Transformada Inversa de Laplace

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

La transformada inversa de Laplace

Descomposición en fracciones parciales

Cualquier función racional de la forma $X(s) = N(s)/D(s)$, con $N(s)$ y $D(s)$ polinomios tales que el orden de $D(s)$ es **estrictamente mayor** que el de $N(s)$ (es decir, $X(s)$ es una función **racional propia**) pueden descomponerse como una suma de términos más sencillos, cada uno con un solo polo de orden n.

Ejemplo: Descomposición de funciones racionales impropias (1)

Descomponga la siguiente función racional impropia en una suma de un polinomio más una función racional propia.

$$X(s) = \frac{s^3 - 1}{s^2 - 1}$$

Ejemplo: Descomposición de funciones racionales impropias (2)

Solución: Utilizando división polinomial se obtiene

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & s^3 & & & -\;1 & s^2-1 \\ \cline{6-6}
-(& s^3 & - & s\;) & & s \\ \hline
 & & & s & -\;1 &
\end{array}
$$

con lo que resulta

$$X(s) = s + \frac{s-1}{s^2-1} = s + \frac{1}{s+1}$$

Si se desea obtener la transformada inversa de esta expresión, de la tabla de transformadas se tiene que

$$s \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$\frac{1}{s+a} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-at}u(t)$$

Ejemplo: Descomposición de funciones racionales impropias (3)

Donde se ha asumido que la señal debe ser causal. Con la propiedad de linealidad se tiene entonces

$$X(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; x(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + e^{-t}u(t)$$

Ejemplo: Transformada Inversa de Laplace de 2^{do} orden (1)

Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

asumiendo primero que la señal correspondiente $x(t)$ es causal, y luego que es una señal izquierda, y que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Transformada Inversa de Laplace de 2^{do} orden (2)

Solución: Los polos a_1 y a_2 de $X(s)$ equivalen a las raíces del denominador:

$$a_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$
$$a_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

que pueden ser dos valores reales diferentes, dos valores reales iguales (i.e. un polo doble), o un par de polos complejos conjugados, dependiendo si el término

$$\Delta = \alpha^2 - \beta$$

es positivo, cero, o negativo, respectivamente.

Ejemplo: Transformada Inversa de Laplace de 2^{do} orden (3)

En el caso que $\Delta = 0$ entonces $a_1 = a_2 = -\alpha$

$$X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

Y con un ejemplo anterior se tiene para la región de convergencia $\sigma > -\alpha$.

$$x(t) = te^{-\alpha t}u(t)$$

Utilizando la tabla se obtiene para la ROC $\sigma < -\alpha$

$$x(t) = -te^{-\alpha t}u(-t)$$

Ejemplo: Transformada Inversa de Laplace de 2^{do} orden (4)

En el caso que $\Delta \neq 0$ se cumple

$$X(s) = \frac{1}{(s-a_1)(s-a_2)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2}$$

Para encontrar A_i puede multiplicarse ambos lados de la ecuación anterior por $(s-a_1)(s-a_2)$ que resulta en

$$1 = (s-a_2)A_1 + (s-a_1)A_2$$

Con $s \to a_2$, y luego con $s \to a_1$ se obtiene

$$A_1 = \frac{1}{a_1-a_2} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \qquad A_2 = \frac{1}{a_2-a_1} = -A_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}$$

por lo que finalmente

$$X(s) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left[\frac{1}{s-a_1} - \frac{1}{s-a_2}\right]$$

Ejemplo: Transformada Inversa de Laplace de 2^{do} orden (5)

Si $\Delta > 0$ entonces ambos polos son reales y se cumple $a_1 > a_2$ por lo que para la ROC $\sigma > a_1$ se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}[e^{a_1 t} - e^{a_2 t}]u(t)$$

y para la ROC $\sigma < a_2$

$$x(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}[e^{a_1 t} - e^{a_2 t}]u(-t)$$

