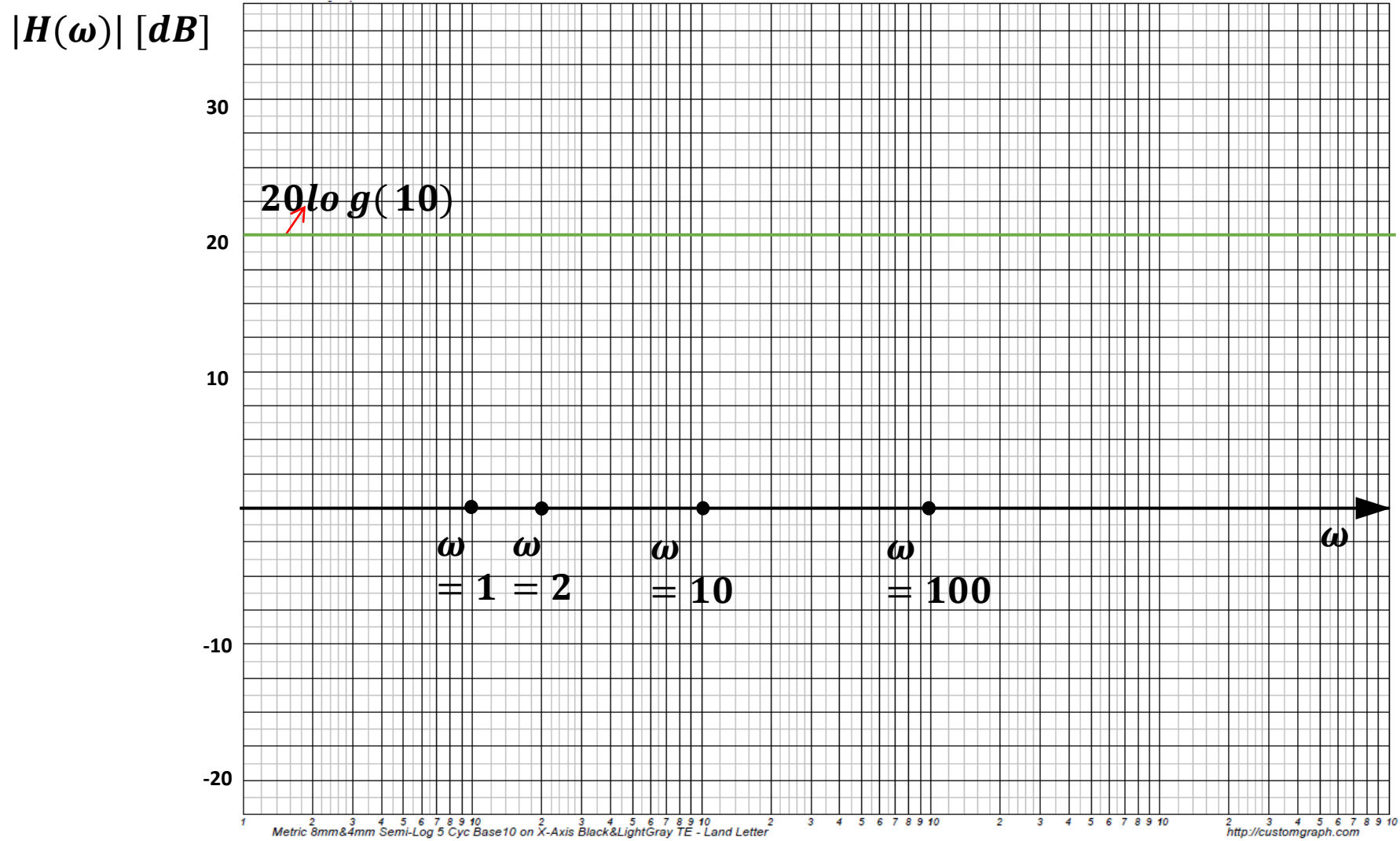


Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

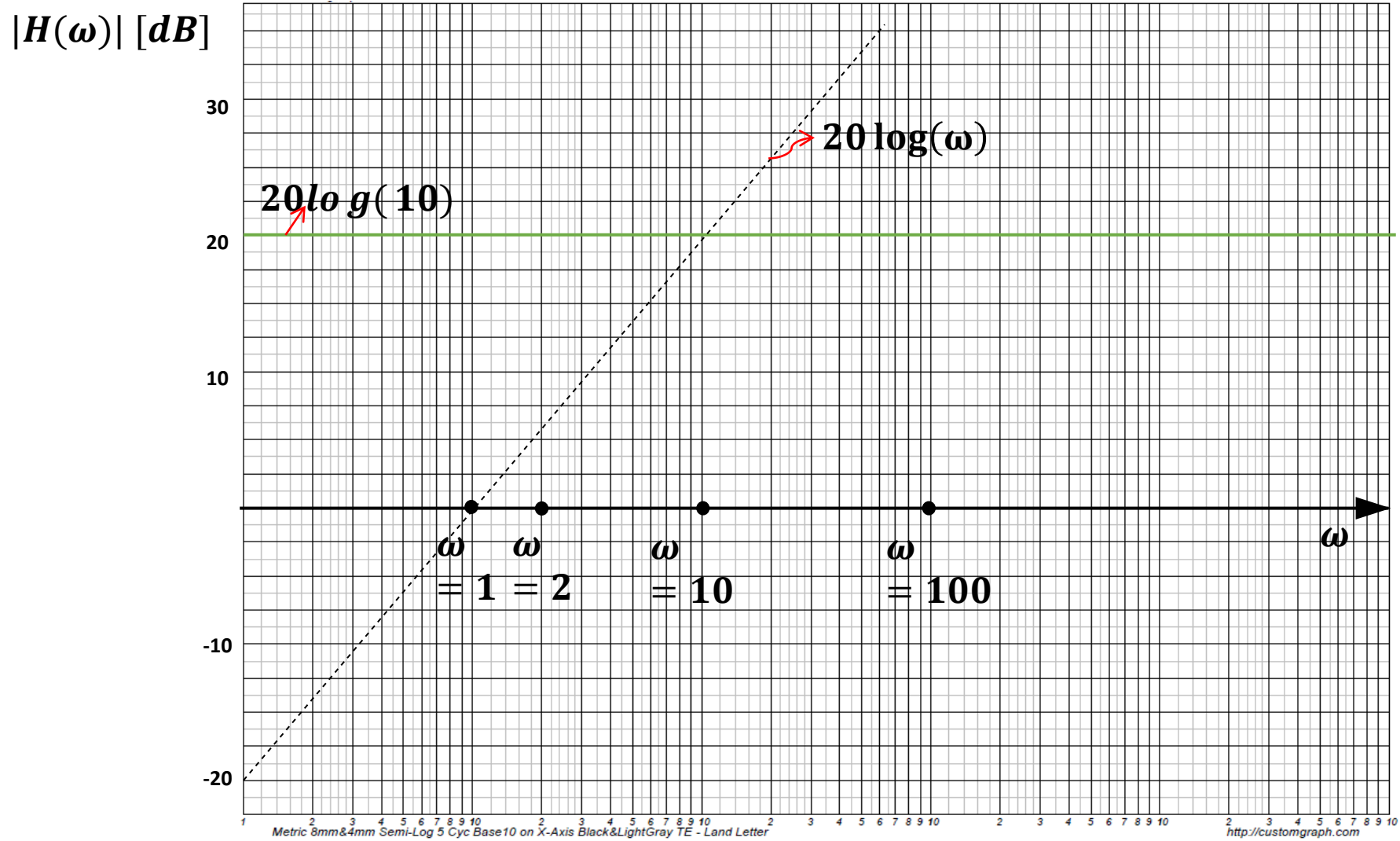
Elaborar el diagrama de Bode asintótico de la siguiente función de transferencia.

$$H(\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$

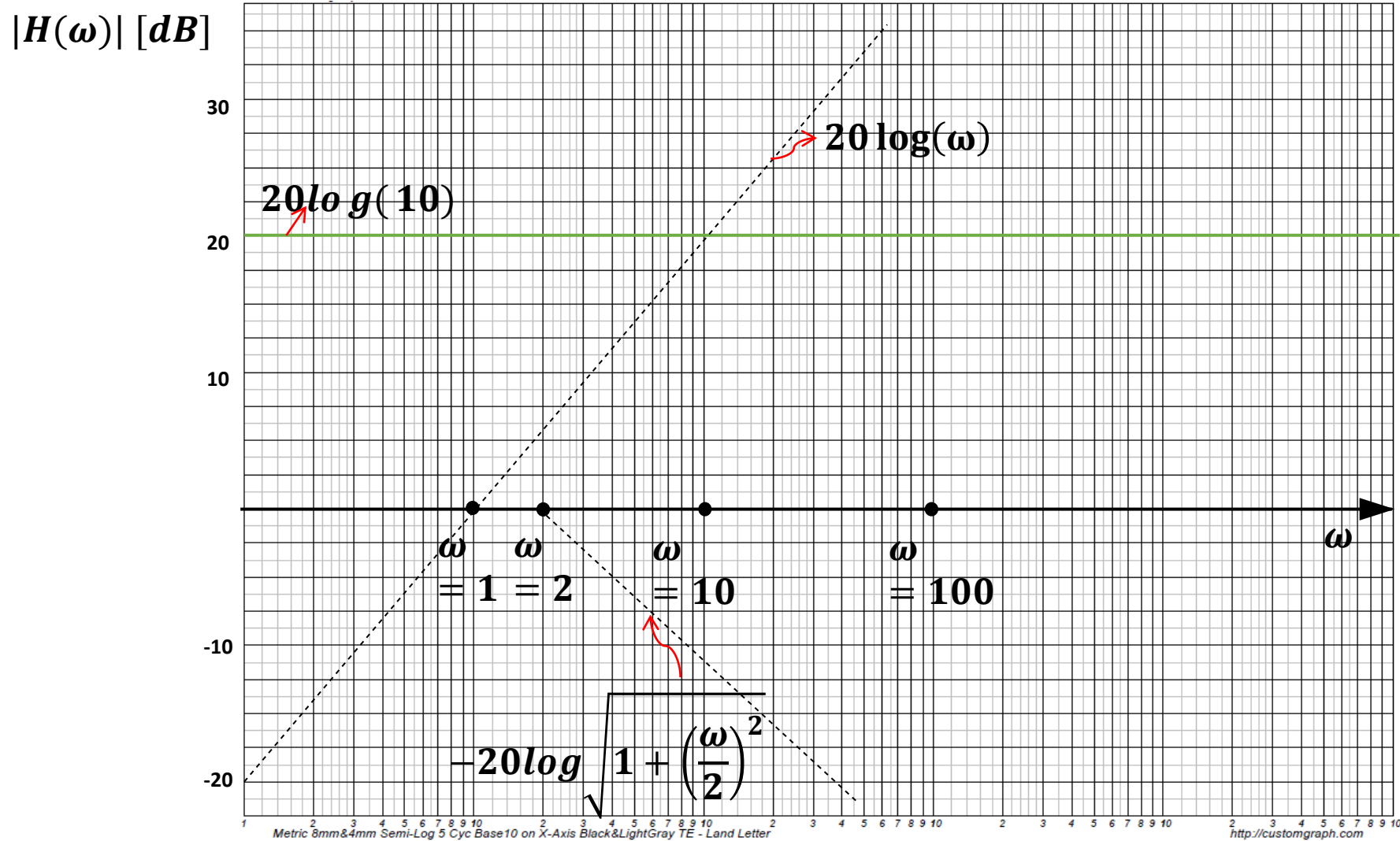
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode



