Control por realimentación de estados - 02

Control Automático (EL-5408)

Escuela de de Ingeniería Electrónica

Se determina un sistema de control:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

$$y = Cx + Du \tag{2}$$

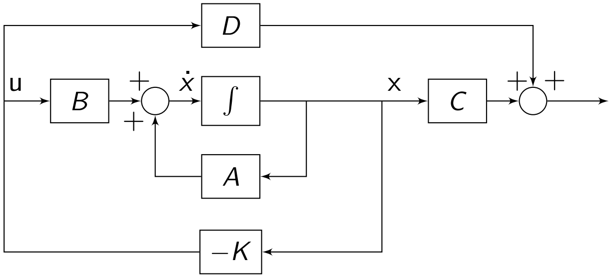
Donde:
x = vector de estado de dimensión de n.
y = señal de salida, que es un valor escalar.
u = señal de control, que es un valor escalar.
A = matriz nxn.
B = matriz nx1.
C = matriz 1xn.
D = constante.

Se selecciona una señal de control u, tal que:

$$u = -Kx \tag{3}$$

K se define como una matriz $1xn$, la cual se llama matriz de ganancia de realimentación de estado.
Se puede definir un sistema el cual no tenga restricciones sobre u, el cual se conoce como un sistema regulador, y se caracteriza por ser un de lazo cerrado y sin entradas, el cual se espera tenga salida igual a 0, sin embargo, el efecto de perturbaciones, hace que esta se desvíe de este valor.

Una forma básica de este tipo de sistemas se puede describir gráficamente como:



La única condición para la asignación de polos es que el sistema debe ser completamente controlable. Si esta condición no se cumple, se debe comenzar por demostrar que los valores propios de la matriz $A - BK$ no se pueden controlar por realimentación de estado.
Para lograr lo propuestos, se debe comenzar con la determinación del rango de la matriz de controlabilidad M.

$$rango\,[M] = q < n \tag{4}$$

Lo que significa que existen q vectores columna linealmente independientes en la matriz de controlabilidad.

Los vectores q se definen como f_1, f_2, $\dots$, f_q y junto a los $n-q$ vectores adicionales v se forma la ecuación:

$$P = [f_1|\dots|f_q|v_{q+1}|\dots|v_n] \tag{5}$$

P tiene rango n, y permite la formación de las matrices las matrices:

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \tag{6}$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \left[\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline 0 \end{array}\right] \tag{7}$$

$$\hat{K} = KP = \left[\begin{array}{c|c} K_1 & K_2 \end{array}\right] \tag{8}$$

Estas matrices se definen por medio de la determiación de las matrices A_{11}, A_{12},A_{21} y A_{22}:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1q+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2q+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{qq+1} & \dots & a_{qn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{q+1q+1} & \cdots & a_{q+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nq+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{q1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Al observar lo anterior, se puede observar que los valores de A_{22} no depende de K, por lo que se comprueba a su vez, que para colocar de manera arbitraria los valores propios de $A - BK$, el sistema debe ser completamente controlable.
Luego de determinar que el sistema es controlable, se debe transformar el sistema a su forma canónica controlable:

$$T = MW \tag{14}$$

Recordando que:

$$M = \left[B|AB|\ldots|A^{n-1}B\right] \tag{15}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Recordando que los coeficientes a_i son los coeficientes del polinomio característico:

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n \tag{17}$$

Se define un nuevo vector de estado, el cual se llama $\hat{x}$:

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu \tag{18}$$

Para esta ecuación se determina :

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n \tag{19}$$

En donde:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Luego, se seleccionan los valores propios deseados $\mu_1, \ldots, \mu_n$, los cuales dan forma a la ecuación característica:

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0 \tag{22}$$

Seguidamente se denota:

$$KT = \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Por último, se usa la identidad $u = KT\hat{x}$ y se sustituye en (18):

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT + T^{-1}BKT\hat{x} \tag{24}$$

Por último, relacionando todas los valores definidos en la ecuación característica, se puede obtener la matriz K de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} \delta_n & \delta n - 1 & \dots & \delta_1 \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_n - a_n & \alpha_{n-1} - a_{n-1} & \dots & \alpha_1 - a_1 \end{array} \right] T^{-1} \end{aligned} \tag{25}$$

Determinación de la matriz K utilizando T

- Comprobar la controlabilidad del sistema.
- Determinar los valores a_i a partir del polinomio característico.
- Calcular T a partir del cálculo previo de M y W.
- Por medio de los valores propios deseados, escriba el polinomio característico de la forma (22) y determine los valores α_i.
- Determine K por medio de la ecuación (25).

