Sistemas en tiempo discreto
Parte 2

Control Automático (EL-5408)

Escuela de de Ingeniería Electrónica

Contenidos

Un filtro digital es un algoritmo de cálculo que convierte una secuencia de números de entrada de una secuencia de salida, de modo que las características de la señal se cambien de manera predeterminada. Para este tema, se define una función de transferencia de entrada $X(z)$ y salida $Y(z)$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \ldots + a_n z^{-n}} \tag{1}$$

$$\rightarrow n \geqslant m$$

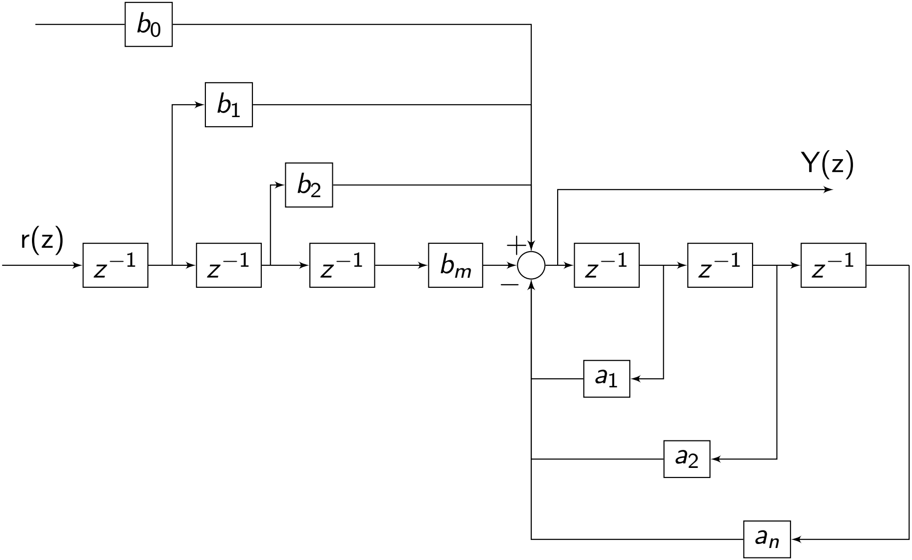
En esta, los valores a_i y b_i generalmente son coeficientes reales. Los esquemas de diagramas de bloque en donde estos valores aparecen directamente como multiplicadores, se denominan estructuras directas.

1. Programación directa: significa que se obtiene la realización del numerador y el denominador mediante conjuntos de elementos de retraso por separado, siendo el total de estos elementos $m + n$.

$$\begin{aligned} Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \ldots - a_n z^{-n} Y(z) + \ldots \\ + b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \ldots + b_m z^{-m} X(z) \end{aligned} \qquad (2)$$

Realización de controladores y filtros discretos

Definición y tipos de programación (III)



2. Programación estándar: e este caso, se reduce el número de elementos de retraso a n. Para lograrlo se reacomoda la función de transferencia pulso de la siguiente manera:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)}\frac{H(z)}{X(z)} \tag{3}$$

Lo que se ve puede plantear como:

$$\frac{Y(z)}{H(z)}\frac{H(z)}{X(z)} = (b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m})\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}} \tag{4}$$

A partir de (3) y (4), se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$Y(z) = b_0 H(z) + b_1 z^{-1} H(z) + \ldots + b_m z^{-m} H(z) \tag{5}$$

$$H(z) = X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + \ldots + a_n z^{-n} X(z) \tag{6}$$

Existen 3 fuentes de error que afectan la exactitud de un filtro:

- Ruido de cuatificación: el error se debe a la cuantificación de la señal de entrada en un número finito de niveles descritos.
- Redondeo: se da la acumulación de errores de redodeo en las operaciones aritméticas en el sistema digital.
- Cuantificación de coeficientes y función de transferencia pulso: este tipo de error se caracteriza por aumentar proporcional al aumento del orden de la función de transferencia pulso.

La inexactitud o sensibilidad de los coeficientes se evita utilizando los siguientes 3 enfoques:
1. Programación en serie: la función de transferencia pulso G(z) se designa como una conexión en serie de la función de transferencia pulso de primer y segundo orden.