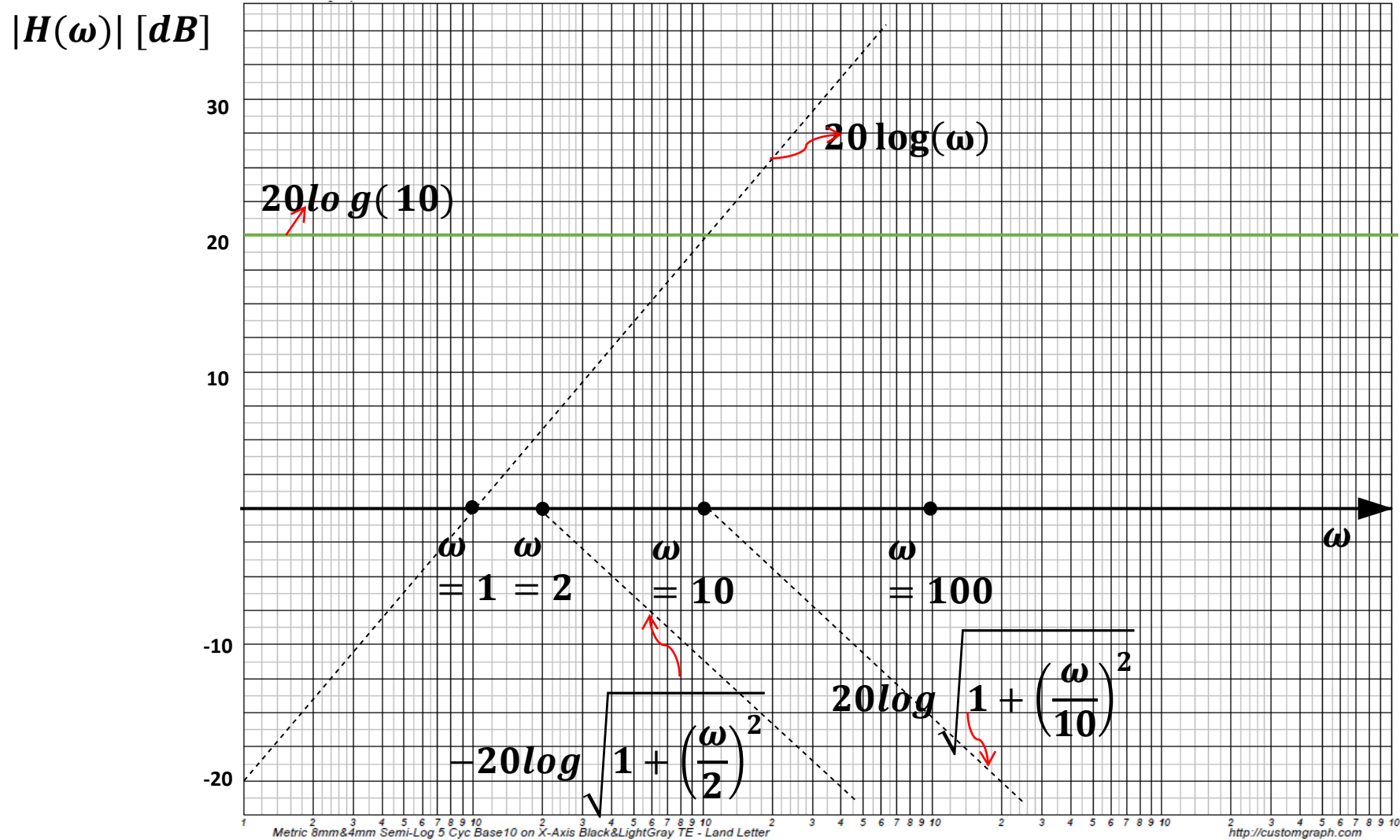
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode



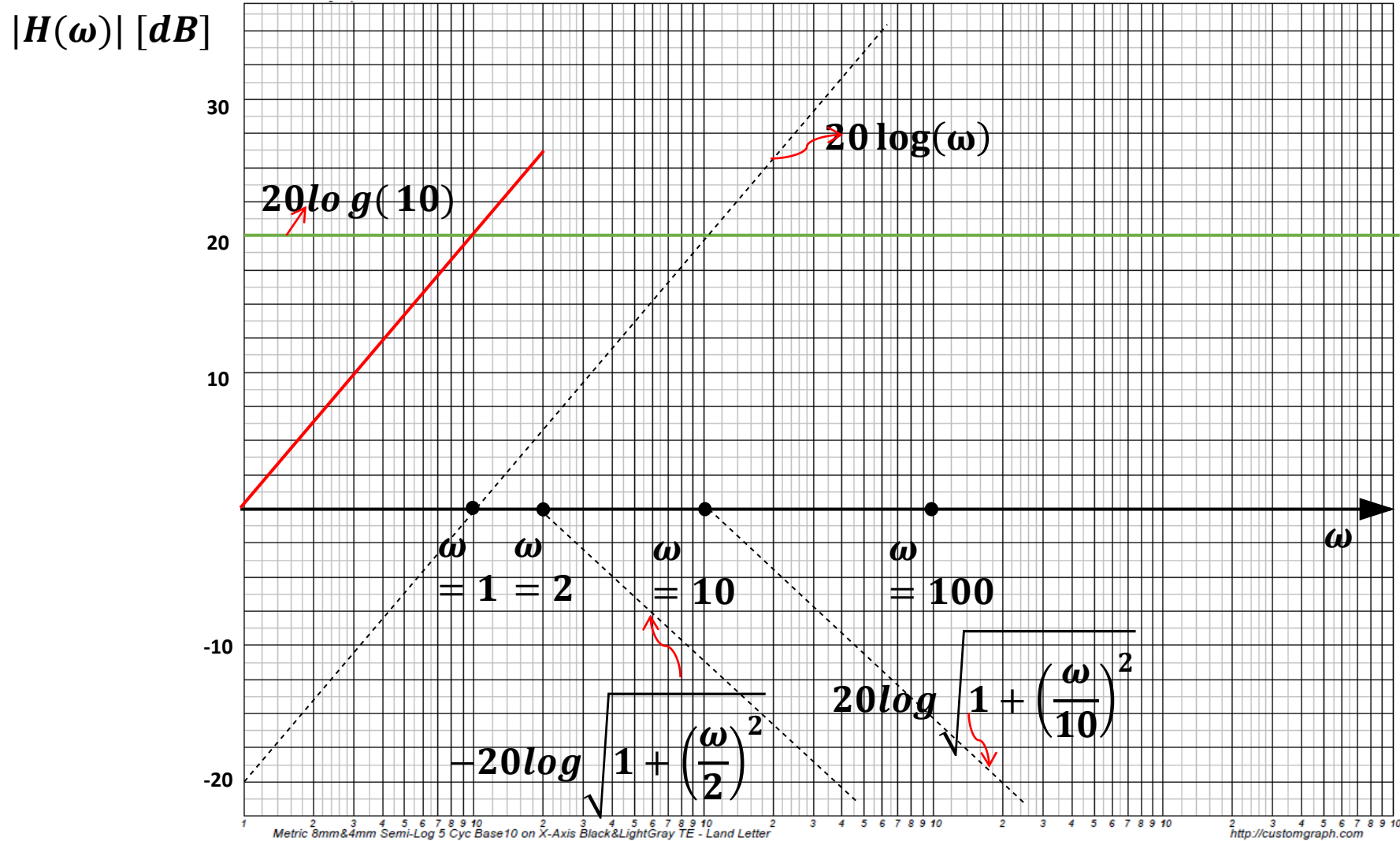
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode



