

Formulario
EL-4703 Señales y Sistemas

Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Prof.: Dr. Pablo Alvarado Moya

$$\sum_{n=0}^M \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{M+1}}{1 - \alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

$$\sin(A \pm B) = \sin(A) \cos(B) \pm \cos(A) \sin(B)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A) \cos(B) \mp \sin(A) \sin(B)$$

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2A))$$

$$\sin^2(A) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2A))$$

$$\sin(A) \sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B))$$

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A - B) + \cos(A + B))$$

$$\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A - B) + \sin(A + B))$$

$$\tan(A) = \sin(A) / \cos(A)$$

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(A))}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(A))}$$

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$$

$$\sin(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

$$\sinh(\omega) = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}$$

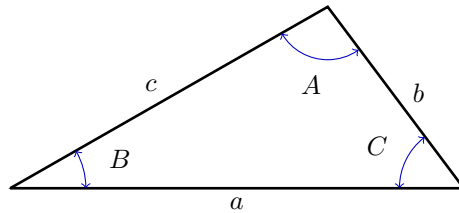
$$\cosh(\omega) = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}$$

Ley de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



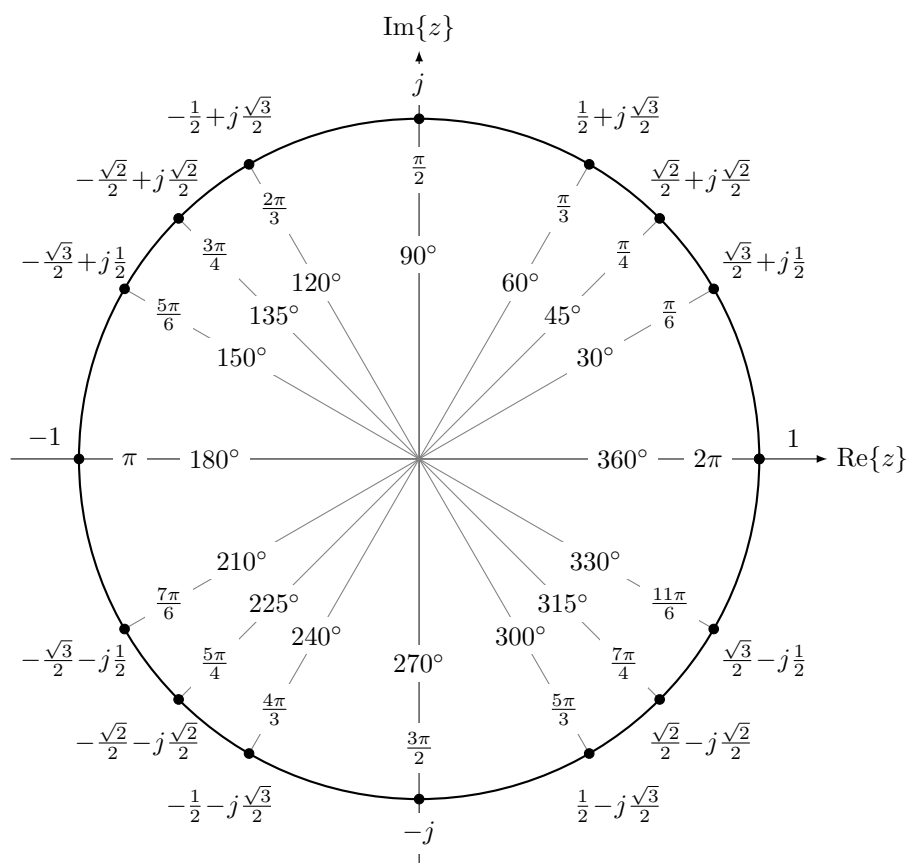
Teorema de De Moivre

$$(re^{j\theta})^p = r^p e^{jp\theta} \rightarrow (re^{j\theta})^{1/n} = [re^{j(\theta+2k\pi)}]^{1/n} = r^{1/n} e^{j(\theta+2k\pi)/n}; n, k, p \in \mathbb{Z}, k \in [0, 1, \dots, n-1]$$

