Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL 4703 Señales y Sistemas

II Semestre 2019
Programa de Tutorías

Tutoría 11: Transformada de Fourier y Sistemas LTI

Ejercicio 1. Considere la señal:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & |t| > 1 \\ \dfrac{t+1}{2} & -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

a. Encuentre una expresión cerrada para $X(j\omega)$.

b. Compruebe que la parte real de su respuesta en el punto a. corresponde a la transformada de Fourier de la parte par de $x(t)$.

c. Determine la transformada de Fourier de la parte impar de $x(t)$.

Respuestas:

a. $X(j\omega) = \mathrm{sa}(\omega) + j\left[\dfrac{\cos(\omega)}{\omega} - \dfrac{\mathrm{sa}(\omega)}{\omega}\right]$

b. $x_e(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{sa}(\omega)$

c. $x_o(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ j\left[\dfrac{\cos(\omega)}{\omega} - \dfrac{\mathrm{sa}(\omega)}{\omega}\right]$

Ejercicio 2. Considere la siguiente relación entre dominios temporal-frecuencial:

$$e^{-|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{1+\omega^2}$$

a. Use las propiedades adecuadas para encontrar la transformada de $te^{-|t|}$.

b. Usando la propiedad de dualidad y su resultado del punto a. encuentre la transformada de:

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

Respuestas:

a. $te^{-|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{-j4\omega}{(1+\omega^2)^2}$

b. $\dfrac{4t}{(1+t^2)^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ -j2\pi\omega e^{-|\omega|}$

Ejercicio 3. La señal $x_a(t)$ es generada por la salida de un micrófono utilizado para detectar sonidos de motosierras y disparos en el bosque. Dicha señal posee una composición espectral definida entre los rangos de frecuencias: $1-5kHz$ y $10-20kHz$. Cada nodo de medición debe digitalizar la señal $x_a(t)$ con la ayuda de un ADC para luego ser transmitida a un nodo central en un formato binario. Además, la resolución del ADC es de 32 bits. ¿Cuál es el mínimo valor de frecuencia de muestreo F_s con la que debe ser programado el ADC para que la señal discreta $x(n/F_s)$ pueda ser utilizada posteriormente para reconstruir la información original de la señal $x_a(t)$?

Respuesta:

- $F_s = 40\,kHz$

Ejercicio 4. Determine si el sistema $y(t) = x^2(t)$ es lineal o no lineal e invariante o variante en el tiempo.

Respuesta:

- *El sistema es NO lineal e invariante en el tiempo.*

Ejercicio 5. El espectro en magnitud completo para una señal $h(t)$ está dado por la figura 1. Superponga sobre ella la respuesta en magnitud de una señal dada por $h(t)\cos(3\pi t)$.

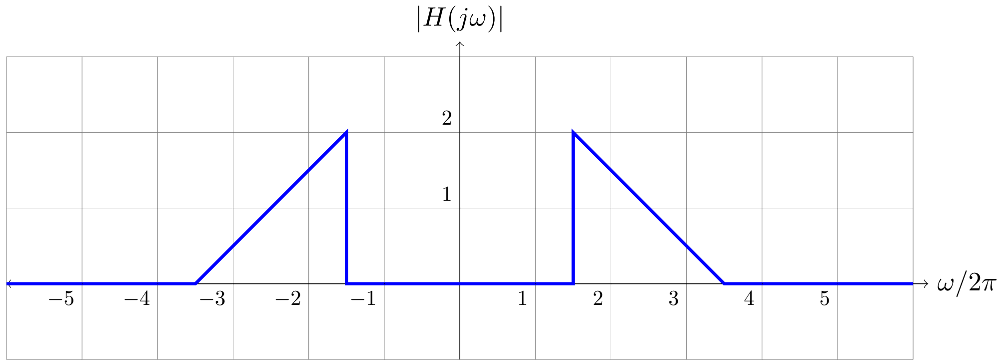
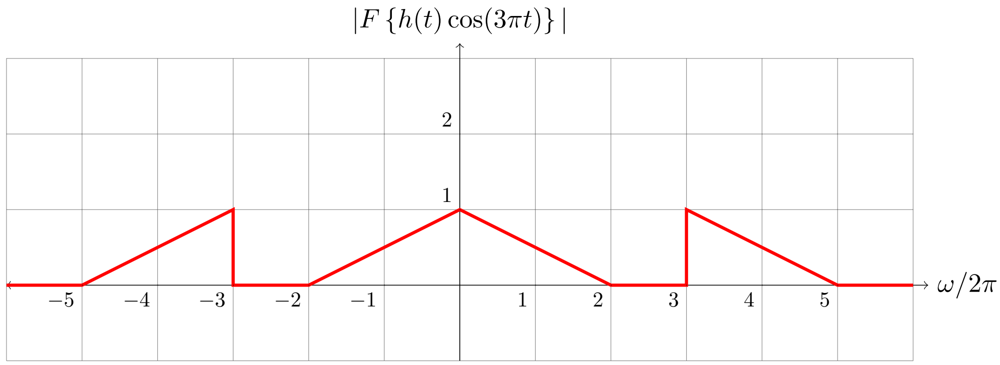


