Controladores Especiales

Control Automático

Escuela de Electrónica

II Semestre 2020

Ing. Luis Miguel Esquivel Sancho

Contenido

- Controladores especiales:
  - Control Proporcional (P)
  - Control Integral (I)
  - Control Proporcional-Integral (PI)
  - Control Proporcional-Derivativo (PD)
  - Control Proporcional-Integral-Derivativo (PID)
  - Sintonización de PID por Ziegler Nichols
  - Control PI-D y I-PD
  - Control I-PD
  - Control con 1 y 2 grados de libertad

Control Proporcional: P

Da una salida que es proporcional al error.

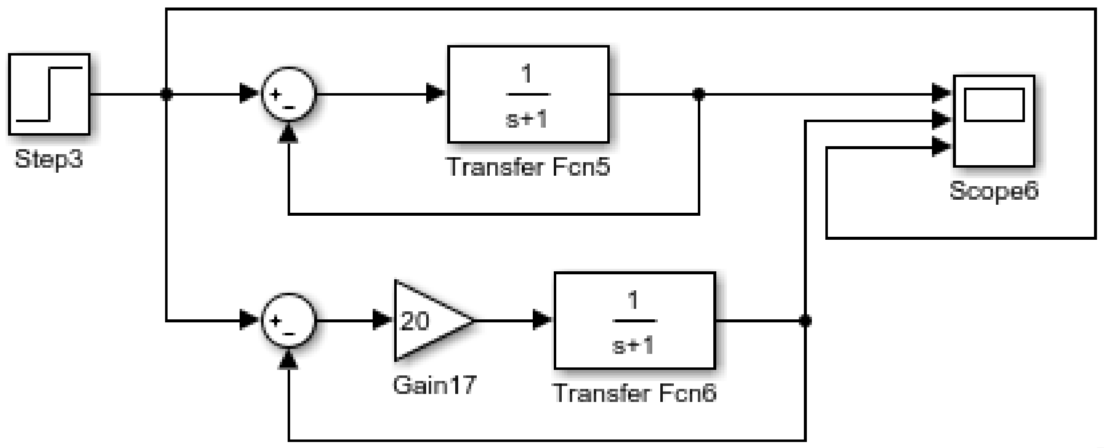
$$u(t) = K_p e(t)$$

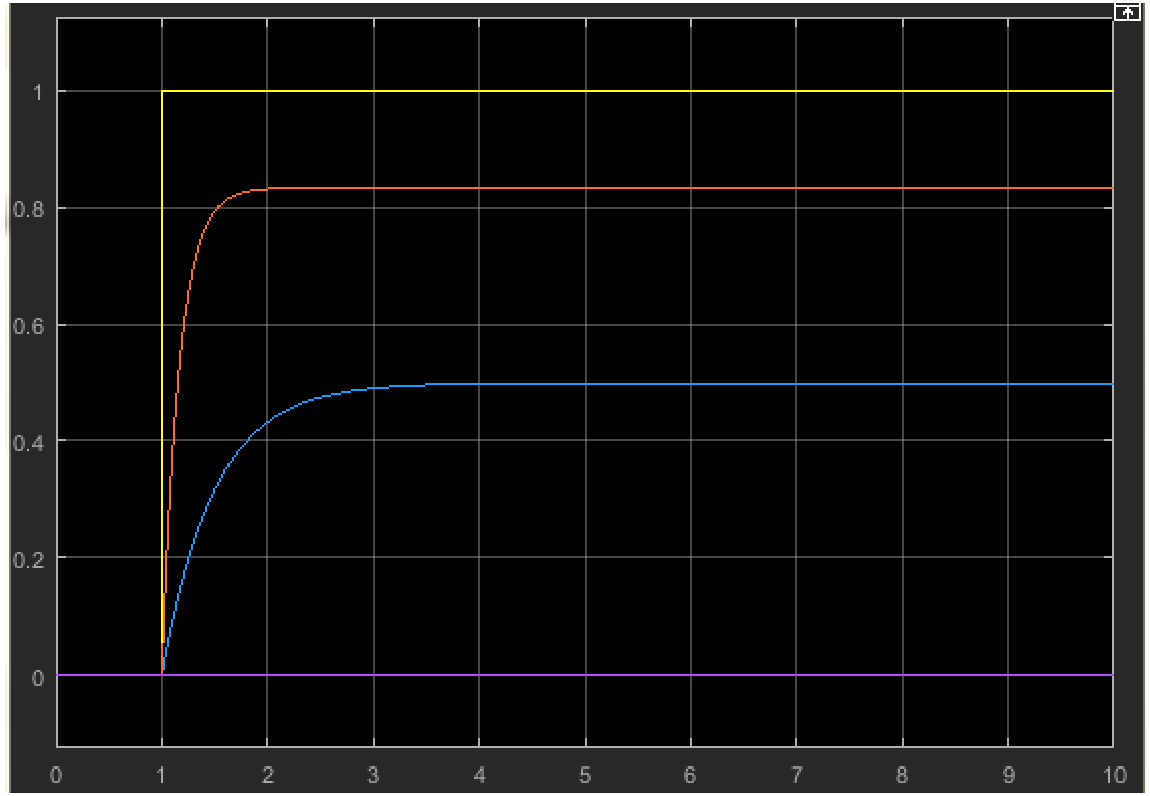
Kp: es una constante ajustable (considerada la ganancia proporcional).

- Puede controlar cualquier planta estable pero posee desempeño limitado.
- Cualquier que sea el mecanismo real y la forma de la potencia de operación, el controlador proporcional es en esencia, un amplificador con una ganancia ajustable.

Función de transferencia: $$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Control Proporcional: P





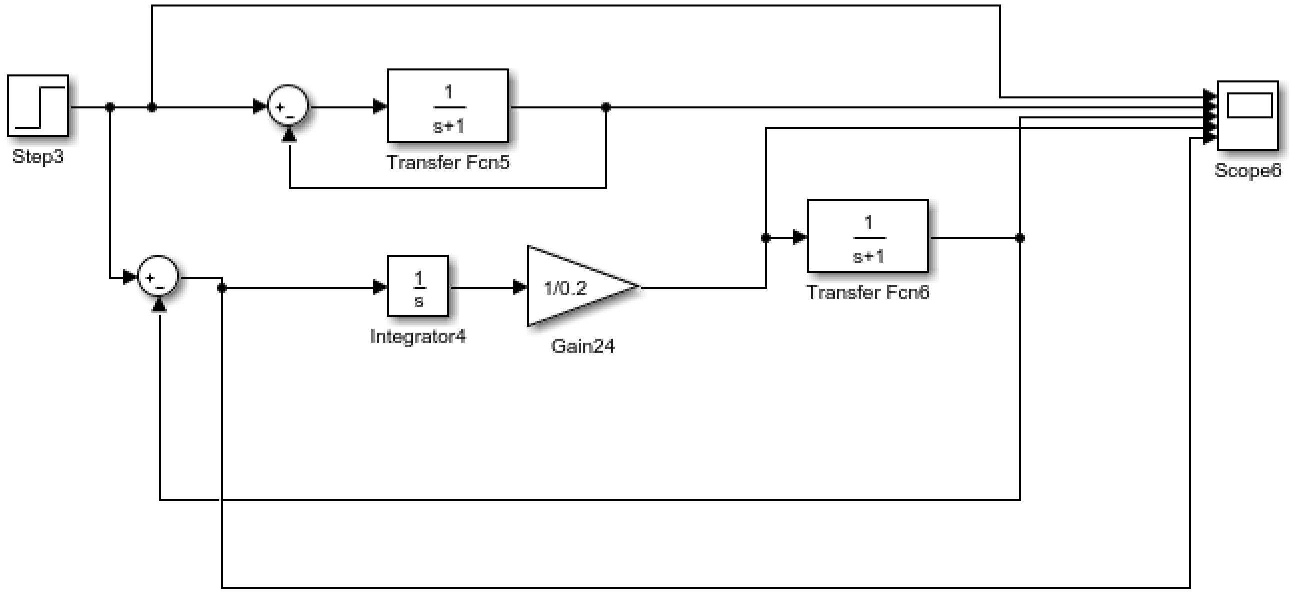
Control Integral: I

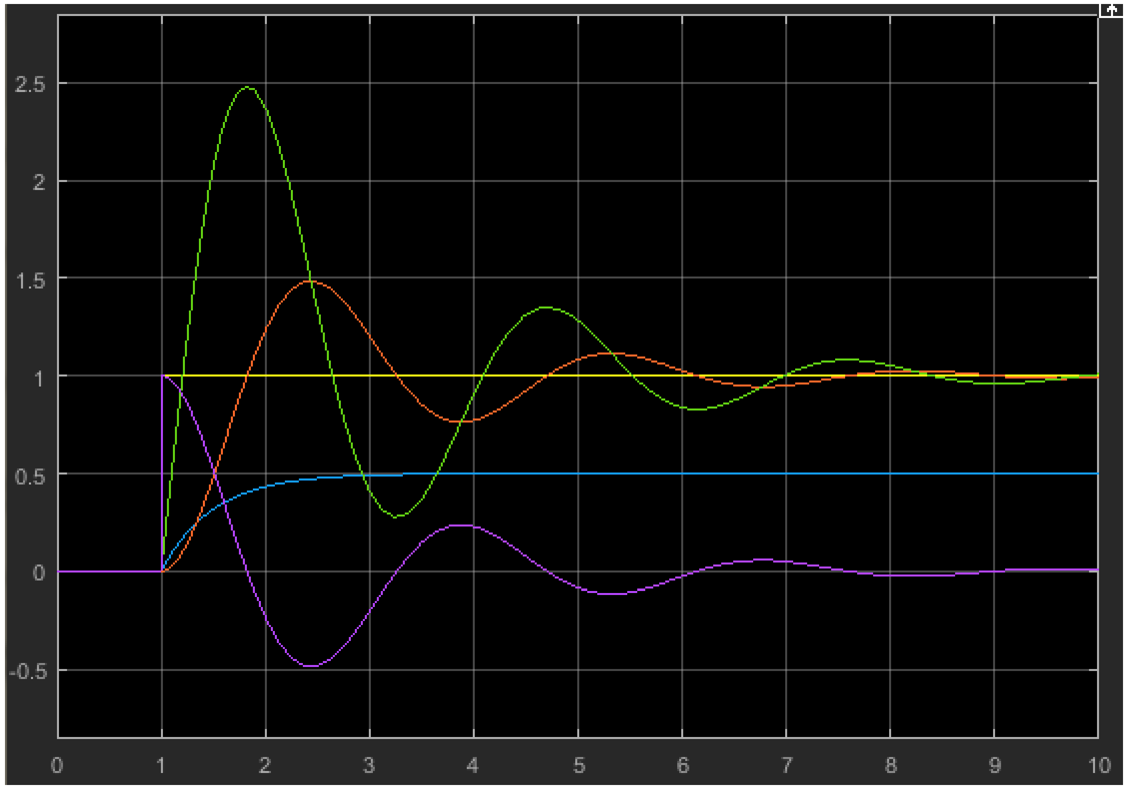
Se define como: $$u(t) = K_i \int_0^t e(t)dt$$

Función de transferencia: $$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

- Ki es una constante ajustable.
- La respuesta inicial es muy lenta.
- El controlador no empieza a ser efectivo hasta haber transcurrido un cierto tiempo.
- Anula el error remanente que presenta el controlador proporcional

