Transformada Bilateral de Laplace

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

De Fourier a Laplace

- La **transformada de Laplace** puede interpretarse como una generalización de la **transformada de Fourier**, que permite manejar problemas no tratables con esta última.

- Paso clave:

$$j\omega \rightarrow s = \sigma + j\omega$$

Transformada bilateral de Laplace

Transformada de Laplace

En el capítulo anterior se definió la transformada de Fourier como

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

La transformada de Laplace se obtiene sustituyendo $j\omega$ por s, con $s = \sigma + j\omega$:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

El operador de Laplace se denota como:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

La relación entre el dominio temporal y de frecuencia compleja se denota como

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(s) \qquad \text{o} \qquad x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$$

Relación entre las transformadas de Fourier y Laplace

Nótese entonces que se cumple

$$\mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=j\omega} = X(s)\Big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = X(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt \\
&= \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}
\end{aligned}$$

Relación entre las transformadas de Fourier y Laplace

La **transformada de Laplace** se interpreta como la **transformada de Fourier** de la función $x(t)$ multiplicada por la señal exponencial real $e^{-\sigma t}$ que será creciente o decreciente dependiendo del signo de σ.

Ejemplo: Transformada de Laplace (1)

Calcule la **transformada de Laplace** de la función $x(t) = e^{-at}u(t)$

Ejemplo: Transformada de Laplace (2)

Solución: Se tiene que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+s)t} dt$$

$$= -\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s}\bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1 - e^{-(a+s)\infty}}{a+s}$$

Se debe evaluar la convergencia del término $e^{-(a+s)\infty}$

Ejemplo: Transformada de Laplace (3)

Con $a = Re\{a\} + jIm\{a\}$ y $s = \sigma + j\omega$ se tiene

$$e^{-(a+s)\infty} = e^{-(Re\{a\}+\sigma)\infty} e^{-j(Im\{a\}+\omega)\infty}$$

- El segundo factor no converge; pero tiene magnitud uno
- Convergencia del producto depende del primer factor:
  - Si $Re\{a\} + \sigma > 0$, esta expresión converge a cero.
  - Si $Re\{a\} + \sigma < 0$, diverge hacia infinito, y
  - Si $Re\{a\} + \sigma = 0$ entonces el producto simplemente no converge.

Esto quiere decir que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+a}, \qquad \sigma > -Re\{a\}$$

Regiones de convergencia en la transformada de Laplace

La transformada de Laplace involucra entonces

1. Una **expresión algebraica**, más
2. Una **región de convergencia** o **ROC**

Nótese en el ejemplo anterior, que si $Re\{a\} < 0$, entonces el eje $j\omega$ queda fuera de la ROC y por tanto $x(t)$ no tendría transformada de Fourier.

Ejemplo: ROC de la transformada de Laplace (1)

Calcule la **transformada de Laplace** de la función $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

Ejemplo: ROC de la transformada de Laplace (2)

Solución: Se tiene que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{-at}e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{-(a+s)t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s}\right|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1-e^{(a+s)\infty}}{a+s}$$

Se debe evaluar la convergencia del término $e^{(a+s)\infty}$

Ejemplo: ROC de la transformada de Laplace (3)

Descomponiendo el exponente en sus partes real e imaginaria y considerando $s = \sigma + j\omega$ se tiene

