Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL 4703 Señales y Sistemas

II Semestre 2019
Programa de Tutorías

Tutoría 12: Transformada de Laplace y sistemas LTI

Ejercicio 1. La función de transferencia de un sistema estable es:

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 - 4}$$

¿Cuál es la respuesta al impulso del sistema?

Respuesta:

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{2t}u(-t)$$

Ejercicio 2. Se conocen los siguientes datos de una señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$:

a. $x(t)$ es real y par.

b. $X(s)$ tiene 4 polos y ningún cero en el plano finito s.

c. $X(s)$ tiene un polo en $s = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$.

d. $X(0) = 1$.

Encuentre una expresión para $X(s)$ y su respectiva ROC.

Respuesta:

$$X(s) = \frac{4}{s^4 + 4} \qquad ROC : -1 < \sigma < 1$$

Ejercicio 3. Sea $x(t)$ y $y(t)$ funciones definidas en la figura 1.

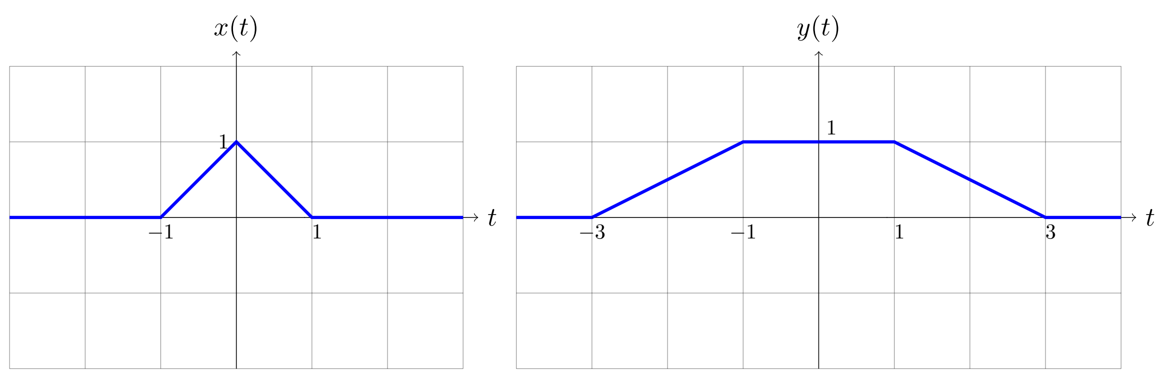


Figura 1: Funciones $x(t)$ y $y(t)$ para el ejercicio 3.

Encuentre la transformada de Laplace de la función $y(t)$ mostrada en la figura 1, a partir de la transformada de Laplace de $x(t)$, siguiendo los siguientes pasos:

a. Exprese la función $y(t)$ como una suma de dos términos $\alpha x(kt+\tau)$, donde α, k, $\tau \in \mathbb{R}$.

b. Demuestre que la transformada de Laplace de $x(t)$ es:

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{e^{s} + e^{-s} - 2}{s^2} = \frac{2\cosh(s) - 2}{s^2}$$

c. Utilice las propiedades de la transformada de Laplace para encontrar $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$

Respuesta:

a. $y(t) = x\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) + x\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)$

b. *Demostrar*

c. $Y(s) = 2\cosh(s)\frac{\cosh(2s) - 1}{s^2}$

Ejercicio 4. Un sistema LTI causal en reposo, se rige por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\alpha\frac{d}{dt}y(t) + (\alpha^2 + 1)y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Ecuentre la función de transferencia del sistema $H(s)$.

b. Grafique el diagrama de polos y ceros del sistema. Indique en el diagrama la región de convergencia correspondiente.

c. Indique el rango de valores de α para los cuales el sistema es estable.

d. Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

e. Si al sistema se le introduce una señal $x(t) = \delta(t) + [(\alpha^2 + 1)t - 2\alpha]u(t)$, encuentre la respuesta $y(t)$ del sistema a dicha entrada.

Respuesta:

a. $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2 - 2\alpha s + (\alpha^2 + 1)}$

b. $\sigma > \alpha$

c. $\alpha < 0$

d. $h(t) = e^{\alpha t}[\cos(t) + \alpha\sin(t)]u(t)$

e. $y(t) = u(t)$

Ejercicio 5. La siguiente ecuación diferencial

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\frac{d}{dt}x(t)$$

caracteriza a un sistema LTI en tiempo continuo con respuesta al impulso $h(t)$, función de transferencia $H(s)$, entrada $x(t)$ y salida $y(t)$.

a. Encuentre la función de transferencia $H(s)$ del sistema, indique su región de convergencia si se sabe que el sistema es causal.

b. Grafique el diagrama de polos y ceros de $H(s)$ en el plano s.

c. ¿El sistema caracterizado por $H(s)$ es estable? Justifique.

d. A la salida del sistema se coloca, en cascada, otro sistema caracterizado por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s-1}{2s}, \quad \text{ROC} : \sigma > 0$$

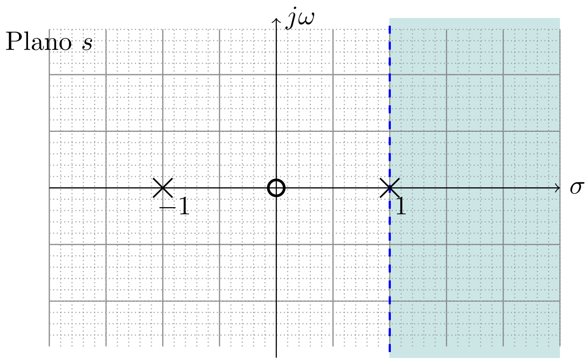
¿Cuál es la función de transferencia del sistema total $Q(s)$ compuesta por los subsistemas en cascada $H(s)$ y $G(s)$? Grafique el diagrama de polos y ceros del sistema $Q(s)$ con su correspondiente región de convergencia.

e. Encuentre la respuesta al impulso $q(t)$ del sistem $Q(s)$.