Control Integral: I





Control Proporcional-Integral: PI

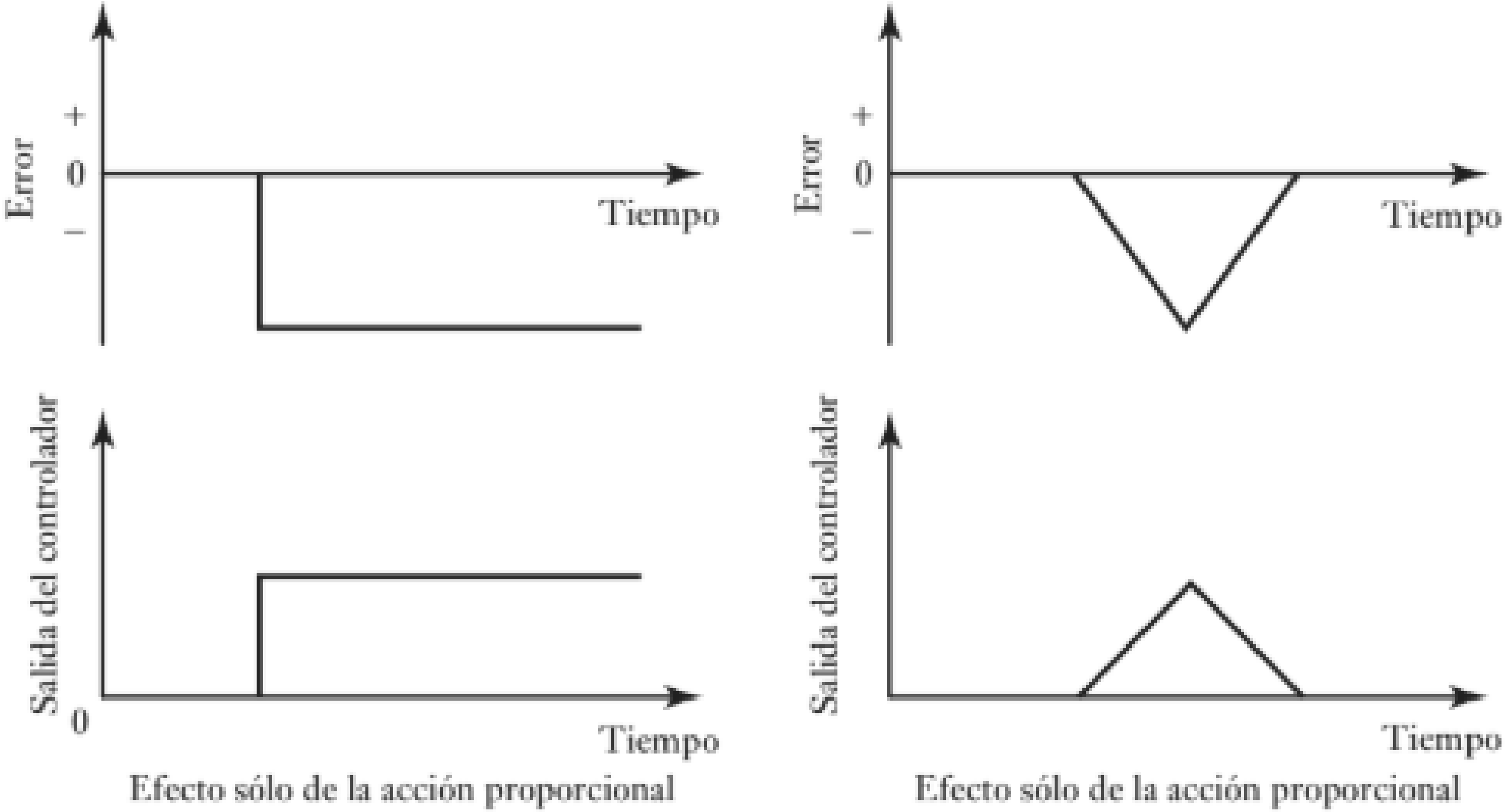
La rapidez de cambio en la respuesta de la salida del controlador, $C(t)$ es proporcional al error, $e(t)$.

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)dt$$

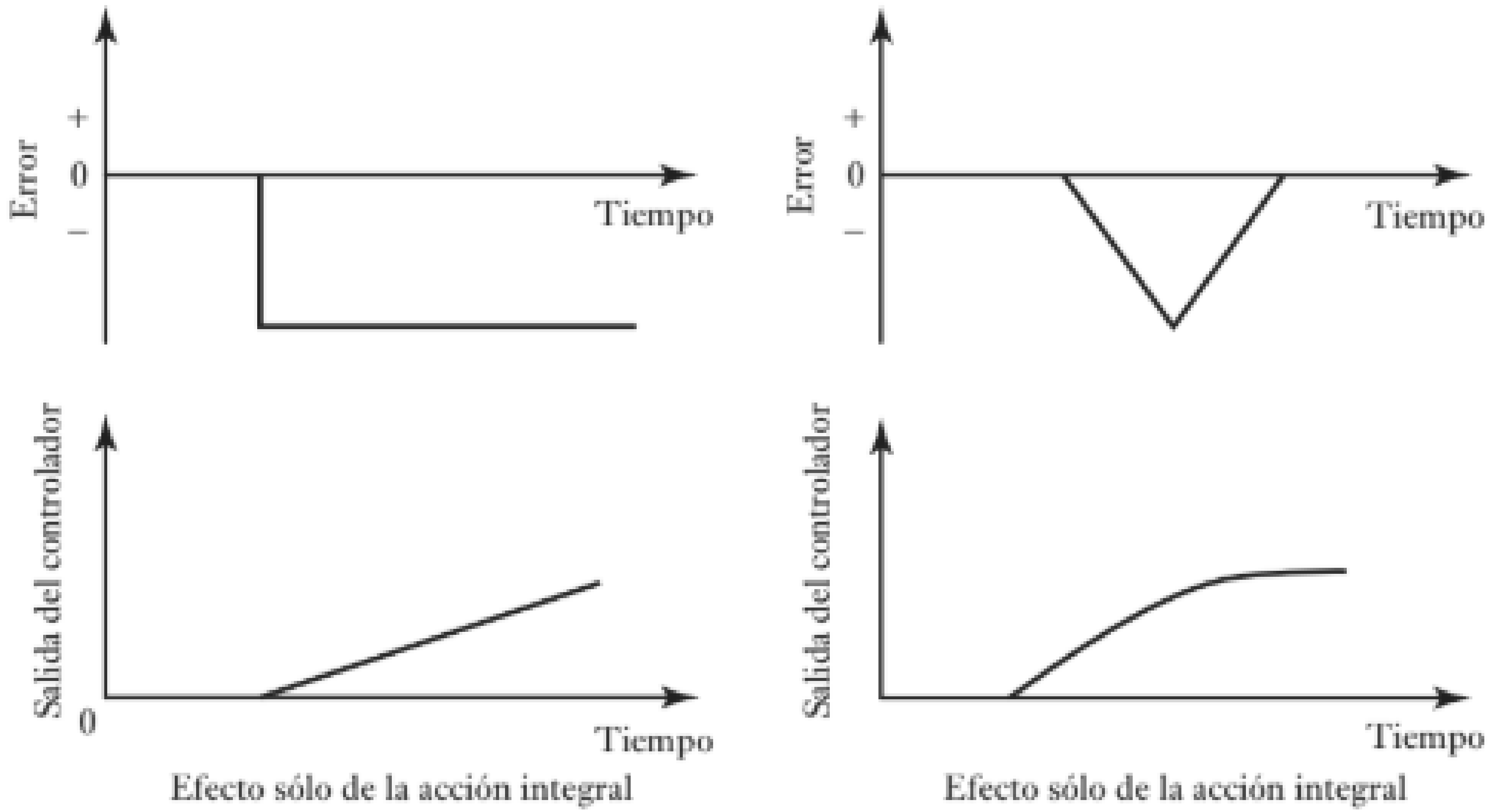
Función de transferencia: $$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

- $\boldsymbol{K_p}$ es la constante proporcional ajustable y $\boldsymbol{T_i}$ es el tiempo integral, también ajustable.
- El tiempo integral es: el tiempo en minutos en que se repite la acción proporcional
- Para el controlador proporcional e integral, la respuesta inicial es igual a la ganancia proporcional y esta respuesta se repite sumada para períodos de tiempo igual al tiempo integral

