Transformada Z Bilateral

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

Funciones en Tiempo Discreto

Señal Digital

Una **señal digital** tiene variables independientes discretas y valores discretos

¿realidad analógica vs representación en un dominio digital?

.

Conversión analógica/digital

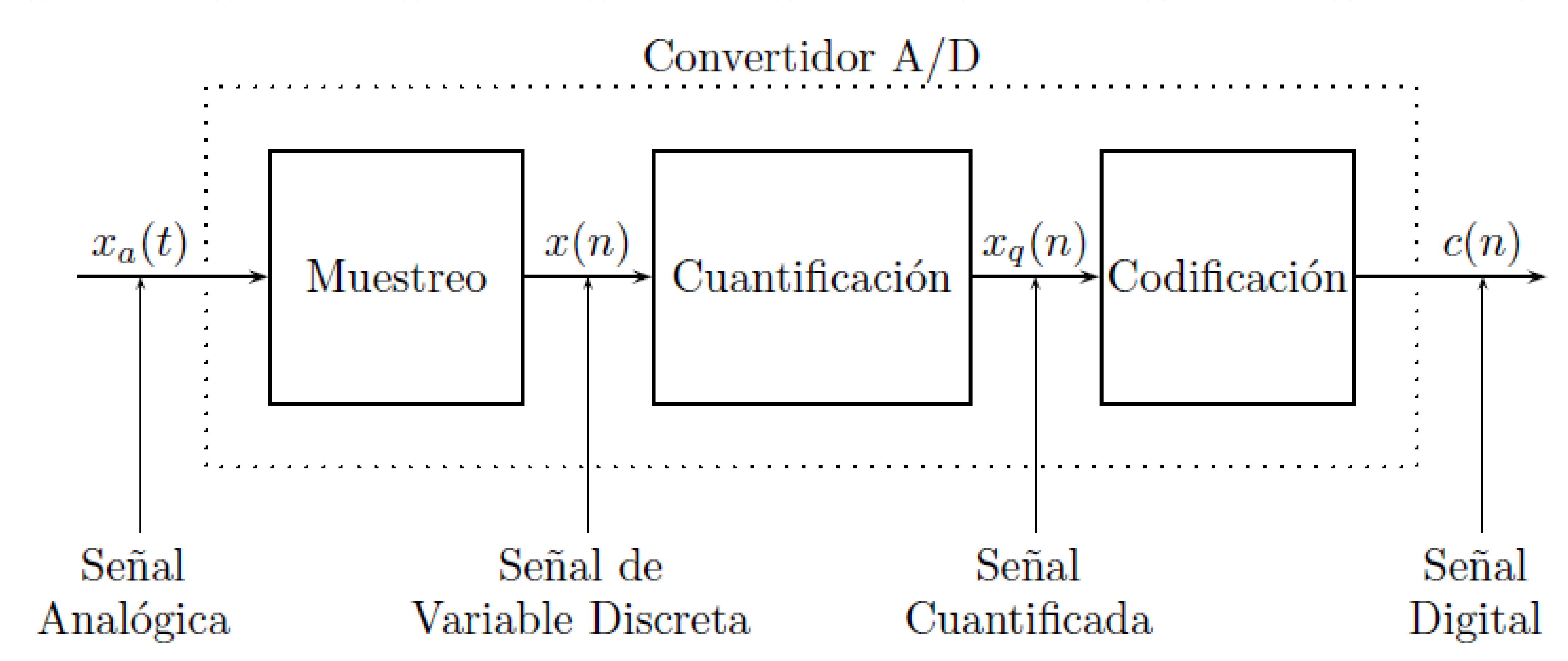
Tres pasos en la conversión de una señal analógica a digital:

1. **Muestreo** es la conversión de una señal de variable continua a otra de variable discreta. Si $x_a(t)$ es la entrada al bloque de muestreo, entonces la salida puede ser tomada en instantes equidistantes $x_a(nT)$, con T el **intervalo de muestreo**.