Ejemplo: Transformada Inversa de Laplace de 2^{do} orden (6)

Si $\Delta < 0$ se cumple $a_1 = a_2^*$ y entonces para la ROC $\sigma > -\alpha$ se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{2j\sqrt{|\Delta|}} e^{Re\{a_1\}t}\left[e^{jIm\{a_1\}t} - e^{-jIm\{a_1\}t}\right]u(t)$$

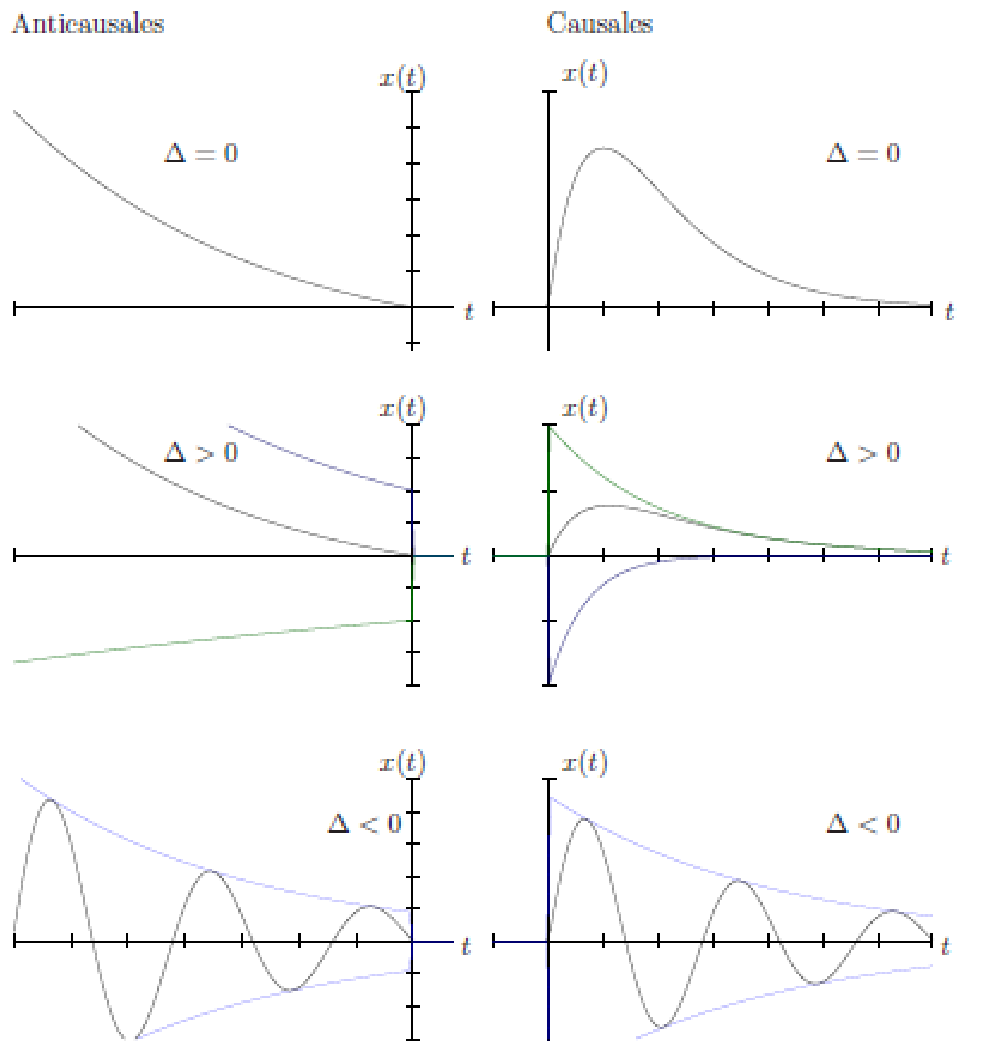
$$= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{Re\{a_1\}t} sen(Im\{a_1\}t)u(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{-\alpha t} sen\left(\sqrt{|\Delta|}t\right)u(t)$$

