

# Compensadores de adelanto en el dominio de la frecuencia

**CONTROL AUTOMÁTICO**

ESCUELA DE ELECTRÓNICA

II SEMESTRE 2020

**ING. LUIS MIGUEL ESQUIVEL SANCHO**

# Contenido

- Introducción
- Estrategia
- Ecuaciones del compensador de adelanto
- Cálculo de un compensador de adelanto para corrección simultánea del margen de fase y del ancho de banda
- Ejemplos y ejercicios

# Introducción

- Los métodos corrientes de diseño implican realizar iteraciones o probar varios compensadores, evaluar sus resultados y seleccionar el más adecuado.
- Se pueden establecer ecuaciones para la ganancia y fase que deben ser aportadas por los compensadores a una frecuencia particular y luego resolver los sistemas de ecuaciones para obtener de un solo paso el compensador de adelanto requerido.

# Estrategia

- Según la estrategia de cálculo, el compensador de adelanto es el último en ser calculado después de haber corregido el error de estado estacionario.
- Para corregir el ancho de banda y el margen de fase en un solo paso, se tienen que satisfacer dos condiciones: un adelanto de fase y una ganancia a una frecuencia específica
- Ya que existe interacción entre los diferentes parámetros: polo, cero y atenuación o ganancia, existirá solamente un compensador de adelanto que pueda satisfacer simultáneamente tales condiciones

# Estrategia

- En el enfoque de la respuesta en frecuencia, especificamos el desempeño de la respuesta transitoria en una forma indirecta.
- La respuesta transitoria se especifica en términos del margen de fase, el margen de ganancia y la magnitud del pico de resonancia, que ofrecen una estimación a grandes rasgos del amortiguamiento del sistema.
- La frecuencia de cruce de ganancia, la frecuencia de resonancia y el ancho de banda, que ofrecen una estimación a grandes rasgos de la velocidad de la respuesta transitoria y las constantes de error estático, que aportan la precisión en estado estable.

# Estrategia

- En el enfoque de la respuesta en frecuencia, especificamos el desempeño de la respuesta transitoria en una forma indirecta.
- La respuesta transitoria se especifica en términos del margen de fase, el margen de ganancia y la magnitud del pico de resonancia, que ofrecen una estimación a grandes rasgos del amortiguamiento del sistema.
- La frecuencia de cruce de ganancia, la frecuencia de resonancia y el ancho de banda, que ofrecen una estimación a grandes rasgos de la velocidad de la respuesta transitoria y las constantes de error estático, que aportan la precisión en estado estable.

# Corrección del ancho de banda

El ancho de banda se puede corregir utilizando:

## **Una ganancia estática**

- Aumenta o disminuye el ancho de banda; aunque afecta el margen de ganancia.

## **Un compensador de adelanto**

- Puede aumentar el ancho de banda; además aumenta el margen de ganancia

## **Una combinación de ganancia estática + compensador de adelanto**

- Utilizada si el compensador de adelanto escogido no es capaz de llevar el ancho de banda al valor deseado

# Corrección del margen de fase

El margen de fase se corrige con un compensador de adelanto

- El compensador de adelanto utilizado tiene ganancia mitad ( $20 \log_{10} \left( \frac{b}{a} \right) [dB]$ ) a la frecuencia media. Efectos:
  - La frecuencia de cruce de ganancia se desplaza hacia valores mayores (derecha)
  - El ancho de banda aumenta
  - El margen de fase cambia, usualmente empeora
- Se debe de utilizar un compensador cuyo aumento de fase a la frecuencia media sea:
  - $\phi_{m\acute{a}x} > \text{Aumento de fase deseado} + \text{p\acute{e}rdida de fase debida al compensador} + \text{margen de seguridad}$