2. **Cuantificación** es la conversión de la señal de variable discreta y valores continuos a otra señal de variable discreta pero con valores discretos. A la diferencia entre el valor continuo y su aproximación se le denomina **error de cuantificación**.

3. **Codificación** consiste en la asignación de una representación usualmente binaria a los valores cuantificados.

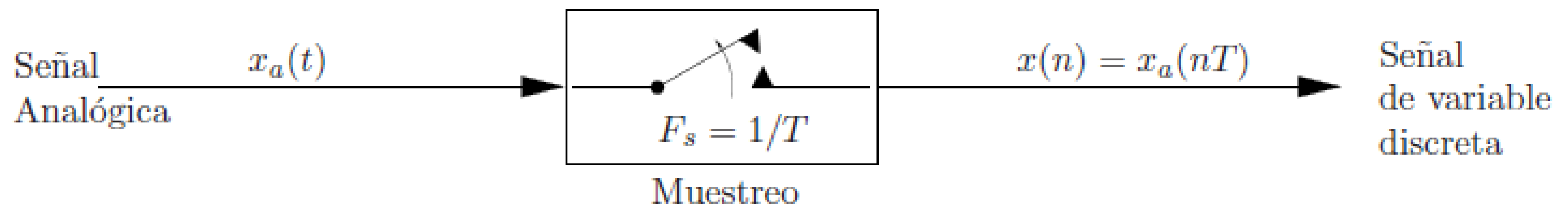
Conversión analógica/digital

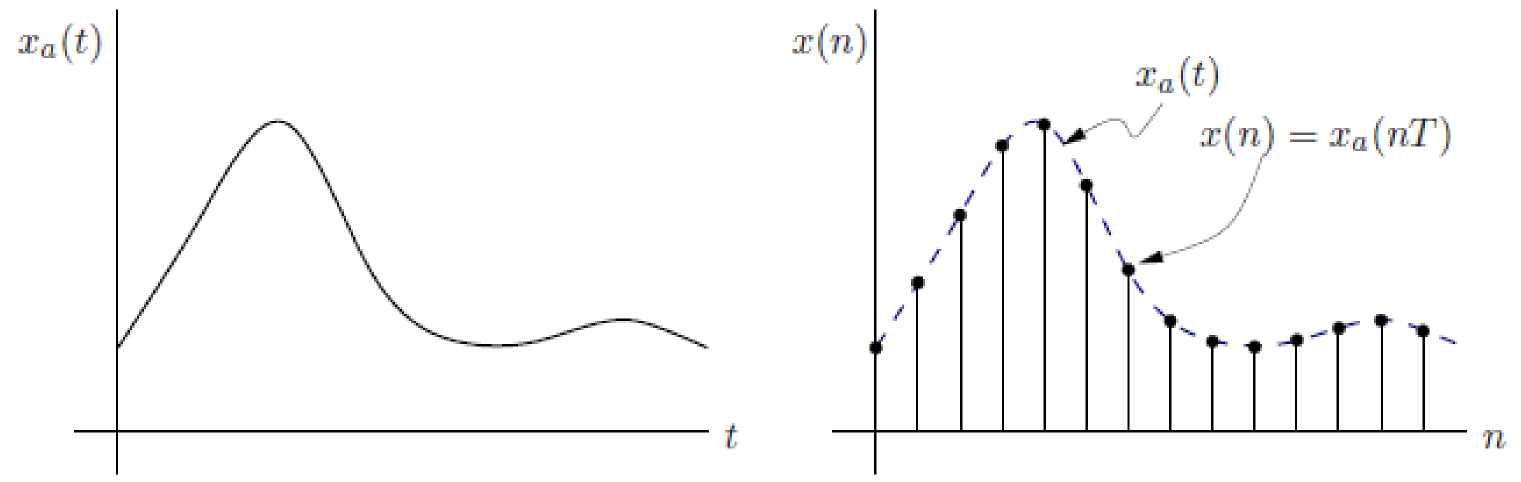


Muestreo periódico

El análisis matemático se simplifica utilizando señales en tiempo discreto. Así, con el **muestreo periódico** o **uniforme** la relación

$$x(n) = x_a(nT) \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad T \in \mathbb{R}$$