Respuesta:

a. $H(s) = \dfrac{2s}{(s-1)(s+1)}$ $\qquad$ *ROC* : $\sigma > 1$

b.



c. *No es estable.*

d. $Q(s) = \dfrac{1}{s+1}$ $\qquad$ $\sigma > -1$

e. $q(t) = e^{-t}u(t)$

Ejercicio 6. Considere el sistema LTI mostrado en la figura 2, para el cual se conoce la siguiente información:

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}, \quad \text{con } x(t) = 0 \text{ para } t > 0$$
$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

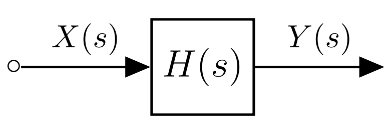


Figura 2: Sistema LTI del ejercicio 6.

a. Determine $H(s)$ y su región de convergencia.

b. Determine $h(t)$.

Respuesta:

a. $H(s) = \dfrac{s}{(s+2)(s+1)}$ $\qquad$ $ROC : \sigma > -1$

b. $h(t) = [2e^{-2t} - e^{-t}]u(t)$

Ejercicio 7. La señal $y(t) = e^{-2t}u(t)$ es la salida de un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal, que tiene función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

a. Encuentre al menos dos posibles entradas $x(t)$ que pueden producir la salida $y(t)$ descrita. Dibuje el diagrama de polos y ceros de $X(s)$ y explique sus decisiones.

b. Manteniendo las condiciones anteriores, ¿cuál sería la entrada del sistema? Si se sabe que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

c. Encuentre la respuesta al impulso si ahora el sistema es estable y tiene como entrada a la señal $y(t)$ y de salida alguna de las $x(t)$ anteriores.

d. ¿Cuál es ahora la salida $x(t)$ si se cumple la condición anterior?

Respuesta:

a. $x_1(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) + \frac{2}{3}e^{t}u(t)$
$x_2(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{t}u(-t)$

b. $x_2(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{t}u(-t)$

c. $g(t) = \delta(t) - 2e^{t}u(-t)$

d. $x(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{t}u(-t)$

Ejercicio 8. Sea la función $f(t)$ dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -\alpha \leq t \leq \alpha \\ 0 & |t| \geq \alpha \end{cases}$$

a. Demuestre que la expresión algebraica de la transformada de Laplace de $f(t)$ está dada por:

$$F(s) = \frac{e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}}{s}$$

Indique la región de convergencia de $F(s)$.

b. Exprese la función $g(t)$ mostrada en la figura 3, en términos de combinaciones lineales de $f(t)$ y/o traslaciones y escalamientos en el tiempo.

c. Utilice las propiedades de la transformada de Laplace y los resultados del punto anterior para encontrar $G(s)$.

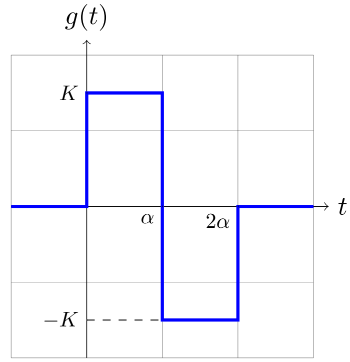


Figura 3: Función a utilizar en el ejercicio 8.

Respuesta:

a. $F(s) = \dfrac{e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}}{s}$, *ROC: todo el plano s*

b. $g(t) = kf(2t-\alpha) - kf(2t-3\alpha)$

c. $G(s) = \dfrac{k}{2}(1-e^{-\alpha s})^2$

Ejercicio 9. Consisdere un sistema caracterizado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

a. Determine la respuesta de estado cero de este sistema para la entrada $x(t) = e^{-4t}u(t)$. Considere que el sistema tiene un polo de orden 1 en $s = -3$.

b. Determine la respuesta de entrada cero de este sistema para $t > 0^-$ considerando que:

$$y(0^-) = 1 \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -1 \qquad \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} = 1$$

c. Determine la salida del sistema considerando la señal de entrada y las condiciones iniciales planteadas anteriormente.

Respuesta:

a. $y_{zs}(t) = \left[\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right]u(t)$

b. $y_{zi}(t) = e^{-t}u(t)$

c. $y(t) = \left[\frac{7}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right]u(t)$

Ejercicio 10. Determine la transformada unilateral de Laplace de

$$x(t) = \delta(t) + \delta(t+1) + e^{-2(t+3)}u(t+1)$$

Si $X(s)$ es la transformada obtenida para $x(t)$, encuentre a partir de $X(s)$ la transformada de la función $g(t) = x(t-1)$.

Respuesta:

- $X(s) = \dfrac{s + 2 + e^{-6}}{s + 2} \qquad ROC : \sigma > -2$
- $G(s) = \dfrac{se^{-s} + 2e^{-s} + s + 2 + e^{-4}}{s + 2} \qquad ROC : \sigma > -2$