Tutoría 10: Transformada de Fourier

Ejercicio 1. Determine la transformada de Fourier de

$$x(t) = [1 + \cos(\pi t)]\, u(t+1)u(-t+1)$$

utilizando la integral de definición. La función $u(t)$ corresponde al escalón unitario (función de Heaviside).

Respuesta: $X(j\omega) = 2\,\mathrm{sa}(\omega) + \mathrm{sa}(\omega - \pi) + \mathrm{sa}(\omega + \pi)$

Ejercicio 2. Encuentre la señal $x(t)$ que tiene como transformada de Fourier a

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) - \pi\delta(\omega + 4\pi)$$

Respuesta: $x(t) = 1 + j\,\mathrm{sen}(4\pi t)$

Ejercicio 3. Sea $x(t)$ una función que se puede expresar como la resta $x(t) = h(t) - h(-t)$, donde $h(t)$ es una función de valor real. Si la transformada de Fourier de $h(t)$ es $H(j\omega)$ y la de $x(t)$ es $X(j\omega)$, entonces utilice las propiedades de la transformada de Fourier para encontrar $X(j\omega)$ en términos de la parte imaginaria de $H(j\omega)$.

Respuesta: $X(j\omega) = j2\,\mathrm{Im}\left\{H(j\omega)\right\}$.

Ejercicio 4. Encuentre la transformada de Fourier de la función mostrada en la figura 1, utilizando linealidad y la propiedad de derivación. Exprese, en caso de ser posible, el resultado en términos puramente reales o puramente imaginarios.

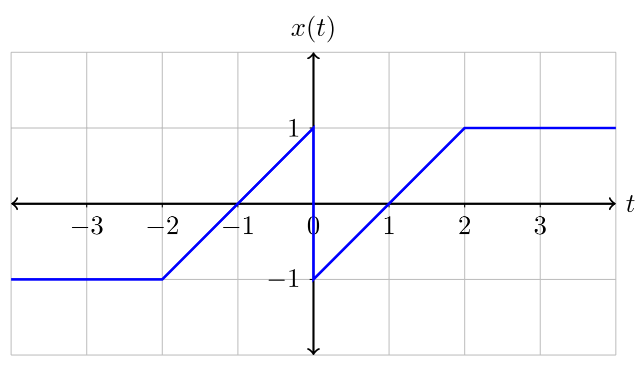


Figura 1: Función $x(t)$ a utilizar en ejercicio 4.

Respuesta:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{para } \omega = 0 \\ j\dfrac{2}{\omega}(1 - 2\,\mathrm{sa}(2\omega)) & \text{para } \omega \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Considerando que $u(t)$ es el escalón unitario, defínanse dos funciones

$$x_1(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$r(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Paso a paso se encontrará en este ejercicio la transformada de Fourier de una función $f(t)$ mostrada en la figura 2.

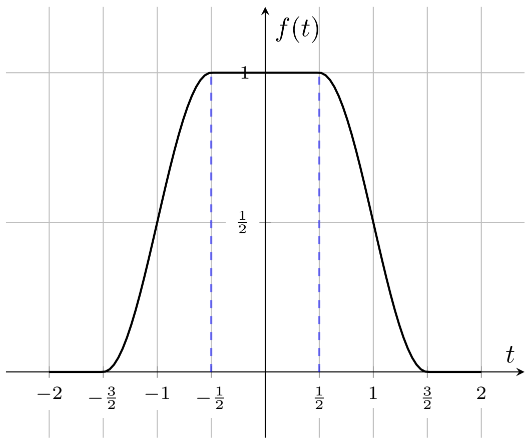
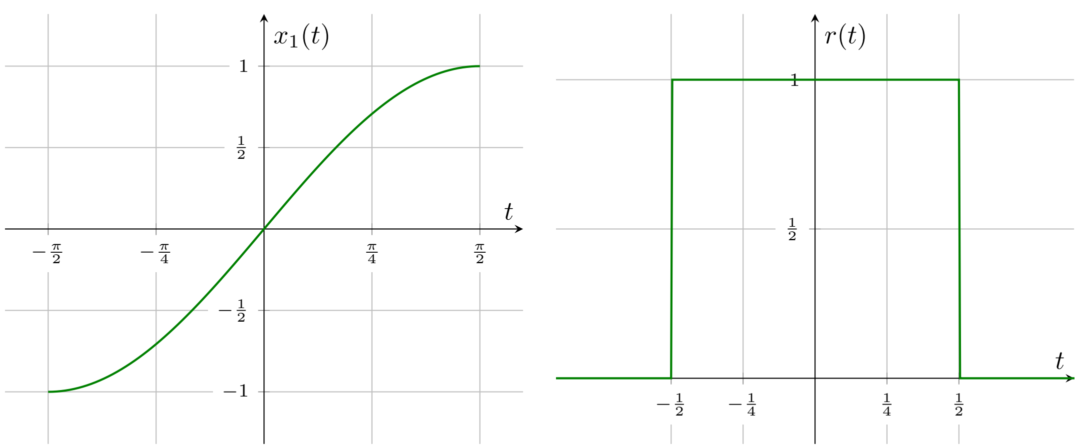


Figura 2: Función $f(t)$ del ejercicio 5.

a. Grafique las funciones $x_1(t)$ y $r(t)$.

