Derivación Compleja

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

Límites

Definición de Límite

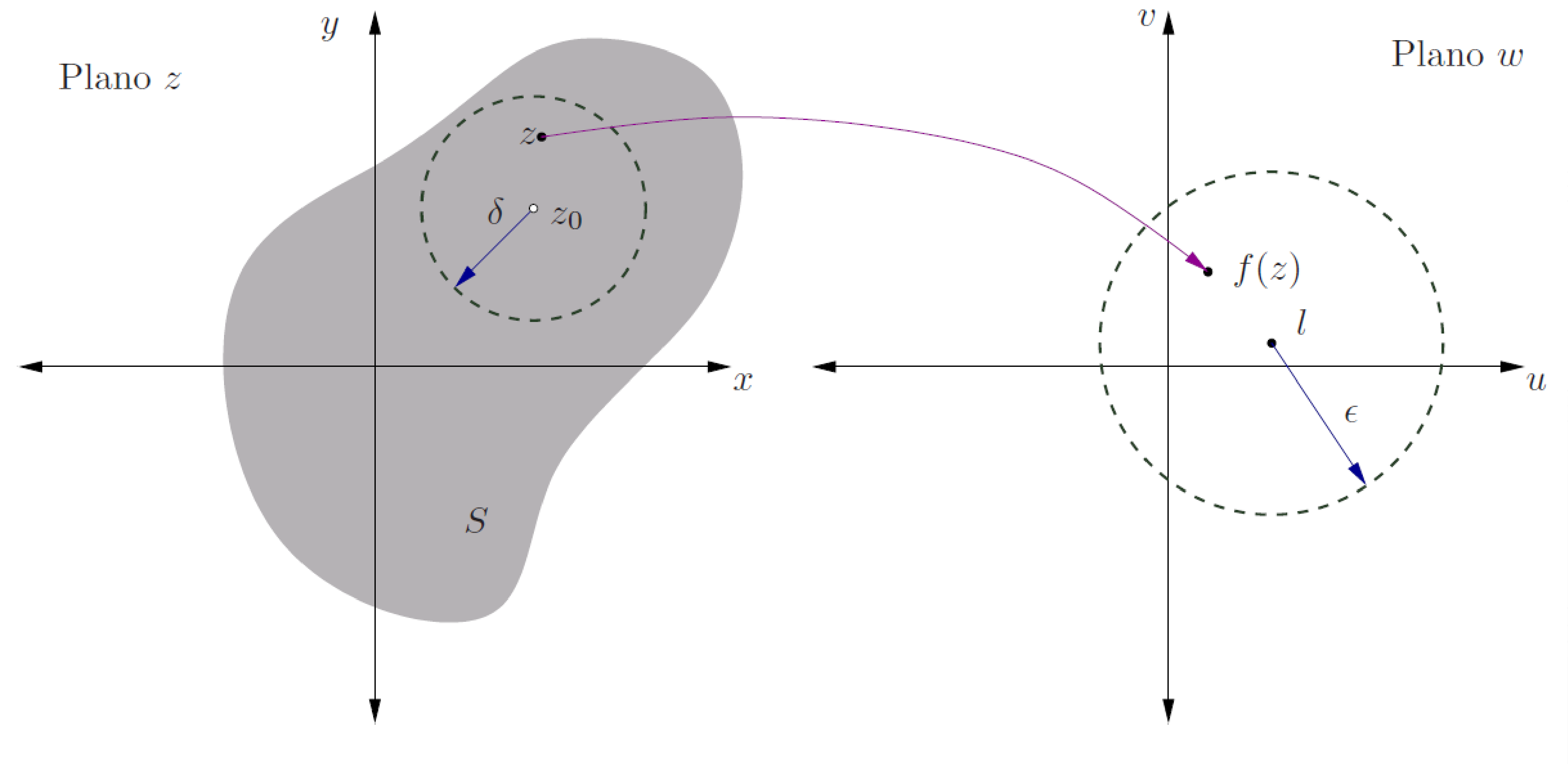
- Sean los planos complejos $z = x + jy$ y $w = u + jv$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$ y la función de variable compleja $w = f(z)$ definida en un dominio $S \subset \mathbb{C}$.
- Sea z_0 un punto límite dentro de S.
- El límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 es l, lo que se escribe como:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