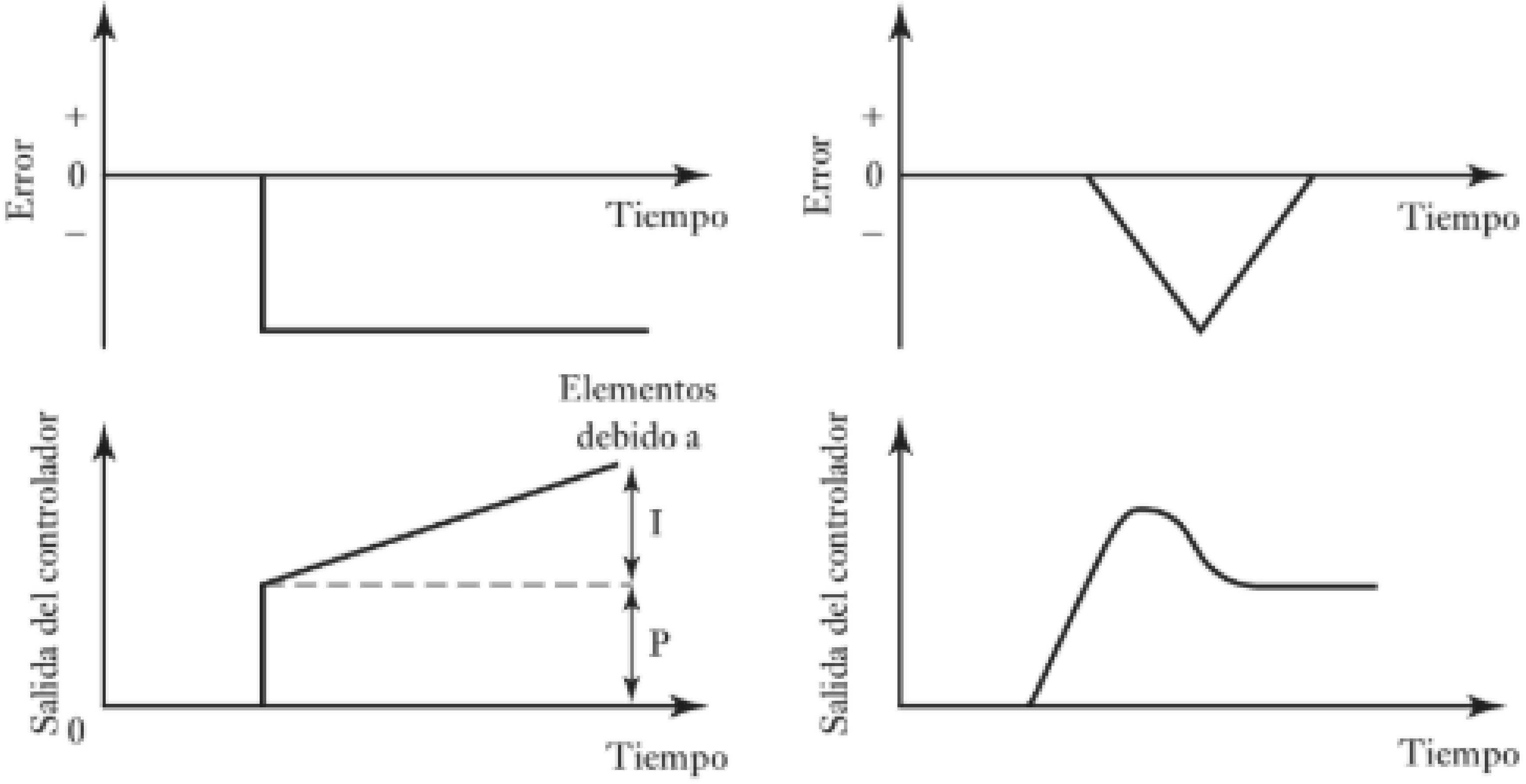
Control Proporcional-Integral: PI



Control Proporcional-Integral: PI



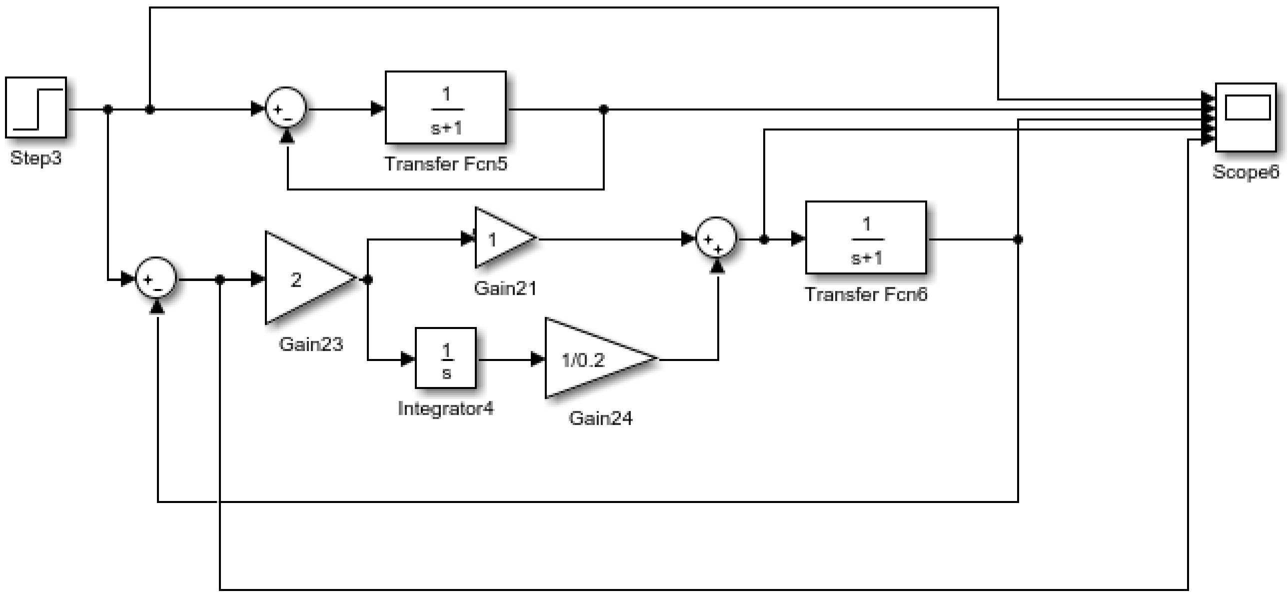
Control Proporcional-Integral: PI

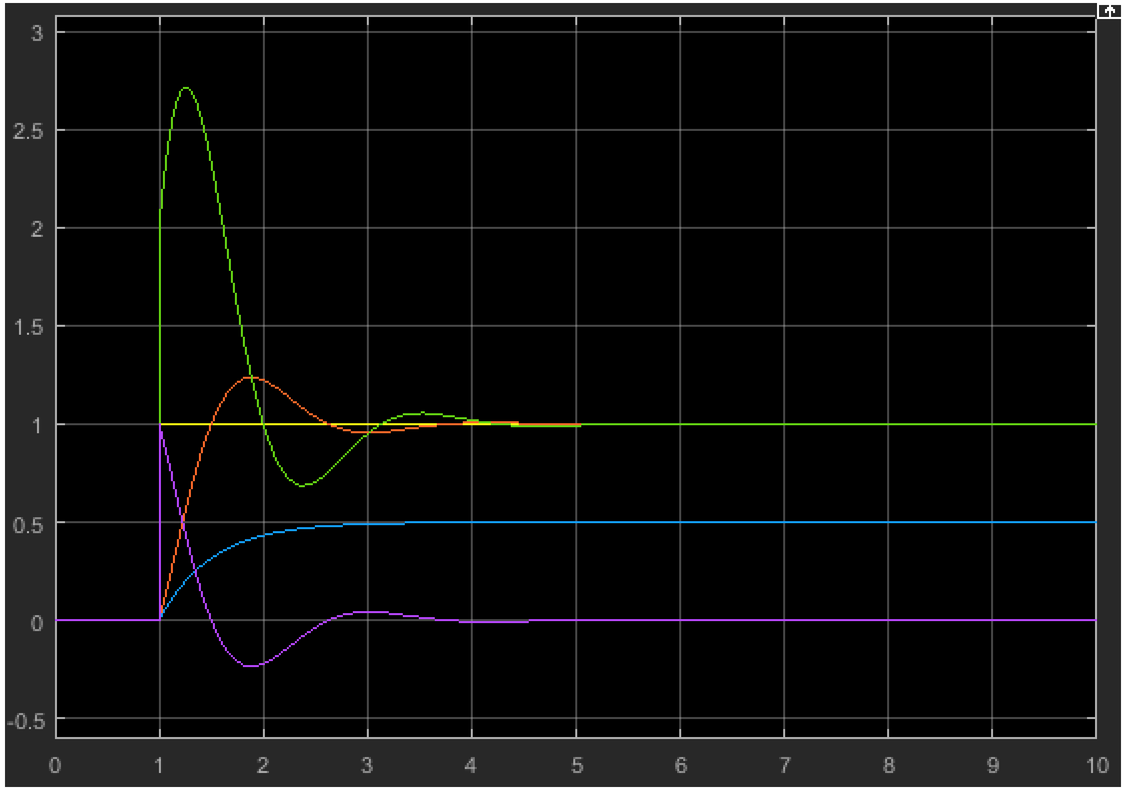


Efecto de la acción proporcional + integral

Efecto de la acción proporcional + integral

Control Proporcional-Integral: PI





El controlador PI actúa mientras exista error en la salida produciendo cada vez valores mayores para la acción integral. Por tanto, se deben tomar acciones especiales para evitar saturaciones en los actuadores finales para errores persistentes con el tiempo.

Control Proporcional-Derivativo: PD

$\boldsymbol{K_p}$ es la constante proporcional ajustable y T_d es el tiempo derivativo, también ajustable.

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Función de transferencia:

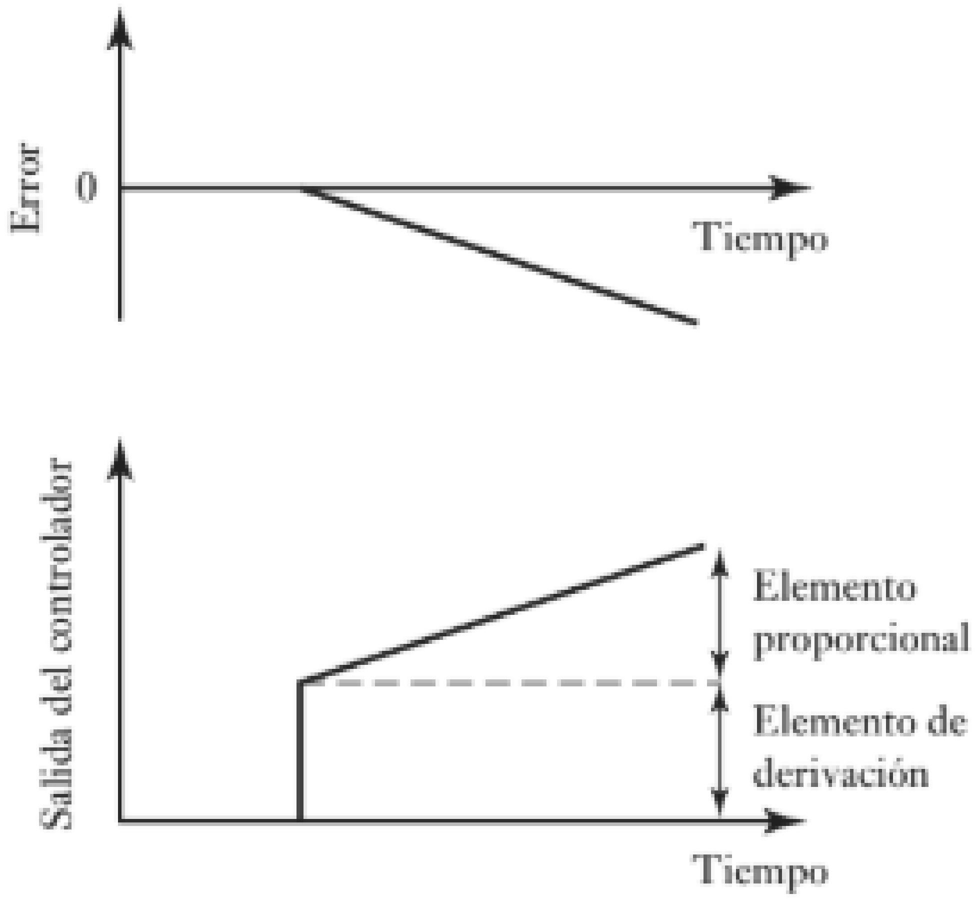
$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

El tiempo derivativo (T_d) es: el intervalo de tiempo durante el cual la acción de la velocidad hace avanzar el efecto de la acción de control proporcional

Permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande.

Control Proporcional-Derivativa: PD

El control derivativo nunca se utiliza solo. Ya que no es capaz de producir una salida cuando hay una señal de error constante, por lo que no es posible una corrección. Por ello, en forma invariable se utiliza junto con el control proporcional.



Control Proporcional-Integral-Derivativa: PID

Se define como:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

Función de transferencia:

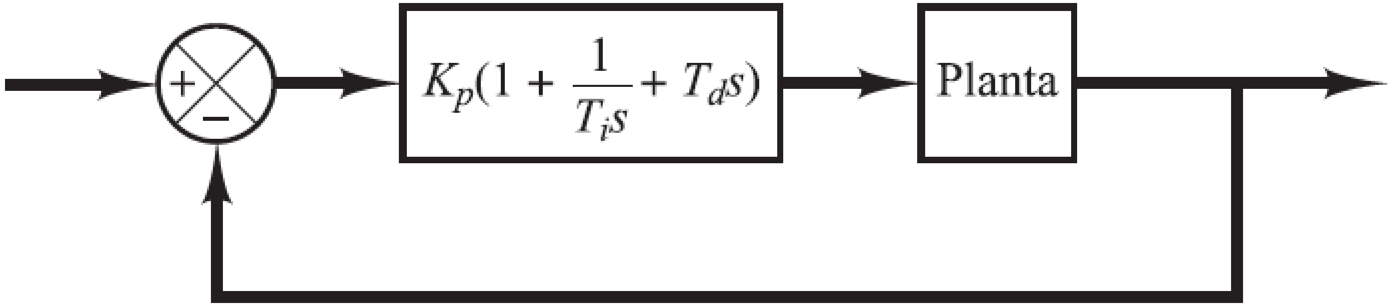
$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$C(s) = K_p \frac{(s+a)(s+b)}{s}$$

Esta acción combinada reúne las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales.

Sintonización de PID

Si se puede obtener un modelo matemático de la planta, es posible aplicar diversas técnicas de diseño con el fin de determinar los parámetros del controlador que cumpla las especificaciones del transitorio y del estado estacionario del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, si la planta es tan complicada que no es fácil obtener su modelo matemático, tampoco es posible un método analítico para el diseño de un controlador PID. En este caso, se debe recurrir a procedimientos experimentales para la sintonía de los controladores PID.



Reglas de Zieger-Nichols para la sintonía de controladores PID

Ziegler y Nichols propusieron reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional $\boldsymbol{K_p}$, del tiempo integral $\boldsymbol{T_i}$ y del tiempo derivativo $\boldsymbol{T_d}$, basándose en las características de respuesta transitoria de una planta dada.

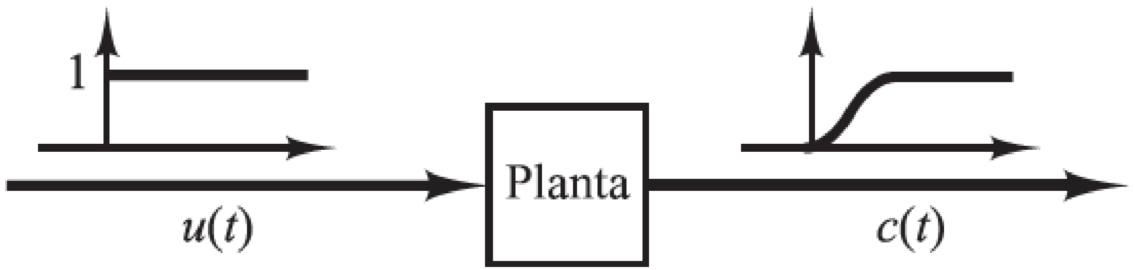
Reglas de Zieger-Nichols para la sintonía de controladores PID:

- Primer Método
- Segundo Método

Reglas de Zieger-Nichols para la sintonía de controladores PID

Primer Método

Se obtiene la respuesta ante un escalón de manera experimental.