Logaritmo de un número complejo

$$\ln(re^{j\theta}) = \ln r + j\theta + j2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Posiciones del círculo unitario $|z| = 1$



Integrales (C es una constante cualquiera)

$$\int f(z) dz = F(z) \Rightarrow F'(z) = f(z)$$

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$$

$$\int e^{az} dz = \frac{e^{az}}{a} + C$$

$$\int \sin(az) dz = -\frac{\cos(az)}{a} + C$$

$$\int \cos(az) dz = \frac{\sin(az)}{a} + C$$

$$\int \sin^2(az) dz = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4a} \sin(2az) + C$$

$$\int \ln(az) dz = z(\ln az) - z + C$$

$$\int z^{-1} dz = \ln z + C$$

$$\int ze^{az} dz = \frac{e^{az}}{a^2} (az - 1) + C$$

$$\int z \sin(az) dz = \frac{1}{a^2} [\sin(az) - az \cos(az)] + C$$

$$\int z \cos(az) dz = \frac{1}{a^2} [\cos(az) + az \sin(az)] + C$$

$$\int \cos^2(az) dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4a} \sin(2az) + C$$

$$\int \frac{1}{z^2 + a^2} dz = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{z}{a}\right) + C$$

Descomposición en funciones simétricas

$$\begin{aligned} f(t) &= f_e(t) + f_o(t), & f_e(t) &= f_e(-t), & f_o(t) &= -f_o(-t) \\ f_e(t) &= \frac{f(t) + f(-t)}{2} & f_o(t) &= \frac{f(t) - f(-t)}{2} \end{aligned}$$

Mapeos

$$z = x + jy$$

$$w = u + jv$$

Círculo centrado en z_0 y radio r :

$$|z - z_0| = r$$

Recta mediatriz al segmento entre a y b :

$$|z - a| = |z - b|$$

Mapeo lineal:

$$w = \alpha z + \beta$$

Mapeo de inversión:

$$w = 1/z$$

• Mapeo de rectas: $|z - a| = |z - b|$

• Mapeo de círculos: $|z - z_0| = r$

$$\bullet \beta = |a|^2 - |b|^2$$

$$\bullet \alpha = r^2 - |z_0|^2$$

$$\bullet \beta = 0 \rightarrow v = \frac{\operatorname{Re}\{a - b\}}{\operatorname{Im}\{a - b\}} u$$

$$\bullet \alpha = 0 \rightarrow v = \frac{x_0}{y_0} u - \frac{1}{2y_0}$$

$$\bullet \beta \neq 0 \rightarrow |w - w_0| = r_w \text{ con:}$$

$$r_w = \left| \frac{a - b}{\beta} \right|, w_0 = \frac{(a - b)^*}{\beta}$$

$$\bullet \alpha \neq 0 \rightarrow |w - w_0| = r_w \text{ con:}$$

$$r_w = \left| \frac{r}{\alpha} \right|, w_0 = \frac{-z_0^*}{\alpha}$$

Mapeo bilineal:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta},$$

$$\lambda = a/c, \mu = bc - ad, \alpha = c^2, \beta = cd$$

$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy}$$

Mapeo exponencial:

Derivación compleja

Para $f(z = x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$.