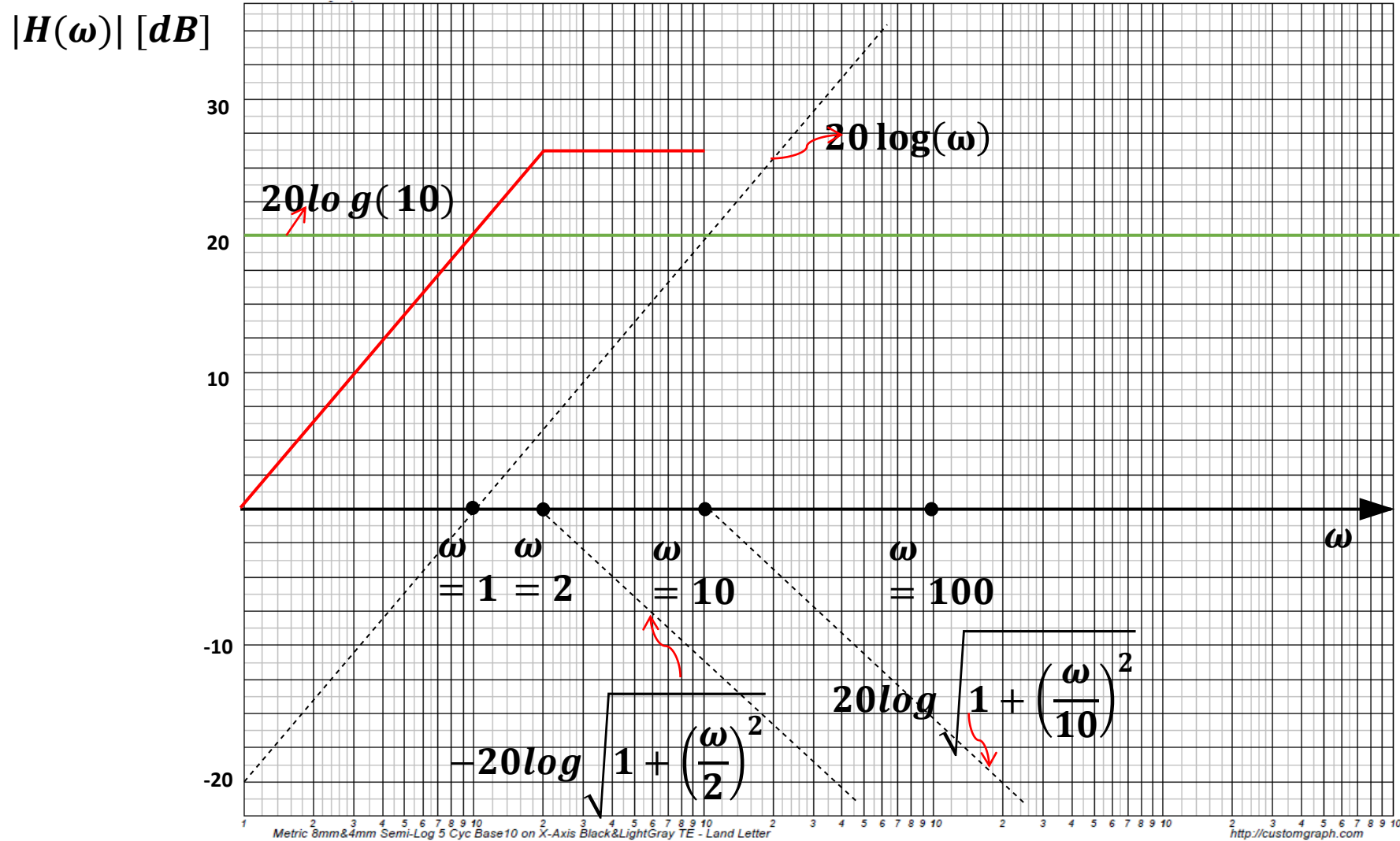
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode



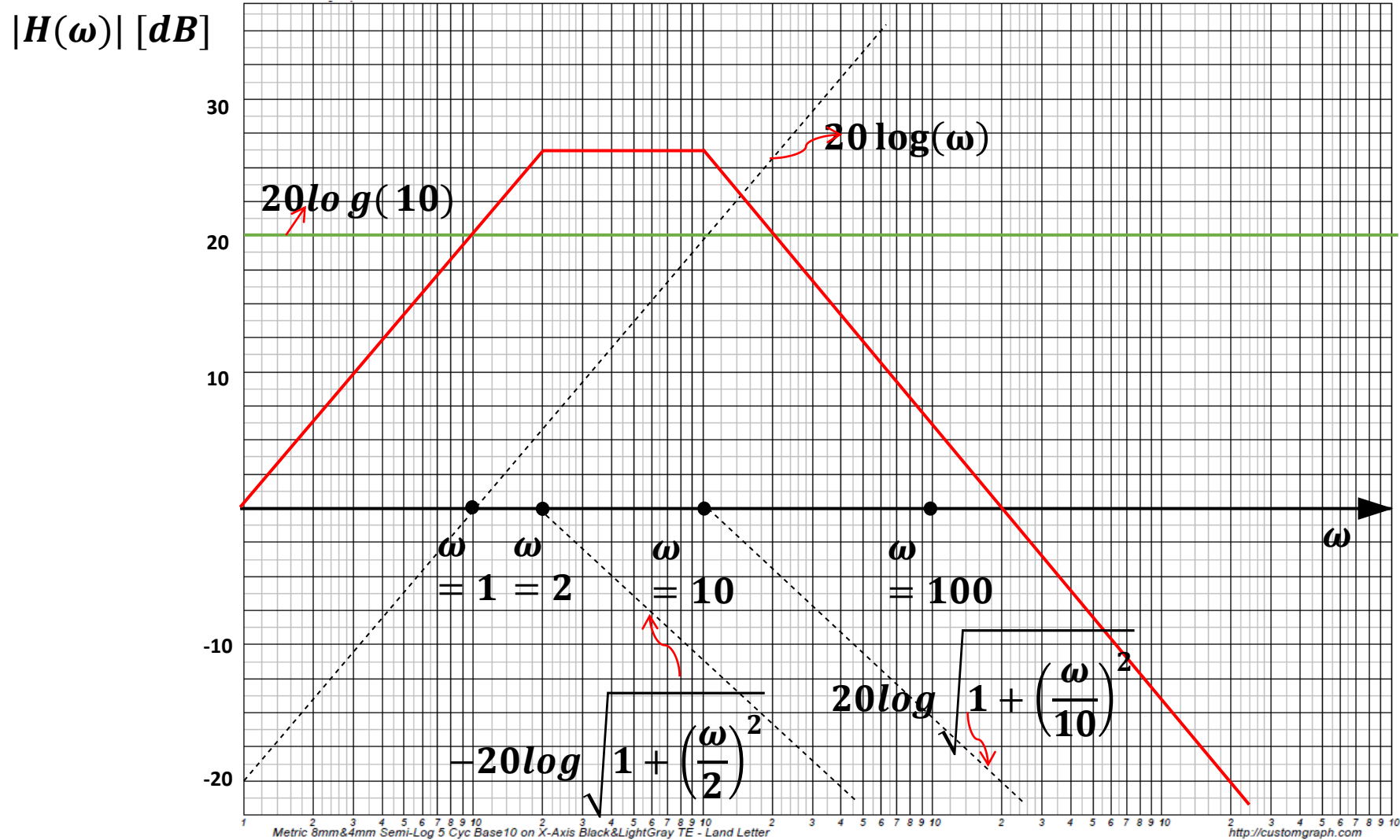
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode



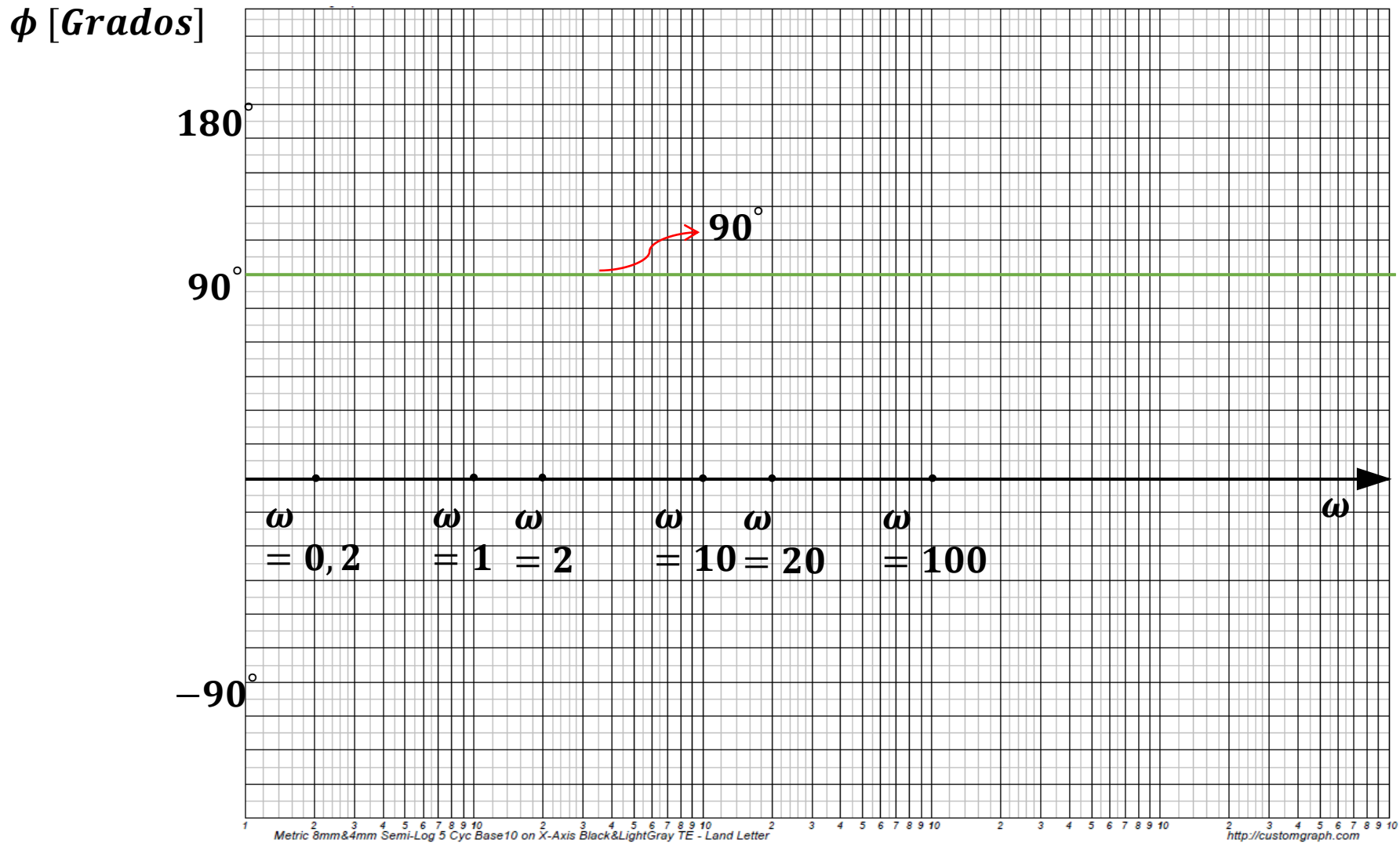
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode



Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

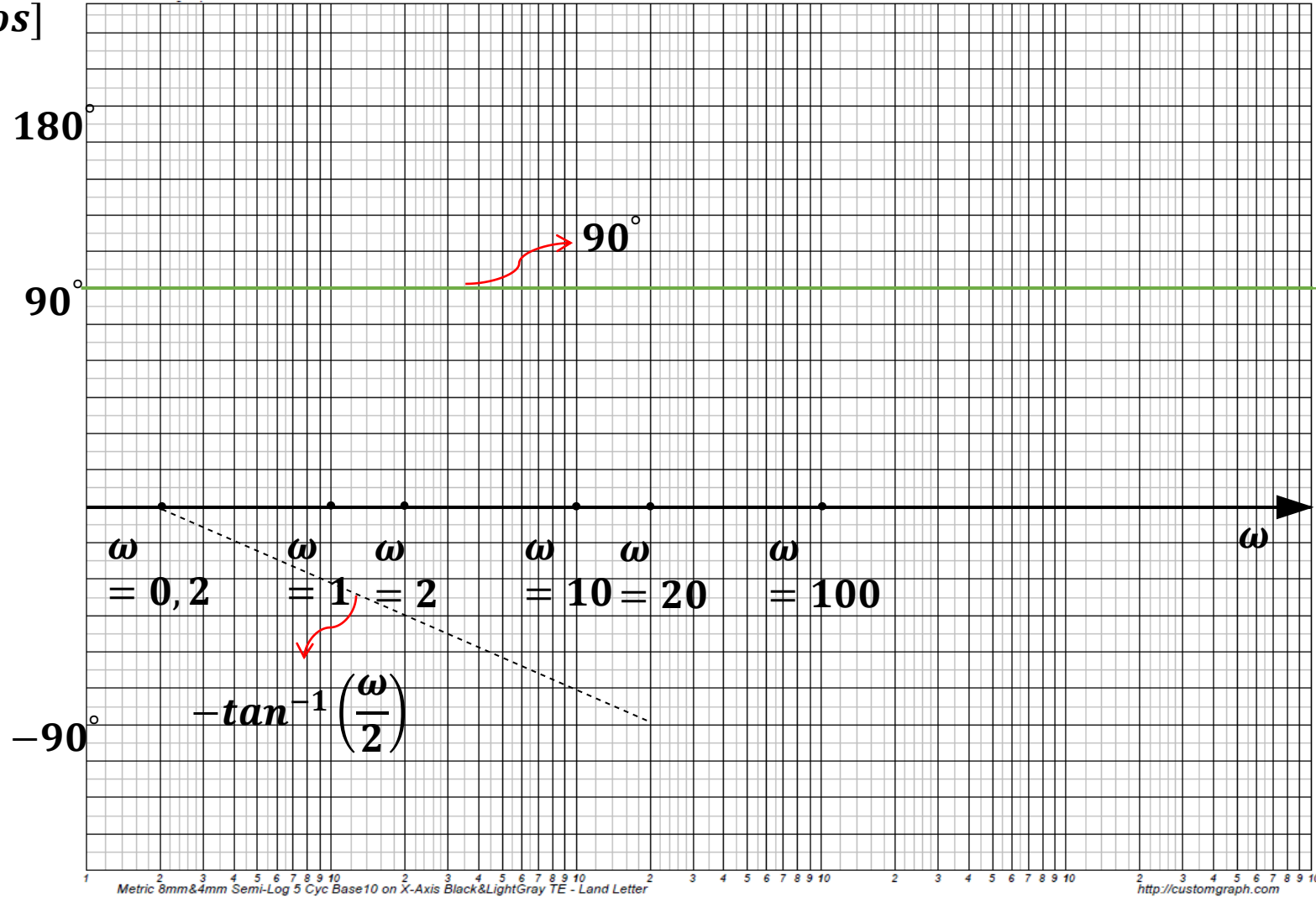


Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode



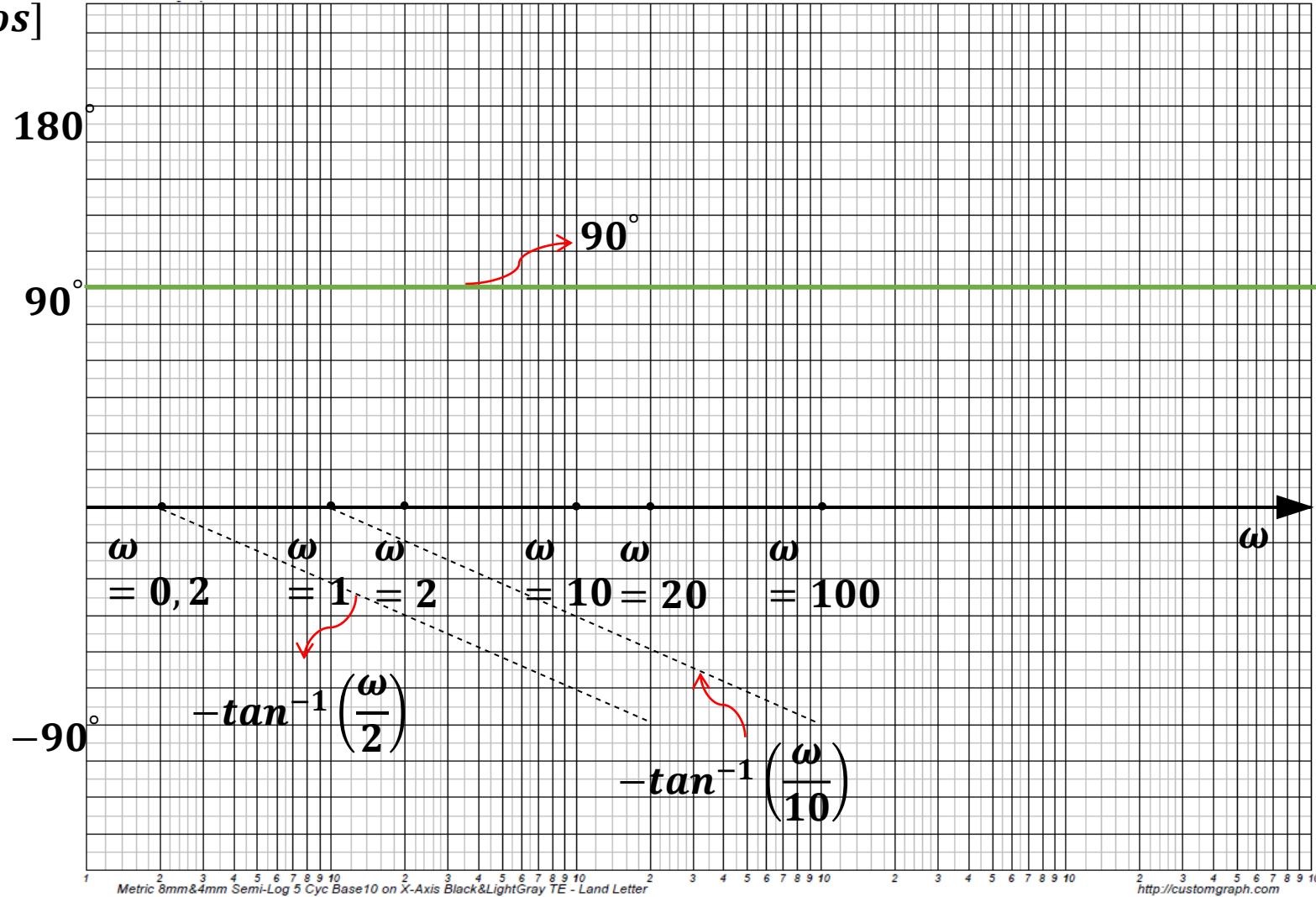
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

ϕ [Grados]



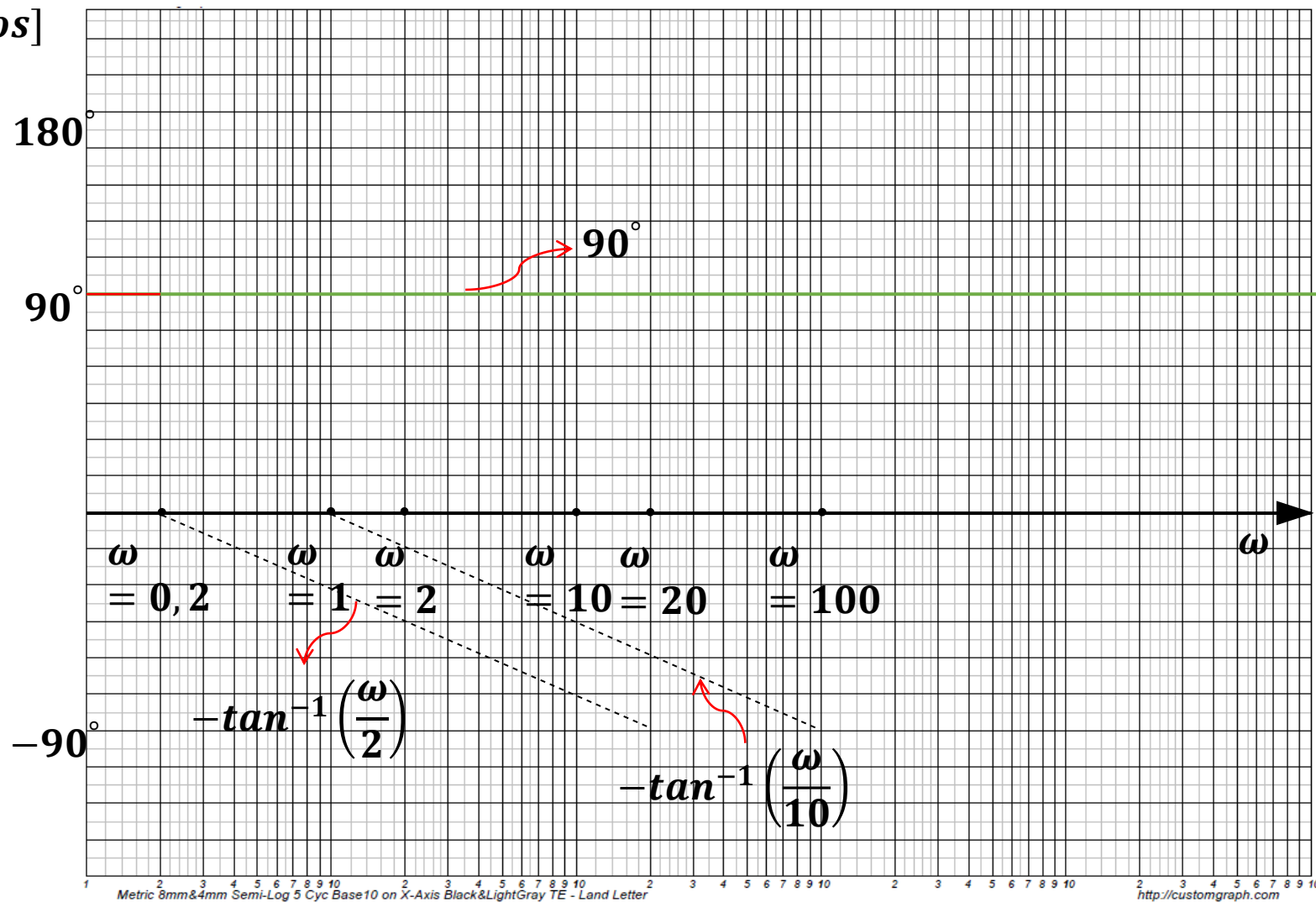
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