# Resumen de fórmulas del compensador de adelanto

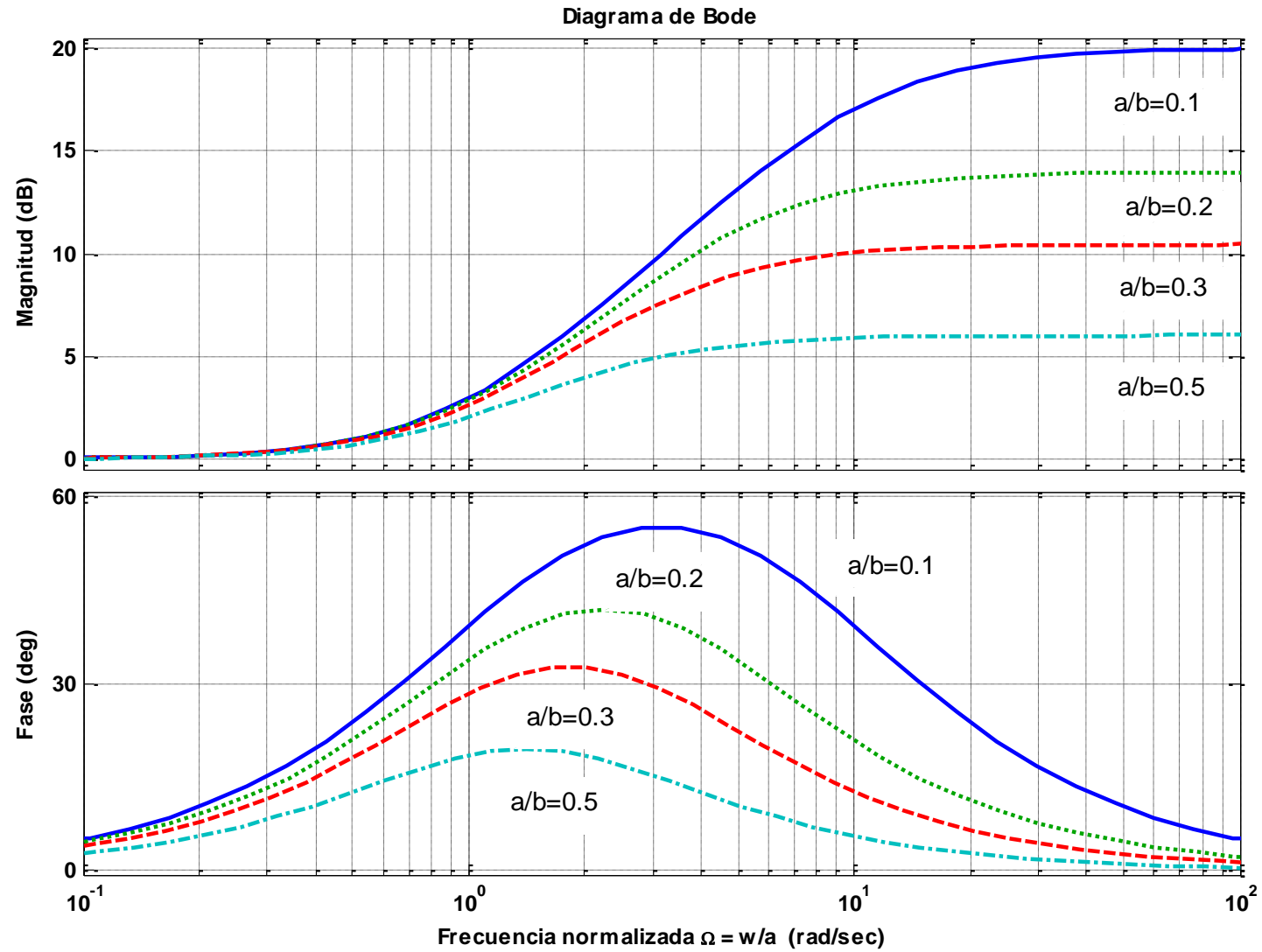
$$\lim_{s \rightarrow j\omega} K_{LEAD}(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} \left( \frac{b}{a} \right) \frac{(s+a)}{(s+b)} = K_{LEAD}(j\omega) = \left( \frac{b}{a} \right) \frac{a}{b} \frac{(1+j\frac{\omega}{a})}{(1+j\frac{\omega}{b})}$$

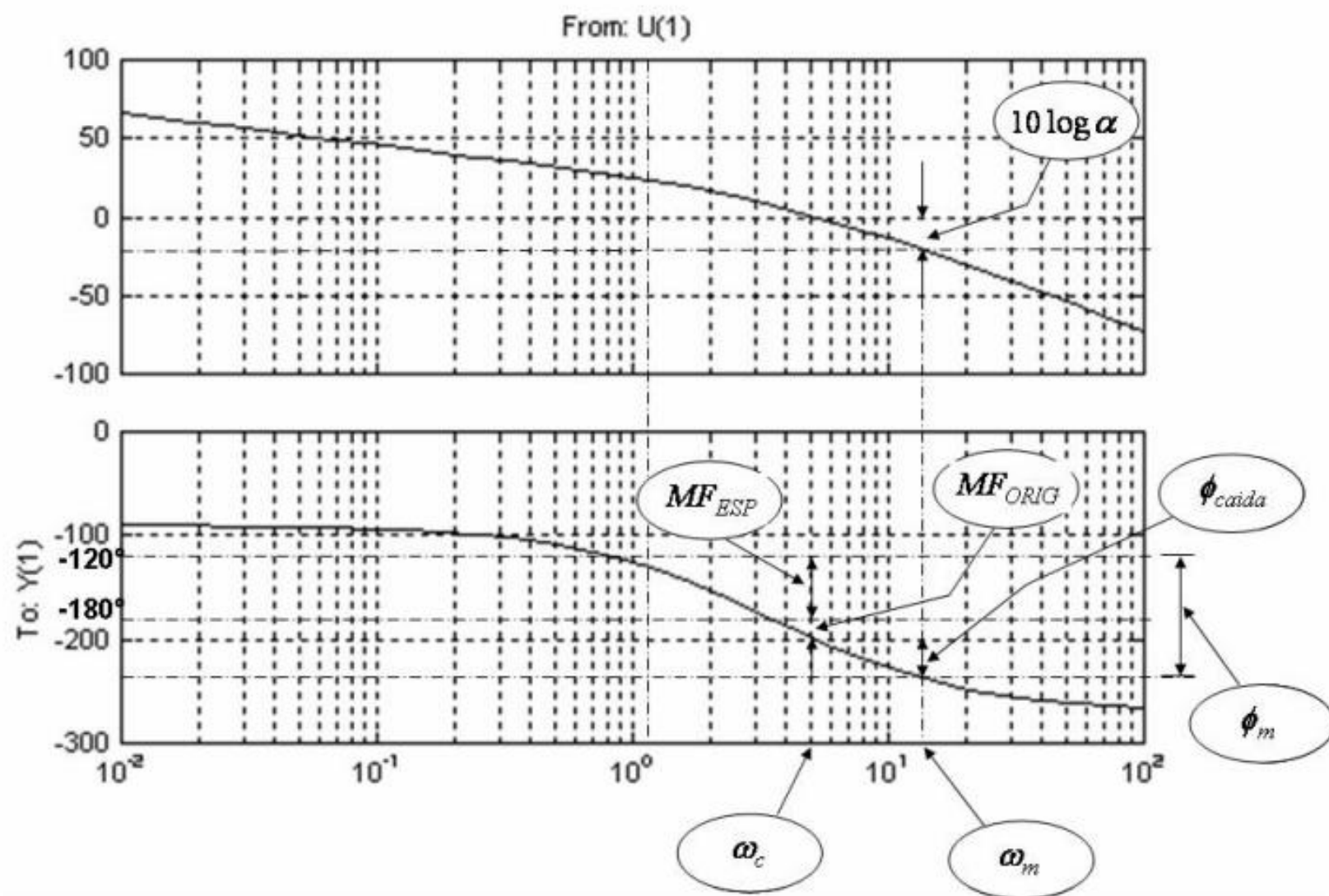
$$\phi_{\max} = \left( 90^0 - 2 * \tan^{-1} \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$