Determinación de la matriz K utilizando el método de sustitución directa
Si $n \leqslant 3$:

- Escriba K de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \tag{26}$$

- Sustituya K en el polinomio característico $|sI - A + BK|$ e igualelo a $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$.
- Por último, ya que ambos lados de la ecuación está en términos de s, calcule los términos k_i, igualando los coeficientes de las potencias iguales de s.

Determinación de la matriz K utilizando fórmula de Ackermann
Se define un sistema de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{27}$$

Usando una señal de control de la forma

$$u = -Kx \tag{28}$$

El cálculo de K se realiza de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A) \tag{29}$$

En donde $\phi(A)$ es el polinomio característico evaluado en la matriz A original.

Ejemplo 3 [Ejercicio 10-1 [1]]

Sea el sistema regulador:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{30}$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El sistema usa el cotrol mediante realimentación del estado $u = -Kx$. Se escogen los polos en lazo cerrado en:

$$s = -2 + j4,\ s = -2 - j4,\ s = -10$$

Determine la matriz de realimentación del estado K.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \\ 6 & 29 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 31 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{33}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ -1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Métodos:

- Cálculo de K por medio de T

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & (s+6) \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 5s + 1 = 0 \tag{35}$$

De lo anterior se identifican los valores a_i:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 1$$

Ya que se conocen los polos deseados, entoces se calcula la ecuación característica:

$$(s+2-j4)(s+2+j4)(s+10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200 = 0 \tag{36}$$

De lo anterior se identifican los valores α_i:

$$\alpha_1 = 14, \quad \alpha_2 = 60, \quad \alpha_3 = 200$$

$$k_1 = \alpha_3 - a_3 = 200 - 1 = 199 \tag{37}$$

$$k_2 = \alpha_2 - a_2 = 60 - 5 = 55 \tag{38}$$

$$k_3 = \alpha_1 - a_1 = 14 - 6 = 8 \tag{39}$$

$$K = \left[\begin{array}{ccc} 199 & 55 & 8 \end{array}\right] \tag{40}$$

- Cálculo de K por sustitución directa:

Como se explicó anteriormente, se inicia con la definición de la matriz (26), para luego sustituir en la ecuación característica $|sI - A + BK|$:

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ (1+k_1) & (5+k_2) & (s+6+k_3) \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + (6+k_3)s^2 + (5+k_2)s + 1 + k_1 \tag{41}$$

De esta forma, se igualan los coeficientes, con la ecuación característica definida en (36).

De modo que:

$$\begin{aligned} 6 + k_3 &= 14 \\ k_3 &= 8 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} 5 + k_2 &= 60 \\ k_2 &= 55 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} 1 + k_1 &= 200 \\ k_1 &= 199 \end{aligned} \tag{44}$$

$$K = \left[\begin{array}{ccc} 199 & 55 & 8 \end{array} \right] \tag{45}$$

- Cálculo de K por medio de la fórmula de Ackermann:

Conociendo que $s^3+14s^2+60s+200$ es la ecuación característica definida, se procede de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \mid AB \mid A^2B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A) \tag{46}$$

$$\phi(A) = A^3 + 14A^2 + 60A + 200I \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \phi(A) = {} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 \\ & + 60 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{48}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Además, conociendo (44), se sustituye en (29), obteniendo:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ -1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{50}$$

Bibliografía

K. Ogata.
Ingeniería de control moderna.
Pearson educación, EE.UU., 2010.