Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL-4703 Señales y Sistemas
Profesores: M.Sc. José Miguel Barboza Retana
Lic. Daniel Kohkemper Granados
M.Sc. Javier Rivera Alvarado
Dr. Pablo Alvarado Moya
I Semestre, 2019
Examen Parcial

Total de Puntos:	107
Puntos obtenidos:	
Porcentaje:	
Nota:	

Nombre: ______________________ Carné: __________

Advertencias:

- Resuelva el examen en forma individual, ordenada y clara.
- Cada ejercicio debe indicar el procedimiento o justificación completa de la solución.
- No se aceptarán reclamos de desarrollos con lápiz, borrones o corrector de lapicero.
- Si trabaja con lápiz, debe marcar su respuesta final con lapicero.
- El uso de lapicero rojo **no** está permitido.
- El uso del teléfono celular no es permitido. Este tipo de dispositivos debe permanecer **totalmente apagado** durante el examen.
- No se permite el uso de **ningún tipo** de calculadora electrónica.
- El instructivo de examen debe ser devuelto junto con su solución.
- El incumplimiento de los puntos anteriores equivale a una nota igual a cero en el ejercicio correspondiente o en el examen.

Pregunta 1	de 4
Pregunta 2	de 6
Pregunta 3	de 10
Pregunta 4	de 8
Pregunta 5	de 5
Pregunta 6	de 6
Pregunta 7	de 5
Pregunta 8	de 7
Problema 1	de 32
Problema 2	de 24

Preguntas

51 Pts

Debe justificar sus respuestas a las preguntas. Para ello basta un esbozo de la idea o concepto requerido, y si necesita más espacio puede utilizar el cuaderno de examen indicando claramente la pregunta correspondiente con su solución.

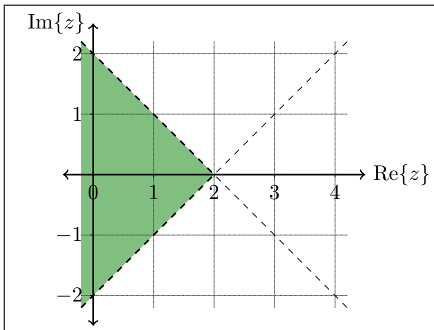
1. Establezca la correspondencia correcta entre las condiciones geométricas dadas por las desigualdades algebraicas, y las regiones sombreadas en los diagramas de Argand abajo. Indique la letra correspondiente a cada expresión algebraica en el espacio en blanco debajo de cada figura. Las dos expresiones algebraicas en cada llave deben satisfacerse simultáneamente. **4 Pts**

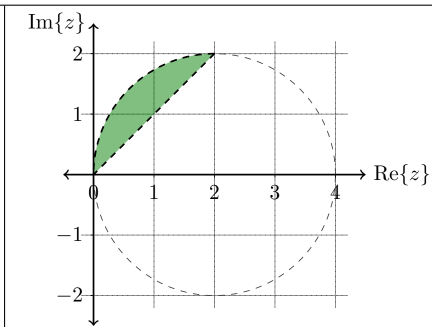
a. $\begin{cases} |z-2| < 2 \\ \frac{\pi}{4} < \angle z < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

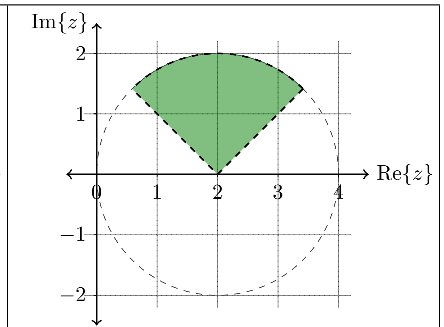
b. $\begin{cases} |z| > 2 \\ \operatorname{Re}\{z\} < \operatorname{Im}\{z\} \end{cases}$

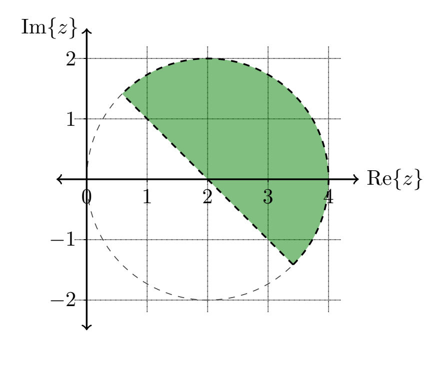
c. $\begin{cases} |z-2| < 2 \\ |z-1+j| > |z-3-j| \end{cases}$