$$\omega_m = b \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \cdot b}$$

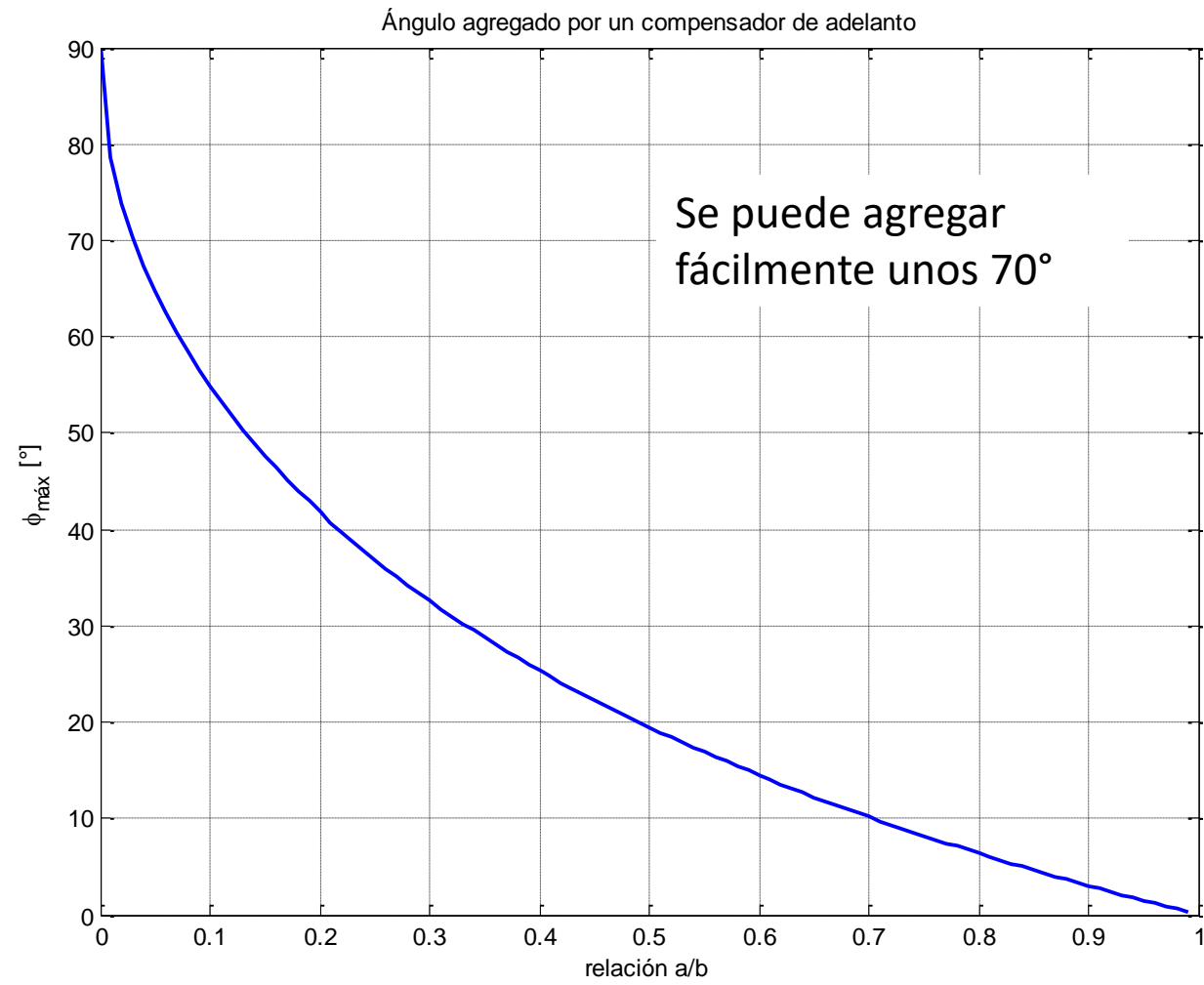
$$b = \frac{\omega_m}{\sqrt{a/b}}$$

# Gráficas de Bode del compensador de adelanto





# Gráficas de $\phi_{m\acute{a}x}$



# Ecuaciones (1)

- Partimos del compensador de adelanto de primer orden con ganancia unitaria a  $\omega = 0$

$$K_{LEAD}(j\omega) = \alpha \frac{(j\omega + z)}{(j\omega + p)} = \left(\alpha \frac{z}{p}\right) \frac{\left[1 + j\frac{\omega}{z}\right]}{\left[1 + j\frac{\omega}{p}\right]} = \frac{(1 + j\omega\alpha\tau)}{(1 + j\omega\tau)}; \quad \alpha > 1$$

- Con  $\tau = 1/p$  y  $\alpha = p/z$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}(\alpha\omega\tau) - \tan^{-1}(\omega\tau)$$

## Ecuaciones (2)

- La ecuación del ángulo puede reescribirse, utilizando identidades trigonométricas generales, como:

