Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL 4703 Señales y Sistemas

II Semestre 2019
Programa de Tutorías

Tutoría 14: Análisis de Sistemas Discretos LTI

Ejercicio 1. Un sistema LTI tiene función de transferencia $H(z)$ y respuesta al impulso $h[n]$. Si se sabe que:

- $h[n]$ es real.
- $h[n]$ es derecha.
- $\lim_{z\to\infty} H(z) = 1$
- $H(z)$ tiene dos ceros.
- $H(z)$ tiene uno de sus polos en una ubicación no real en el círculo $|z| = \frac{3}{4}$

¿El sistema es estable? ¿Es causal?

Respuesta: El sistema sí es estable y causal

Ejercicio 2. La ecuación de diferencias:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + 2y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2] + \frac{1}{2}y[n-3]$$

Caracteriza un sistema LTI causal en tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ y función de transferencia $H(z)$, con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$.

1. ¿Es éste un sistema recursivo? Justifique.

   Sí.

2. Si la entrada $x[n]$ es cero, calcule las primeras 4 muestras de la salida si las condiciones iniciales son:

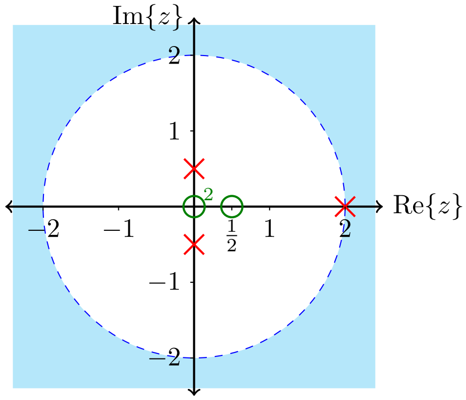
   $$y[-1] = 1$$
   $$y[-2] = y[-3] = 0$$

   Respuesta: $y[0] = 2$, $y[1] = \frac{15}{4}$, $y[2] = \frac{15}{2}$, $y[3] = \frac{241}{16}$.

3. Encuentre la función de transferencia $H(z)$ del sistema e indique su región de convergencia tomando en cuenta que la ecuación de diferencias representa un sistema causal. *Sugerencia: Se sabe que uno de los polos está en $z = 2$.*

   Respuesta: $H(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-j\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(z+j\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(z-2z^{-1}\right)}$, $\mathrm{ROC}: |z| > 2$

4. Grafique el diagrama de polos y ceros de $H(z)$ en el plano z.



5. ¿Es el sistema caracterizado por $H(z)$ estable?

   No.

6. A la salida del sistema $H(z)$ se coloca en cascada otro sistema caracterizado por la función de transferencia:

$$G(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \dfrac{1}{2}z^{-1}}, \rightarrow \text{ROC} : |z| > \frac{1}{2}$$

   ¿Cuál es la función de transferencia del sistema total $Q(z)$ compuesto por los subsistemas en cascada $H(z)$ y $G(z)$? Grafique el diagrama de polos y ceros del sistema $Q(z)$.

   Respuesta: $Q(z) = \frac{1}{1+\frac{z^{-2}}{4}}$, $\text{ROC} : |z| > \frac{1}{2}$.

7. Encuentre la salida del sistema $Q(z)$ ante la entrada $x[n] = \left\{1,0,\frac{1}{4}\right\}$ tanto en el dominio z como en el dominio del tiempo discreto n.

   Respuesta: $y[n] = \delta[n]$.

Ejercicio 3. Un sistema LTI en tiempo discreto tiene la respuesta al impulso:

$$h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) u[n]$$

a. Encuentre la función de transferencia $H(z)$ del sistema.

   Respuesta:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

b. Encuentre los polos y ceros del sistema (incluyendo aquellos en el infinito).

   Respuesta: Dos ceros simples en $z = 1$ *y en* $z = 1/2$*, y dos polos simples en* $e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$.

c. Encuentre la ecuación de diferencias del sistema.

   Respuesta: $y[n] = y[n-1] - y[n-2] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

d. Encuentre la respuesta de entrada cero del sistema para las condiciones iniciales $y[-1] = y[-2] = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

   Sugerencia: Utilice la ecuación de diferencias encontrada por usted y su transformada z *unilateral.*

   Respuesta:

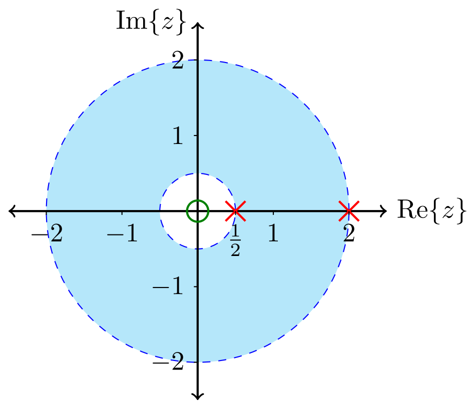
$$y[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right) u[n]$$

Ejercicio 4. Un sistema en tiempo discreto es lineal e invariante en el tiempo y su función de transferencia tiene como expresión algebraica:

$$H(z) = -\frac{3}{2}\left[\frac{z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right]$$

a. Dibuje el diagrama de polos y ceros del sistema

Respuesta:



b. Indique en el diagrama del punto anterior, la región de convergencia de $H(z)$ si se sabe además que el sistema es estable.

Ya fue marcada en el punto anterior.

c. Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ de dicho sistema estable e indique si el sistema es o no causal.