Figura 1: Espectro de magnitud del ejercicio 5.

Respuesta:

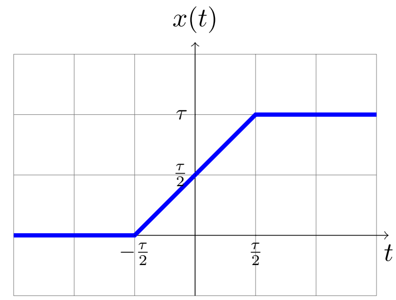


Ejercicio 6. Dado el pulso rectangular $r(t) = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$, donde $u(t)$ es el escalón unitario, grafique entonces la función $x(t)$ dada por la convolución:

$$x(t) = u(t) * r\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Además, indique todas las magnitudes que dependen del valor τ.

Respuesta:

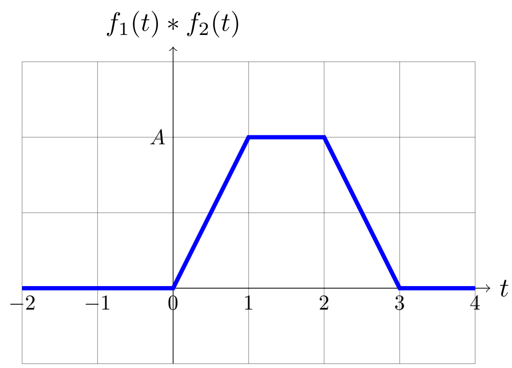


Ejercicio 7. Sean las funciones:

$$f_1(t) = u(t) - u(t-1)$$
$$f_2(t) = A[u(t) - u(t-2)]$$

Grafique ambas señales y el resultado de su convolución $f_1(t) * f_2(t)$ en el dominio del tiempo. Asuma que $A > 0$.

Respuesta:



Ejercicio 8. Dadas las funciones de la figura 2, indique con qué función debe ser convolucionada $f_1(t)$ para que sean generadas cada una de las funciones de la figura 3.

Respuestas:

- $f_1(t) * f_2(t) \to$ *Figura superior izquierda*
- $f_1(t) * f_3(t) \to$ *Figura inferior derecha*
- $f_1(t) * f_4(t) \to$ *Figura inferior izquierda*
- $f_1(t) * f_5(t) \to$ *Figura superior derecha*

Las respuestas están dadas según las imágenes de la Figura 3.

Ejercicio 9. Considere un sistema LTI causal con respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

Para una entrada particular $x(t)$ se observa que este sistema produca la salida:

$$y(t) = [e^{-3t} - e^{-4t}]u(t)$$

Determine $x(t)$.