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\alpha\omega\tau - \omega\tau}{1 + \alpha(\omega\tau)^2}$$

- Evaluando a la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_c$  la tangente  $p$  es:

$$p = \tan(\varphi(\omega_c)) = \frac{\alpha\omega_c\tau - \omega_c\tau}{1 + \alpha(\omega_c\tau)^2}$$

- Y la magnitud  $M$  (en dB) del compensador, expresada como número real  $c$  es:

$$M = 20\log_{10}\left(\frac{1 + (\alpha\omega_c\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2}\right)^{1/2} \longrightarrow c = 10^{M/10} = \frac{1 + (\alpha\omega_c\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2}$$

## Ecuaciones (3)

- Despejando  $\omega_c \tau$  de ambas ecuaciones anteriores y resolviendo las ecuaciones simultaneas:

$$(p^2 - c + 1)\alpha^2 + (2*p^2*c)\alpha + (p^2*c^2 + c^2 - c) = 0$$

- Luego resolviendo para  $\alpha$  con la condición:

$$c > p^2 + 1$$

- Sustituyendo el valor de  $\alpha$  obtenemos  $\tau$

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \times \sqrt{\frac{1-c}{c-\alpha^2}}$$

# Cálculo del compensador de adelanto con ganancia unidad (1)

- a) Defina la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_c$  requerida, que garantice que se cumple la especificación de ancho de banda  $BW$  ( $BW$  se lee entre  $-6\text{dB}$  y  $-7.5\text{dB}$ ).
- b) Defina el margen de fase deseado  $MF$  a la frecuencia de cruce de ganancia requerida, según la especificación de sobreimpulso.

$$MF = 100 \cdot \zeta$$



# Cálculo del compensador de adelanto con ganancia unidad (2)

- c) Determine la fase  $\varphi_m$ , ( $\varphi_m > 0$ ), que desea aumentar y tomando en cuenta que existe incertidumbre en la lectura del gráfico, sobrecompense con un pequeño margen de seguridad ( $3^\circ$  ó  $4^\circ$ , dependiendo de la gráfica).
- Si el ángulo requerido es  $> 70^\circ$ , puede ser necesario usar hasta un compensador doble.

$$\varphi_m = MF_{deseado} - MF_{\omega_c} + MSeg$$

- d) Luego haga

$$p = \tan(\varphi_m)$$

# Cálculo del compensador de adelanto con ganancia unidad (3)

- e) Encuentre el margen de ganancia  $MG$  en  $dB$  ( $MG > 0$ ) a la frecuencia  $\omega_c$  para que la curva de magnitud cruce por cero a esta frecuencia
- f) Luego encuentre la ganancia  $c$ , en números reales, que debe ser aportada por el compensador de adelanto a la frecuencia de cruce de ganancia definida  $\omega_c$

$$c = 10^{\frac{MG_{\omega_c}}{10}}$$

- g) Garantice, para un compensador de orden 1, que las raíces sean finitas verificando que:

$$c > p^2 + 1$$

# Cálculo del compensador de adelanto con ganancia unidad (4)

h) Resuelva para  $\alpha$  y tome el valor positivo, (ya que  $\alpha$  es una ganancia), como solución de:

$$(p^2 - c + 1)\alpha^2 + (2*p^2*c)\alpha + (p^2*c^2 + c^2 - c) = 0$$

i) Encuentre la constante de tiempo  $\tau$ :

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \times \sqrt{\frac{1-c}{c-\alpha^2}}$$

e) Escriba el compensador de adelanto como:

$$K_{LEAD}(s) = \alpha \frac{(s + 1/\alpha\tau)}{(s + 1/\tau)}; \quad \alpha > 1$$

# Formulas básicas

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r}$$

$$t_{S2\%} \geq \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

$$\zeta \cong \frac{MF}{100}, MF \leq 60^\circ \quad \omega_n \cong BW$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ln M}{\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\ln M}{\pi}\right)^2}}$$

Tipo de sistema	0	1	2
Coeficiente	$K_p$	$K_v$	$K_a$
$e_{ss}$	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$