Respuesta: $h[n] = 2^n u[-n-1] + \frac{1}{2^n}u[n]$ *que por ser bilateral indica que el sistema no es causal.*

d. Otro sistema tiene como función de transferencia:

$$G(z) = \cos(z)$$

Si se sabe que el círculo unitario se encuentra dentro de la región de convergencia de este sistema, encuentre la respuesta al impulso $g[n]$ utilizando la definición de transformada z inversa para todo n.

Solución:

$$g[n] = \begin{cases} 0 & n > 0, n \text{ impar} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & n \text{ par} \end{cases}$$

e. Indique si el sistema es causal o no.

No es causal.

Ejercicio 5. Considere los siguientes sistemas LTI causales con función de transferencia dada por:

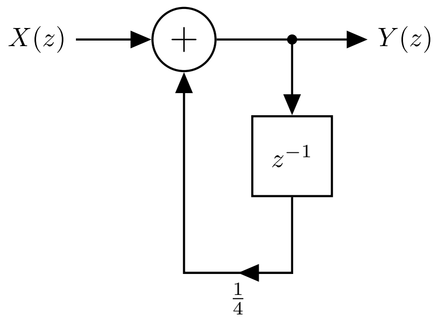
$$H_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

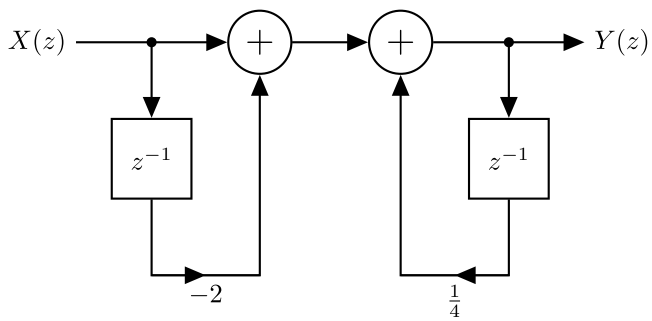
$$H_3(z) = \frac{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

Represente cada uno de los sistemas anteriores mediante un diagrama de bloques.

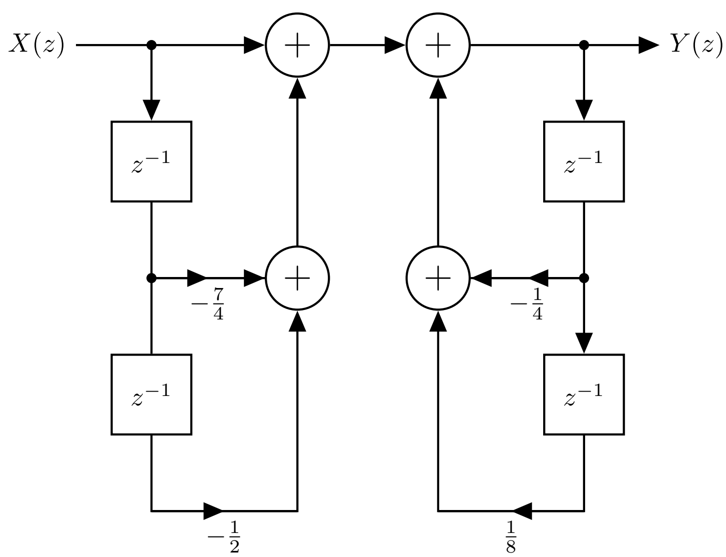
$H_1(z)$:



$H_2(z)$:



$H_3(z)$:



Ejercicio 6. Considere un sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante la representación en diagrama de bloques mostrada en la figura 1.

a. Determine una ecuación de diferencias que relacione a $y[n]$ con $x[n]$.

Respuesta: $y[n] = \frac{2}{3}y[n-1] - \frac{1}{9}y[n-2] + x[n] - x[n-1] + 8x[n-2]$

b. ¿Es el sistema estable? Justifique.

Sistema sí es estable, pues ROC incluye al círculo unitario y por tanto su respuesta al impulso es absolutamente sumable

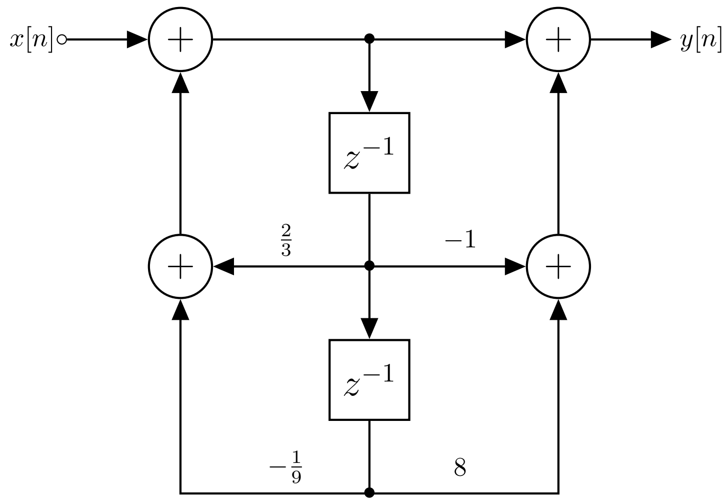


Figura 1: Sistema LTI del ejercicio 6.

Ejercicio 7. Considere un sistema cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n-1] + 2y[n] = x[n]$$

a. Determine la respuesta a entrada cero de este sistema si $y[-1] = 2$.

   Respuesta: $y[n] = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

b. Determine la respuesta de estado cero de este sistema a la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$.

   Respuesta: $y[n] = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

c. Determine la salida $y[n]$ del sistema para $n \geq 0$ cuando $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ y $y[-1] = 2$.

   Respuesta: $y[n] = \left[-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]$