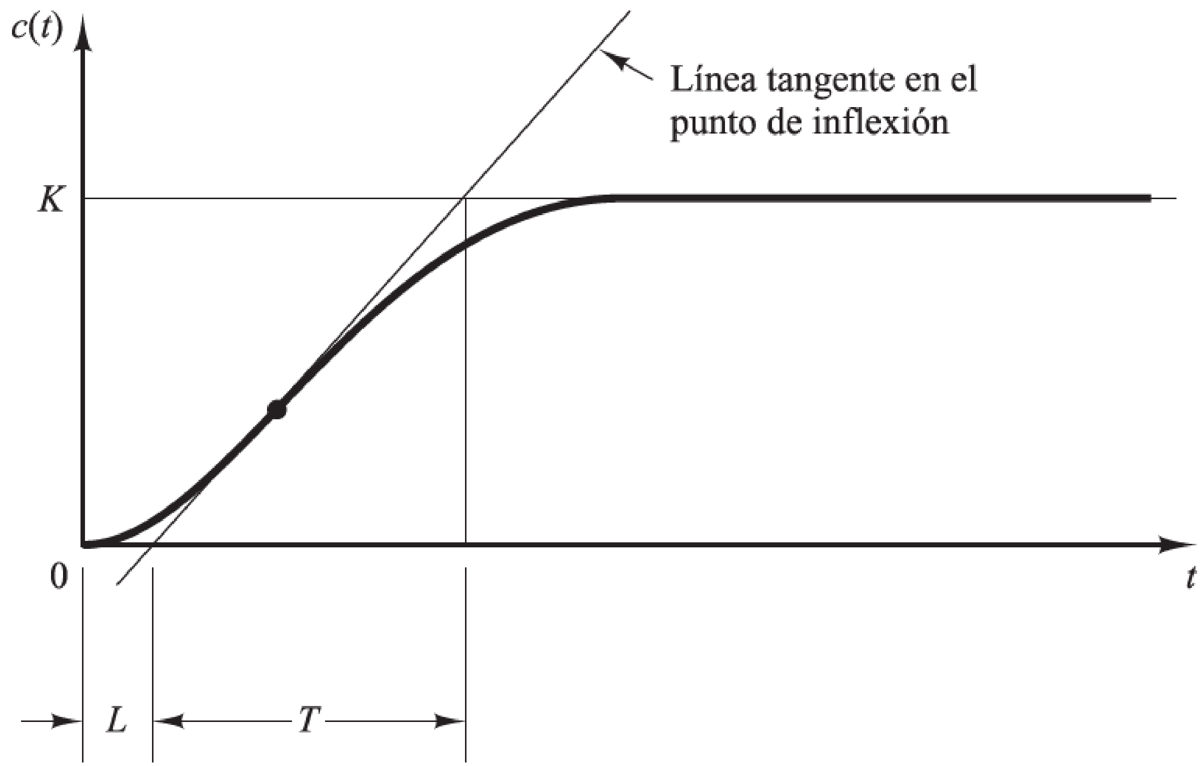


Se aplica si la respuesta de la salida ante un escalón es una curva en forma de S (la planta no contiene integradores ni polos complejos conjugados)

Reglas de Zieger-Nichols para la sintonía de controladores PID

Primer Método

La curva con forma de S se caracteriza por dos parámetros: el tiempo de retardo L y la constante de tiempo T. Se determinan dibujando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de S y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y con la línea $c(t) = K$



Curva con forma S:
Primer Orden con Retardo

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

Reglas de Zieger-Nichols para la sintonía de controladores PID

Primer Método

Tabla 1. Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la respuesta escalón

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\ \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\ \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$C(s) = 1.2\frac{T}{L}\left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls\right)$$

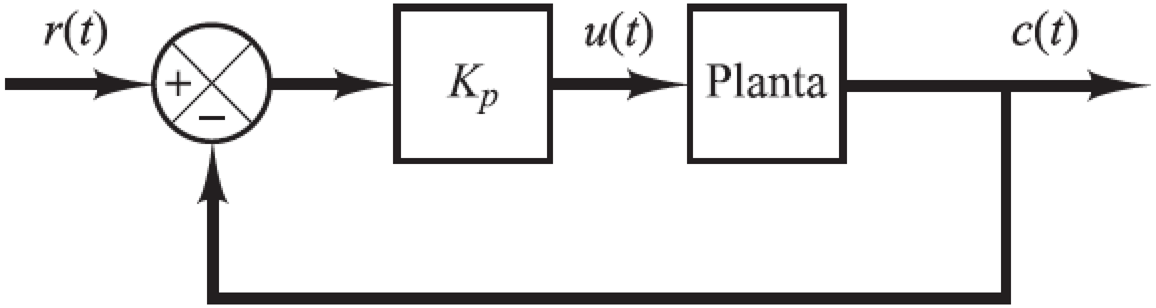
$$C(s) = 0.6T\left(\frac{\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s}\right)$$

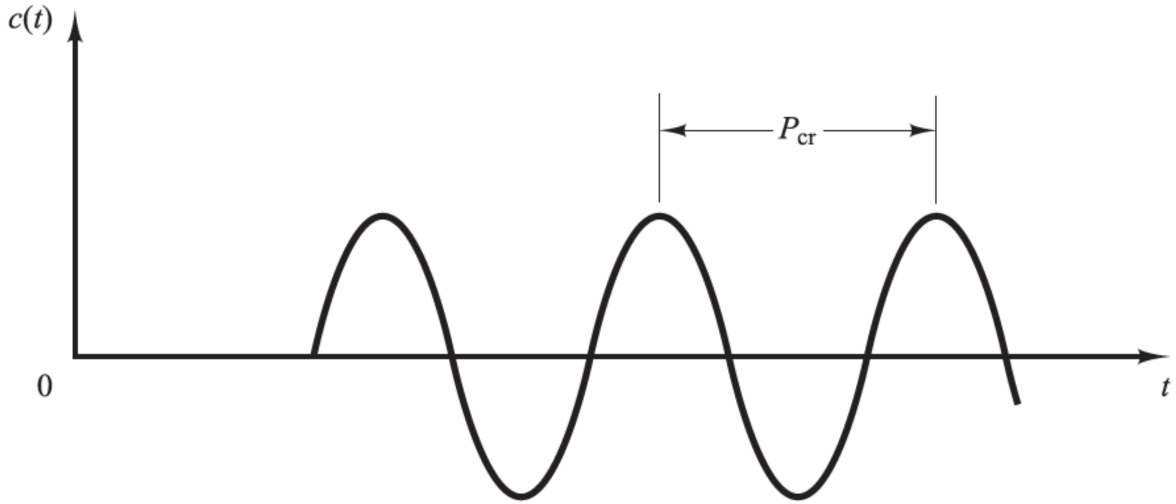
Reglas de Zieger-Nichols para la sintonía de controladores PID

Segundo Método

En el segundo método, primero se fija $\boldsymbol{T_i} = \infty$ y $\boldsymbol{T_d} = \boldsymbol{0}$. Usando sólo la acción de control proporcional, se incrementa $\boldsymbol{K_p}$ desde 0 hasta un valor crítico $\boldsymbol{K_{cr}}$ en donde la salida presente oscilaciones sostenidas.

Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas para cualquier valor que pueda tomar $\boldsymbol{K_p}$ entonces este método ***no se puede aplicar***.





Reglas de Zieger-Nichols para la sintonía de controladores PID

Segundo Método

Tabla 2. Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en K_{cr} y P_{cr}

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5\ K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45\ K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6\ K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$C(s) = 0.6K_{cr}\left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125P_{cr}s\right)$$

$$C(s) = 0.075K_{cr}P_{cr}\left(\frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}}\right)^2}{s}\right)$$

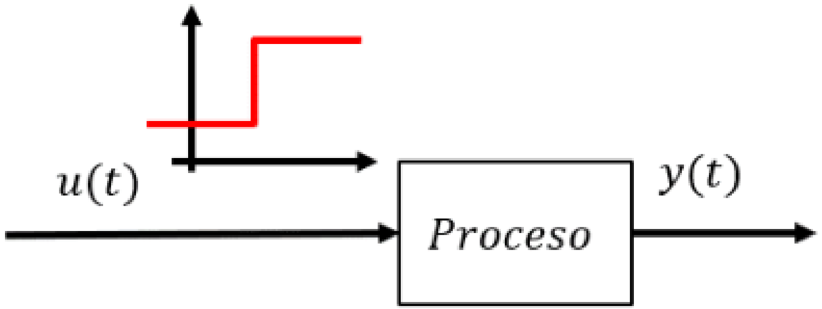
Ejercicio 3.1: Primer Método Z-N

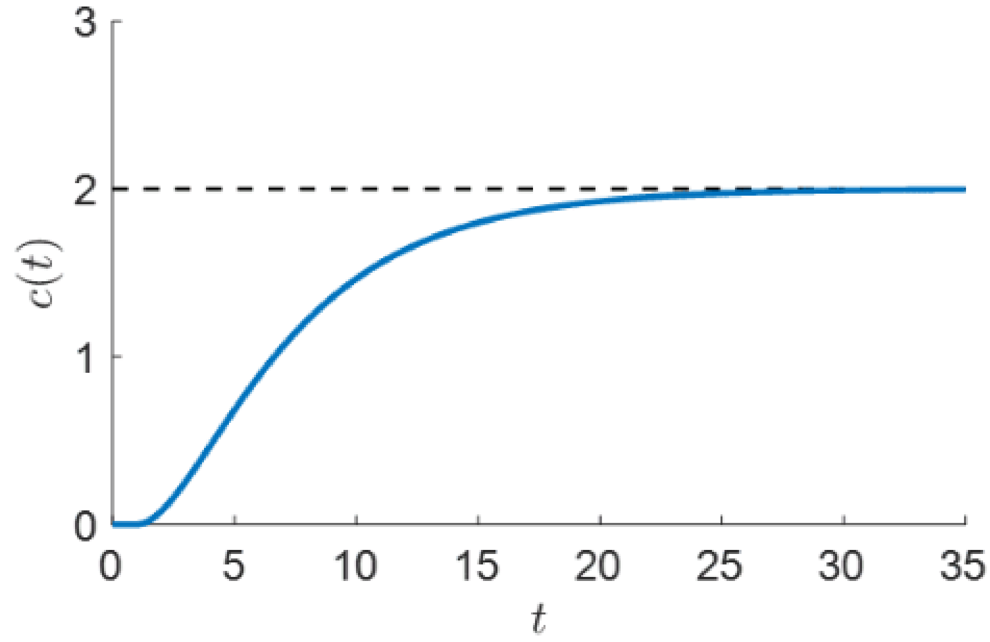
Sea la Planta $G(s)$ el sistema a controlar. Determine un controlador $C(s)$ a partir de un sistema P, PI y PID ajustando sus valores por el primer método de Ziegler y Nichols. (Simulink)

$$G(s) = \frac{0.2}{(s + 0.5)(s + 0.2)}$$

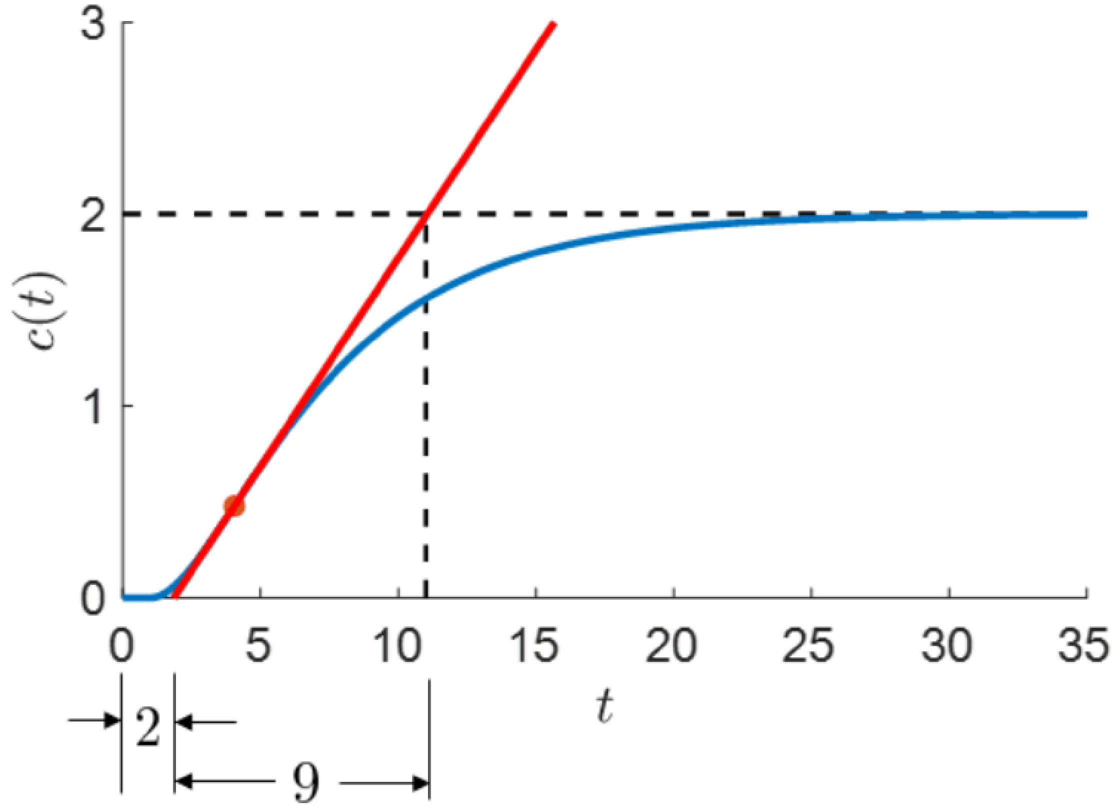
Ejercicio 3.1: Primer Método Z-N

$$G(s) = \frac{0.2}{(s+0.5)(s+0.2)} = \frac{0.2}{s^2 + 0.7s + 0.1}$$





Ejercicio 3.1: Controlador PI



$$L = 2, \qquad T = 9$$

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\ \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\ \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Ejercicio 3.2: Controlador PID

