Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL 4703 Señales y Sistemas

II Semestre 2019
Programa de Tutorías

Tutoría 4: Derivación y series de potencias

Ejercicio 1. Verifique que la función exponencial $f(z) = e^{az}$, donde a es una constante, satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y demuestre que $f^{'}(z) = ae^{az}$.

Respuesta:
La función $f(z)$ es analítica y su derivada es $f^{'}(z) = ae^{az}$.

Ejercicio 2. Determine los valores de a y b para que la función de variable compleja $f(z)$ sea analítica.

$$f(z) = x^2 + ay^2 - 2xy + j(bx^2 - y^2 + 2xy)$$

Respuesta:
Los valores de las constantes son: $a = -1$ y $b = 1$.

Ejercicio 3. Analice dónde la función $f(z) = zz^*$ es analítica. De ser posible, determine la derivada de dicha función.

Respuesta:
La función no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que no es analítica y no tiene derivada.

Ejercicio 4. Demuestre que $u(x,y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$ es una función armónica y encuentre una función conjugada armónica $v(x,y)$. Escriba $f(z = x + jy) = u(x,y) + jv(x,y)$ en términos de z.

Respuesta:

- *La función $u(x,y)$ es armónica.*
- $v(x,y) = e^x(x\sin(y) + y\cos(y)) + K \to K \in \mathbb{R}$
- $f(z) = ze^z + jK$

Ejercicio 5. Obtenga una función holomorfa $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ si se tiene que $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ y además se cumple que $f(0) = j$.

Respuesta:

- $v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + K$
- $f(x,y) = y^3 - 3x^2y + j(x^3 - 3xy^2 + K)$
- $f(z) = j(z^3 + 1)$

Ejercicio 6. Determine en que puntos del plano z el mapeo $w = z^3 + 2z^2$ no es conforme.

Respuesta:
$f(z)$ no es conforme en $z = -4/3$ y en $z = 0$.

Ejercicio 7. Encuentre la representación en series de potencias de la función:

$$f(z) = \frac{1}{z - j}$$

En las regiones:

a. $|z| < 1$

b. $|z| > 1$

c. $1 < |z - 1 - j| < \sqrt{2}$

Respuesta:

a. $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-j)^{n+1} z^n = j + z - jz^2 - z^3 + jz^4 + z^5 + ...$

b. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} j^{n-1} z^{-n} = z^{-1} + jz^{-2} - z^{-3} - jz^{-4} + z^{-5} + ...$

c. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(z - 1 - j)^{-n} = \frac{1}{z-1-j} - \frac{1}{(z-1-j)^2} + \frac{1}{(z-1-j)^3} - \frac{1}{(z-1-j)^4} + \frac{1}{(z-1-j)^5} - ...$

Ejercicio 8. Utilizando división polinomial desarrolle una serie de potencias para la función $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ en la región $|z| > 1$ y utilizando ese desarrollo obtenga la serie para $f_1(z) = \frac{z}{z^2+1}$ en la misma región de convergencia:

Respuesta:

- $f(z) = \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}+1} z^{-n} = z^{-2} - z^{-4} + z^{-6} - z^{-8} - ...$
- $f_1(z) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} z^{-n} = z^{-1} - z^{-3} + z^{-5} - z^{-7} - ...$