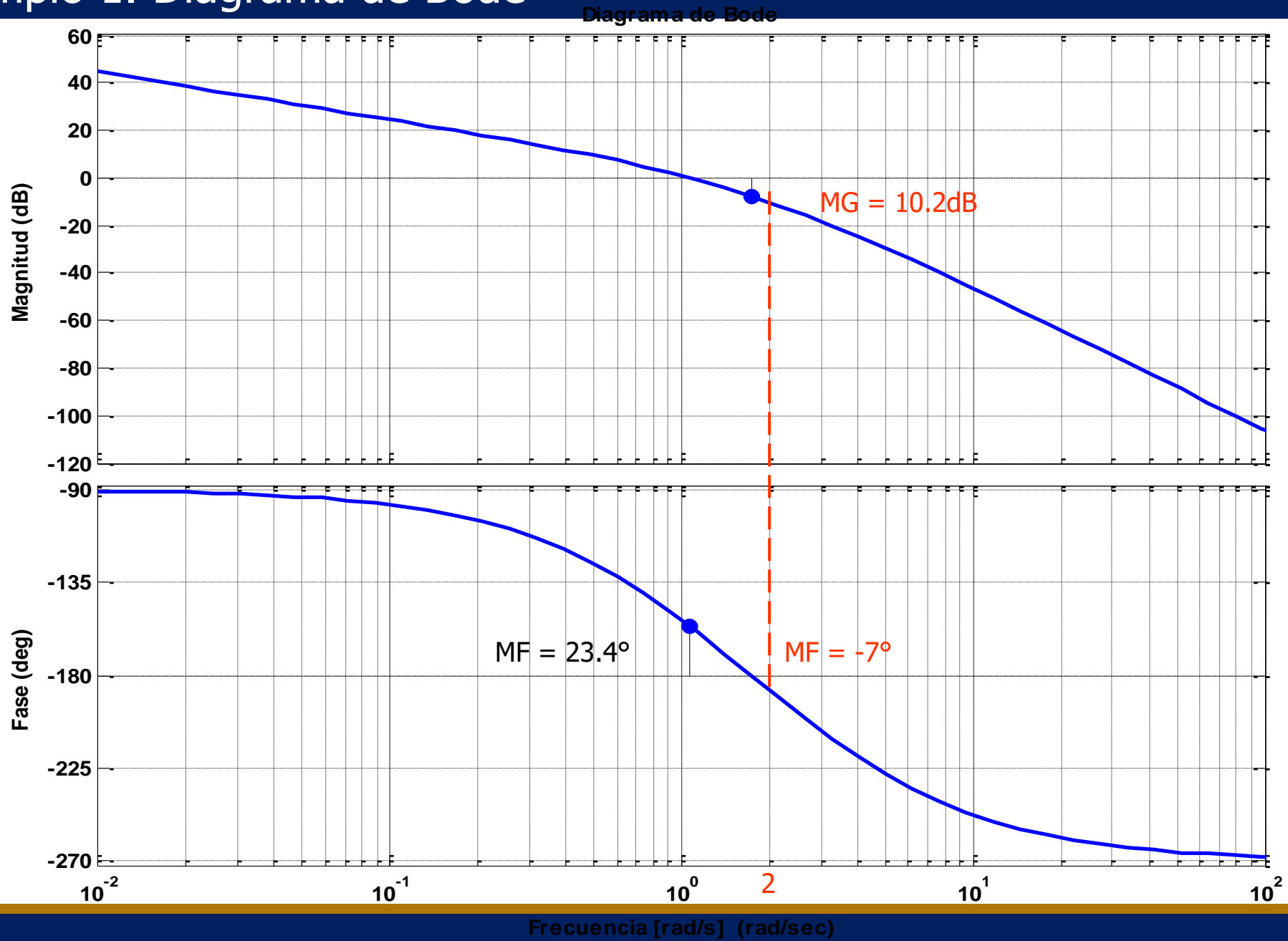
## Ejemplo 1. Descripción

Dado el sistema cuya gráfica de Bode se muestra:

$$G(s)H(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+3)} \quad H(s) = 1$$

- Haga que el margen de fase sea al menos de  $45^\circ$  a la frecuencia de  $2 \text{ rad/s}$

# Ejemplo 1. Diagrama de Bode



# Ejemplo 1. Cálculos

- La ganancia requerida a  $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$  es  $MG = 10.2 \text{ dB}$  y el margen de fase a  $2 \text{ rad/s}$  será  $= -7^\circ$ .  
Usando  $3.125^\circ$  como margen de seguridad tenemos:

$$\varphi_m = MF_{\text{deseado}} - MF_{\omega_c} + MSeg$$

$$c = 10^{\frac{MG_{\omega_c}}{10}}$$

$$\varphi_m = 45^\circ - (-7^\circ) + 3.125^\circ = 55.125^\circ$$

$$p = \tan(\varphi_m)$$

- Con  $p = \tan(\varphi_m) = 1.4348$  y  $c = 10^{(MG/10)} = 10.4$ , se verifica que  $(c > p^2 + 1)$ , queda entonces:

$$(p^2 - c + 1)\alpha^2 + (2 * p^2 * c)\alpha + (p^2 * c^2 + c^2 - c) = 0$$

$$(-7.3413)\alpha^2 + (42.82)\alpha + (320.424) = 0$$

- Resolviendo para  $\alpha$  y tomando la raíz positiva:

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 10.138 \\ -4.3053 \end{Bmatrix}$$

# Ejemplo 1. Cálculos

Calculamos la constante de tiempo del polo

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \times \sqrt{\frac{1-c}{c-\alpha^2}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1-10.4}{10.4-10.138^2}} = 0.1595$$