Relación entre dominios continuo y discreto

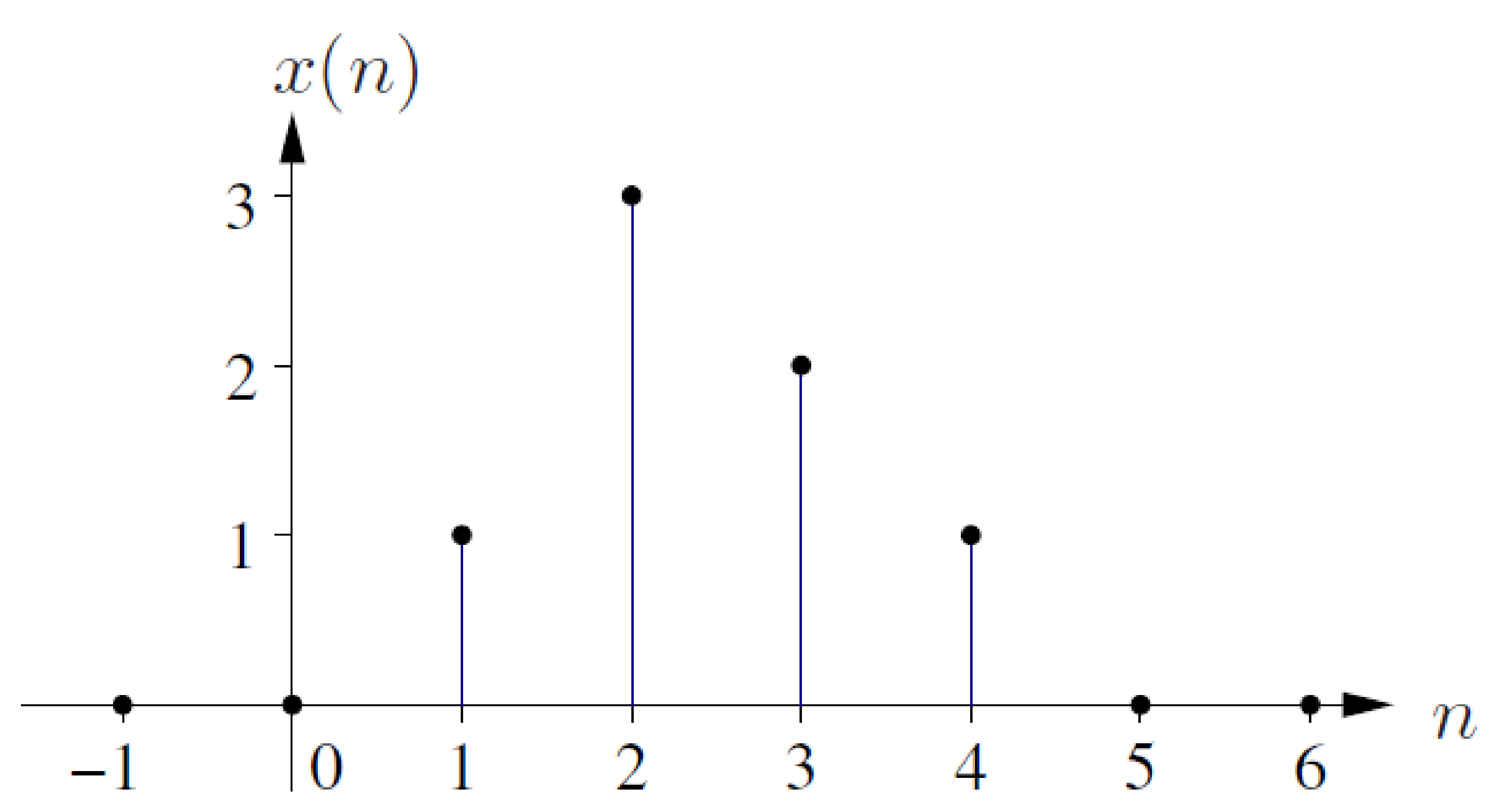
Las variables t y n de las señales de variable continua y discreta respectivamente están relacionadas a través del intervalo de muestreo T