Sea la Planta $G(s)$ el sistema a controlar determine $C(s)$ a partir de un sistema PID ajustando sus valores por el segundo método de Ziegler y Nichols.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

El PID ideal

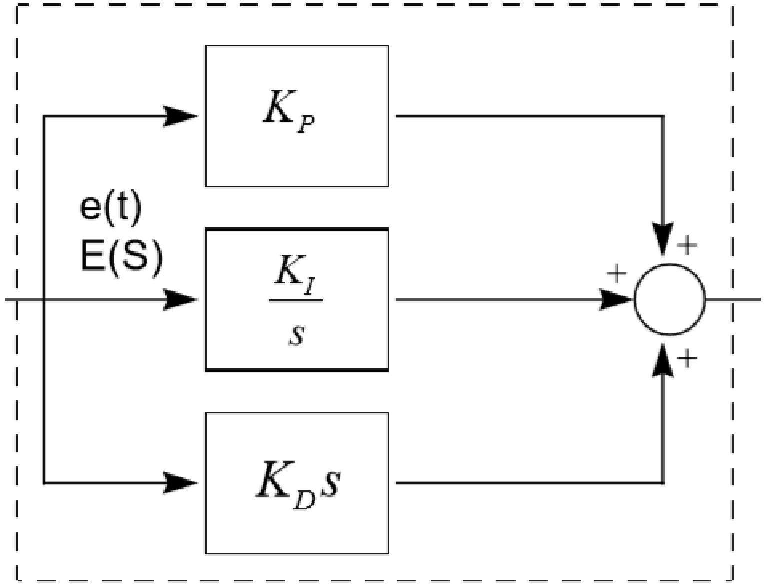
El regulador PID en el dominio del tiempo:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

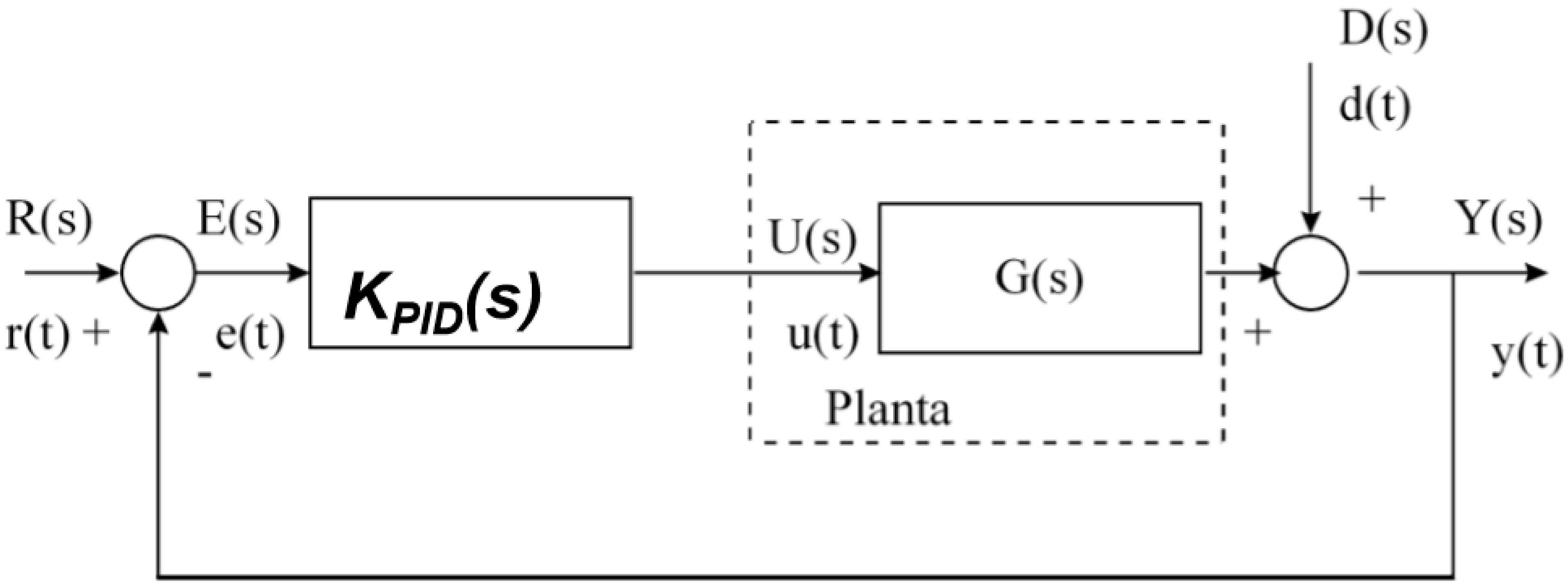
En el dominio s:

$$K_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

$$K_{PID}(s) = K_P (1 + \frac{1}{T_i s} + s \cdot T_d)$$



El PID ideal



$$K_{PID}(s) = K_P(1 + \frac{1}{T_i s} + s \cdot T_d)$$

El PID ideal

Debido a que el regulador PID (PD) ideal es impropio, tiene más ceros que polos, presenta problemas para la simulación y para la realización.

La solución: agregar un polo parásito con una constante de tiempo muy pequeña y ganancia estática unitaria.

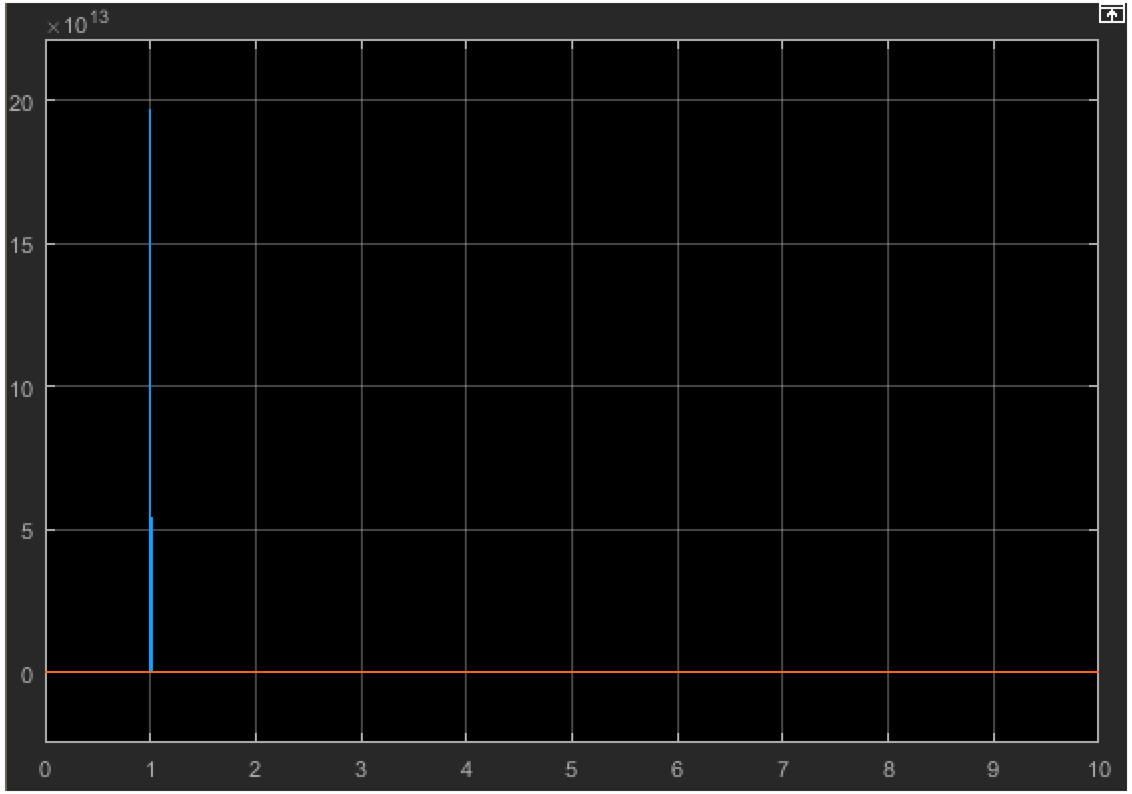
$$\frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

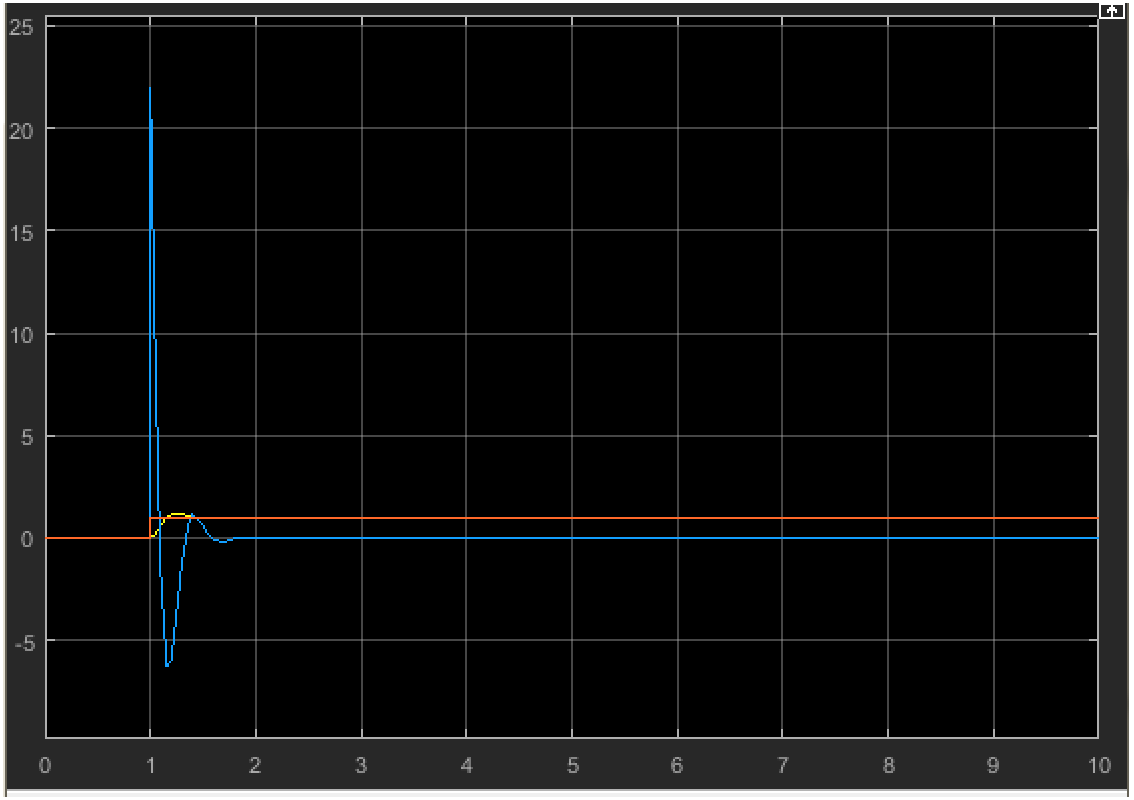
Con γ tomando un valor de 0.1.