Si $f(z)$ se aproxima a l cuando z se aproxima a z_0, es decir:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \epsilon$$

Representación gráfica del límite con varible compleja



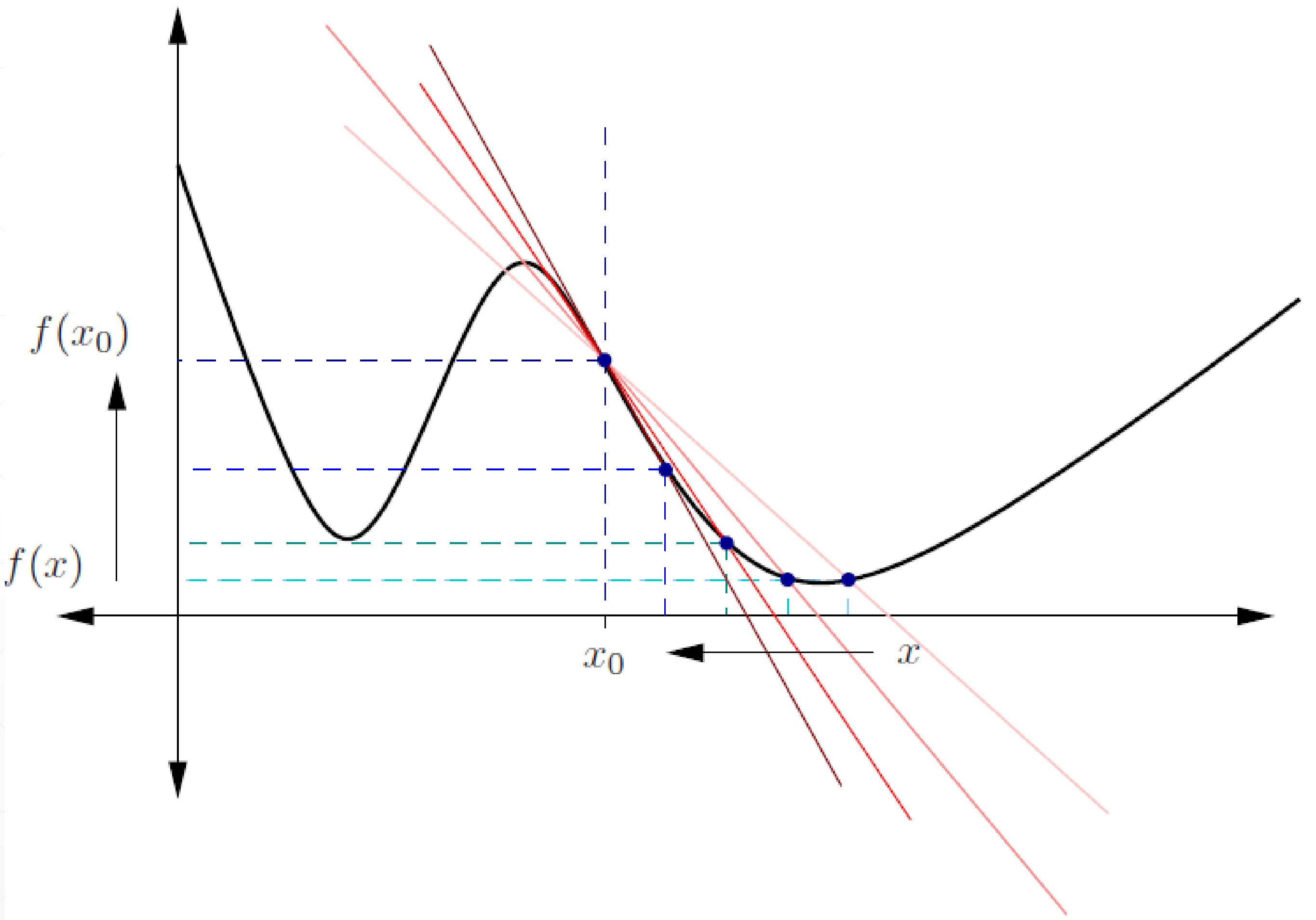
Continuidad

- La función $f(z)$ se denomina continua en el punto $z = z_0$ si $f(z_0)$ está definida y se cumple:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Derivada de funciones reales