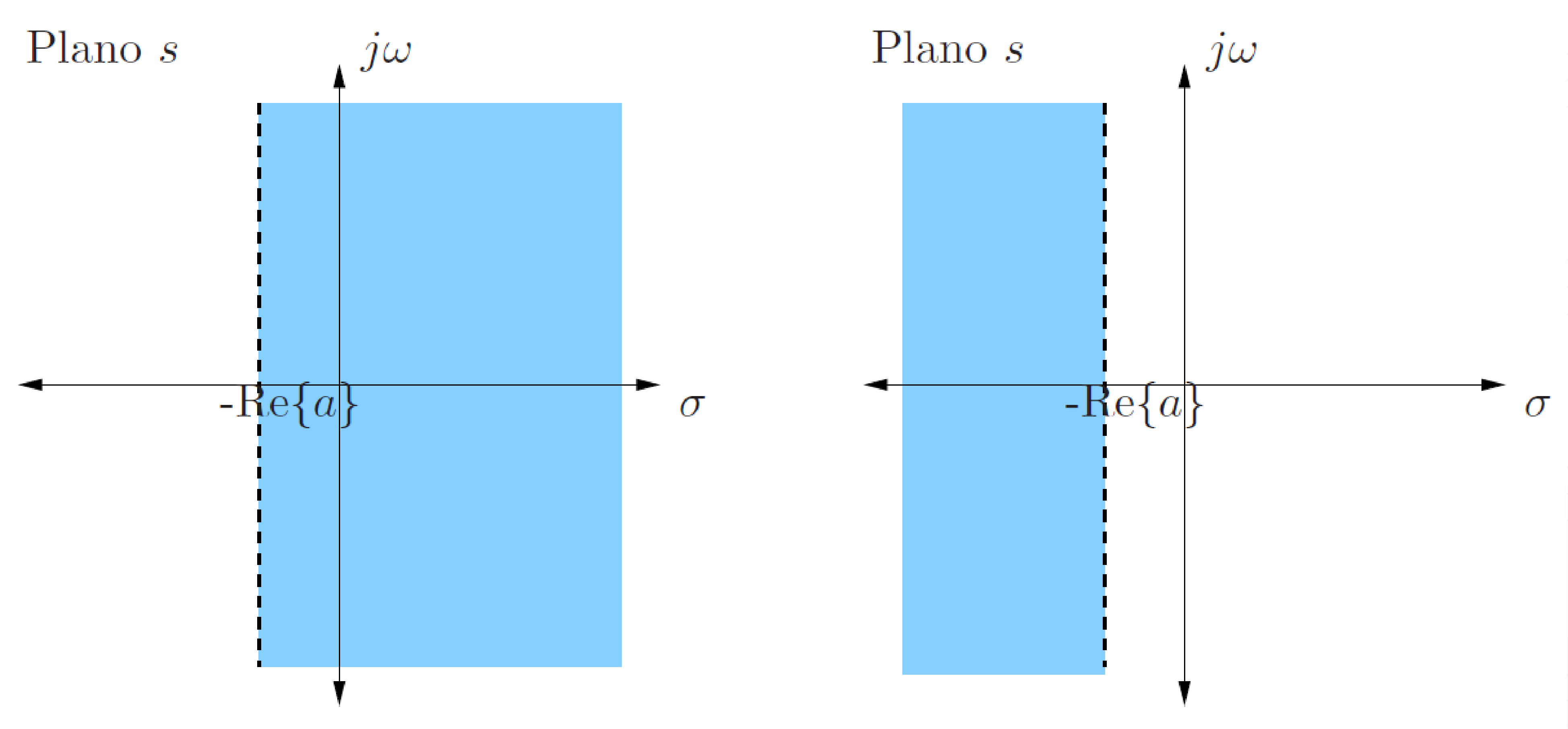
$$e^{(a+s)\infty} = e^{(Re\{a\}+\sigma)\infty} e^{j(Im\{a\}+\omega)\infty}$$

- El segundo factor no converge
- Puesto que su magnitud es uno, la convergencia del producto depende del primer factor
  - Si $Re\{a\} + \sigma < 0$, esta expresión converge a cero,
  - Si $Re\{a\} + \sigma > 0$ diverge hacia infinito, y
  - Si $Re\{a\} + \sigma = 0$ entonces el producto simplemente no converge.

Esto quiere decir que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+a}, \qquad \sigma < -Re\{a\}$$

Ejemplo: ROC de la transformada de Laplace (4)



Regiones de convergencia izquierda y derecha

Resumiendo los dos ejemplos anteriores

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+s}, \qquad \sigma > -Re\{a\}$$

$$\mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = \frac{1}{a+s}, \qquad \sigma < -Re\{a\}$$

Lo que muestra un hecho fundamental:

La misma expresión algebraica en el dominio s puede representar funciones diferentes en el dominio temporal, dependiendo de la ROC utilizada.