ϕ [Grados]



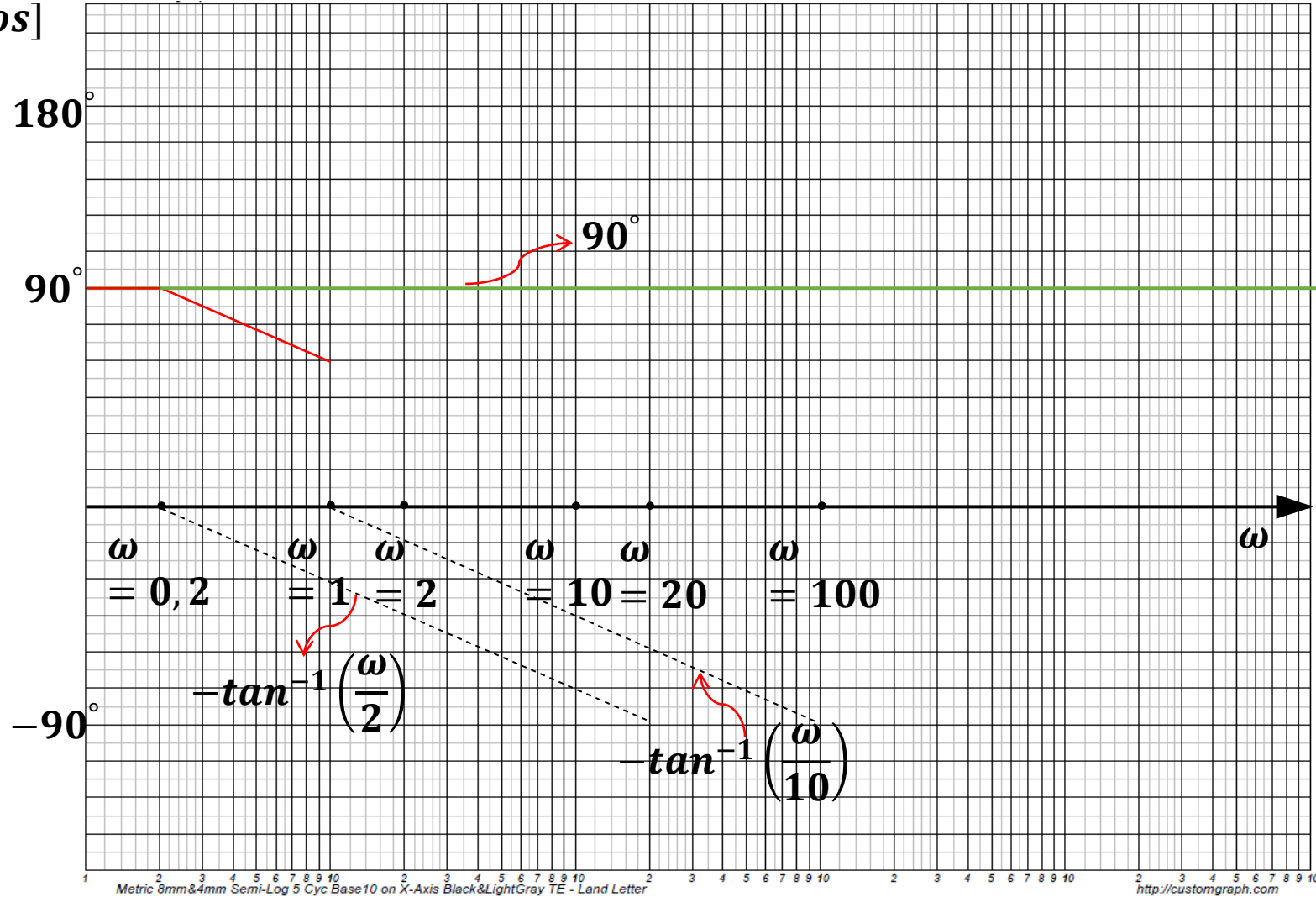
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

ϕ [Grados]



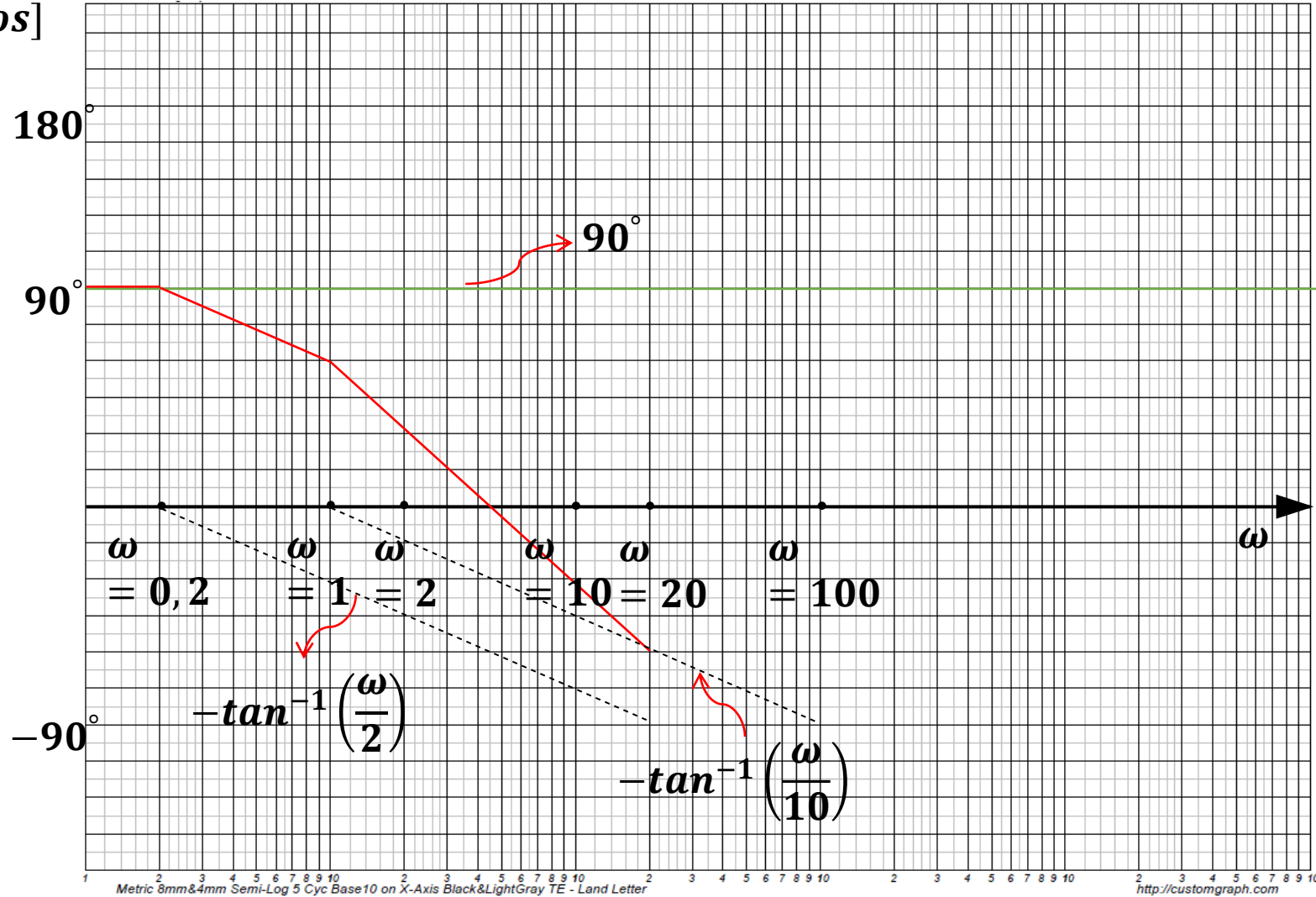
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

ϕ [Grados]



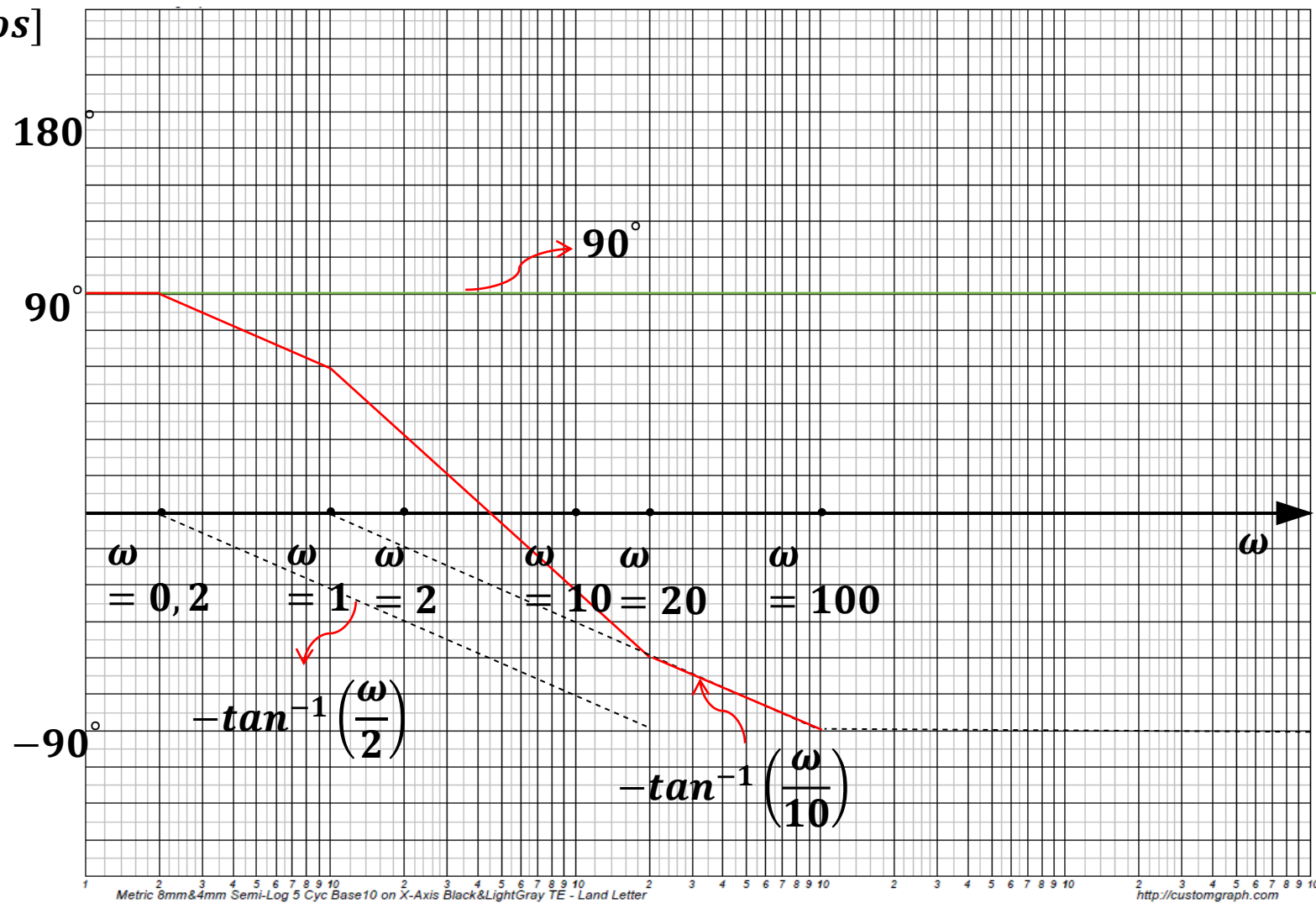
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