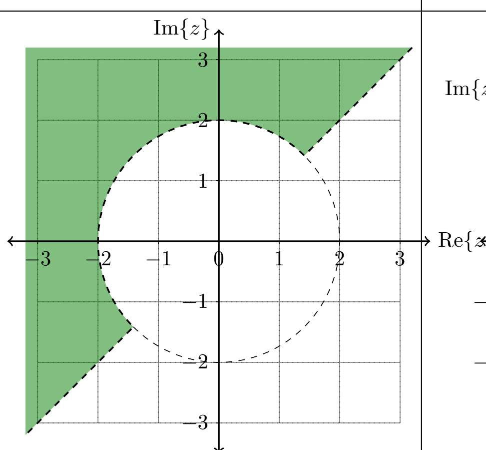
d. $\begin{cases} |z-1+j| > |z-3-j| \\ |z-3+j| > |z-1-j| \end{cases}$

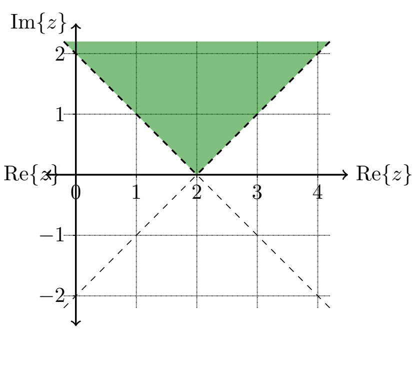












2. Defina la equivalencia correcta entre las expresiones relacionadas a números complejos de la segunda columna con las expresiones de la cuarta columna. Para ello escriba la letra respectiva en el espacio que corresponda según su equivalencia. 6 Pts

A	2^j		1
B	j^{403}		-1
C	$j^{-j\frac{4}{\pi}}$		0
D	$e^{-j4\pi}$		j
E	$\ln(j)$		$-j$
F	$(-j)^{1002}$		$\cos(e^2) + j\,\mathrm{sen}(e^2)$
			$\cos(\ln(2)) + j\,\mathrm{sen}(\ln(2))$
			e^2
			je^2
			$\frac{\pi}{2}$
			$j\frac{\pi}{2}$

3. La función de variable compleja $f(z)$ está representada, entre otras, por las siguientes series de Laurent 10 Pts

$$f(z) = \sum_{k=-3}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \qquad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{2^k}{(z+1)^{k-3}}$$

$$f(z) = \sum_{k=-5}^{\infty} \frac{j^k}{|k|!\, z^k} \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} (z-j)^k$$

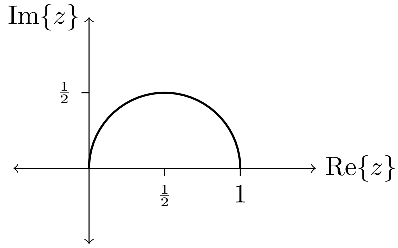
donde para todos los desarrollos en serie se han utilizado regiones de convergencia que contienen al punto donde se centra la serie como punto límite.

a. Indique dónde al menos deben encontrarse polos, ceros (ambos con su respectivo orden), singularidades esenciales o puntos regulares de $f(z)$.
b. Indique el valor de los residuos de $f(z)$ para cada uno de los puntos donde se centran las series anteriores.

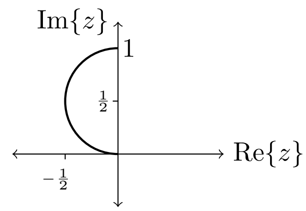
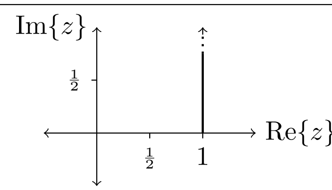
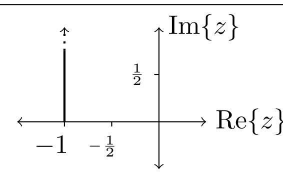
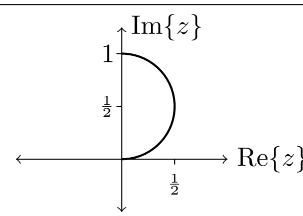
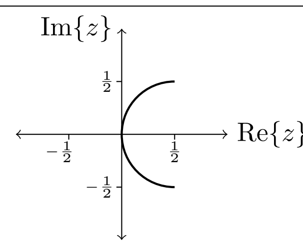
4. Indique y justifique cuántos polos, ceros, singularidades esenciales y puntos regulares (su orden y respectiva posición), tiene la siguiente función: 8 Pts

$$f(z) = \frac{z^3\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}{(z+2)^3(z^2+9)}$$