Ejemplo: Transformada de Laplace y ROC (1)

Encuentre la transformada de Laplace de la función

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{-t}\cos(at)\,u(t)$$

Con a y b reales.

Ejemplo: Transformada de Laplace y ROC (2)

Solución: La función puede reescribirse utilizando la ecuación de Euler como

$$x(t) = \left[e^{-bt} + e^{-t}\left(\frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}\right)\right]u(t)$$

$$= \left[e^{-bt} + \frac{1}{2}e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+ja)t}\right]u(t)$$

Y calculando la transformada de Laplace se obtiene

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-bt} + \frac{1}{2}e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+ja)t}\right]u(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty}\left[e^{-bt} + \frac{1}{2}e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+ja)t}\right]e^{-st}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-(1-ja)t}e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-(1+ja)t}e^{-st}dt$$

Ejemplo: Transformada de Laplace y ROC (3)

Que son tres transformaciones idénticas a las del ejemplo anterior por lo que

$$X(s) = \frac{1}{b+s} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-ja)+s} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+ja)+s}$$

ROC: $\sigma > -b$ ROC: $\sigma > -1$ ROC: $\sigma > -1$

Los tres términos deben converger, se utiliza como región de convergencia total a la intersección de las tres ROC individuales, y por tanto ROC de $x(t)$ es $\sigma > máx\{-1, -b\}$

Finalmente

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{-t}\cos(at)\,u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2s^2 + (3+b)s + 1 + a^2 + b}{(\mathrm{b}+\mathrm{s})(1 + a^2 + 2s + s^2)}$$

Caso de $X(s)$ racional

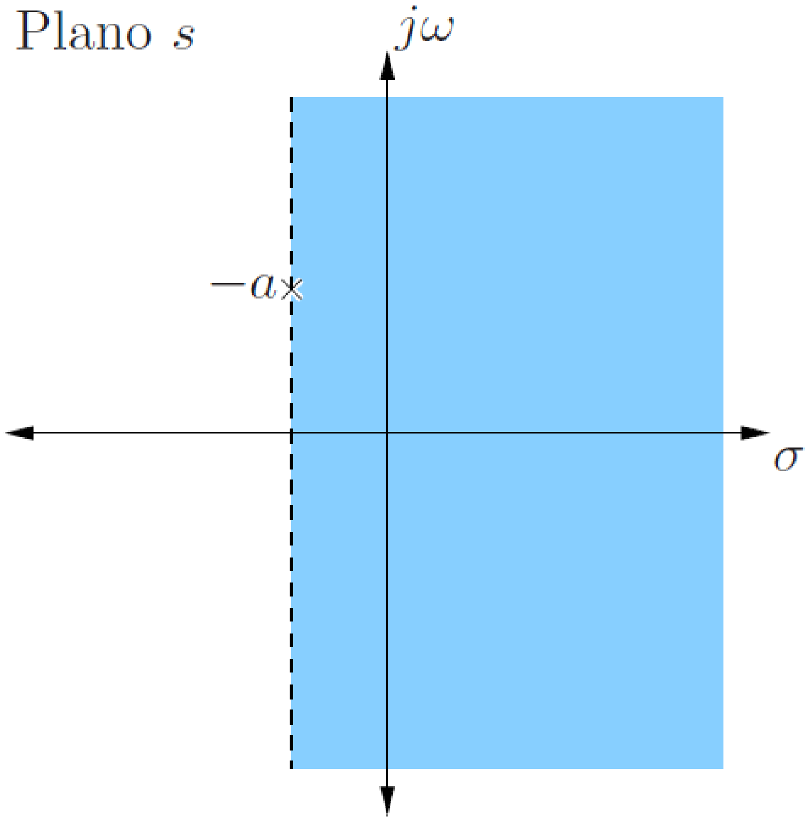
En los casos con $X(s)$ racional, es decir