Respuesta:



b. Demuestre que la transformada de Fourier de $x_1(t)$ es

$$x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(j\omega) = \begin{cases} j2\omega \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\omega\right)}{\omega^2 - 1} & \omega \neq \pm 1 \\ -j\frac{\pi}{2} & \omega = 1 \\ j\frac{\pi}{2} & \omega = -1 \end{cases}$$

c. Demuestre que la transformada de Fourier de $r(t)$ es

$$r(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ R(j\omega) = \mathrm{sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

d. Defínase ahora la función:

$$x_2(t) = \begin{cases} f(t) & -\infty < t \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Esta función $x_2(t)$ puede obtenerse también como una combinación de las funciones $x_1(t)$ y $r(t)$ especificadas en el enunciado, tal que:

$$x_2(t) = \alpha x_1\left(\beta t - \tau_0\right) + \kappa r\left(\gamma t - \tau_1\right)$$

Encuentre los valores de α, β, κ, γ, τ_0 y τ_1 que cumplen con esa tarea.

Sugerencia: Realice los desplazamientos temporales como última operación, es decir, encuentre primero una función idéntica a la buscada excepto por su posición y luego realice el desplazamiento adecuado.

Respuesta:

$$\alpha = \kappa = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \pi \qquad \gamma = 1$$

$$\tau_0 = -\pi \qquad \tau_1 = -1$$

La función es entonces

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left[x_1(\pi(t+1)) + r(t+1)\right]$$

e. Si para el intervalo $t \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$ se define $x_3(t) = f(t)$ y fuera de ese intervalo $x_3(t) = 0$, entonces encuentre una expresión para $x_3(t)$ primero en términos de $x_2(t)$ y luego a través de esta en términos de $x_1(t)$ y $r(t)$.

Respuesta:

$$x_3(t) = x_2(-t) = \frac{1}{2}\left[x_1(\pi(1-t)) + r(1-t)\right]$$

f. Encuentre una expresión para $f(t)$ en términos de $r(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.

Respuesta:

$$f(t) = x_2(t) + r(t) + x_3(t)$$

g. Encuentre la transformada de Fourier de $x_2(t)$ en términos de $X_1(j\omega)$ y $R(j\omega)$.

Respuesta:

$$X_2(j\omega) = \frac{e^{j\omega}}{2}\left[\frac{1}{\pi}X_1\left(j\frac{\omega}{\pi}\right) + R(j\omega)\right]$$

h. Encuentre la transformada de Fourier de $x_3(t)$ en términos de $X_2(j\omega)$.

Respuesta:

$$X_3(j\omega) = X_2(-j\omega) = X_2^*(j\omega)$$

i. ¿$X_1(j\omega)$ es una función par o impar? Justifique.

Es impar.

j. ¿$R(j\omega)$ es una función par o impar? Justifique.

Es par.

k. Encuentre la transformada de Fourier de $f(t)$ utilizando los resultados anteriores. Considere la simetría de $f(t)$ y exprese el resultado en términos únicamente reales o imaginarios, según corresponda.

Respuesta:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= 2\,\mathrm{Re}\left\{X_2(j\omega)\right\} + R(j\omega) \\ &= \mathrm{sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)(1+\cos(\omega)) - \frac{2\omega}{\omega^2-\pi^2}\operatorname{sen}\omega\cos\frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Asocie a cada función no periódica en el tiempo mostrada al lado izquierdo de la figura 3 su correspondiente espectro, dado a través de sus partes real e imaginaria. Para esto utilice las propiedades de la Transformada de Fourier. Justifique su respuesta.

Respuesta: De arriba hacia abajo, C, A, D, E, B.

Ejercicio 7. Considere una señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$. Suponga que se cumplen los siguentes hechos:

- $x(t)$ es una función de valor real.
- $\mathscr{F}^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$, donde A es independiente de t y τ es una constante real positiva.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega = 2\pi$

a. Determine una expresión de forma cerrada para $x(t)$ si $\tau \neq 1$.

Respuesta:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha\left[e^{-t} - e^{-t/\tau}\right]u(t) \\ A &= \pm\frac{1}{\tau}\sqrt{2(\tau+1)} \\ \alpha &= \frac{A\tau}{1-\tau} = \pm\frac{\sqrt{2(\tau+1)}}{1-\tau} \end{aligned}$$

b. Encuentre ahora la expresión de $x(t)$ para el caso particular $\tau = 1$.

Respuesta:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ate^{-t}u(t) \\ A &= \pm 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 8. Determine el espectro de la función $\dfrac{d}{dt}\{u(-2-t)+u(t-2)\}$.

