Control por realimentación de estados - 01

Control Automático (EL-5408)

Escuela de de Ingeniería Electrónica

Relación entre el comportamiento en el tiempo y la ubicación de los polos

Representaciones en el espacio de estados de sists. definidos por su FT (I)

Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeñas, llamadas variables de estado.

Variables de estado

Sí se requieren al menos *n* variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico, entonces, éstas son un conjunto de variables de estado.

Relación entre el comportamiento en el tiempo y la ubicación de los polos

Representaciones en el espacio de estados de sists. definidos por su FT (II)

Considere un sistema cuya función de transferencia la cual se define como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \tag{1}$$

En este sistema, el espacio de estados se representa con:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2}$$

$$y = Cx + Du \tag{3}$$

En donde x describe el vector de estado, u la señal de entrada, y y la salida.

Relación entre el comportamiento en el tiempo y la ubicación de los polos

Representaciones en el espacio de estados de sists. definidos por su FT (III)

Al aplicar la transformada de Laplace a (2) y (3):

$$L\{\dot{x}\} = L\{Ax + Bu\} \tag{4}$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \tag{5}$$

Suponiendo que x(0)=0, entonces:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \tag{6}$$

$$X(s)(sI - A) = BU(s) \tag{7}$$

$$X(s) = \frac{BU(s)}{(sI - A)} \tag{8}$$

Ahora se aplica la transformada de Laplace a (3):

$$L\{y\} = L\{Cx + Du\} \tag{9}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{10}$$

Sustituyendo (8) en (10):

$$Y(s) = \frac{CB}{(sI - A)} U(s) + DU(s) \tag{11}$$

$$Y(s) = U(s)\left(\frac{CB}{sI - A} + D\right) \tag{12}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \left(\frac{CB + D(sI - A)}{|sI - A|} \right) \tag{13}$$

En donde $|sI - A|$ e el polinomio característico de $G(s)$. Los valores propios de una matriz A nxn, los valores propios son las raíces de la ecuación característica tal que:

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{14}$$

Una vez que se determina este polinomio, se procede a definir la matriz de transición de estados:

$$\varphi(t) = e^{At} \tag{15}$$

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} \tag{16}$$

$$\varphi(t, t_0) = L^{-1}\left\{[sI - A]^{-1}\right\} \tag{17}$$

Propiedades de la matriz de transferencia de estados

- $\varphi(0) = e^{A0} = I$
- $\varphi^{-1}(t) = |e^{At}|^{-1} = e^{-At} = \varphi(-t)$
- $\varphi(t_1 + t_2) = |e^{A(t_1+t_2)}| = e^{At_1}e^{At_2} = \varphi(t_1)\varphi(t_2)$
- $(\varphi(t))^n = \varphi(nt)$
- $\varphi(t_2 - t_1)\varphi(t_1 - t_0) = \varphi(t_2 - t_0) = \varphi(t_1 - t_0)\varphi(t_2 - t_1)$

Se definen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
& y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y \\
&= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} \tag{19}
$$

Forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{20}$$

$$y = [b_n - a_n b_0 | b_{n-1} - a_{n-1} b_0 | \dots | b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{21}$$

Forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \quad (22)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (23)$$

Forma canónica diagonal:

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{c_n}{s+p_n} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{25}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{26}$$

Forma canónica de Jordan:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)^3 (s+p_4)(s+p_5)\ldots(s+p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \ldots + \frac{c_n}{s+p_n} \qquad (27)$$

Forma canónica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & \dots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{28}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{29}$$

Ejemplo 1: (Ejercicio 9-1 [1])

Considere el sistema definido por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \tag{30}$$

Obtenga las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, en la observable y en la diagonal.

Controlabilidad

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{31}$$

Donde:

- u es la señal de control
- B es una matriz nx1
- x es un vector de estados
- A es una matriz nxn

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{32}$$

Si el $det[M] \neq 0$, el sistema es controlable.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo

Otros criterios para determinar controlabilidad incluyen:

- M cuya forma es (nxnr), tiene rango n.
- Si M no es cuadrada, se forma MM', la cual tiene forma nxn, y si ésta no es singular, M tiene rango.
- El par $[A, B]$, es completamente controlable si están en la forma canónica controlable o son transformables a esta.
- A está en la forma FCD, sus valores propios son diferentes y todos los elementos de B no son 0.
- A está en la forma FCJ y los elementos de B en los renglones que corresponden al último renglón de cada bloque de Jordan no son todos 0.

Controlabilidad a la salida

$$M = \left[\begin{array}{cccccc} CB & CAB & CA^2B & \ldots & CA^{n-1}B & D \end{array} \right] \tag{33}$$

La cual tiene la forma mx(n+1)r

- El sistema es controlable a la salida si ésta matriz posee rango m.
- Un sistema no es controlable si tiene un subsitema que esté desconectado físicamente de la entrada.

Observabilidad

El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible.

Observabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax \tag{34}$$

$$y = Cx \tag{35}$$

Donde:

- C es una matriz mxn
- x es un vector de estados de dimensión n
- y es un vector de salida de dimensión m

$$S = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Si el $det[S] \neq 0$, el sistema es observable.

Observabilidad

Otros criterios para determinar observabilidad incluyen:

- Si el sistema tiene solo una salida, C es una matriz de renglón de 1xn y S es una matriz cuadrada de nxn, entonces el sistema es completamente observable si S no es singular.
- Para un sistema SISO, el par $[A, C]$ es completamente observable si A y C están o son transformables a la FCO mediante ua trasformación de similitud.
- Si A está en la forma FCD, el par $[A, C]$ es completamente observable si todos los elementos en las columnas de C son diferentes de 0.
- A está en la forma FCJ, el par $[A, C]$ es completamente observable si todos los elementos en las columnas de C que corresponden al primer renglón de cada bloque de Jordan no son todos 0.

Ejemplo 2: (Ejercicio 9-14 [1])

Sea el sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{37}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

¿Es este sistema controlable y observable?

Solución: se identifican las matrices A y B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Sustituyendo los valores en (32):

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Por lo que:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (0)(-1) - (1)(1) = -1 \tag{43}$$

Ahora, se conoce a C:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Sustituyendo los valores en (36):

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Por lo que:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$|S| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(0) = 1 \tag{47}$$

Ahora, se conoce que los determinantes $|M|$ y $|S|$ son diferentes de 0, por lo que que puede decir que el sistema es controlable y observable.

Ejemplo 2:

Sea el sistema descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{48}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{49}$$

¿Es este sistema controlable y observable?

Bibliografía

K. Ogata.
Ingeniería de control moderna.
Pearson educación, EE.UU., 2010.