$$t = nT = {}^{n}/_{F_s}$$

donde a F_s se le denomina tasa de muestreo.

Representaciones de funciones de variable discreta

Representación gráfica



A n se le denomina número de muestra y a $x(n)$ la n-ésima muestra de la señal.

Representación funcional

$$x(n) = \begin{cases} 1 & para\, n = 1 \\ 5 - n & para\, 2 \leq n \leq 4 \\ 0 & el\, resto \end{cases}$$

Esta es la representación más usual en el análisis matemático de funciones discretas.

Representación tabular

n	$\ldots$	-1	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
$x(n)$	$\ldots$	0	0	1	3	2	1	0	$\ldots$

En programas computacionales para manipulación y modelado digital de sistemas, como por ejemplo el **MATLAB™** o el **GNU/Octave** las funciones se representan usualmente de esta manera: por un lado con los números de muestra n, y por otro con los valores de las muestras $x(n)$.

Representación como secuencia

Una secuencia de duración infinita con el origen en $n = 0$ (indicado con "$\uparrow$") se representa como

$$x(n) = \{\ldots, 0, \underbrace{0}_{\uparrow}, 1,3,2,1,0, \ldots\}$$

Si la secuencia es 0 para $n < 0$ se puede representar como

$$x(n) = \{\underbrace{0}_{\uparrow}, 1,3,2,1,0, \ldots\}$$

y si es finita

$$x(n) = \left\{\underbrace{0}_{\uparrow}, 1,3,2,1\right\} = \{0,1,3,2,1\}$$

Donde la flecha "$\uparrow$" se omite si la primera muestra en la secuencia corresponde a la muestra en 0.

Representación continua de impulsos

Para el análisis matemático de señales y sistemas en tiempo discreto es útil representar la función muestreada $x_a(nT)$ por medio de impulsos de Dirac con áreas modificadas de acuerdo al valor de cada muestra.

Así, defínase la función muestreada $\hat{x}_a(t)$ como

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)$$

Ejemplo: Teorema del muestreo (1)

Dada la función de variable discreta $x(n)$, en términos continuos

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT)$$

Si $x_a(t)$ tiene una respuesta en frecuencia $X_a(j\omega)$, encuentre el espectro correspondiente de $x(n)$. ¿Qué relación debe existir entre el periodo de muestreo T y el espectro $X_a(j\omega)$ para que la señal original $x_a(t)$ pueda ser reconstruida a partir de $\hat{x}_a(t)$?

Ejemplo: Teorema del muestreo (2)

Solución: Puesto que se cumple

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

entonces, aplicando la transformada de Fourier a ambos lados, utilizando las propiedades de la convolución, y tomando en cuenta que