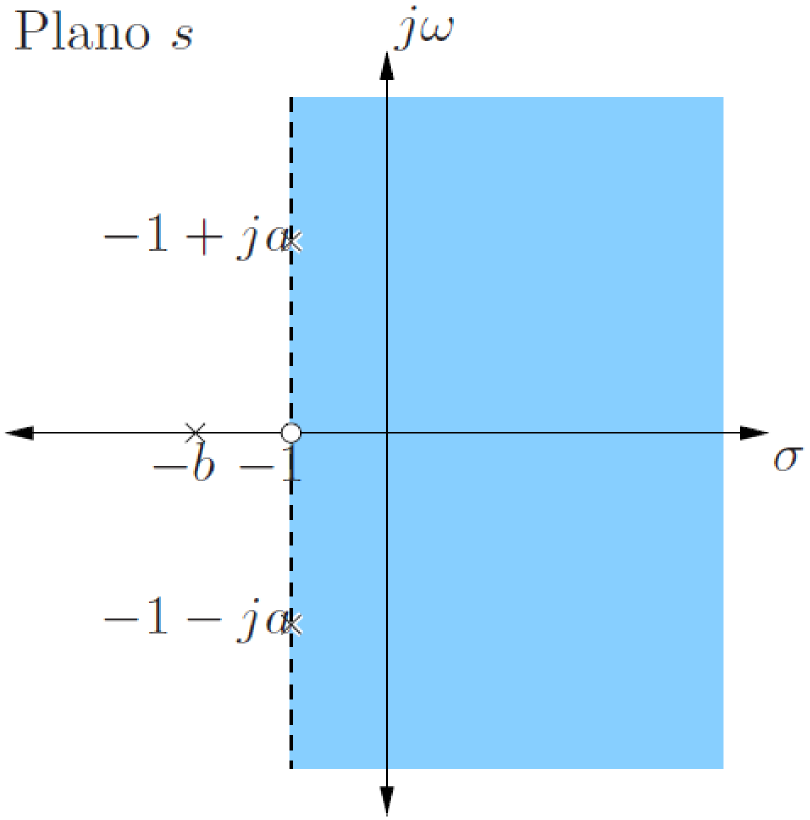
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$x(t)$ es siempre una combinación lineal de exponenciales reales o complejas.

Diagrama de polos y ceros

Se acostumbra representar a $X(s)$ en diagramas de polos y ceros, donde los ceros se marcan con "o" y los polos con "×".