ϕ [Grados]



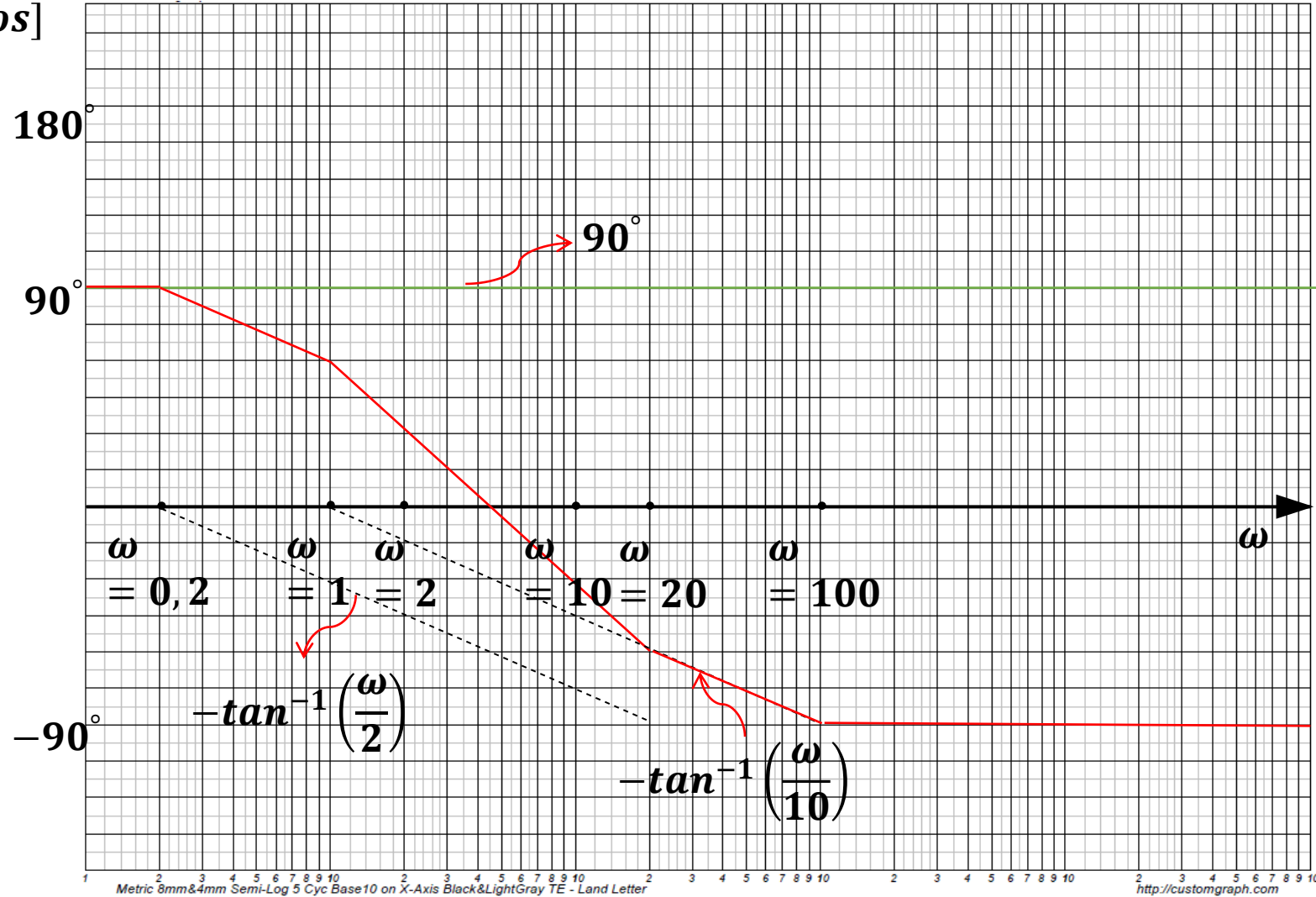
Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

ϕ [Grados]

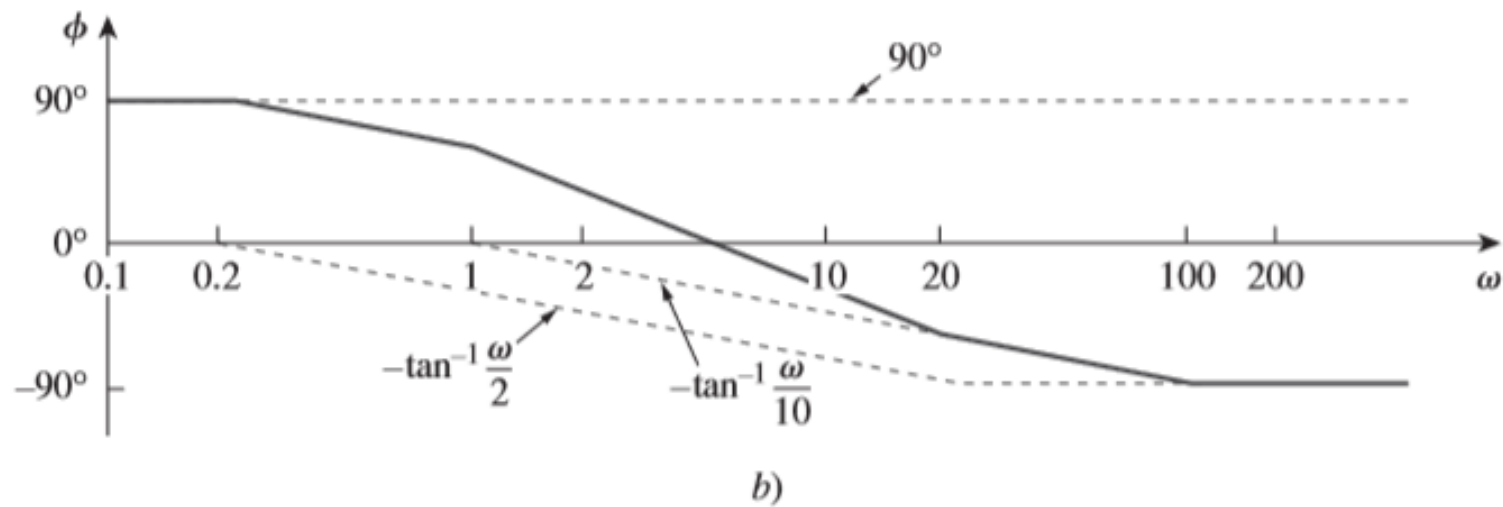
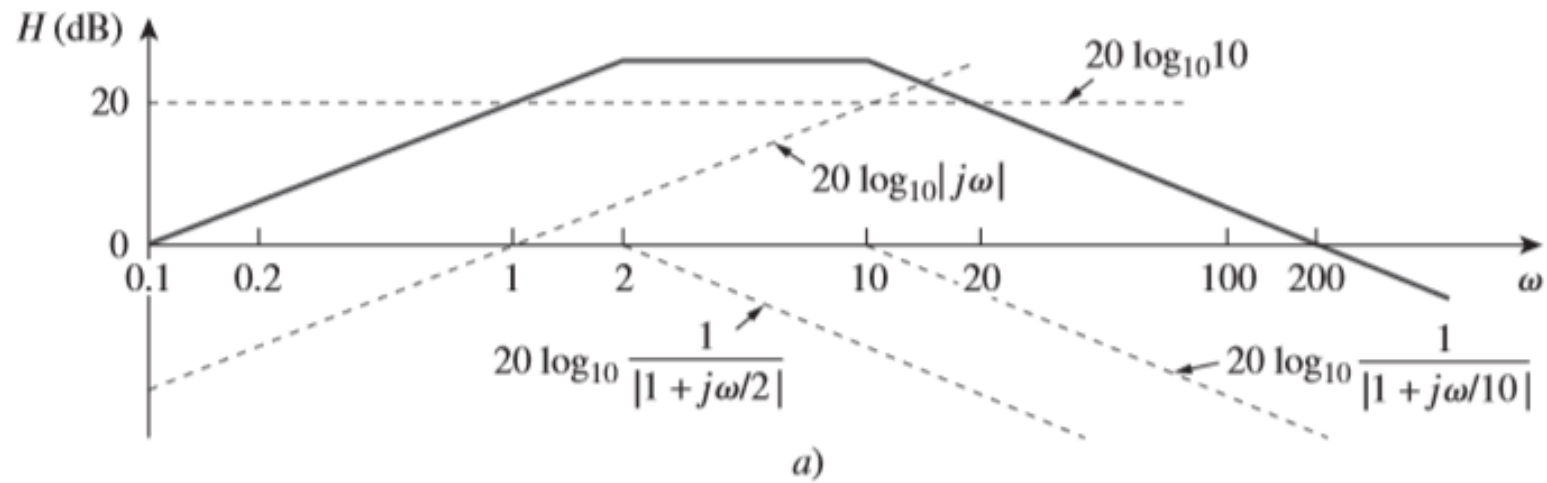


Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode

ϕ [Grados]



Ejemplo 1. Elaboración de Diagrama de Bode



Frecuencia de resonancia y pico de resonancia

La magnitud de:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Es:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

El valor pico de resonancia se da para la frecuencia en la que:

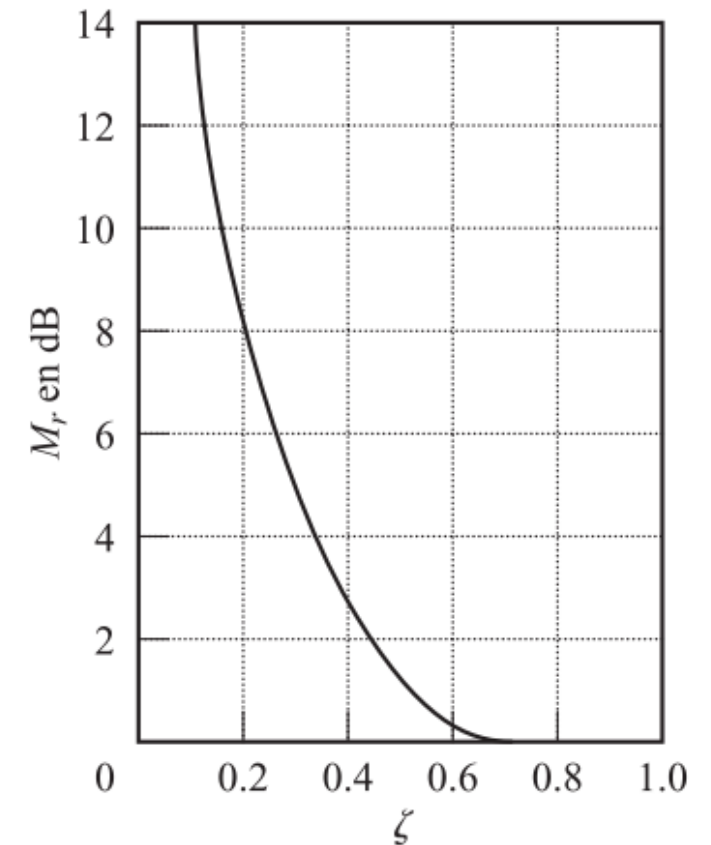
$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

Sea mínima

Este valor mínimo ocurre en:

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Por tanto, la frecuencia de resonancia: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, para $0 \leq \zeta \leq 0.707$



Frecuencia de resonancia y pico de resonancia

Para $0 \leq \zeta \leq 0.707$ la magnitud del pico de resonancia se encuentra como:

$$M_r = |G(j\omega)|_{\text{máx}} = |G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Con un ángulo de fase descrito por:

$$\angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta} = -90^\circ + \sin^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Determinación de las constantes de error estático de posición

Suponiendo que la función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}$$

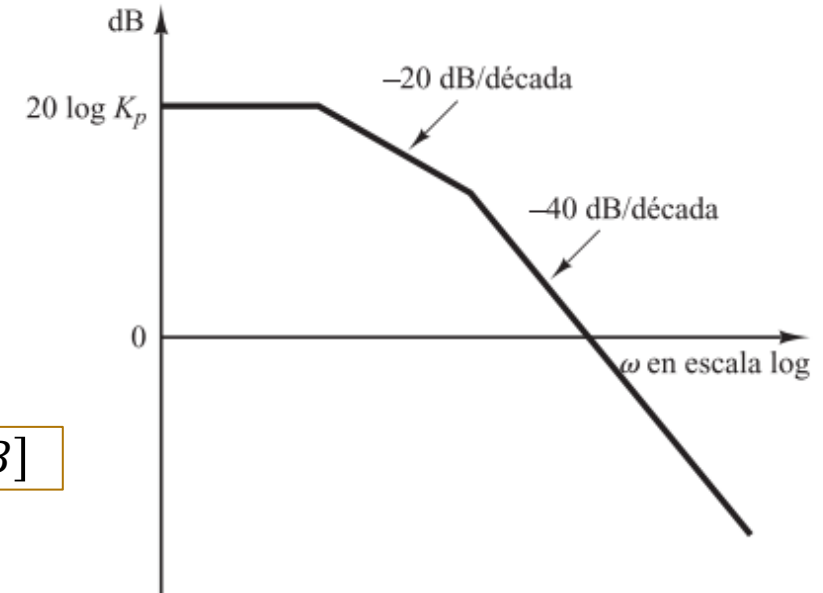
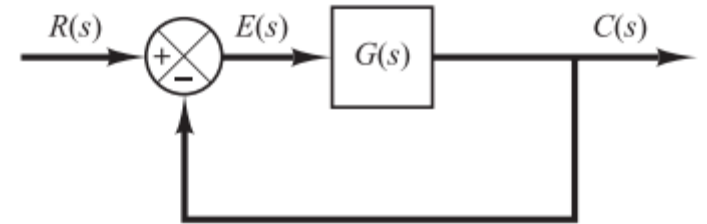
El sistema para bajas frecuencias:

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \dots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \dots (T_p j\omega + 1)}$$

La asíntota a baja frecuencias
es una asíntota horizontal en:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K = K_p$$

$$20 \log K_p \text{ [dB]}$$



Determinación de las constantes de error estático de velocidad

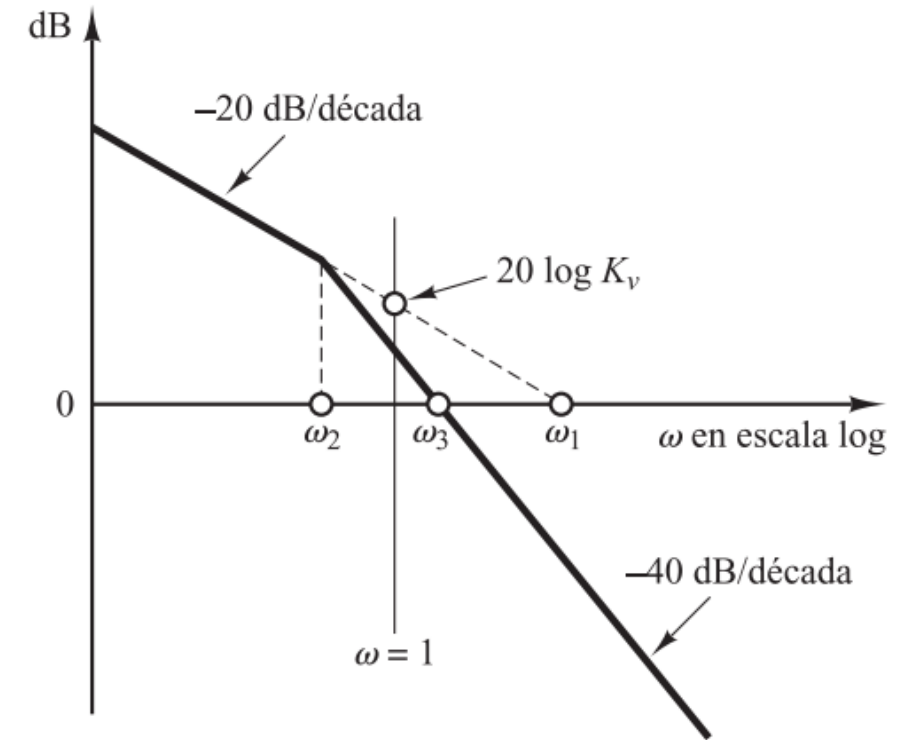
En un sistema tipo 1 se tiene que:

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}, \omega \leq 1$$

$$20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_v$$

La intersección del segmento inicial -20 dB/década con la línea de 0 dB tiene una frecuencia cuyo valor numérico es igual a K_v

$$K_v = \omega_1$$



Determinación de las constantes de error estático de aceleración.

En un sistema de control tipo 2 con realimentación unitaria se tiene que:

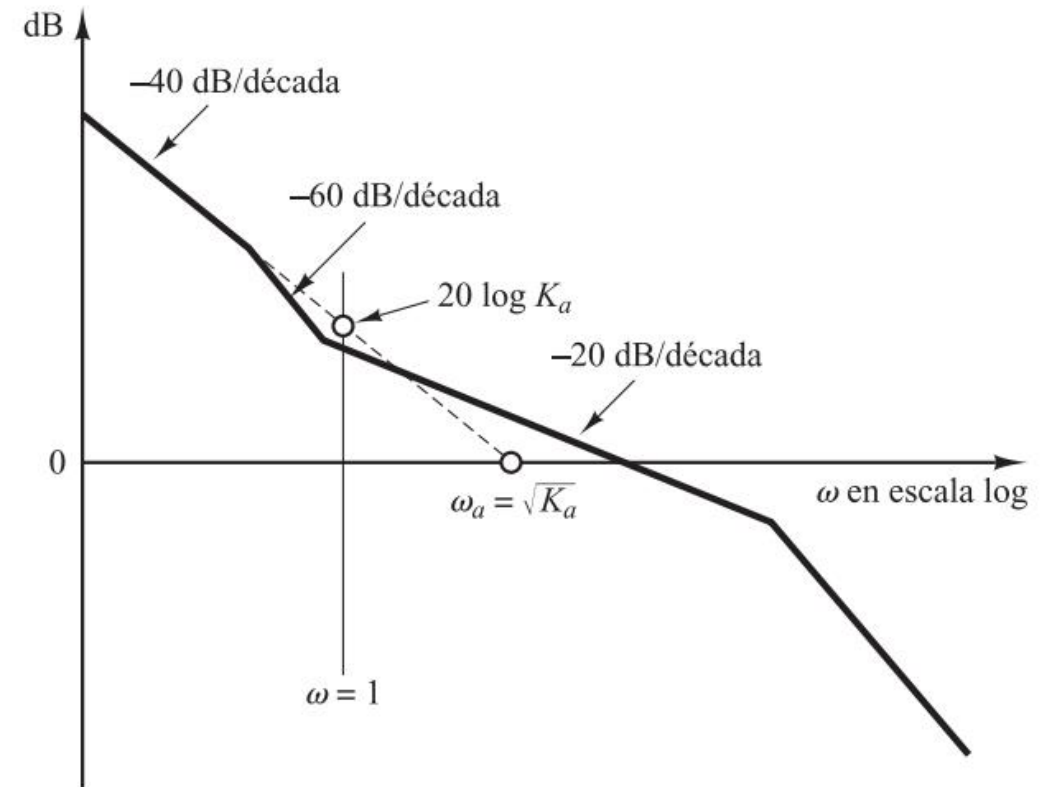
$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}, \quad \text{para } \omega \ll 1$$

