Tutoría 8: Series de Fourier

Ejercicio 1. Considere tres señales periódicas continuas $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ cuyos coeficientes de la Serie de Fourier son respectivamente c_{1k}, c_{2k} y c_{3k}, como se muestra:

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{j\frac{2k\pi}{50}t}$$

$$x_2(t) = \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi) e^{j\frac{2\pi k}{50}t}$$

$$x_3(t) = \sum_{k=-100}^{100} j\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{j\frac{2\pi k}{50}t}$$

Utilice las propiedades de la serie de Fourier para determinar lo siguiente:

a. ¿Cuáles de las tres señales son de valor real?

b. ¿Cuáles de las tres señales son pares?

Respuesta:
a. $x_2(t)$ y $x_3(t)$ son de valor real.

b. $x_2(t)$ posee simetría par.

Ejercicio 2. La respuesta recortada de un rectificador de media onda es la función periódica $f(t)$ de periodo 2π definida sobre el periodo $0 < t < 2\pi$ por la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} 5\sin(t) & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

Encuentre los coeficientes c_k que sintetizan $f(t)$ por medio de la Serie de Fourier exponencial compleja.
Respuesta:

$$c_k = \begin{cases} j\frac{5}{4} & k = -1 \\ \frac{5}{\pi} & k = 0 \\ -j\frac{5}{4} & k = 1 \\ \frac{5}{\pi(1-k^2)} & k \ \ par \\ 0 & k \ \ impar \ \setminus \{\pm 1\} \end{cases}$$

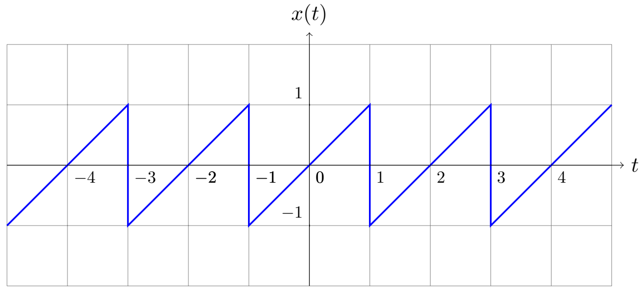


Figura 1: Señal periódica $x(t)$

.

Ejercicio 3. Obtenga la serie de Fourier de la función periódica $x(t)$ de la Figura 1 con la base exponencial compleja.

Respuesta:

$$c_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ j\dfrac{(-1)^k}{k\pi} & \textit{en el resto} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t}$$

Ejercicio 4. Obtenga la expansión en serie de Fourier de la onda seno rectificada descrita como $f(t) = |\sin(t)|$. Represente la función en una serie donde utilice la base de cosenos desplazados y la de senos y cosenos.

Respuesta:

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & k = 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1-4k^2)} & \textit{en el resto} \end{cases}$$

$$\tilde{c}_k = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & k = 0 \\ \dfrac{4}{\pi(4k^2-1)} & \textit{en el resto} \end{cases}$$

$$\theta_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \pi & \textit{en el resto} \end{cases}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} & k = 0 \\ \dfrac{4}{\pi(1-4k^2)} & \textit{en el resto} \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c_k} \cos\left(2kt + \theta_k\right)$$
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2kt\right)$$

Ejercicio 5. Determine los coeficientes c_k de la serie de Fourier exponencial que representa la señal periódica de la figura 2.

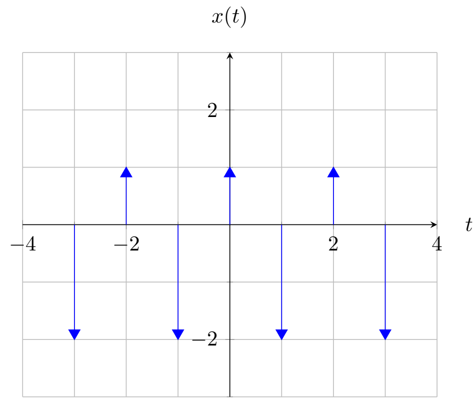


Figura 2: Señal para ejercicio 5

.