Y finalmente el compensador de adelanto

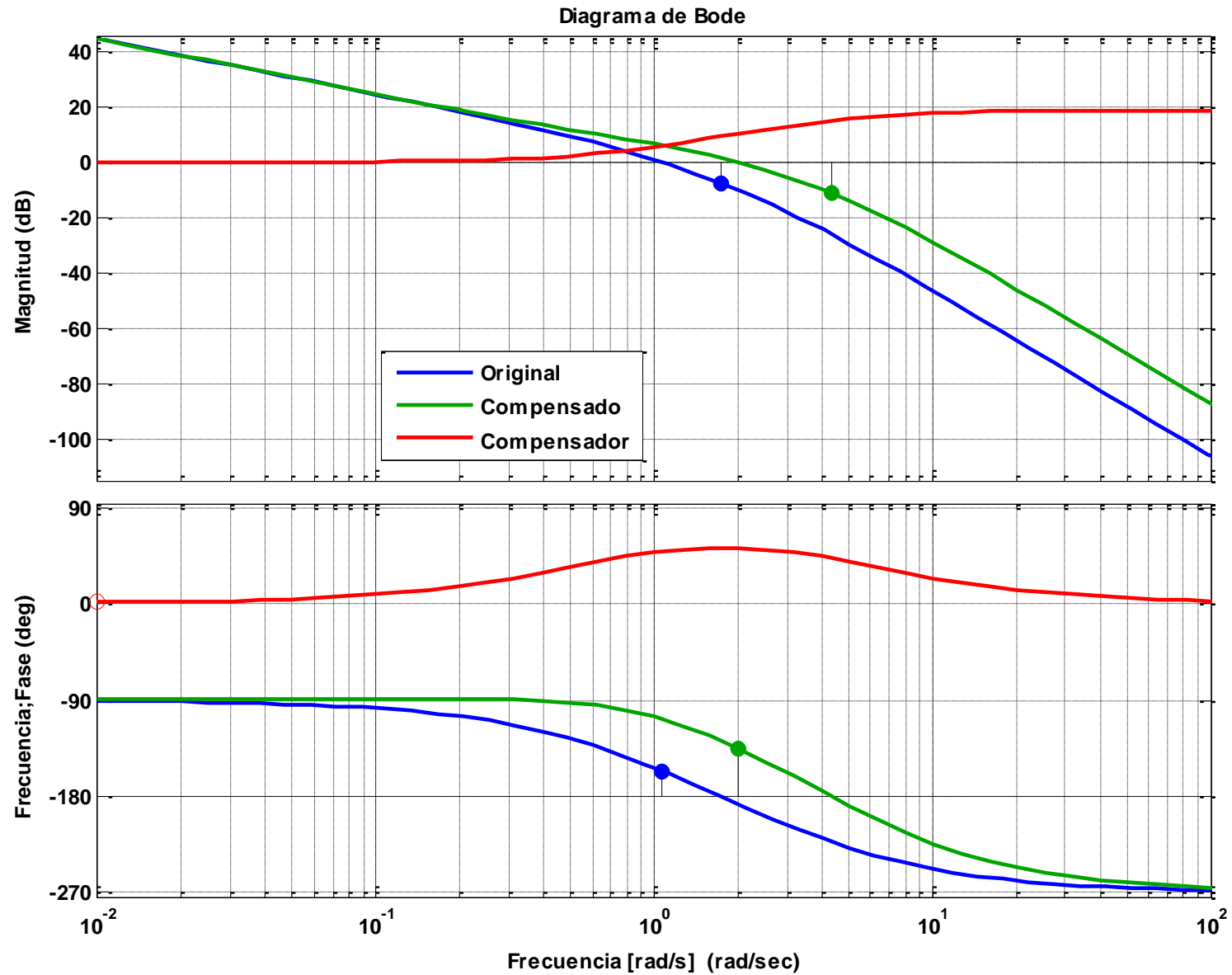
$$K_{LEAD}(s) = \alpha \frac{(s + 1/\alpha\tau)}{(s + 1/\tau)}; \quad \alpha > 1$$

$$K_{LEAD}(s) = 10.138 \frac{\left(s + \frac{1}{(10.138 * 0.1595)}\right)}{\left(s + \frac{1}{0.1595}\right)} =$$

$$K_{LEAD}(s) = 10.138 \frac{(s + 0.6184)}{(s + 6.27)}$$



# Ejemplo 1. Resultados



## Ejemplo 1. Análisis

- La frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_c$  es de  $2 \text{ rad/s}$  como se pidió; la ganancia requerida de  $10.2 \text{ dB}$ , fue proporcionada por el compensador de adelanto
- Se cumple el margen de fase pedido más el margen de seguridad; y todo ese adelanto de fase fue proporcionado por el compensador de adelanto a la frecuencia  $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$
- En este caso, de casualidad, la combinación de ambas, la ganancia y el adelanto de fase a la frecuencia  $\omega_c$ , se cumplen a aproximadamente la frecuencia media del compensador.

## Ejemplo 2. Descripción

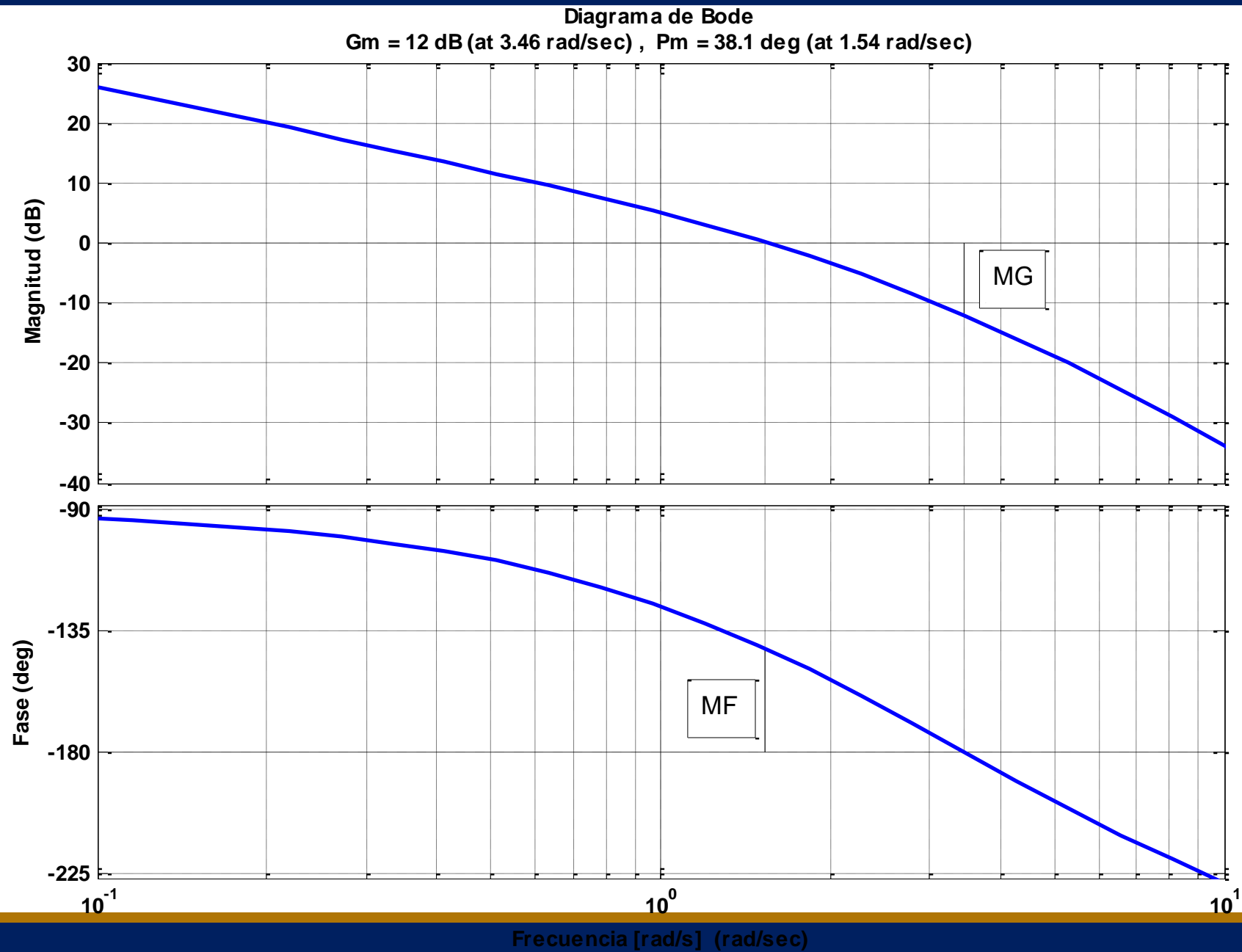
Dado el sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad H(s) = 1$$