Equivalencia de polos y ceros

Sea $X(s)$ racional con orden del numerador n y orden del denominador d

$$X(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_d)}$$

Se dice que

1. Hay un cero en infinito de orden $k = d - n$ si $d > n$
2. Hay un polo en infinito de orden $k = n - d$ si $n > d$

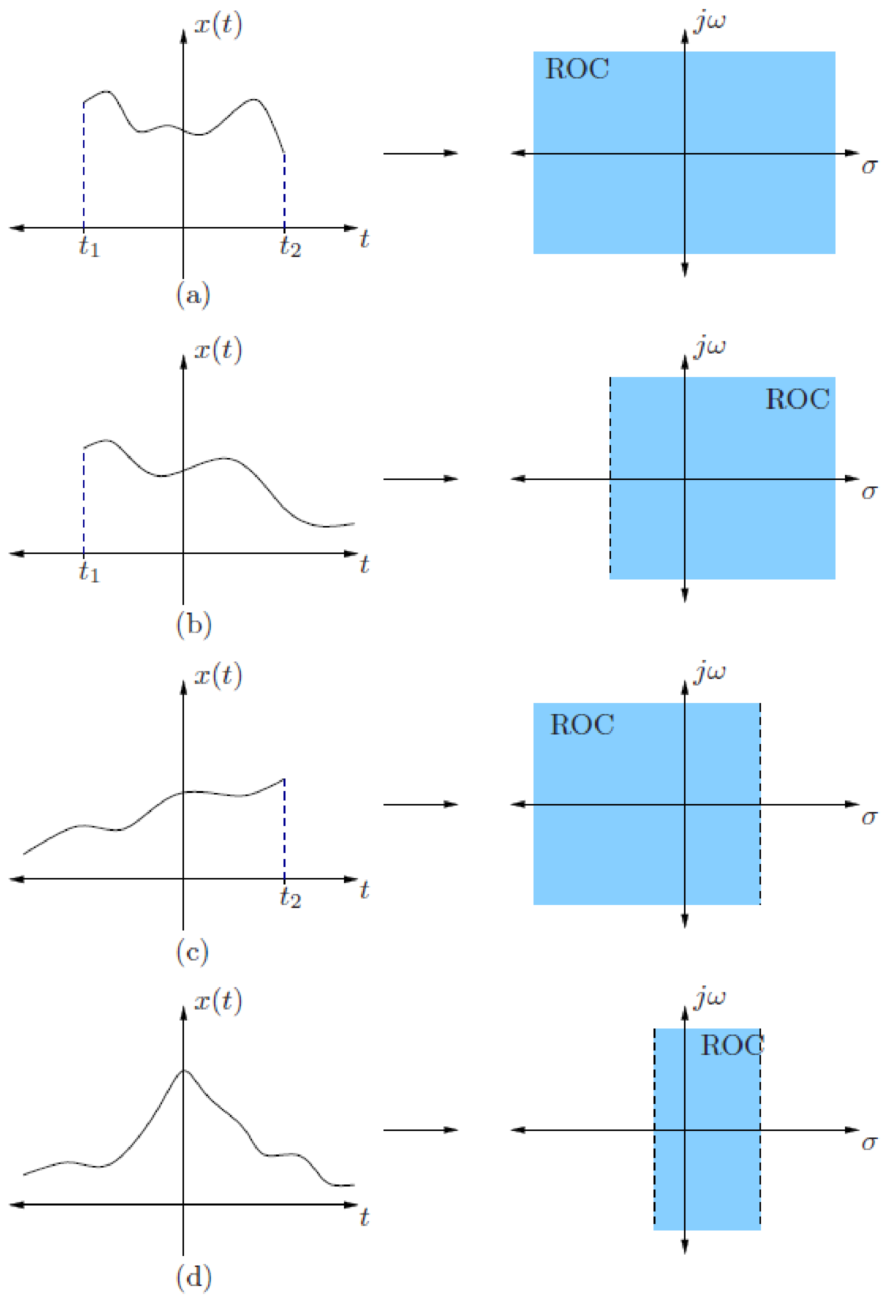
y con esto en una función racional siempre hay el mismo número de polos que ceros.

Regiones de convergencia

- La **ROC** de la **transformada de Laplace** contiene todos los puntos del plano s donde la **transformada de Fourier** de $x(t)e^{-\sigma t}$ existe.
- Primera condición de Dirichlet $\Longrightarrow x(t)e^{-\sigma t}$ absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}\, dt < \infty$$

- Esto depende únicamente de la componente real σ de la frecuencia compleja s.
- Por esta razón, la **ROC** de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ en el plano s.
- Puesto que los polos no pueden estar dentro de la **ROC**, las bandas estarán delimitadas por ellos.


x(t)
t
t1
t2
(a)
jω
ROC
σ
x(t)
t
t1
(b)
jω
ROC
σ
x(t)
t
t2
(c)
jω
ROC
σ
x(t)
t
(d)
jω
ROC
σ

Ejemplo: convergencia de funciones bilaterales (1)

Encuentre la **transformada de Laplace** de

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

con su respectiva región de convergencia, para $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: convergencia de funciones bilaterales (2)

Solución: Esta ecuación puede reescribirse como la suma de una señal derecha y otra izquierda acotadas en el punto $t = 0$.

