Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL 4703 Señales y Sistemas

II Semestre 2019
Programa de Tutorías

Tutoría 12: Transformada de Laplace y sistemas LTI

Ejercicio 1. La función de transferencia de un sistema estable es:

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 - 4}$$

¿Cuál es la respuesta al impulso del sistema?

Ejercicio 2. Se conocen los siguientes datos de una señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$:

a. $x(t)$ es real y par.

b. $X(s)$ tiene 4 polos y ningún cero en el plano finito s.

c. $X(s)$ tiene un polo en $s = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$.

d. $X(0) = 1$.

Encuentre una expresión para $X(s)$ y su respectiva ROC.

Ejercicio 3. Sea $x(t)$ y $y(t)$ funciones definidas en la figura 1.

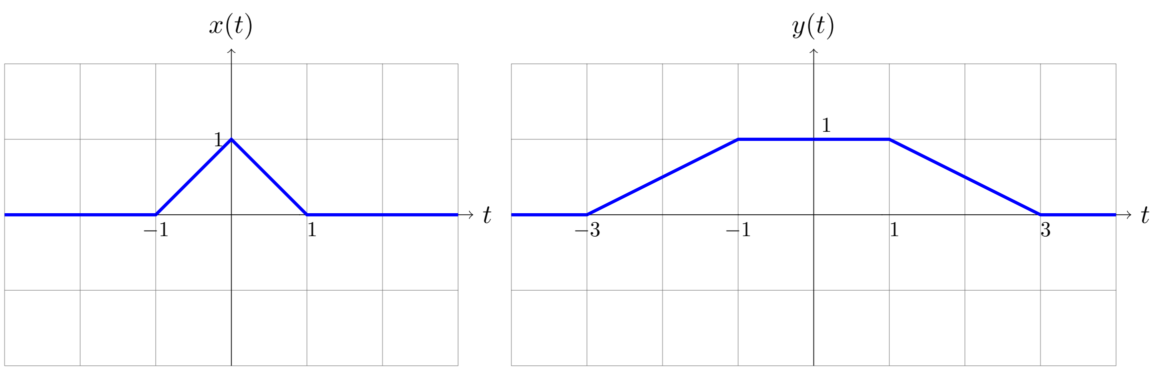

Figura 1: Funciones $x(t)$ y $y(t)$ para el ejercicio 3.

Encuentre la transformada de Laplace de la función $y(t)$ mostrada en la figura 1, a partir de la transformada de Laplace de $x(t)$, siguiendo los siguientes pasos:

a. Exprese la función $y(t)$ como una suma de dos términos $\alpha x(kt + \tau)$, donde α, k, $\tau \in \mathbb{R}$.

b. Demuestre que la transformada de Laplace de $x(t)$ es:

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{e^{s} + e^{-s} - 2}{s^2} = \frac{2\cosh(s) - 2}{s^2}$$

c. Utilice las propiedades de la transformada de Laplace para encontrar $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$

Ejercicio 4. Un sistema LTI causal en reposo, se rige por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\alpha\frac{d}{dt}y(t) + (\alpha^2+1)y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Ecuentre la función de transferencia del sistema $H(s)$.

b. Grafique el diagrama de polos y ceros del sistema. Indique en el diagrama la región de convergencia correspondiente.

c. Indique el rango de valores de α para los cuales el sistema es estable.

d. Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

e. Si al sistema se le introduce una señal $x(t) = \delta(t) + [(\alpha^2+1)t - 2\alpha]u(t)$, encuentre la respuesta $y(t)$ del sistema a dicha entrada.