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$



Derivada de funciones complejas

- El número complejo A se denomina derivada de la función $w = f(z)$ en el punto z_0 relativo al conjunto S y se denota con $f_S'(z_0)$ si se cumple:

$$A = f_S'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

- Se dice que f es diferenciable en z_0 con respecto a S.

Función analítica

- Una función $f(z)$ se denomina holomorfa, analítica o regular en una región abierta (o dominio) $G \subseteq \mathbb{C}$ si es diferenciable en todo punto de G.
- En ese caso la notación se simplifica:

$$f'_G(z) \equiv f'(z) \equiv \frac{d}{dz} f(z)$$

- Si $f(z)$ es analítica en G, entonces f es diferenciable en $z_0 \in S \subset G$ y:

$$f'_S(z_0) = f'(z_0)$$

- La función $f(z)$ se dice analítica en el punto $z = z_0$ (o en un conjunto S) si $f(z)$ es analítica en un conjunto abierto G que contiene a z_0 (o a S).

Ejemplo: Derivada de $f(z) = z$ (1)

- Calcule la derivada de la función $f(z) = z$ dentro de todo el plano z:

Ejemplo: Derivada de $f(z) = z$ (2)

- **Solución:**

Utilizando la definición:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

Se obtiene que $f'(z) = 1$ para todo z, por lo que la función es analítica en $\mathbb{C}$.

Existencia de la derivada

- Sea $T \subset S$ y sea $z_0 \in T$ un punto límite en T.
- Si existe $f_S'(z_0)$ entonces existe $f_T'(z_0)$ y se cumple:

$$f_T'(z_0) = f_S'(z_0)$$

Lo contrario no es cierto

Ejemplo: Derivada de $f(z) = z^*$ (1)

- Demuestre que la función $f(z) = z^* = x - jy$ es diferenciable en cualquier punto $z = z_0$ relativo a un rayo S que parte desde z_0.

Ejemplo: Derivada de $f(z) = z$ (2)

- **Solución**:

Con la definición

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^*}{z - z_0} = e^{-2j\angle(z-z_0)}$$

Que es una expresión con valor constante solo si $z \in S$ y el conjunto S representa un segmento de recta que parte desde z_0, lo que implicaría valores del mismo valor angular. Si se toma un nuevo segmento igual a la unión de dos segmentos de recta, entones se obtienen dos valores diferentes de la derivada lo que implica que la función no es analítica.

Reglas para el cálculo de derivadas

- $[kf(z)]'_S = kf'_S(z)$
- $[f(z) + g(z)]'_S = f'_S(z) + g'_S(z)$
- $[f(z)g(z)]'_S = f'_S(z)g(z) + f(z)g'_S(z)$
- $\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'_S = \frac{f'_S(z)g(z) - f(z)g'_S(z)}{g^2(z)}$

Reglas para el cálculo de derivadas

- Para $h(z) = g(f(z))$, donde T es el mapeo de todos los puntos en S por medio de $f(z)$, y $w_0 = f(z_0)$ se cumple la **Regla de la Cadena**:

$$h_S'(z_0) = g_T'(w_0) f_S'(z_0)$$

- Derivadas de orden superior

$$f_S^{(n+1)}(z) = [f_S^{(n)}(z)]_S' \qquad (n = 1,2,\dots)$$

- Linealidad de la derivación:

$$[kf(z)]_S^{(n)} = k f_S^{(n)}(z)$$

$$[f(z) + g(z)]_S^{(n)} = f_S^{(n)}(z) + g_S^{(n)}(z)$$

Funciones elementales y su derivación (1)

$$e^{jz} = \cos(z) + jsen(z) \qquad \cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \qquad sen(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

$$\frac{d}{dz} e^{z} = e^{z} \qquad \frac{d}{dz} sen(z) = \cos(z) \qquad \frac{d}{dz} \cos(z) = -sen(z)$$

$$senh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -jsen(jz) \qquad \Rightarrow \frac{d}{dz} senh(z) = \cosh(z)$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = cos(jz) \qquad \Rightarrow \frac{d}{dz} \cosh(z) = senh(z)$$