El PID real está constituido entonces por dos polos y dos ceros, de forma similar a un compensador de adelanto y un compensador de atraso con el polo en el origen

$$C_{PID}(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_0)}{s(s + p_0)}$$

El PID ideal





$$T_d s \quad Vs \quad \frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

Casos PID

Regulador	Función de transferencia teórica	Función de transferencia práctica
P	$K_P(s) = K_P$	$K_P(s) = K_P$
I	$K_I(s) = \frac{K_I}{s}$	$K_I(s) = \frac{K_I}{s}$
PI	$K_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$	$K_{PI}(s) = K_P \frac{\left(s + \frac{K_I}{K_P}\right)}{s}$
PD	$K_{PD}(s) = K_P + K_D s$	$K_{PD}(s) = K_D \frac{(s + \frac{K_P}{K_D})}{(s + p_O)}$
PID	$PID = K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$	$K_{PD}(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_0)}{s(s + p_O)}$

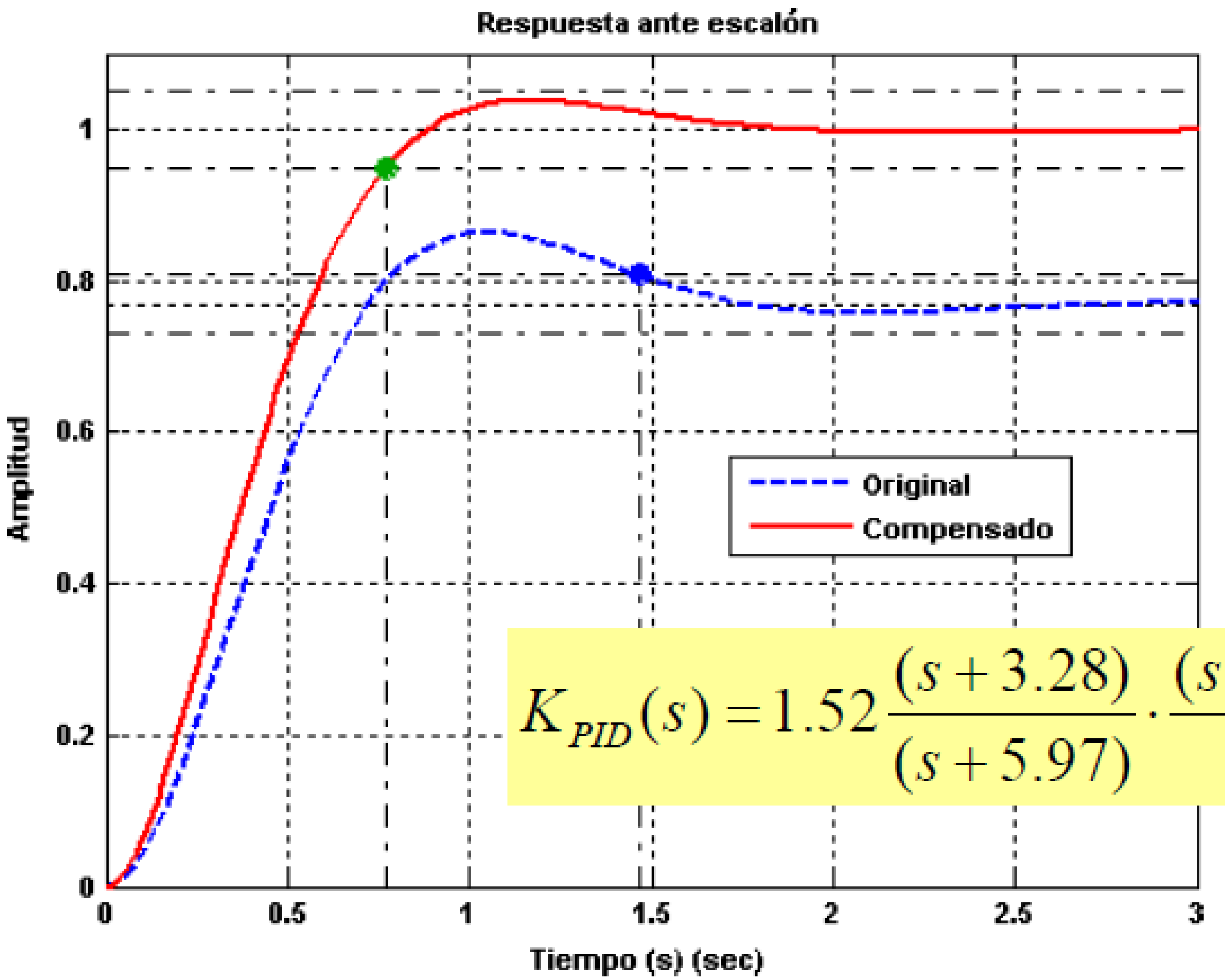
Ejercicio 3.3: Controlador PID real

Sea el sistema con función de transferencia de lazo abierto: $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+3)}$

Dadas las especificaciones:
$$\begin{cases} t_{5\%} \leq 1.1\ s \\ M_p \leq 5\ \% \\ e_{ss} = 0 \end{cases}$$

Realizar la síntesis del compensador PID real usando un compensador de adelanto (PD) y un compensador de atraso (PI) en serie.

Ejercicio 3.3: Controlador PID real



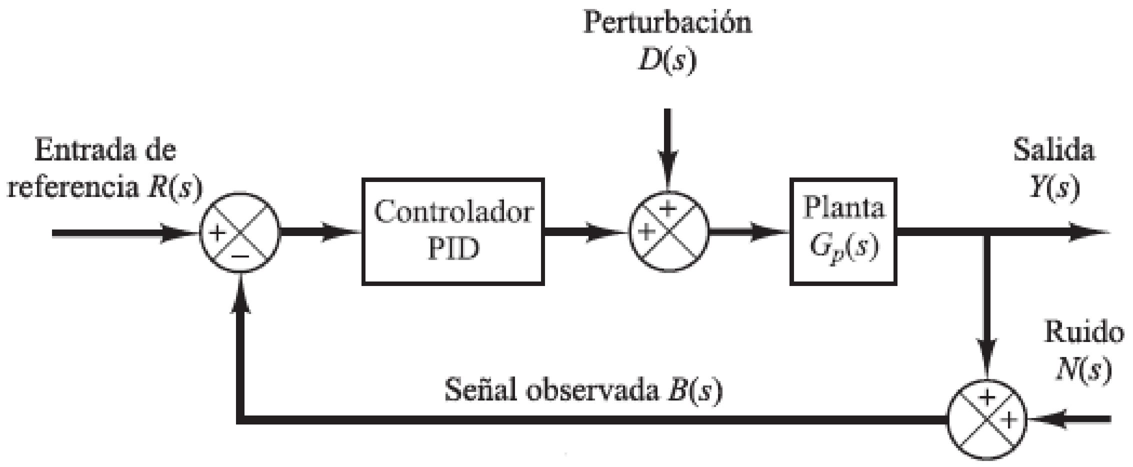
$$K_{PID}(s) = 1.52\,\frac{(s+3.28)}{(s+5.97)} \cdot \frac{(s+0.95)}{s}$$

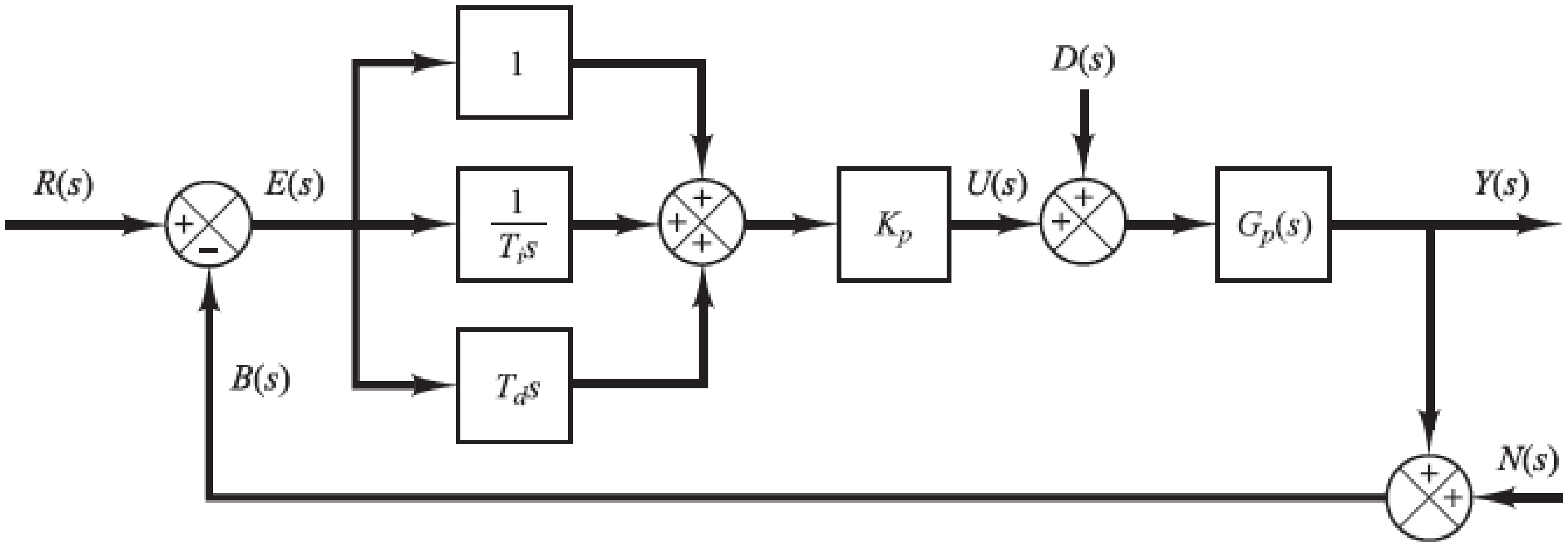
1

Ejercicio 3.3: Conclusión del controlador PID real

- El regulador PID puede descomponerse en partes para su aplicación de acuerdo a las necesidades.
- Por limitaciones técnicas los reguladores PD y PID no pueden ser implementados sin un polo parásito; por lo que se pueden asimilar a otros tipos de compensadores existentes.
- El regulador PID puede usarse como si fuera un compensador de adelanto en cascada con un compensador de atraso con el polo en el origen.
- Los resultados obtenidos del regulador PID real son los mismos que pueden obtenerse con un compensador de adelanto-atraso con un error de estado estacionario cero; o mejorado en el caso de entradas del orden superior del tiempo.

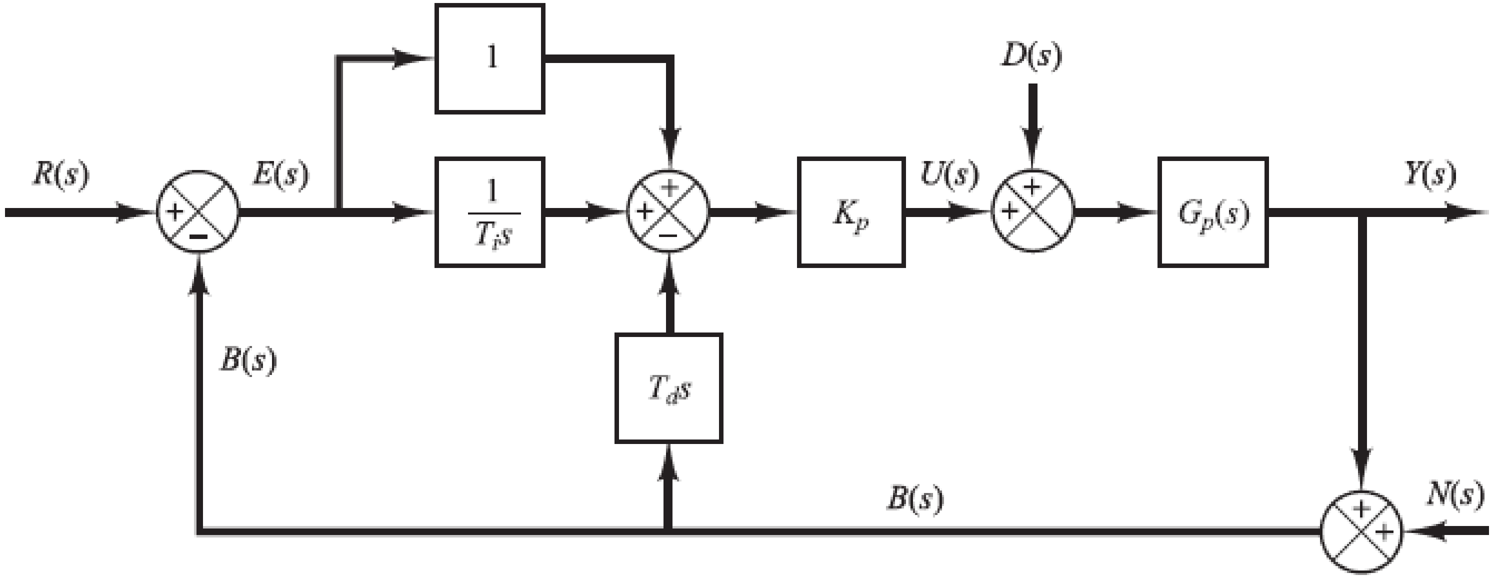
Modificación a los esquemas de control PID