Y para la ROC $\sigma < -\alpha$

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{-\alpha t} sen(\sqrt{|\Delta|}t)u(-t)$$

Ejemplo: Transformada Inversa de Laplace de 2^{do} orden   (7)



Sistemas LTI y la transformada de Laplace

Sistemas LTI y la transformada de Laplace

Para un sistema LTI con respuesta $h(t)$ ante una entrada $\delta(t)$ entonces:

- $h(t)$ es la **respuesta al impulso** del sistema
- $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ es la **respuesta en frecuencia** del sistema.
- $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ es la **función de transferencia** del sistema

y se cumple:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Causalidad

Si un sistema es causal entonces $h(t)$ es derecha y la **ROC** de $\mathcal{L}\{h(t)\}$ debe ser un semiplano derecho.

Lo contrario **no** es cierto, a menos que $H(s)$ sea racional.

Estabilidad

Un sistema es estable **BIBO** si $h(t)$ es absolutamente integrable, lo que implica que el eje $j\omega$ debe estar dentro de la **ROC** de $\mathcal{L}\{h(t)\}$.

Ejemplo: Estabilidad y regiones de convergencia (1)

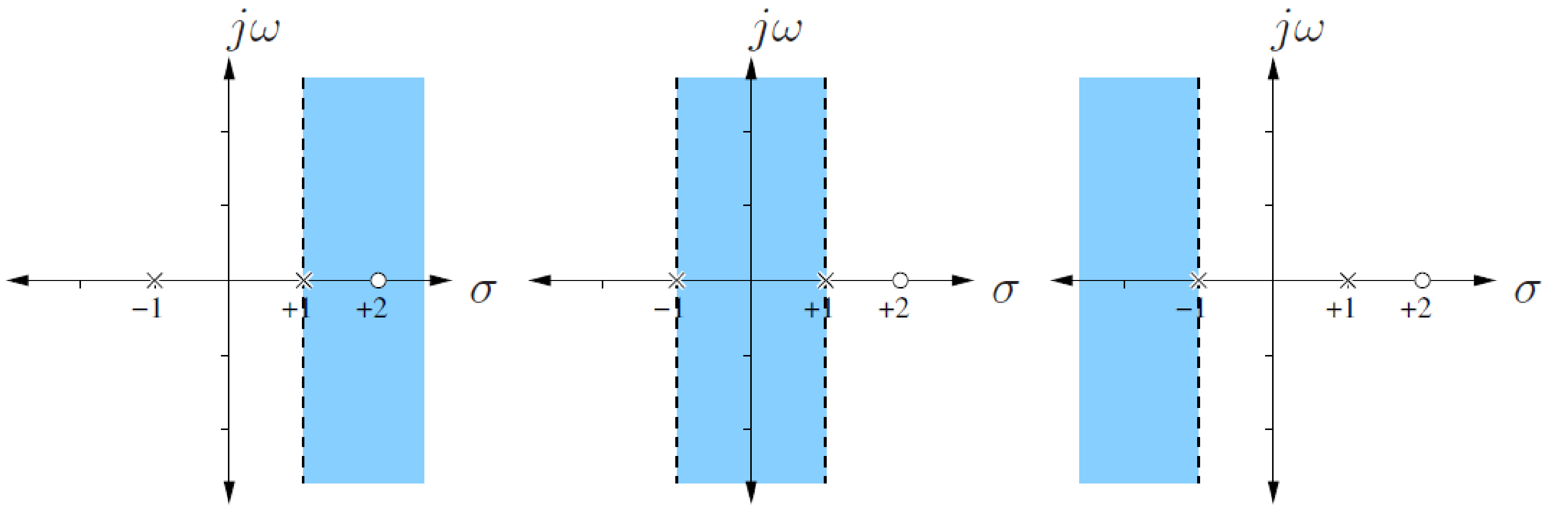
Sea

$$H(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s-1)}$$

la función de transferencia de un sistema estable. Determine su respuesta al impulso.