5. Asocie el mapeo en la columna de la izquierda que transforma el trazo de la siguiente figura



en el trazo correspondiente en la columna de la derecha $\boxed{\text{5 Pts}}$

A	$\frac{1}{2} + j\left(z - \frac{1}{2}\right)$		
B	$-\dfrac{1}{z}$		
C	jz		
D	$\dfrac{1}{1-z}$		
E	$j(1-z)$		

6. Sea la función de variable compleja

$$f(z) = ze^z$$

$\boxed{\text{6 Pts}}$

a. Demuestre matemáticamente que la función $f(z)$ es analítica para todo $z \in \mathbb{C}$.
b. Indique dónde la función $f(z)$ no es conforme.

7. Sea la integral de variable compleja

$$\int_C (z^2 + 3z)dz$$

Evalúe la integral anterior para el contorno descrito por el arco que va desde $z = 2 + j0$ hasta $z = 0 + j2$ a través del círculo $|z| = 2$ en el primer cuadrante del plano complejo. 5 Pts

8. Sea $x(t)$ una función periódica de periodo T_p con coeficientes de la serie de Fourier c_k, es decir:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

con $\omega_0 = 2\pi/T_p$.

Se cumple además que:

- $x(t) \in \mathbb{R}$
- $x(t) = -x(t - T_p/2)$
- $c_k = 0$ para $k = 0$ y $k \geq 3$
- $\dfrac{1}{T_p} \displaystyle\int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} |x(t)|^2 dt = \dfrac{1}{2}$
- c_1 es real positivo

Considerando toda la información anterior, determine la función de variable y valor real $x(t)$ correspondiente. 7 Pts

Problemas

Problema 1 Series de Laurent y mapeos de variable compleja $\boxed{\textbf{32 Pts}}$
Sea la función de variable compleja $\gamma \in \mathbb{C}$

$$f(\gamma) = \frac{5\gamma}{\gamma^2 + 3\gamma - 4} \tag{1.1}$$

que se puede descomponer en series de Laurent de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (\gamma - \gamma_0)^n \tag{1.2}$$

1.1. Indique la máxima región de convergencia de la serie (1.2) para $\gamma_0 = 0$ asociada a la función (1.1) si se sabe que dicha región debe contener a $|\gamma| = 2$. Debe indicar dicha región tanto gráficamente como de forma algebraica. $\boxed{\text{4 Pts}}$

1.2. Demuestre que la serie (1.2) centrada en $\gamma_0 = 0$, para la región de convergencia que contiene a $|\gamma| = 2$, tiene coeficientes dados por: $\boxed{\text{8 Pts}}$

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{para } n < 0 \\ \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

1.3. Se debe encontrar ahora la región del plano complejo $\rho \in \mathbb{C}$ en la que converge la serie

$$g(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{-4\rho + j2\alpha}{2\rho + j\alpha} \right)^n \tag{1.4}$$

donde los coeficientes c_n están dados por (1.3), y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (es decir, α es un número real positivo).

Indique si para encontrar dicha región se debe utilizar el mapeo

$$\gamma = \frac{-4\rho + j2\alpha}{2\rho + j\alpha}$$

o su inverso, utilizando como entrada la región de convergencia indicada por usted en el punto 1.1. Justifique. $\boxed{\text{3 Pts}}$

1.4. Encuentre los pasos elementales (rotaciones, escalamientos, inversiones y traslaciones) que componen el mapeo requerido para encontrar la región de convergencia de (1.4). $\boxed{\text{9 Pts}}$

1.5. Utilice los pasos indicados por usted en el paso anterior, para encontrar gráficamente la región de convergencia de (1.4). $\boxed{\text{8 Pts}}$

Problema 2 Desarrollo de series de Fourier **24 Pts**

Considere la función periódica $x(t)$ definida en la figura 2.1. Sea T el periodo definido en unidades de segundos y A una constante de valor real.