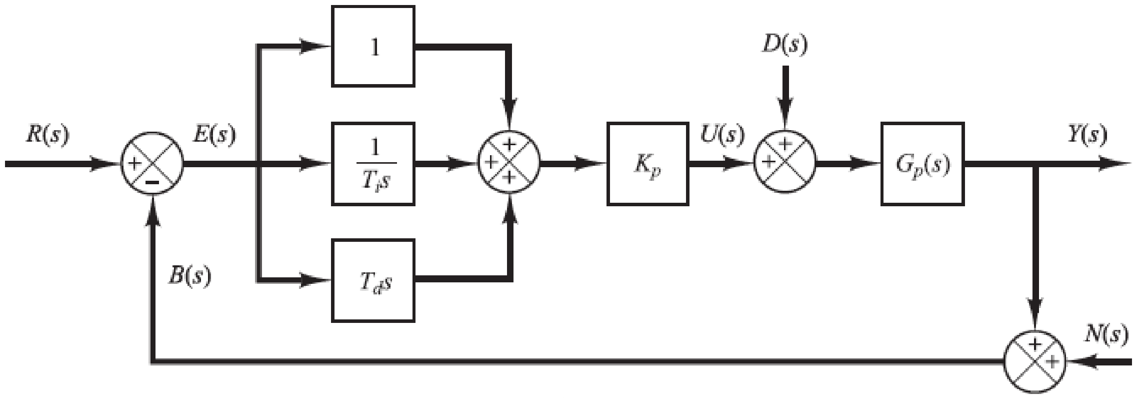
Control PI-D

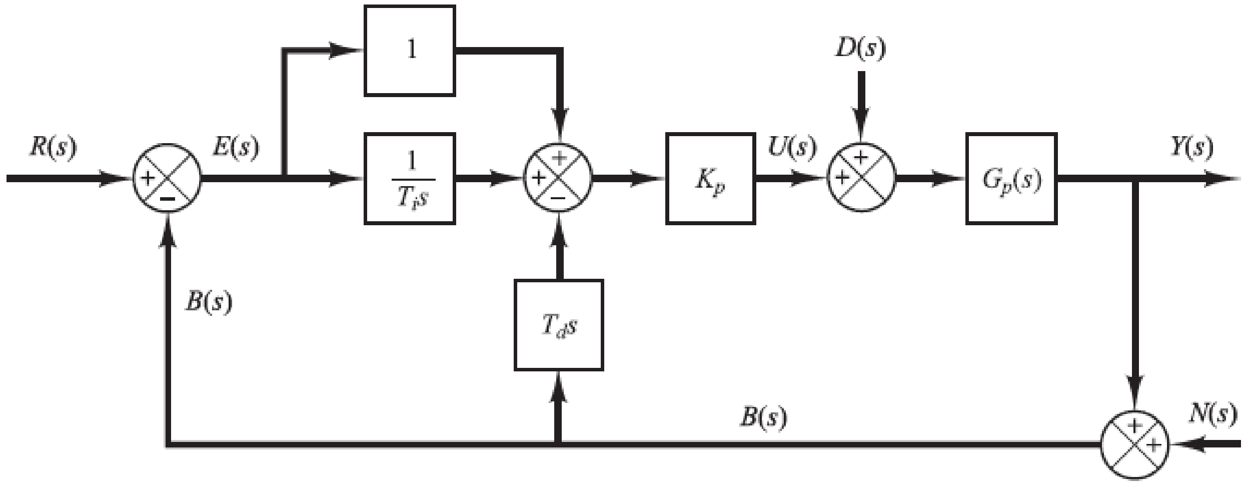
Para evitar el fenómeno de la patada en el punto de consigna, se puede operar la acción derivativa sólo en el camino de realimentación, a fin de que la diferenciación ocurra únicamente en la señal de realimentación y no en la señal de referencia



Se determina que la variable manipulada esta dado por: $U(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)R(s) - K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)B(s)$

Control PI-D





$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) K_p G_p(s)}$$

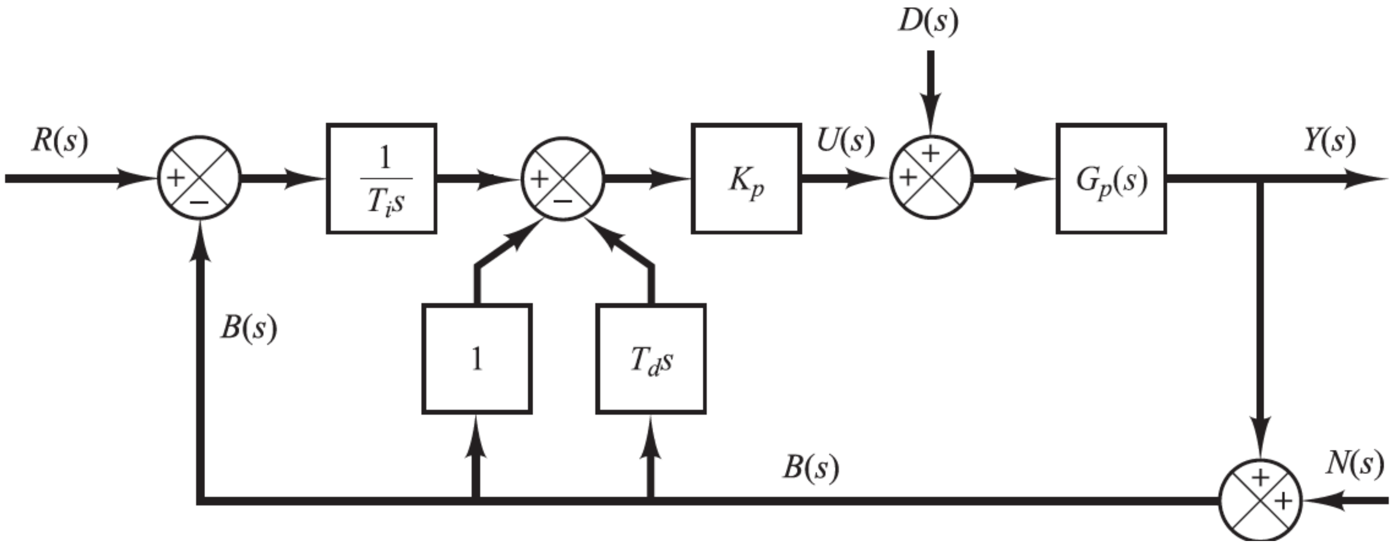
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) K_p G_p(s)}$$

- Función de transferencia en lazo cerrado en ausencia de perturbaciones y ruido
- En ausencia de la entrada de referencia y de ruido la función de transferencia ante la entrada ruido es idéntica en ambos casos:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

Control I-PD

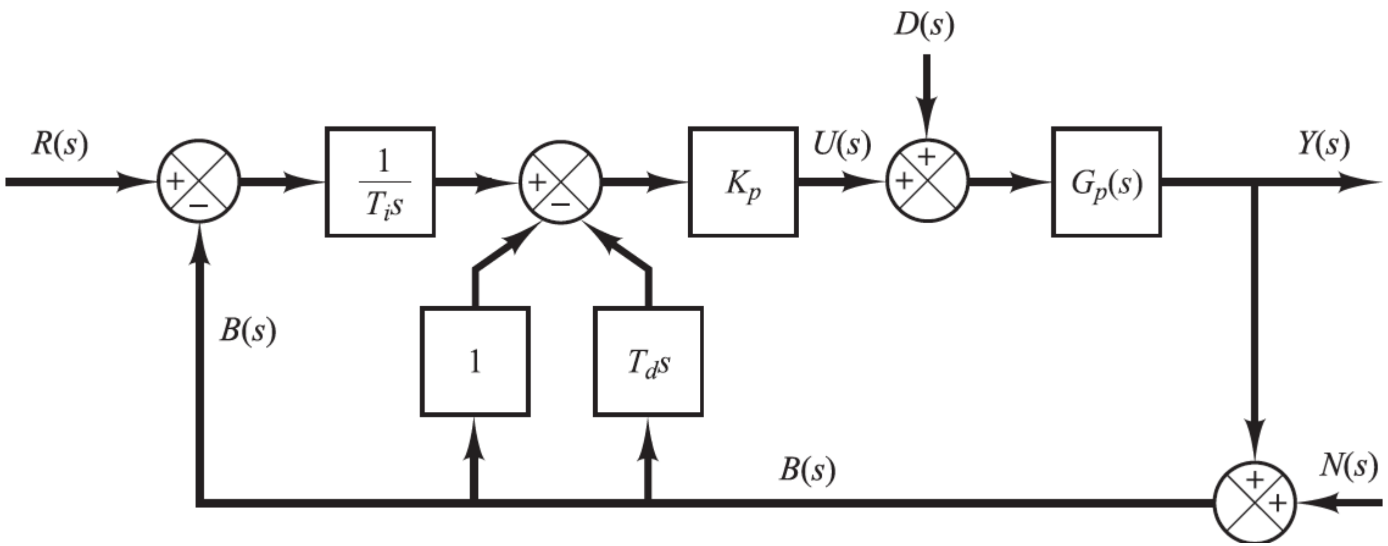
Tanto el control PID como el control PI-D implican una función escalón en la señal manipulada. Este cambio escalón en la señal manipulada puede no resultar conveniente. Por tanto, puede convenir mover la acción proporcional y la acción derivativa al camino de realimentación.



Se determina que la variable manipulada esta dado por:

$$U(s) = K_p \frac{1}{T_i s} R(s) - K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) B(s)$$

Control I-PD



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{1}{T_i s}\right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

- Función de transferencia en lazo cerrado en ausencia de las entradas de perturbación y ruido
- Función de transferencia en lazo cerrado en ausencia de las entradas de referencia y ruido

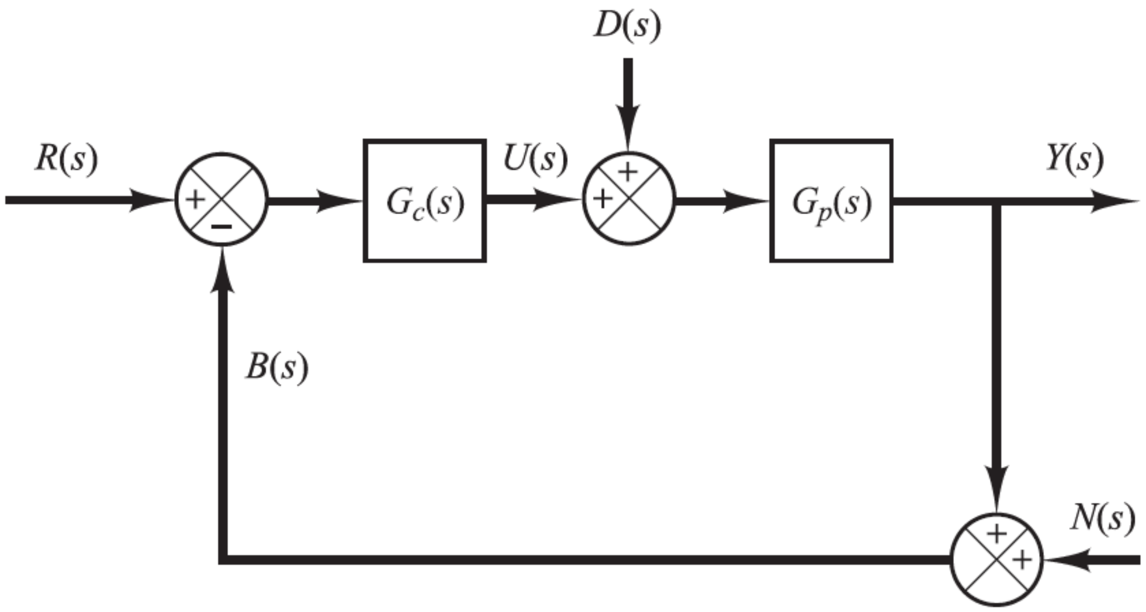
Control PID con grados de libertad (PID_DoFs)