Ejemplo: Estabilidad y regiones de convergencia (2)

Solución:



- Del diagrama de polos y ceros de $X(s)$ se derivan tres posibles **ROC**.
- Puesto que de las tres **ROC** mostradas solo la banda de convergencia al centro contiene al eje $j\omega$, se deriva que la respuesta al impulso es una función bilateral.

Ejemplo: Estabilidad y regiones de convergencia (3)

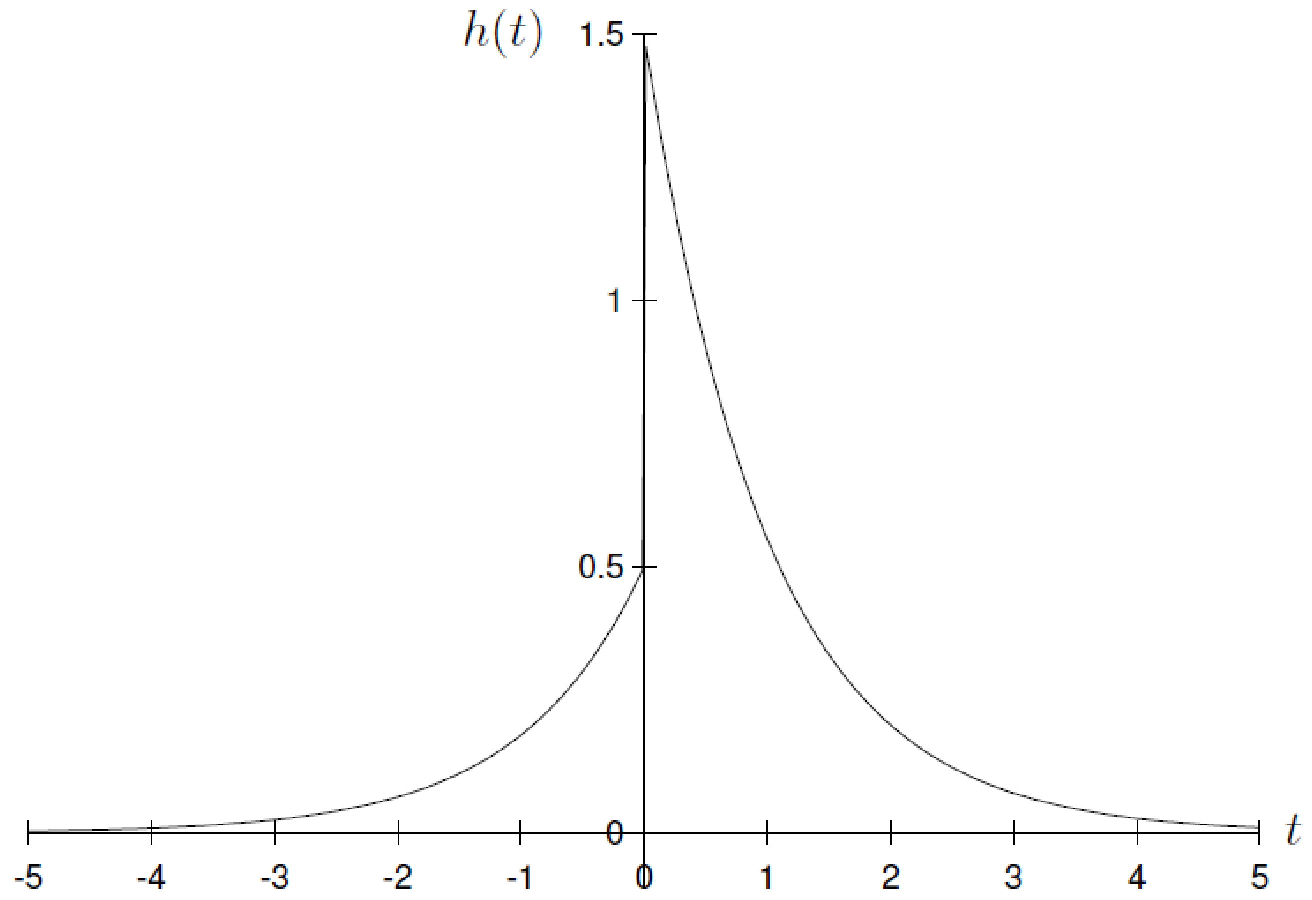
Descomponiendo a $H(s)$ en fracciones parciales se obtiene