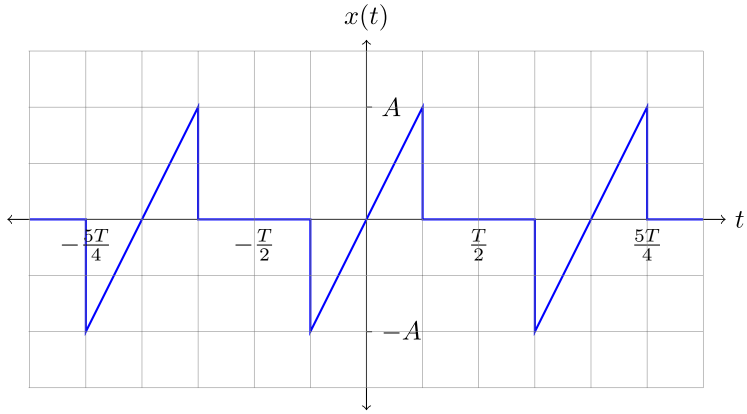


Figura 2.1: Señal en tiempo continuo $x(t)$

2.1. Determine los coeficientes c_k de la serie de Fourier utilizada para la síntesis de la función $x(t)$ a partir de la base ortogonal de exponenciales complejos armónicamente relacionados definida como $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$. Debe simplificar al máximo la función de coeficientes c_k con el fin de demostrar que estos están definidos por la siguiente expresión: 9 Pts

$$c_k = \begin{cases} \frac{jA}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \frac{2}{\pi k}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right] & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

2.2. Exprese la síntesis de la función $x(t)$ a partir de las bases ortogonales alternativas de la serie de Fourier conocidas como: cosenoidales desfasados y suma de cosenos-senos. Para esto debe utilizar el resultado obtenido de los coeficientes c_k en el punto anterior. 4 Pts

2.3. Considere la función $y(t)$ definida en la figura 2.2. Exprese la función $y(t)$ en términos de una combinación lineal de transformaciones de $x(t)$, donde las transformaciones pueden ser inversiones, escalamientos y/o desplazamientos temporales, además de escalamientos de valor o cambios de nivel promedio. 2 Pts

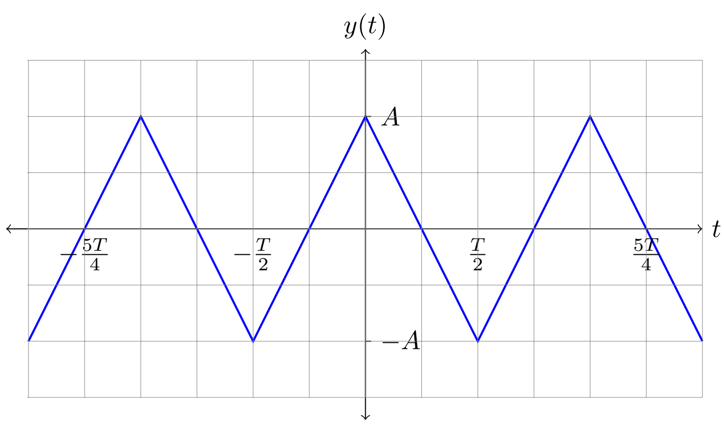


Figura 2.2: Señal en tiempo continuo $y(t)$

2.4. Encuentre los coeficientes d_k de la síntesis de la función $y(t)$ como serie de Fourier definida por $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{j\omega_0 kt}$. Para ello utilice la ecuación definida como respuesta en el punto anterior, los coeficientes c_k obtenidos en el primer punto de este problema, y las propiedades de las series de Fourier. Simplifique al máximo la función de coeficientes d_k. Como punto de prueba el coeficiente d_1 es igual a $4A/\pi^2$ $\boxed{\text{5 Pts}}$

2.5. Dibuje la representación espectral de potencia de la función $y(t)$ incluyendo en esta hasta el tercer armónico. $\boxed{\text{2 Pts}}$

2.6. Calcule la potencia media P_f de la señal $y(t)$ hasta el tercer armónico inclusive. $\boxed{\text{2 Pts}}$