Respuesta:

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}\{u(-2-t)+u(t-2)\}\right\} = -j2\operatorname{sen}(2\omega)$$

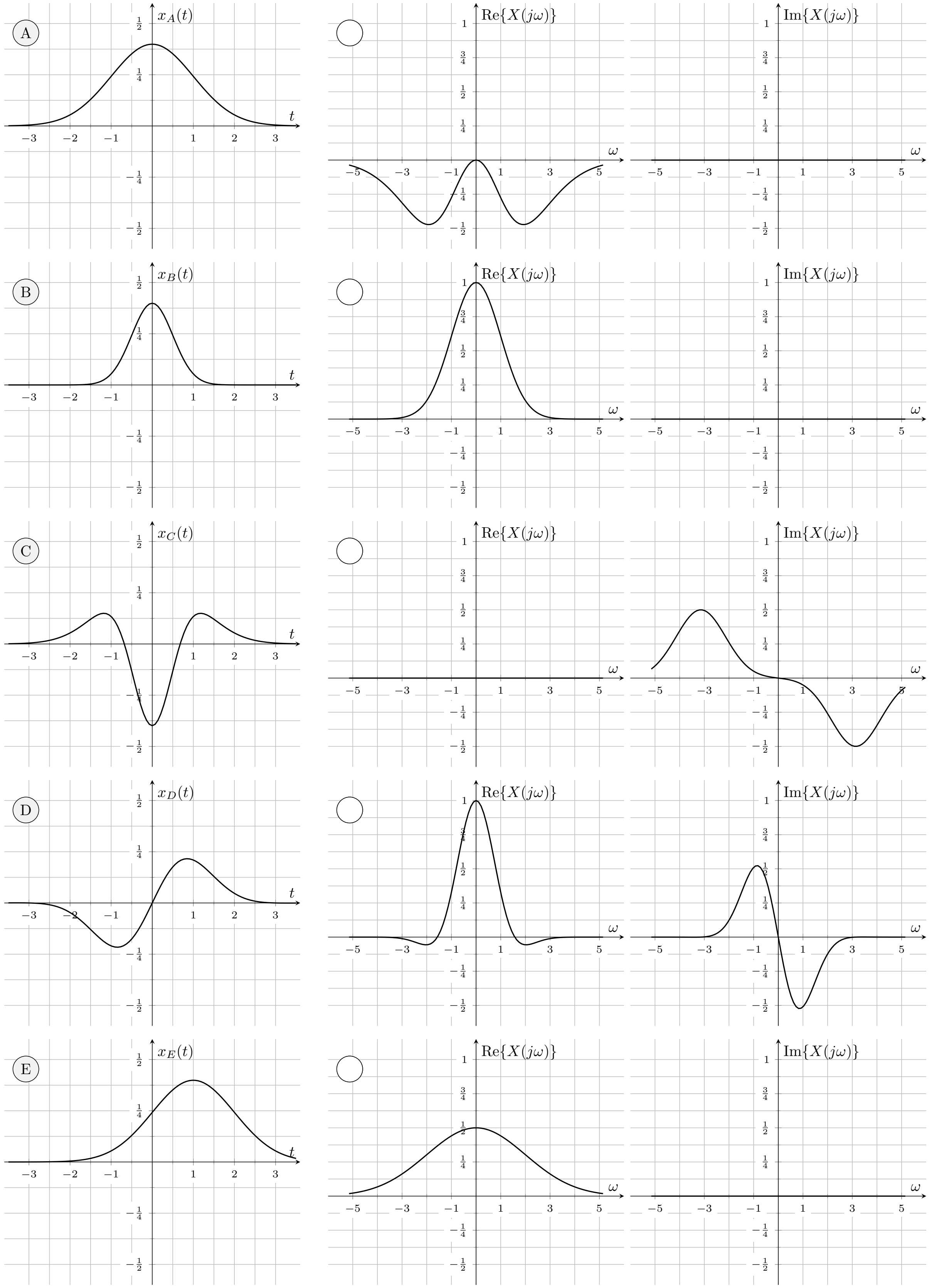


Figura 3: Figura para asocie del ejercicio 6

Ejercicio 9. Se conoce el espectro de una función $x(t)$ en el tiempo:

$$|X(j\omega)| = 2[u(\omega+3) - u(\omega-3)]$$
$$\angle X(j\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi$$

a. Encuentre $x(t)$ utilizando la integral de la transformada inversa de Fourier.

Respuesta:

$$x(t) = -\frac{6}{\pi}\,\mathrm{sa}\left(3\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)$$

b. Verifique $x(t)$ utilizando propiedades de la transformada de Fourier y la tabla de transformadas en el formulario.

Respuesta:

$$x(t) = -\frac{6}{\pi}\,\mathrm{sa}\left(3\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)$$

c. Use su respuesta para determinar los valores de t donde $x(t) = 0$.

Respuesta:

$$t = k\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2} \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus 0$$