Ecuaciones de Cauchy Riemann $\exists f'(z) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} =$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$$

Funciones conjugadas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ si cumplen Ec. Cauchy-Riemann.

$$\text{Función armónica: } \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Mapeo conforme: $\exists f'(z), f'(z) \neq 0$

Series

Radio de convergencia R y razón de D'Alembert para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

$$\text{Serie de Taylor: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\text{Serie de Laurent: } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$\begin{aligned} \text{Residuo: } a_{-1} &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\} \\ e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots && ; |z| < \infty \\ \text{sen } z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots && ; |z| < \infty \\ \text{cos } z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots && ; |z| < \infty \\ \frac{1}{z-a} &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} & \text{para } |z-z_0| > |a-z_0| \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}} & \text{para } |z-z_0| < |a-z_0| \end{cases} \end{aligned}$$

Integración compleja

Teorema de la integral de Cauchy: $\oint_C f(z) dz = 0$ si $\exists f'(z)$ dentro y sobre C .

Fórmula de la integral de Cauchy: $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \frac{2\pi j}{n!}$

Teorema del residuo: $\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^n a_{-1}^{(i)}$

Evaluación de integrales reales

- Caso 1: Integrales impropias

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \oint_C f(z) dz \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0, \quad C : \text{trayectoria de integración semicircular}$$

- Caso 2: Integrales de funciones reales trigonométricas

$$\int_0^{2\pi} G(\text{sen } \theta, \text{cos } \theta) d\theta = \oint_C f(z) dz \quad \rightarrow \quad z = e^{j\theta}, \quad d\theta = \frac{dz}{jz}$$

C : es el círculo unitario $|z| = 1$

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad \text{cos } \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

Series de Fourier

Producto interno: $\langle u_k(t), x(t) \rangle = \int_a^b u_k^*(t) x(t) dt$

Norma: $\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t)$ con $\{u_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ una base funcional ortogonal, $c_k \in \mathbb{C}$.

Generalizada: $c_k = \frac{\langle u_k(t), x(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2}$

Fourier exponencial compleja (para funciones periódicas de periodo T_p).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t} \quad c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 k t} x(t) dt$$

Fourier cosenoidales desfasadas

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k) \quad \tilde{c}_k = 2|c_k|, \quad \theta_k = \angle c_k, \quad k > 0$$

Fourier trigonométrica

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_0 kt) \quad c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\}, \quad b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\}$$

$$a_k = \frac{2}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \cos(\omega_0 kt) dt = 2|c_k| \cos(\theta_k) \quad b_k = \frac{2}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \sin(\omega_0 kt) dt = -2|c_k| \sin(\theta_k)$$

Propiedades de la Serie de Fourier (periodo T_p , $\omega_0 = 2\pi/T_p$)

Propiedad	Señal en el tiempo	Coeeficientes
	$x(t)$	c_k
	$x_1(t)$	c_{1_k}
	$x_2(t)$	c_{2_k}
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 c_{1_k} + \alpha_2 c_{2_k}$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$c_k = \frac{2}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cos(\omega_0 kt) dt$ $c_k \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$c_k = -\frac{2j}{T_p} \int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t) \sin(\omega_0 kt) dt$ $c_k \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$c_k = c_{-k}^*$
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-j\omega_0 k\tau} c_k$
Conjugación	$x^*(t)$	c_{-k}^*
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	c_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t), \alpha > 0$	c_k
Convolución periódica	$\int_{T_p} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$	$T_p c_{1_k} c_{2_k}$
Multiplicación	$x_1(t) x_2(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1_l} c_{2_{k-l}}$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 c_k$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt, c_0 = 0$	$\frac{c_k}{jk\omega_0}$
Relación de Parseval	$\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ^2$

Transformada de Fourier

Transformada directa: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

Transformada inversa: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$

Algunas Transformadas de Fourier

Nombre	Señal en el tiempo	Transformada
Transformación	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Escalon unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
Impulso rectangular	$\frac{1}{\tau}[u(t-t_0) - u(t-t_0-\tau)]$	$e^{-j\omega(t_0+\frac{\tau}{2})} \text{sa}(\omega\tau/2)$
Exponencial	$e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
Exponencial por rampa	$e^{-at}tu(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
Laplaciana	$e^{-a t }, \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
Exponencial compleja	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
Constante	c	$2\pi c\delta(\omega)$
Función periódica*	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$ $c_k = \frac{1}{T} X_T(j\omega_0 k); \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
Función muestreada	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_0); \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
Impulso gaussiano	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\sigma})^2}$	$e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2}$
Seno	$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
Coseno	$\text{cos}(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

* Para la función periódica $x(t)$ se asume que $X_T(j\omega)$ es la transformada de Fourier de un único periodo de $x(t)$.

Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(j\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(j\omega)$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$ $X(j\omega) \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$-2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$ $X(j\omega) \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
Dualidad	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau} X(j\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j\omega - j\omega_0)$
Modulación	$\cos(\omega_0 t) x(t)$	$\frac{1}{2} X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2} X(j\omega + j\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$	$X_1(j\omega) X_2(j\omega)$
Multiplicación	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$

Transformada de Laplace

Bilateral: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ Inversa: $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$

Propiedades de la Transformada Bilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-s\tau} X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$\geq R$
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$\geq R$
	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$

Transformadas Bilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC	Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma < 0$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma < 0$	$e^{at} u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > a$
$-e^{at} u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma < a$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at} u(t)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma > a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at} u(-t)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma < a$	$\delta(t - \tau)$	$e^{-s\tau}$	todo s
$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$	$[\text{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[e^{at} \cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > a$	$[e^{at} \text{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > a$
$\frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$	s^n	todo s			

Transformada Unilateral de Laplace: $X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$

Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t) = x(t)u(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t) = x_1(t)u(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t) = x_2(t)u(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau} X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Escalamiento en el tiempo	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$\geq R$
Diferenciación múltiple	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} x^{(i-1)}(0^-)$	
Diferenciación en s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
Integración	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$
Teorema de valor inicial	$x(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$	
Teorema de valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	

Transformadas Unilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC	Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s	1	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma > a$	$\delta(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	todo s
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$e^{at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > a$	$e^{at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > a$
$\frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$	s^n	todo s			

Propiedades de la transformada z bilateral.

Propiedad	Dominio n	Dominio z	ROC
Notación	$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$	$R = \{z \mid r_2 < z < r_1\}$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	por lo menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en n	$x[n - k]$	$z^{-k} X(z)$	$R \setminus \{0\}$ si $k > 0$ y $R \setminus \{\infty\}$ si $k < 0$
Escalado en z	$\alpha^n x[n]$	$X(\alpha^{-1} z)$	$ \alpha r_2 < z < \alpha r_1$
Reflexión en n	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < z < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Parte real	$\text{Re}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye R
Parte imaginaria	$\text{Im}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2} [X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye R
Derivación en z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < z < r_1$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) X_2(z)$	Por lo menos $R_1 \cap R_2$
Teorema del valor inicial	Si $x[n]$ es causal	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
Propiedades de la transformada z unilateral.			
Notación	$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}$	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$	$R = \{z \mid z > r_2\}$
Retardo temporal	$x[n - k], k > 0$	$z^{-k} X(z) + \sum_{n=1}^k x[-n] z^{n-k}$	$R \setminus \{0\}$
Adelanto temporal	$x[n + k], k > 0$	$z^k X(z) - \sum_{n=k-1}^{\infty} x[n] z^{k-n}$	R
Teorema del valor final		$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z)$	

Transformada z bilateral de algunas funciones comunes

Señal $x[n]$	Transformada z , $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	Plano z
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-(a^n)u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$-n(a^n)u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\text{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1} \text{sen} \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a$
$a^n \text{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1} \text{sen} \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a$

Transformada z unilateral de algunas funciones comunes

Señal $x[n]$	Transformada z , $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	Plano z
1	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
a^n	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
na^n	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$\cos(\omega_0 n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\text{sen}(\omega_0 n)$	$\frac{z^{-1} \text{sen} \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \text{sen}(\omega_0 n)$	$\frac{az^{-1} \text{sen} \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > 1$