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{+at}u(-t)$$

De los ejemplos anteriores

$$e^{-at}u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}, \qquad ROC\!: \sigma > -a$$

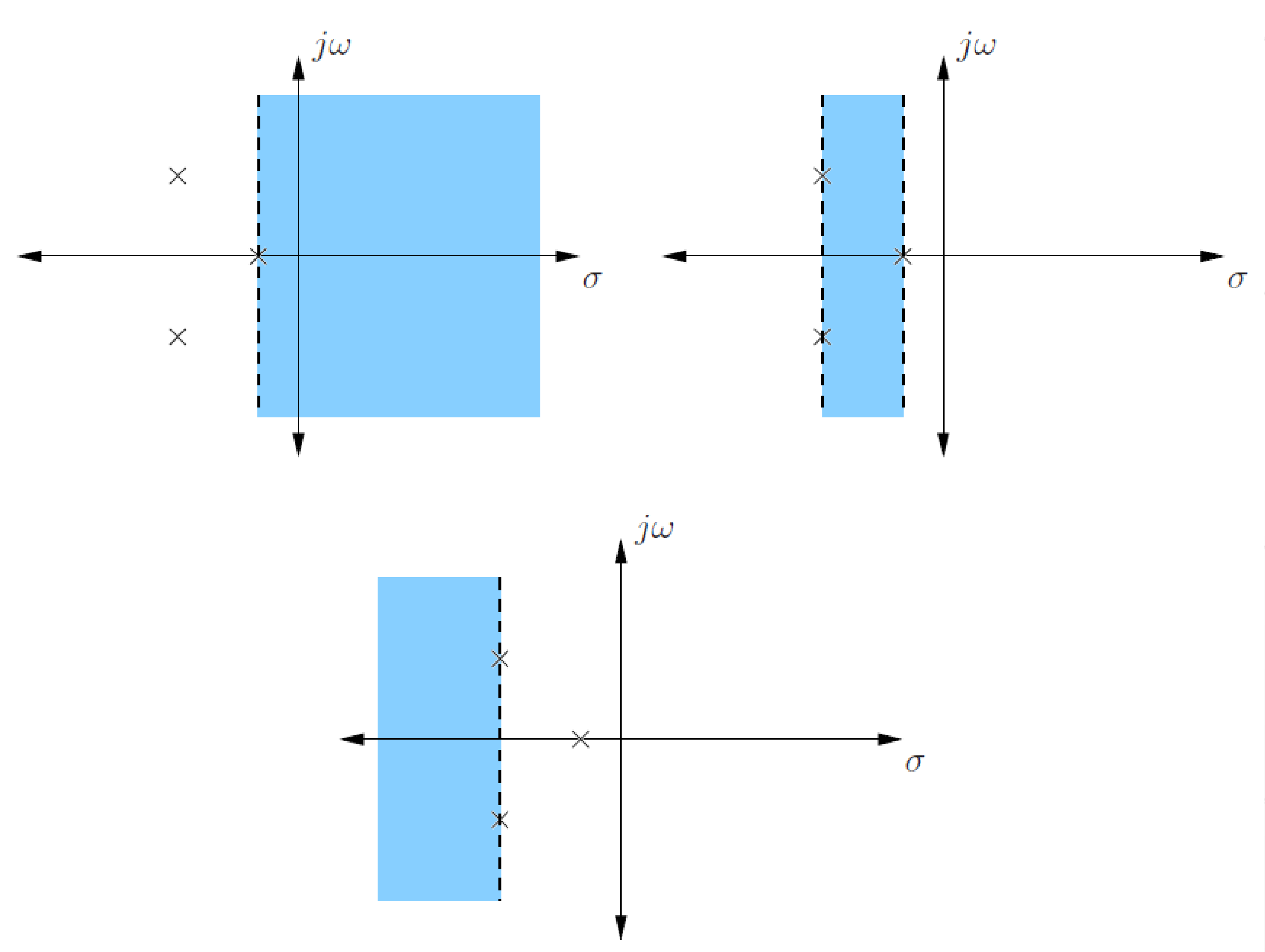
$$e^{at}u(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{-1}{s-a}, \qquad ROC\!: \sigma < a$$

Nótese que si $a < 0$ entonces no hay una región de convergencia común a ambos términos y por tanto no existe la **transformada de Laplace**. Si $a > 0$ entonces

$$e^{-a|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = -\frac{2a}{s^2 - a^2}, \qquad ROC\!:\ -a < \sigma < a$$

ROC de funciones racionales

Si $X(s)$ es racional, entonces sus polos delimitan la región de convergencia.