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)\dots G_p(z) \tag{7}$$

$$G(z) = \prod_{i=1}^{j} \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}} \prod_{i=j+1}^{p} \frac{1 + e_i z^{-1} + f_i z^{-2}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \tag{8}$$

2. Programación en paralelo: en este caso se trabaja con una sumatoria de o expansión de fracciones parciales de G(z).

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) + \ldots + G_p(z) \tag{9}$$

$$G(z) = A + \sum_{i=1}^{j} \frac{b_i}{1 + a_i z^{-1}} + \sum_{i=j+1}^{p} \frac{e_i + f_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}} \tag{10}$$

3. Programación en escalera: se expande la función de transferencia pulso, tal que:

$$G(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{\ldots A_{n+1} + \cfrac{1}{B_n + \cfrac{1}{A_n}}}}}} \tag{11}$$

Lo anterior se puede representar con las ecuaciones:

$$G_i^{(B)}(z) = \frac{1}{B_i(z) + G_i^{(A)}(z)}, i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{12}$$

$$G_i^{(A)}(z) = \frac{1}{A_i + G_{i+1}^{(B)}(z)}, i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{13}$$

$$G_n^{(B)}(z) = \frac{1}{B_n(z) + \frac{1}{A_n}} \tag{14}$$

$$G(z) = A_0 + G_1^{(B)}(z) \tag{15}$$

Ejemplo 6: (Ejercicio 3-8 [1])

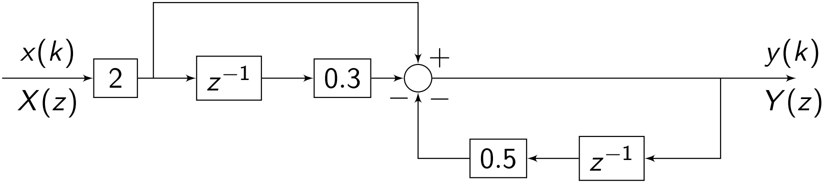
Obtenga los diagramas de bloques para la función de transferencia pulso del sistema, el cual es un filtro digital, mediante programación directa, estándar y en escalera.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \tag{16}$$

Solución:
1. Directa: conociendo los valores dados por (16) y sustituyendo en (2), se obtiene:

$$Y(z) = -0.5z^{-1}Y(z) + 2X(z) - 0.6z^{-1}X(z) \tag{17}$$

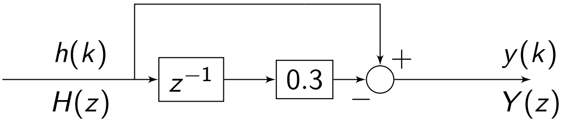
Y gráficamente queda de la siguiente forma:



2. Estándar: conociendo los valores dados por (16) y sustituyendo en (4),(5),(6), se obtiene:

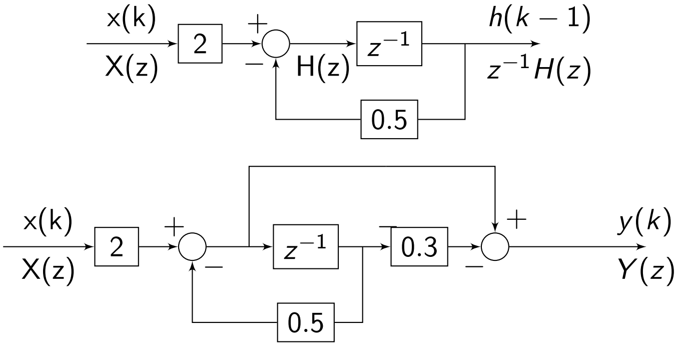
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1 - 0.3z^{-1})\frac{2}{1 + 0.5z^{-1}} \tag{18}$$

Y gráficamente queda de la siguiente forma:



Realización de controladores y filtros discretos

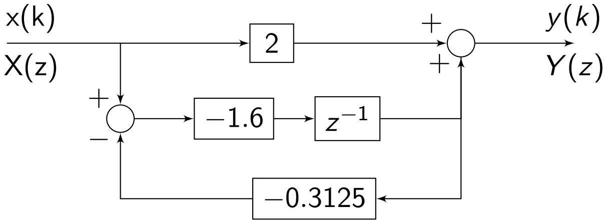
Definición y tipos de programación (XIII)



3. En escalera: conociendo los valores dados por (16) y sustituyendo en (11), se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z-0.6}{z+0.5} = 2 + \frac{-1.6}{z+0.5} = 2 + \frac{1}{-0.625z + \frac{1}{-3.2}} \qquad (19)$$

Y gráficamente queda de la siguiente forma:



Los filtros se pueden clasificar según su respuesta a una entrada de impulso de la siguiente manera:

- Filtro de respuesta infinita al impulso o filtro recursivo: se caracteriza porque aunque los coeficientes a_i sean de valores cercanos a 0, estos nunca son 0. Su naturaleza recursiva tiene la desventaja de que puede acumular errores de las salidas anteriores.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}} \tag{20}$$

$$\rightarrow n \geqslant m$$

O bien,

$$\begin{aligned} y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \ldots - a_n y(k-n) + \ldots \\ + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \ldots + b_m x(k-m) \end{aligned} \tag{21}$$