Cuya gráfica de bode se muestra en la siguiente figura

Haga que el margen de fase sea al menos de  $60^\circ$  a  $3 \text{ rad/s}$

# Ejemplo 2. Descripción



## Ejemplo 2. Compensador de adelanto

$$MG = 9.6 \text{ dB} @ 3 \text{ rad/s}$$

$$MF' = 7^\circ @ 3 \text{ rad/s}$$

$$\phi_m = 60^\circ - 7^\circ + 2^\circ = 55^\circ$$

$$p = 1.428$$

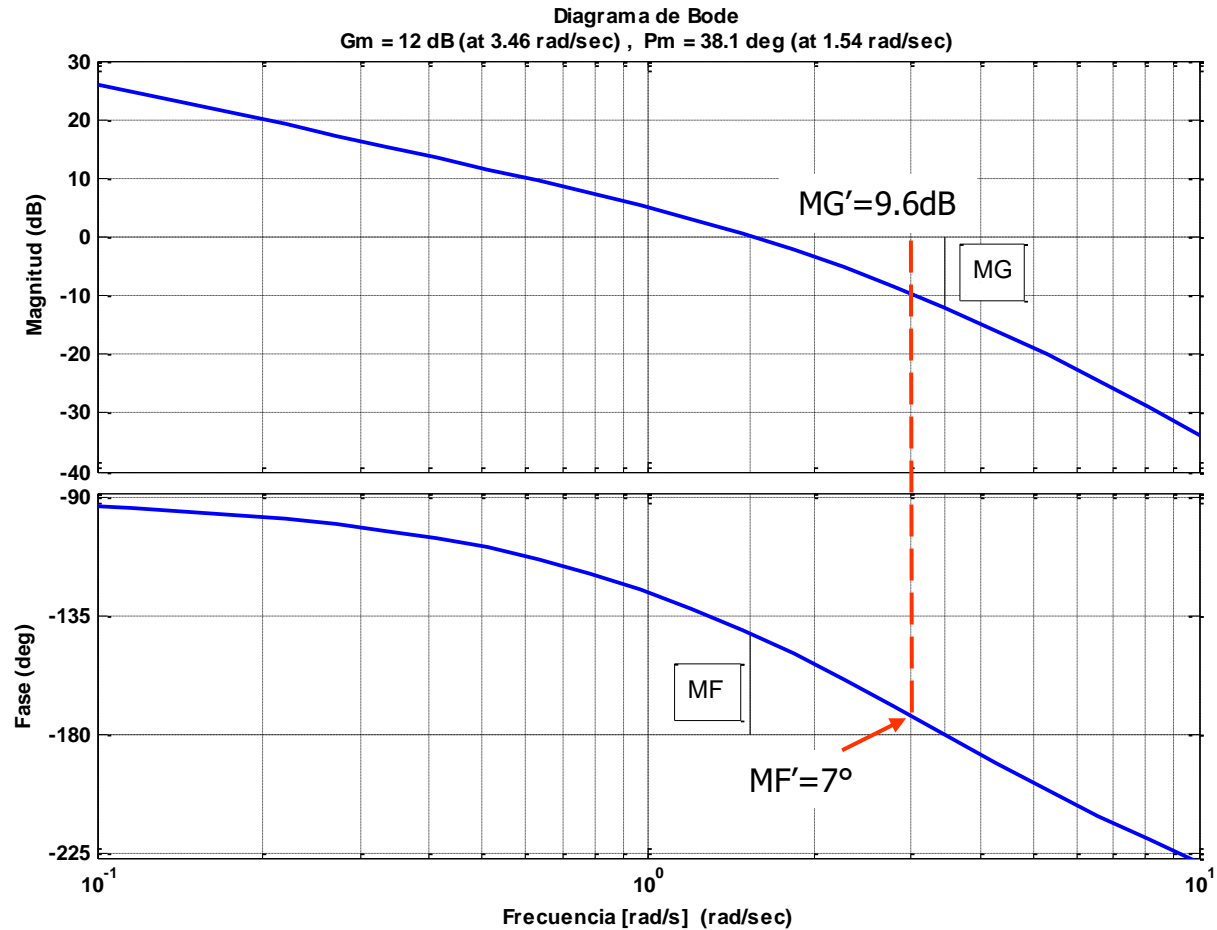
$$c = 9.12$$

$$\text{Cumple: } c > p^2 + 1$$

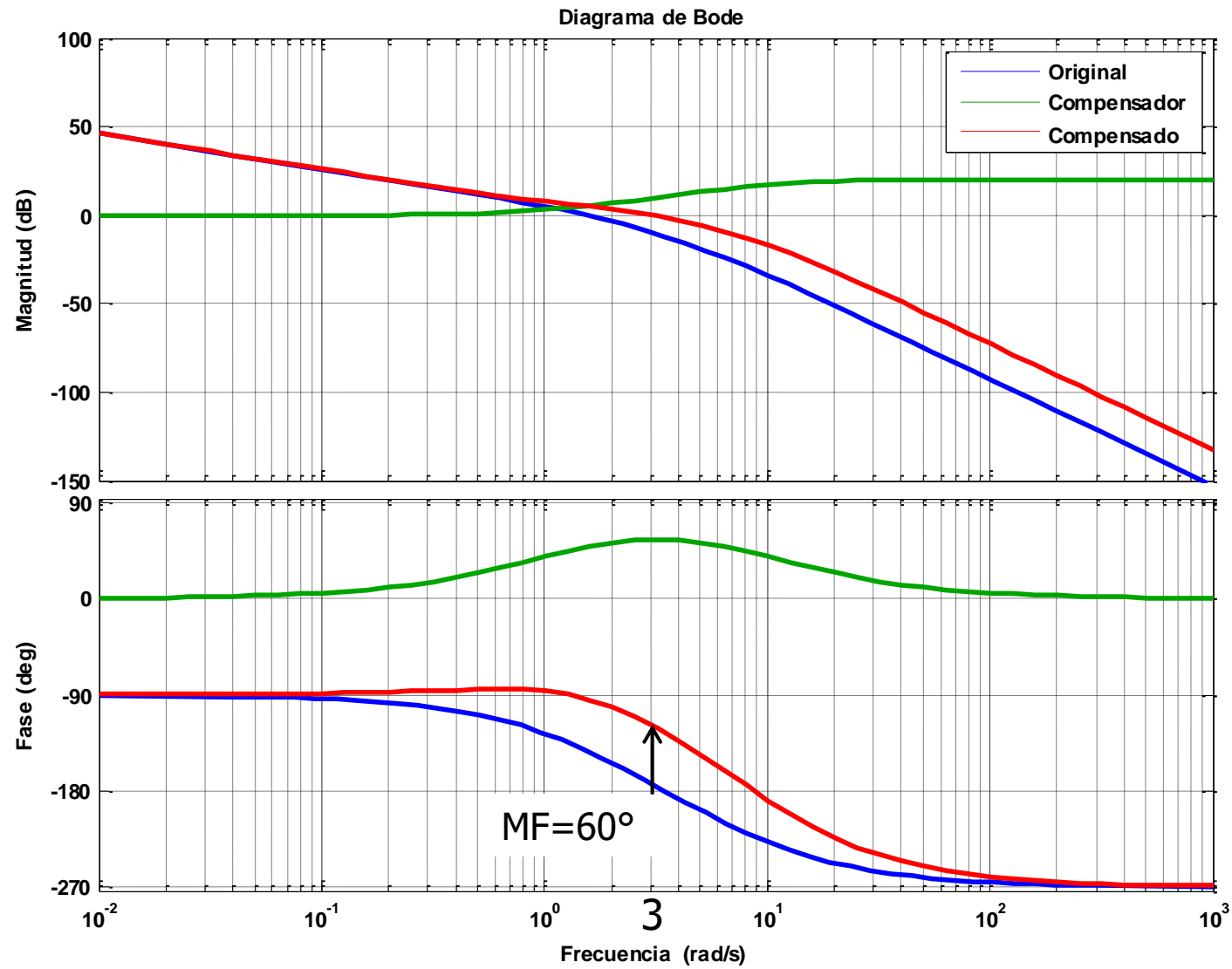
$$\alpha = \begin{cases} 10.0904 \\ -3.972 \end{cases}$$

$$\tau = 0.0987$$

$$K_{lead}(s) = 10.09 \cdot \frac{(s + 1.005)}{(s + 10.14)}$$



## Ejemplo 2. Resultados



## Ejemplo 2. Análisis

- Se logró dimensionar el compensador que produce simultáneamente un margen de fase de  $+60^\circ$  a la frecuencia escogida de  $3 \text{ rad/s}$  (relacionada con el ancho de banda).
- El margen de fase original de  $7^\circ$  fue llevado a  $+60^\circ$  por el compensador de adelanto calculado
- El margen de seguridad utilizado de  $2^\circ$  fue suficiente para que el resultado fuese satisfactorio.
- Si se obtienen sin demasiados errores los datos de  $MF$  y  $MG$  a la frecuencia escogida, el cálculo produce directamente un compensador adecuado.

## Ejemplo 3. Ejercicio

- Sintetice un compensador de adelanto-atraso para el ejemplo 2 que haga que el sistema tenga una respuesta con:
  - Error de estado estacionario menor al 5%
  - Tiempo de subida menor a  $0.15s$



# Referencias

- [1] Dorf, Richard; Bishop Robert. **“Sistemas de control moderno”**, 10ª Ed., Prentice Hall, España, 2005