Transformadas bilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma < -a$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-s\tau}$	todo s
$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[e^{-at}\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$[e^{-at}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	s^n	todo s

Propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad

Sean las funciones en el dominio del tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y sus respectivas transformadas de Laplace

$$x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(s), \qquad ROC: R_1$$
$$x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_2(s), \qquad ROC: R_2$$

entonces

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s), \qquad ROC: R_1 \cap R_2$$

Nótese que es posible, si no hay puntos comunes en las regiones de convergencia, que no exista la transformada de Laplace de una combinación lineal.

Desplazamiento en el tiempo y en el dominio s

Con un análisis análogo al caso de la **transformada de Fourier** se puede demostrar que si $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$ con **ROC** R entonces

$$x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-st_0}X(s), \qquad ROC: R$$

y

$$e^{s_0 t}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s-s_0), ROC: \{s|s = r + s_0, r \in R\}$$

Un caso particular consiste en la modulación, es decir

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s-j\omega_0)$$

que desplaza la **transformada de Laplace** en dirección vertical, trasladando todo polo y cero en a hacia $a + j\omega_0$.

Conjugación

Para $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(s)$ con ROC R se cumple

$$x^*(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X^*(s^*), \qquad ROC: R$$

y por lo tanto $X(s) = X^*(s^*)$ si $x(t)$ es real.

Consecuencia directa de este hecho es que si p es un polo complejo con parte imaginaria diferente de cero, entonces p^* también lo es.

Escalamieto en el tiempo

Si $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ con **ROC** R entonces para $a \in \mathbb{R}$

$$x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \qquad ROC: \left\{s \middle| s = \frac{r}{a}, r \in R\right\}$$

Para el caso en particular $a = -1$ se tiene entonces

$$x(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(-s), \qquad ROC: \{s|s = -r, r \in R\}$$

Que equivale a una rotación de 180^o del plano s como dominio de definición de $X(s)$, modificándose la posición de los polos y por tanto también la **ROC**.

Convolución

Si

$$x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; X_1(s), \qquad ROC: R_1$$
$$x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; X_2(s), \qquad ROC: R_2$$

entonces

$$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; X_1(s)X_2(s), \qquad ROC: R_1 \cap R_2$$

donde la región de convergencia puede ser mayor a la indicada si en el producto los polos que determinan los límites de las **ROC** individuales se cancelan.

Diferenciación en el tiempo y en el dominio s

Si $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(s)$ con **ROC** R entonces

$$\frac{d}{dt}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ sX(s), \qquad ROC{:}\,R$$

donde si $X(s)$ tiene un polo de primer orden en $s = 0$ entonces la **ROC** puede ser mayor. Esta propiedad se puede aplicar recursivamente para llegar a

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^nX(s), \qquad ROC{:}\,R$$

Además

$$-tx(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{d}{ds}X(s), \qquad ROC{:}\,R$$

Ejemplo: Derivación (1)

Encuentre la **transformada de Laplace** de

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

Ejemplo: Derivación (2)

Solución: puesto que

$$e^{-at}u(t) \multimap \frac{1}{s+a}, \qquad ROC: \sigma > -a$$

Entonces

$$te^{-at}u(t) \multimap -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \qquad ROC: \sigma > -a$$

Integración en el tiempo

Si $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$ con **ROC** R entonces

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}X(s), \qquad ROC: R \cap \{s|Re\{s\} > 0\}$$

con una **ROC** igual a la intersección entre $\sigma > 0$ y la **ROC** de $X(s)$.

Propiedades de la Transformada Bilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-s\tau} X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$\geq R$
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$\geq R$
	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.