Respuesta:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1-2(-1)^k}{2} \\ &= \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & k \;\; par \\ \dfrac{3}{2} & k \;\; impar \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Suponga que se nos proporciona la siguiente información sobre una señal $x(t)$

a. $x(t)$ es real y par.

b. $x(t)$ es periódica con periodo $T = 2$ y tiene coeficientes de Fourier c_k.

c. $c_0 = 0$, $c_k = 0$ para $|k| > 1$.

d. $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 \, dt = 1$

Encuentre dos señales diferentes que satisfagan estas condiciones.
Respuesta:

$$x(t) = \pm\sqrt{2}\cos(\pi t)$$

Ejercicio 7. Una función está dada por:

$$x(t) = \begin{cases} t-1 & 1 \leq t \leq 2 \\ -t+3 & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Además, se puede utilizar $x(t)$ para construir una versión periódica de la siguiente forma:

$$x_p(t) = \begin{cases} x(t) & 1 \leq t \leq 3 \\ x(t+2n), & \text{con } n \in \mathbb{Z}, \text{ en el resto} \end{cases}$$

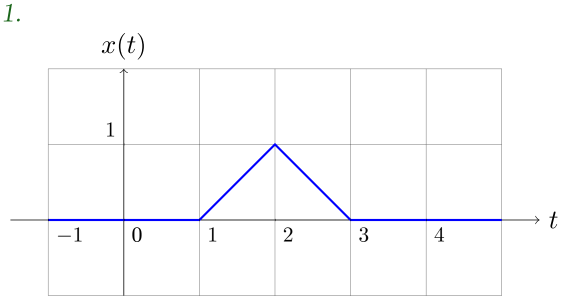
1. Grafique $x(t)$ en el intervalo $-1 \leq t \leq 5$.
2. Grafique $x_p(t)$ en el itervalo $-3 \leq t \leq 3$.
3. Indique cómo deberían comportarse los coeficientes c_k de la serie de Fourier:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

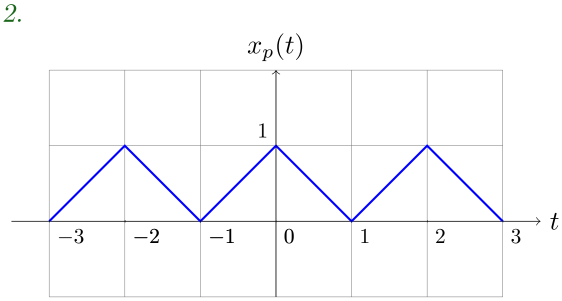
considerando la naturaleza real o compleja de $x_p(t)$, su simetría o asimetría y su forma (continuidad o discontinuidad de la función y sus derivadas).

4. Calcule el valor CD de $x_p(t)$.
5. Obtenga la serie de Fourier de $x_p(t)$ en la forma exponencial compleja, cosenoidal y trigonométrica.
6. Para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ grafique el espectro de magnitud de c_k.

Respuesta:
1.



2.



3.

- $c_k \in \mathbb{R}$
- $c_k = c_{-k}^*$

- $c_k \sim \dfrac{1}{k^2}$

.

4. $CD = c_0 = \dfrac{1}{2}$

5. Los coeficientes c_k *de* $x_p(t)$ *están dados por:*

$$c_k = \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}, \qquad \forall k \neq 0$$

La serie exponencial está dada por:

$$x_p(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\right] e^{jk\pi t}$$

La forma cosenoidal está dada por:

$$x_p(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2-2(-1)^k}{k^2\pi^2}\right] \cos(k\pi t)$$

La forma trigonométrica está dada por:

$$x_p(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2-2(-1)^k}{k^2\pi^2}\right] \cos(k\pi t)$$

6.