Funciones elementales y su derivación (2)

$$Re(e^z) = e^x \cos(y)$$

$$Im(e^z) = e^x sen(y)$$

$$|\cos(z)|^2 = cos^2(x) + senh^2(y)$$

$$|sen(z)|^2 = sen^2(x) + senh^2(y)$$

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1} \qquad \text{para } z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{d}{dz} In(z) = \frac{1}{z} \qquad \text{para } z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$$

Dirección de trayectoria

- Sea $f(z)$ analítica en S, por tanto su derivada existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

Independientemente de la trayectoria de aproximación a z_0

Dirección paralela al eje real

- En este caso $z - z_0 = \Delta x \in \mathbb{R}$ y

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \right]$$

y puesto que $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ entonces

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + jv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + j \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right]$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x = x_0, y = y_0}$$

Dirección paralela al eje imaginario

- En este caso $z - z_0 = j\Delta y$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{f(z_0 + j\Delta y) - f(z_0)}{j\Delta y} \right]$$

y puesto que $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ entonces

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + jv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{j\Delta y} \right]$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{j\Delta y} + j\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{j\Delta y} \right]$$

$$= \left[\frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{x = x_0, y = y_0}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

- Puesto que la función se ha asumido analítica, entonces se debe cumplir

$$f'(z_0) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=x_0,y=y_0} = \left[\frac{\partial u}{\partial y} - j\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{x=x_0,y=y_0}$$

lo que solo ocurre si sus partes real e imaginaria son idénticas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

El cumplimiento de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann es necesario para que $f(z)$ sea analítica.

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

- **Suficientes para asegurar homología de $f(z)$**

  Matemáticos demostraron que si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ con $x,y \in \mathbb{R}$ son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en una región S, entonces $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ es analítica en S.

  El cumplimiento de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann es necesario y suficiente para que $f(z)$ sea analítica.

Ejemplo: Función analítica y ec. de Cauchy-Riemann (1)

- Verifique que la función $f(z) = z^2$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y determine la derivada $f'(z)$.

Ejemplo: Función analítica y ec. de Cauchy-Riemann (2)

- **Solución:** Con $z = x + jy$ se obtiene

$$f(z) = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$$

y con $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$ se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

que cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

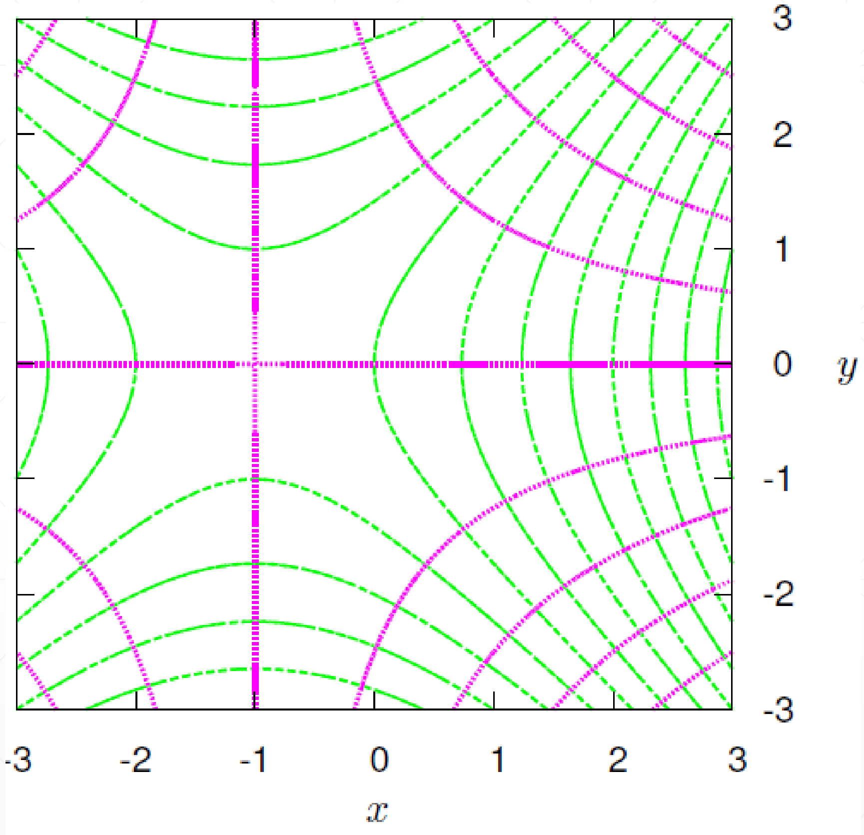
Eligiendo la dirección en x se obtiene que la derivada es entonces:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + j2y = 2(x + jy) = 2z$$