$$H(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right]$$

y de este modo

$$h(t) = \frac{3}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(-t)$$

Ejemplo: Estabilidad y regiones de convergencia (4)



¿Dónde deben estar los polos de un sistema estable causal con función de transferencia racional?

¿Dónde deben estar los polos de un sistema estable causal con función de transferencia racional?

Polos de un sistema estable y causal

Todos sus polos deben estar localizados al lado izquierdo del eje imaginario

Ejemplo: Estabilidad de sistemas de segundo orden (1)

Evalúe la estabilidad del sistema causal de segundo orden con función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Estabilidad de sistemas de segundo orden (2)

Solución: En un ejemplo anterior se analizaron las posibles transformadas causales y anticausales de la función $H(s)$.

Para la estabilidad del sistema causal se deben considerar tres casos: un polo de orden dos, dos polos reales, o un par de polos complejos conjugados.

Si el discriminante $\Delta = \alpha^2 - \beta = 0$ hay un polo de orden dos en $-\alpha$. Este polo se encuentra del lado izquierdo del eje $j\omega$ solo si $\alpha > 0$.

Ejemplo: Estabilidad de sistemas de segundo orden (3)

Si $\Delta > 0$ los polos son reales, y el polo más a la derecha se encuentra en

$$a_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

Este polo se encuentra a la izquierda del eje imaginario solo si $\alpha > 0$ y

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} < 0$$

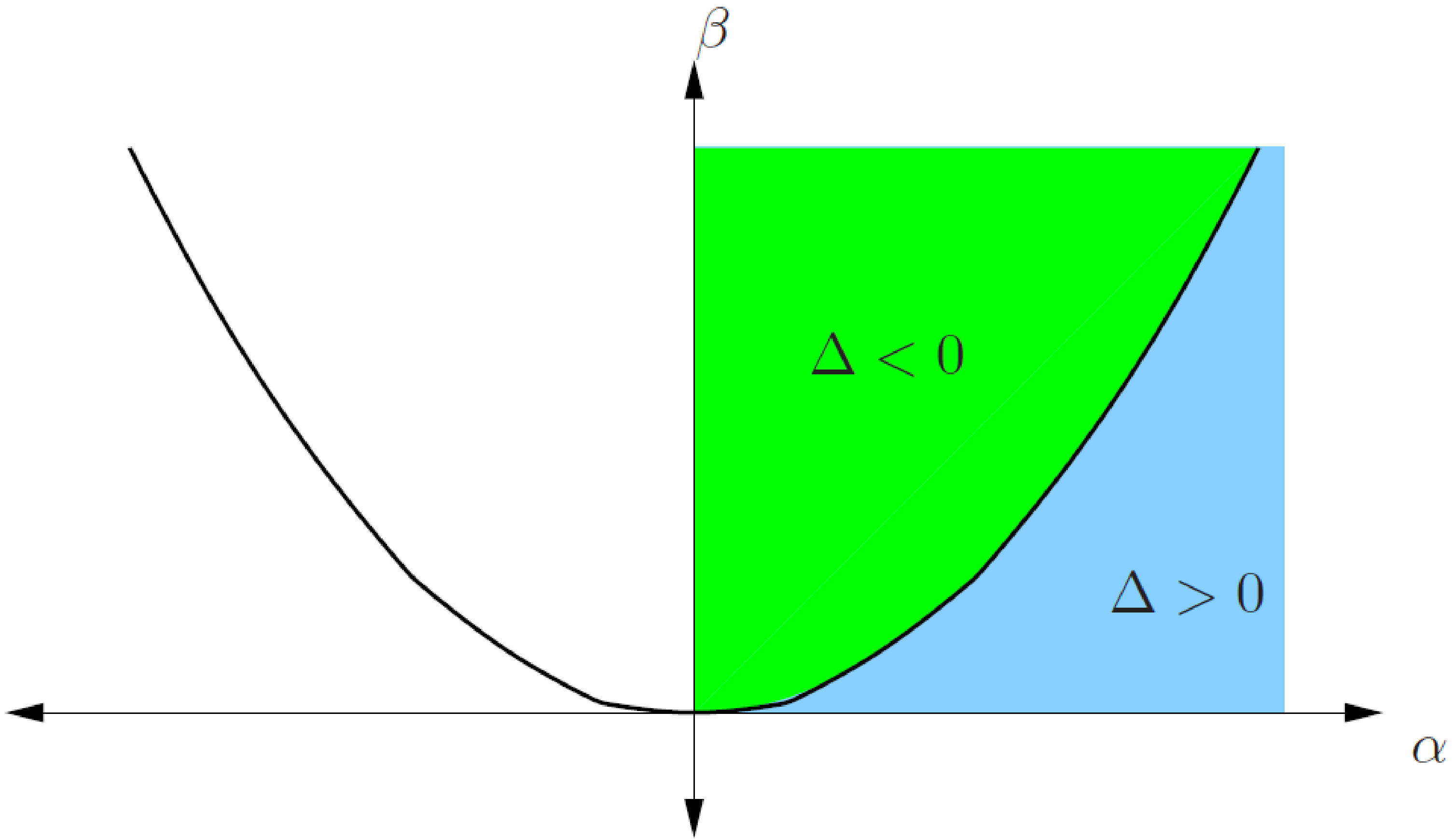
$$\sqrt{\alpha^2 - \beta} < \alpha$$

$$\alpha^2 - \beta < \alpha^2$$

$$\beta > 0$$

Ejemplo: Estabilidad de sistemas de segundo orden (4)

Si $\Delta < 0$ entonces la componente real del polo es $-\alpha$, que se encontrará del lado izquierdo del eje imaginario solo si $\alpha > 0$.



Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Gran cantidad de sistemas físicos se modelan con ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Transformada de Laplace de una Ecuación Diferencial (1)

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

y con la propiedad de linealidad

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{L}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{L}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

Transformada de Laplace de una Ecuación Diferencial (2)

Utilizando ahora la propiedad de diferenciación

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

$$Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

Puesto que la función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

se cumple

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Transformada de Laplace de una Ecuación Diferencial (3)