Ejercicio 5. La siguiente ecuación diferencial

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\frac{d}{dt}x(t)$$

caracteriza a un sistema LTI en tiempo continuo con respuesta al impulso $h(t)$, función de transferencia $H(s)$, entrada $x(t)$ y salida $y(t)$.

a. Encuentre la función de transferencia $H(s)$ del sistema, indique su región de convergencia si se sabe que el sistema es causal.

b. Grafique el diagrama de polos y ceros de $H(s)$ en el plano s.

c. ¿El sistema caracterizado por $H(s)$ es estable? Justifique.

d. A la salida del sistema se coloca, en cascada, otro sistema caracterizado por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s-1}{2s}, \quad \text{ROC} : \sigma > 0$$

¿Cuál es la función de transferencia del sistema total $Q(s)$ compuesta por los subsistemas en cascada $H(s)$ y $G(s)$? Grafique el diagrama de polos y ceros del sistema $Q(s)$ con su correspondiente región de convergencia.

e. Encuentre la respuesta al impulso $q(t)$ del sistem $Q(s)$.

Ejercicio 6. Considere el sistema LTI mostrado en la figura 2, para el cual se conoce la siguiente información:

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}, \quad \text{con } x(t) = 0 \text{ para } t > 0$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

a. Determine $H(s)$ y su región de convergencia.

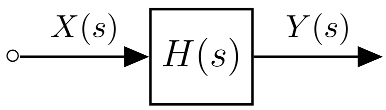

Figura 2: Sistema LTI del ejercicio 6.

b. Determine $h(t)$.

Ejercicio 7. La señal $y(t) = e^{-2t}u(t)$ es la salida de un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal, que tiene función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

a. Encuentre al menos dos posibles entradas $x(t)$ que pueden producir la salida $y(t)$ descrita. Dibuje el diagrama de polos y ceros de $X(s)$ y explique sus decisiones.

b. Manteniendo las condiciones anteriores, ¿cuál sería la entrada del sistema? Si se sabe que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

c. Encuentre la respuesta al impulso si ahora el sistema es estable y tiene como entrada a la señal $y(t)$ y de salida alguna de las $x(t)$ anteriores.

d. ¿Cuál es ahora la salida $x(t)$ si se cumple la condición anterior?

Ejercicio 8. Sea la función $f(t)$ dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -\alpha \leq t \leq \alpha \\ 0 & |t| \geq \alpha \end{cases}$$

a. Demuestre que la expresión algebraica de la transformada de Laplace de $f(t)$ está dada por:

$$F(s) = \frac{e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}}{s}$$

Indique la región de convergencia de $F(s)$.

b. Exprese la función $g(t)$ mostrada en la figura 3, en términos de combinaciones lineales de $f(t)$ y/o traslaciones y escalamientos en el tiempo.

c. Utilice las propiedades de la transformada de Laplace y los resultados del punto anterior para encontrar $G(s)$.

Ejercicio 9. Consisdere un sistema caracterizado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

a. Determine la respuesta de estado cero de este sistema para la entrada $x(t) = e^{-4t}u(t)$. Considere que el sistema tiene un polo de orden 1 en $s = -3$.

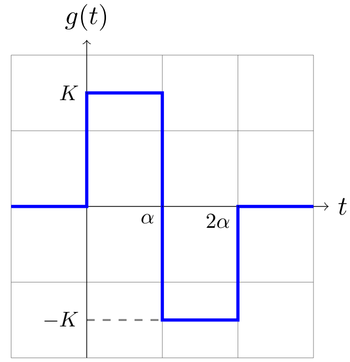

Figura 3: Función a utilizar en el ejercicio 8.

b. Determine la respuesta de entrada cero de este sistema para $t > 0^-$ considerando que:

$$y(0^-) = 1 \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -1 \qquad \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} = 1$$

c. Determine la salida del sistema considerando la señal de entrada y las condiciones iniciales planteadas anteriormente.

Ejercicio 10. Determine la transformada unilateral de Laplace de

$$x(t) = \delta(t) + \delta(t+1) + e^{-2(t+3)}u(t+1)$$

Si $X(s)$ es la transformada obtenida para $x(t)$, encuentre a partir de $X(s)$ la transformada de la función $g(t) = x(t-1)$.