Funciones conjugadas

- Un par de funciones de valor y variables reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ se denominan funciones conjugadas si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

- **Ortogonalidad**: Funciones conjugadas son ortogonales, en el sentido de que las curvas $u(x, y) = cte$ y $v(x, y) = cte$ forman ángulos rectos entre sí.



Funciones armónicas (1)

- Una función es armónica si satisface la **ecuación de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si $f(z)$ es analítica entonces

$$f''(z) = [f'(z)]' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + j\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

y también

$$f''(z) = [f'(z)]' = \frac{1}{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - j\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Funciones armónicas (2)

- Por tanto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Esto quiere decir, que si una función es analítica en una región, entonces sus componentes real e imaginaria son funciones armónicas en esa región.

Ejemplo: Funciones conjugadas (1)

- Sea $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ la componente real de una función analítica $f(z)$ con $z = x + jy$ en todo el plano z. Encuentre la función conjugada $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$.

Ejemplo: Funciones conjugadas (2)

- **Solución**: Como $f(z)$ es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann deben cumplirse, por lo que:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2$$

Integrando con respecto a y

$$v = 2xy + 2x + F(x)$$

Donde $F(x)$ es la constante de integración, que en este caso puede ser cualquier función de x. Derivando respecto a x y considerando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2y) = 2y$$

Ejemplo: Funciones conjugadas (3)

Por lo que $F(x)$ debe ser constante para que su derivada sea cero. Asumiendo esta constante igual a $-jC$ se obtiene:

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

$$= x^2 - y^2 + 2x + j(2xy + 2y - jC)$$

$$= x^2 + 2x(jy) - y^2 + 2x + j2y + C$$

$$= (x + jy)^2 + 2(x + jy) + C$$

$$= z^2 + 2z + C$$

Mapeos conformes

Un mapeo $w = f(z)$ es conforme si el ángulo y sentido que forman dos curvas en el plano z es preservado entre las dos curvas imagen del plano w.

Si $f(z)$ es analítica, entonces $f(z)$ es conforme excepto donde $f'(z) = 0$.

Mapeos conformes

- Mapeo lineal

$$w = f(z) = \alpha z + \beta \;\Rightarrow f'(z) = \alpha$$

- Mapeo de inversión

$$w = f(z) = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

- Mapeo bilineal

$$w = f(z) = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta} \quad (\alpha, \mu \neq 0)$$

$$f'(z) = -\frac{\mu\alpha}{(\alpha z + \beta)^2}$$

Ejemplo: Mapeos conforme (1)

Determine los puntos en los cuales el mapeo $w = z + \frac{1}{z}$ no es conforme.

Ejemplo: Mapeos conforme (2)

Solución: Utilizando $z = x + jy, w = u + jv$ se tiene

$$w = u + jv = x + jy + \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

por lo que

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Ejemplo: Mapeos conforme (3)

Con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y con

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Se obtiene que $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C}\backslash 0$. Además

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} = 0$$

Ejemplo: Mapeos conforme (4)

Lo que implica que la derivada se hace cero para $z = \pm 1$.

Por lo tanto el mapeo no es conforme en $z = 0$, y $z = \pm 1$.

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.