- Filtro de respuesta finita al impulso, no recursivo o de promedio móvil: la respuesta al impulso se limita a un número finito de muestras sobre un rango finito de intervalos de tiempo. Se reconoce debido a la ausencia de las a_i en el diagrama.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m} \tag{22}$$

O bien,

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \ldots + b_m x(k-m) \tag{23}$$

La secuencia de la respuesta finita al impulso se define como $g(kT)$, donde la aplicación de una entrada $x(kT)$ al filtro, genera una salida $y(kT)$:

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{k} g(hT)x(kT - hT) \tag{24}$$

Al aumentar el valor de k, se debe limitar el número de valores anteriores de la entrada a procesar a N valores, tal que:

$$\begin{aligned} y(kT) = g(0)x(kT) + g(T)x((k-1)T) + \dots \\ + g(NT)x((k-N)T) \end{aligned} \tag{25}$$

O bien,

$$\begin{aligned} Y(z) = g(0)X(z) + g(T)z^{-1}X(z) + \dots \\ + g(NT)z^{-N}X(Z) \end{aligned} \tag{26}$$

Características del filtro de respuesta finita al impulso

- Es no recursivo, por lo que se puede evitar la acumulación de errores.
- No requiere de alimentación (no recursivo), por lo que la programación directa y la estándar son iguales.
- Los polos de la función de transferencia pulso, están en el origen, por lo que siempre es estable.
- El uso de componentes de alta frecuencia incrementa el número de elementos de retraso necesarios, aumentando el tiempo de retardo.

Ejemplo 7: (Ejercicio 3-9 [1])

El filtro digital que se estudió en el ejemplo anterior es un filtro recursivo. Modifique este filtro y haga su realización como un filtro no recursivo. Luego obtenga la respuesta de este filtro no recursivo a una entrada delta de Kronecker

Primero, se divide el numerador entre el denominador:

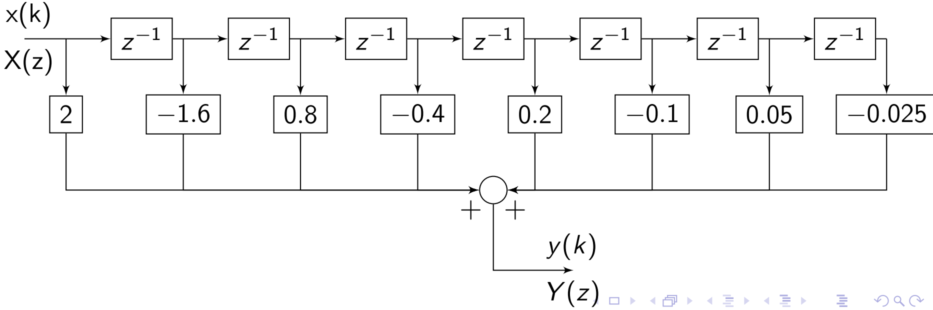
$$G(z) = \frac{2 - 0.6z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} G(z) = 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + \ldots \\ +0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7} + \ldots \end{aligned} \tag{28}$$

Se determina N=7, es decir, se trabaja con 7 valores previos.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 2-1.6z^{-1}+0.8z^{-2}-0.4z^{-3}+0.2z^{-4}-0.1z^{-5}+0.05z^{-6}-0.025z^{-7} \tag{29}$$

Se determina N=7, es decir, se trabaja con 7 valores previos. Gráficamente se obtiene:



El filtro digital descrito, es la transformada z de la secuencia de la respuesta al impulso, mientras que la transformada inversa da la respuesta al impulso:

$$\begin{aligned} y(kT) = 2x(kT) - 1.6x((k-1)T) + 0.8x((k-2)T) + \dots \\ -0.4x((k-3)T) + 0.2x((k-4)T) - 0.1x((k-5)T) + \dots \\ +0.05x((k-6)T) - 0.025x((k-7)T) \end{aligned} \tag{30}$$

En donde, para una entrada delta de Kronecker, con $x(0) = 1$ y $x(kT) = 0$, con k diferente de 0:

$$\begin{array}{cccc} y(0) = 2 & y(T) = -1.6 & y(2T) = 0.8 & y(3T) = -0.4 \\ y(4T) = 0.2 & y(5T) = -0.1 & y(6T) = 0.05 & y(7T) = -0.025 \end{array}$$

■

Bibliografía

K. Ogata.
Sistemas de control en tiempo discreto.
Pearson educación, EE.UU., 1996.