En un sistema como el que se ha trabajado, es decir, uno con entrada, perturbaciones y ruido, se pueden definir 3 funciones de transferencia distintas:

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$



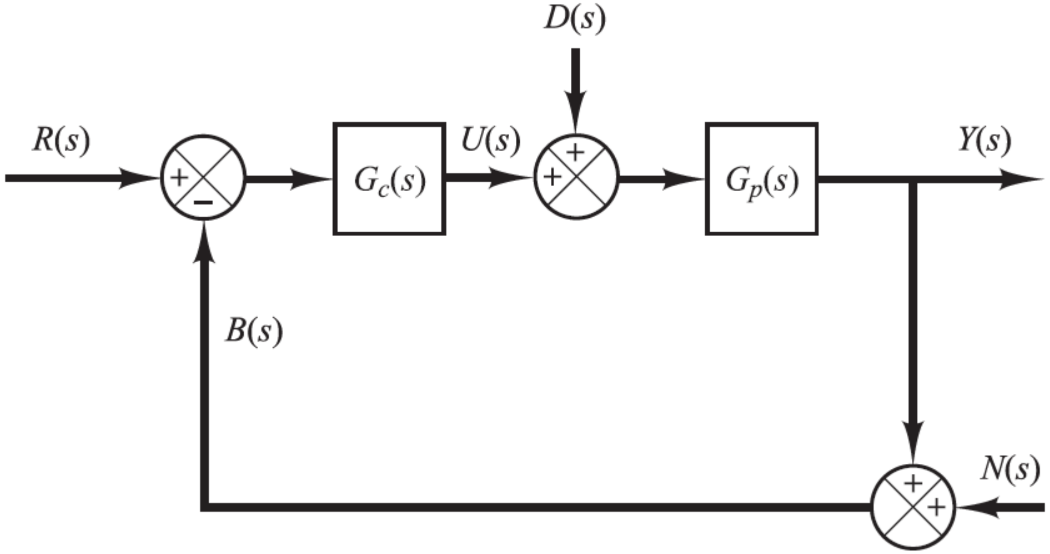
Asumiendo para cada F.T. entrada igual cero para las otras entradas del sistema

Control PID con un grado de libertad (PID_1DoF)

Los grados de libertad del sistema de control se refieren al número de funciones de transferencia en lazo cerrado que son independientes

$$G_{yr} = \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$



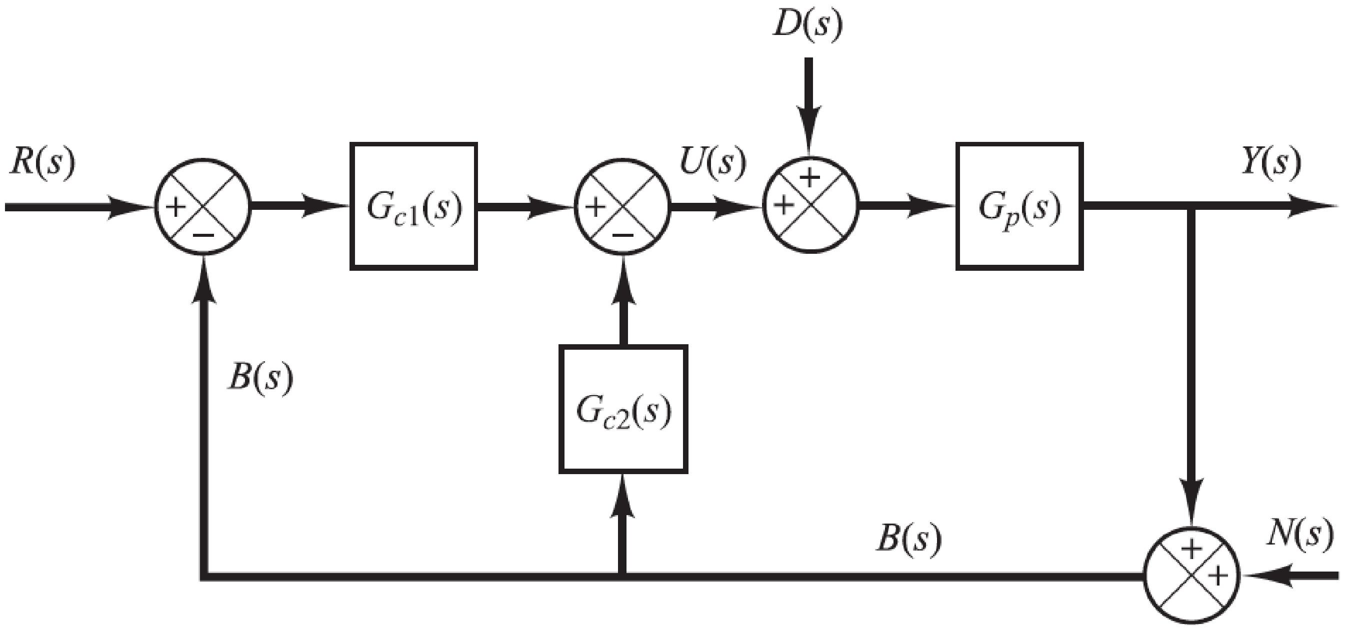
Si una de las tres funciones de transferencia en lazo cerrado $\boldsymbol{G_{yr}}$, $\boldsymbol{G_{yn}}$ y $\boldsymbol{G_{yd}}$ está dada, las dos restantes están fijas. Esto significa que el sistema de control es de un grado de libertad.

Control PID con dos grados de libertad (PID_2DoF)

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1}G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{(G_{c1} + G_{c2})G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$



Si $\boldsymbol{G_{yd}}$ está dada, entonces $\boldsymbol{G_{yn}}$ está fija, pero $\boldsymbol{G_{yr}}$ no lo está, porque $\boldsymbol{G_{c1}}$ es independiente de $\boldsymbol{G_{yd}}$. Dos de las tres funciones de transferencia en lazo cerrado $\boldsymbol{G_{yr}}$, $\boldsymbol{G_{yn}}$ y $\boldsymbol{G_{yd}}$ son independientes. Se trata de un sistema de control con dos grados de libertad.

$$G_{yr} = G_{c1}G_{yd}$$

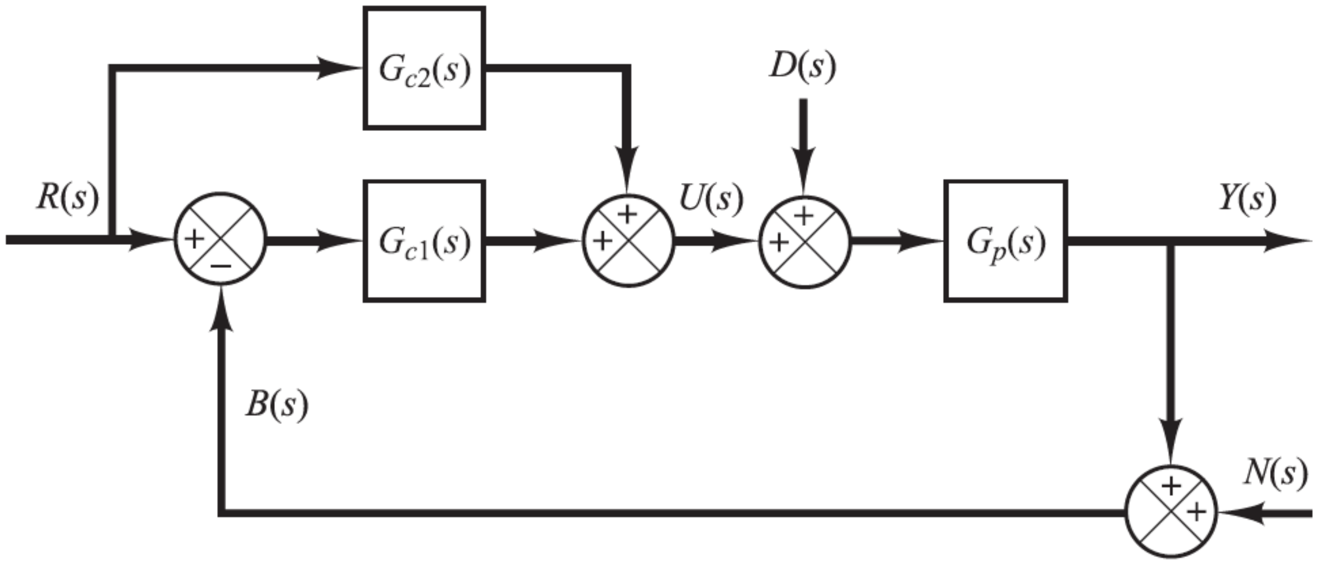
$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

Control PID con dos grados de libertad (PID_2DoF)

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1}G_p}{1 + G_{c1}G_p} + \frac{G_{c2}G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_{c1}G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$



Si $\boldsymbol{G_{yd}}$ está dada, entonces $\boldsymbol{G_{yn}}$ está fija, pero $\boldsymbol{G_{yr}}$ no lo está, porque $\boldsymbol{G_{c2}}$ es independiente de $\boldsymbol{G_{yd}}$. Dos de las tres funciones de transferencia en lazo cerrado $\boldsymbol{G_{yr}}$, $\boldsymbol{G_{yn}}$ y $\boldsymbol{G_{yd}}$ son independientes. Se trata de un sistema de control con dos grados de libertad.

$$G_{yr} = G_{c2}G_{yd} + \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

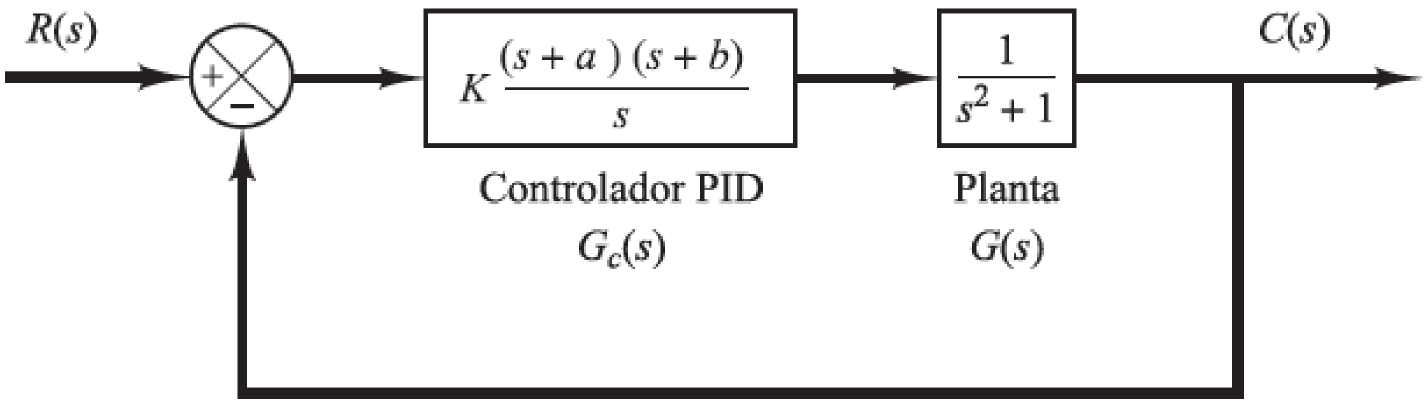
$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

Ejercicio 3.4.

Sea el sistema que se muestra en la Figura. Se desea diseñar un controlador $PID \rightarrow G_c(s)$ tal que los polos en lazo cerrado dominantes estén localizados en $s = -1 \pm j\sqrt{3}$.

$$PID \rightarrow G_c(s) = K\frac{(s+a)(s+b)}{s}$$

Para el controlador PID, seleccione $a = 1$ y entonces determine los valores de K y b.



Referencias

- Ogata, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna, 5a. Ed. Prentice Hall, 2010, México
- Dorf, Richard, Bishop Robert. "Sistemas de control moderno", 10ª Ed., Prentice Hall, 2005, España.