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_a$$

La intersección del segmento inicial -40 dB/década con la línea de 0 dB tiene una frecuencia cuyo valor numérico es igual a K_a

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega_a)^2} \right| = 20 \log 1 = 0$$

$$\omega_a = \sqrt{K_a}$$



Diagramas de Bode (en Matlab)

Cuando se introduce la orden bode en la computadora, MATLAB devuelve los diagramas de Bode en la pantalla. Las órdenes bode más comúnmente utilizadas son:

```
bode(num,den)      %Diagrama de bode con las matrices de num y den definidas como F.T.
bode(num,den,w)    %Diagrama de bode con las matrices de num y den, con ajuste de escala de frecuencia.
bode(A,B,C,D)      %Diagrama de bode a partir de las matrices en espacio de estados.
bode(A,B,C,D,w)    %Diagrama de bode a partir de las matrices en espacio de estados con ajuste de escala de frecuencia.
bode(sys)          %Diagrama de bode con función de transferencia establecida.

[mag,phase,w] = bode(num,den,w); %Devuelve las matrices mag y phase que contienen las magnitudes y
                                %los ángulos de fase de la respuesta en frecuencia del sistema.
magdB = 20*log10(mag); %Para convertir la magnitud en decibelios.

%La escala de frecuencia se ajusta como:

w = logspace(d1,d2,n); %Donde d1 indica el grado inicial logarítmico y d2 el final, n el espaciado entre décadas.
```

Ejemplo 2. Elaboración de Diagrama de Bode en MATLAB

Realizar el diagrama de Bode para la función $G(s)$ en MATLAB:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

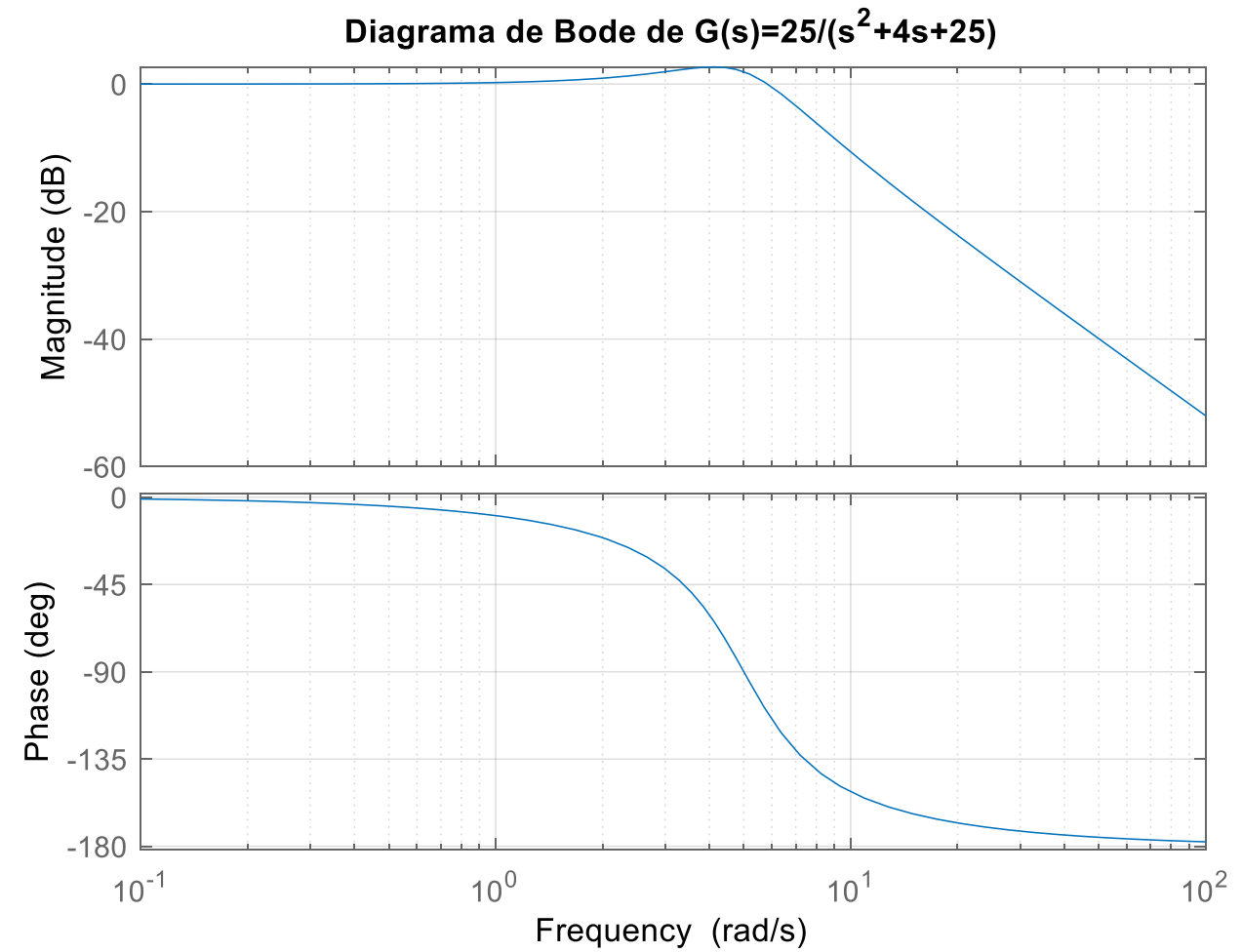
Ejemplo 2. Elaboración de Diagrama de Bode en MATLAB

Realizar el diagrama de Bode para la fusión $G(s)$:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

Código:

```
num = [25];  
den = [1 4 25];  
bode(num,den)  
title('Diagrama de Bode de G(s)=25/(s^2+4s+25)')
```



Ejemplo 3. Elaboración de Diagrama de Bode en MATLAB

Realizar el diagrama de Bode para la función $G(s)$ en MATLAB:

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$

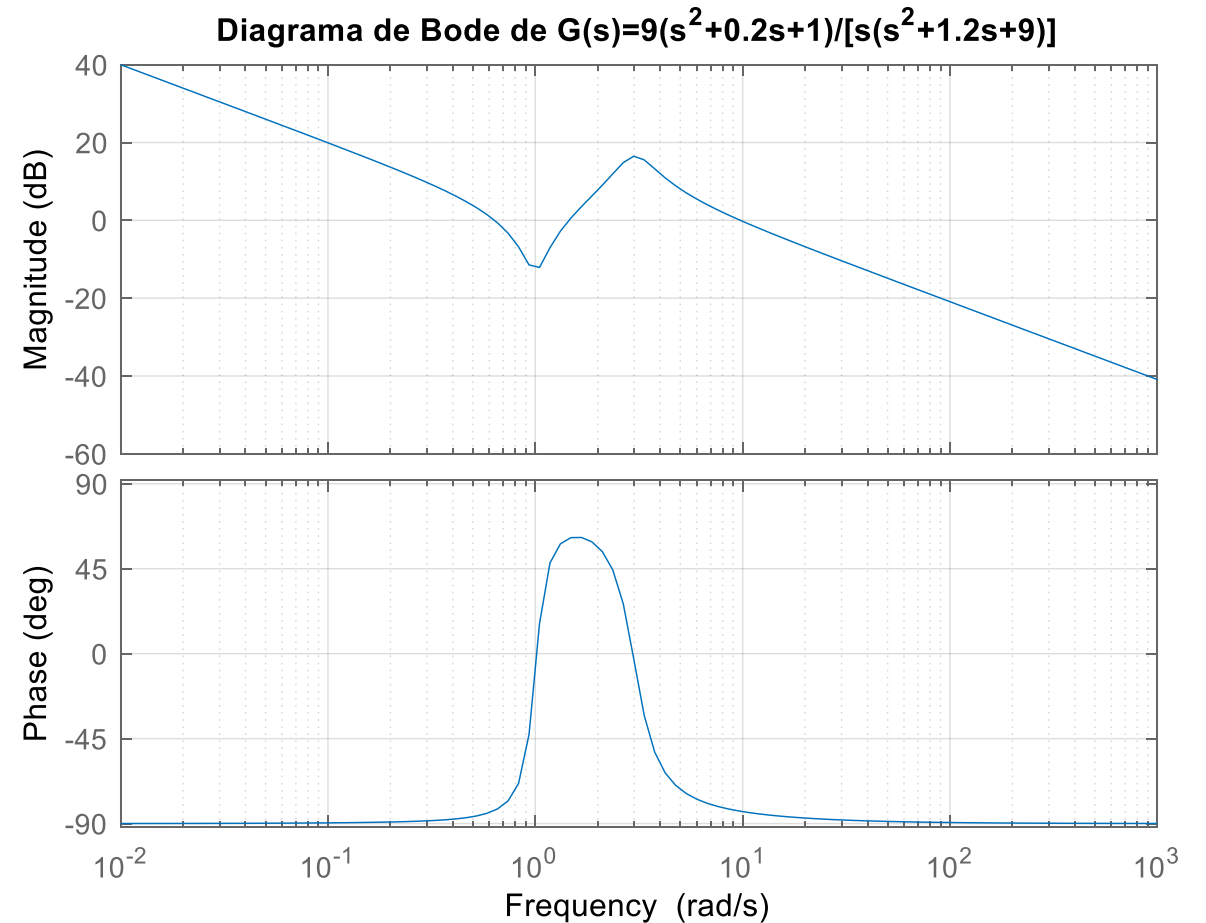
Ejemplo 3. Elaboración de Diagrama de Bode en MATLAB

Realizar el diagrama de Bode para la fusión $G(s)$:

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$

Código:

```
num = [9 1.8 9];  
den = [1 1.2 9 0];  
w = logspace(-2,3,100);  
bode(num,den,w)  
title('Diagrama de Bode de G(s)=9(s^2+0.2s+1)/[s(s^2+1.2s+9)]')
```



Referencias

- [1] Ogata, Katsuhiko. „**Ingeniería de Control Moderna**“, Pearson, Prentice Hall, 2003, 4ª Ed., Madrid.
- [2] Kuo, Benjamin C.. „**Sistemas de Control Automático**“, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.
- [3] Dorf, Richard, Bishop Robert. „**Sistemas de control moderno**“, 10ª Ed., Prentice Hall, 2005, España