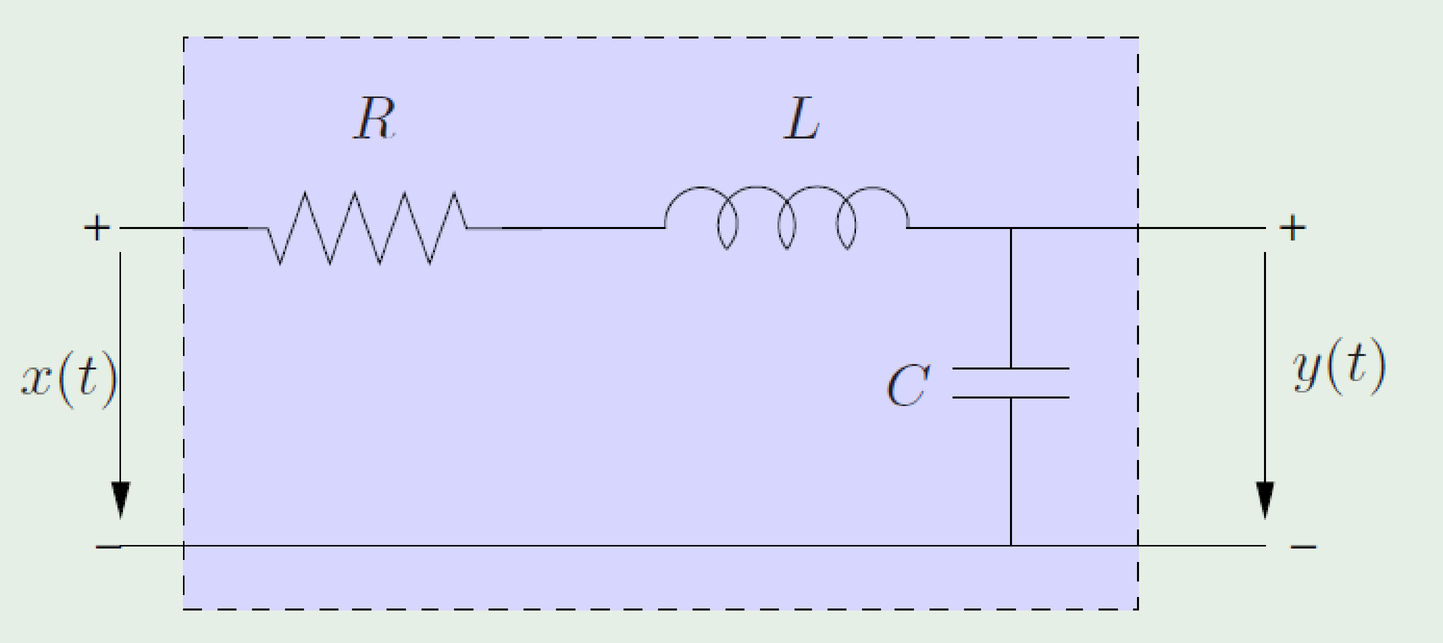
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

$H(s)$ es una función racional con

- **numerador** de grado M, con coeficientes iguales a los que multiplican las derivadas de la **entrada**, y
- **denominador** de grado N con coeficientes iguales a los de las derivadas de la **salida**

Ejemplo: Circuito RLC (1)

La figura muestra un circuito **RLC** interpretado como sistema con tensión eléctrica de entrada $x(t)$ y tensión eléctrica de salida $y(t)$



Determine la función de transferencia del sistema, y evalúe la estabilidad del mismo.

Ejemplo: Circuito RLC (2)

Solución: en un condensador y en una bobina se cumple para sus tensiones $u(t)$ y sus corrientes $i(t)$

$$i(t) = C\frac{d}{dt}u(t) \qquad\qquad u(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

Para este circuito la tensión en el condensador es $y(t)$ y por tanto

$$i(t) = C\frac{d}{dt}y(t)$$

Además, se cumple que

$$\begin{aligned} x(t) &= Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + y(t) \\ &= RC\frac{d}{dt}y(t) + LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) \end{aligned}$$

Ejemplo: Circuito RLC (3)

y expresando esto en el dominio de Laplace

$$X(s) = sRCY(s) + s^2LCY(s) + Y(s)$$

$$= Y(s)[LCs^2 + RCs + 1]$$

por lo que para la función de transferencia se cumple

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$= \frac{1}{LC}\left[\frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\right] = \frac{1}{LC}\left[\frac{1}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)}\right]$$

Donde

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{R}{2L}\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}$$

Ejemplo: Circuito RLC (4)

- R, L y C son siempre reales positivos por lo que el término dentro de la raíz es siempre menor que uno, y la parte real de los polos es siempre menor que cero.
- Como sistema real el circuito es causal, y el sistema es estable al estar incluido en la **ROC** de $H(s)$ el eje imaginario $j\omega$.
- La respuesta al impulso se puede calcular a partir de $H(s)$, pero su forma dependerá del signo del discriminante de la ecuación cuadrática anterior, tal y como se mostró en ejemplos anteriores.

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.