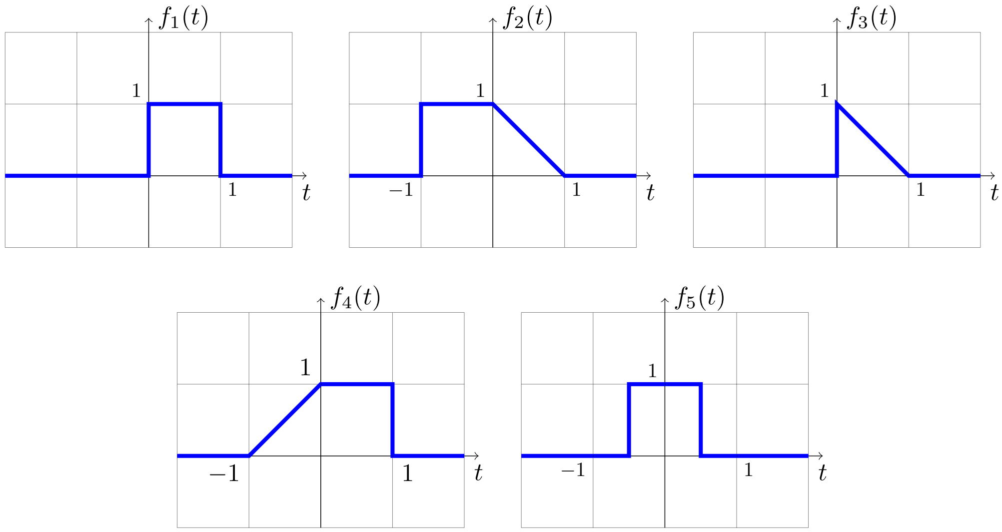


Figura 2: Funciones a convolucionar del ejercicio 8.

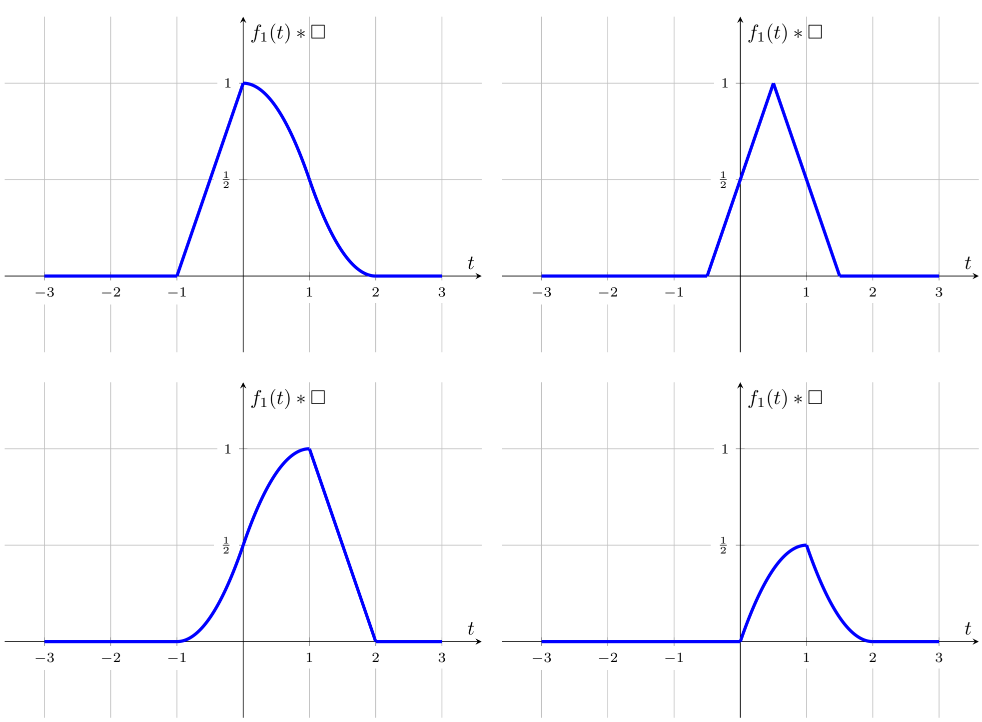


Figura 3: Resultados de convoluciones entre funciones del ejercicio 8.

Respuesta:

- $x(t) = e^{-4t}u(t)$

Ejercicio 10. Considere un sistema LTI causal con respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}$$

Donde $a > 0$. Determine:

a. La respuesta de magnitud y fase de $H(j\omega)$.

b. La respuesta al impulso del sistema.

c. La salida del sistema si la entrada es $x(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t)$.
Considere $a = 1$.

Respuesta:

- $y(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\sqrt{3}t - \frac{2\pi}{3}\right)$