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Ejemplo: Teorema del muestreo (3)

se obtiene con $\omega_0 = 2\pi/T$

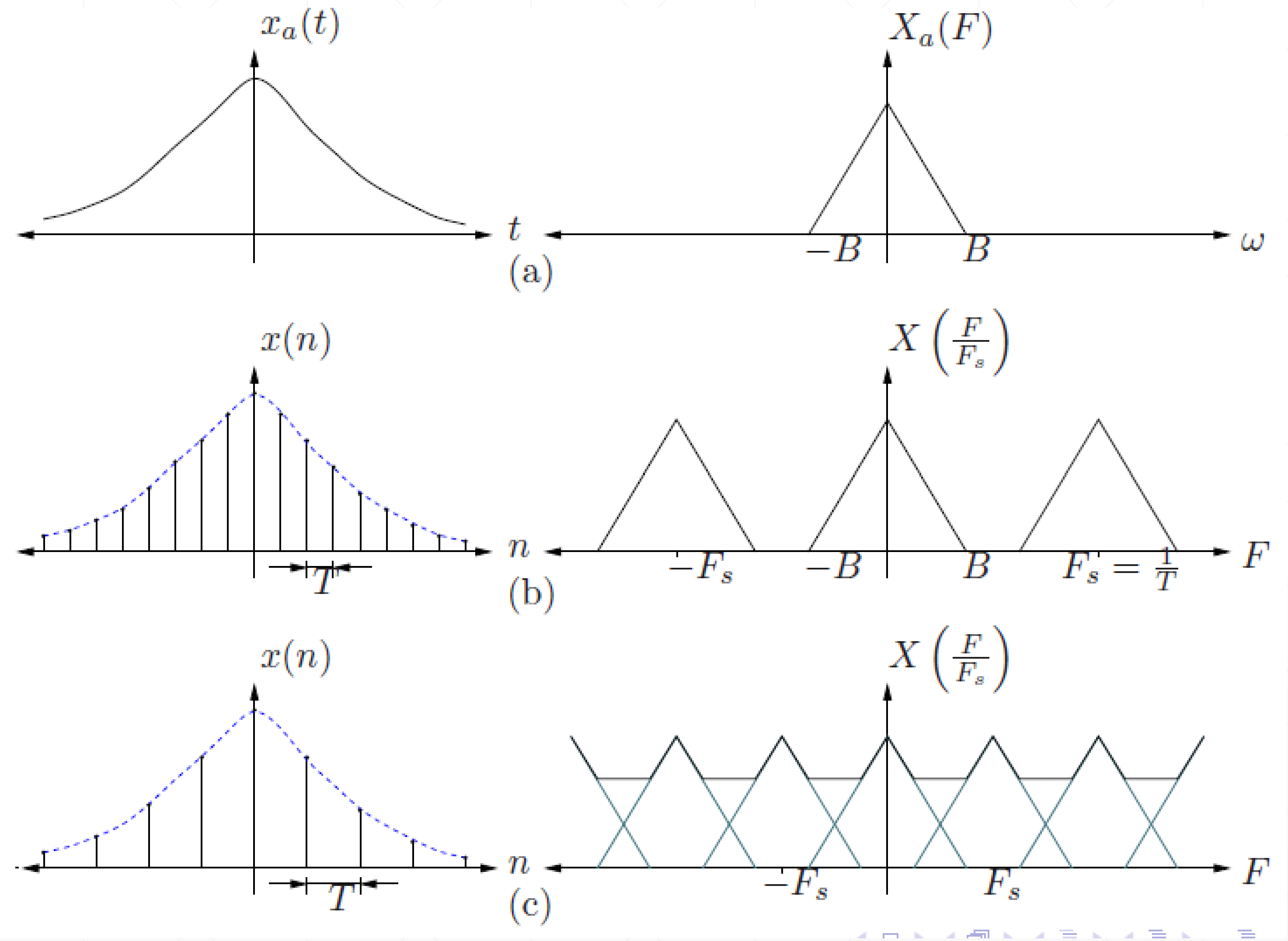
$$\mathcal{F}\{\hat{x}_a(t)\} = X_a(j\omega) * \frac{2\pi}{2\pi T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega - jk\omega_0)$$

Esto corresponde a una replicación con traslape aditivo del espectro, $X_a(j\omega)$, donde las réplicas guardan una distancia de ω_0 entre sí

Ejemplo: Teorema del muestreo (4)

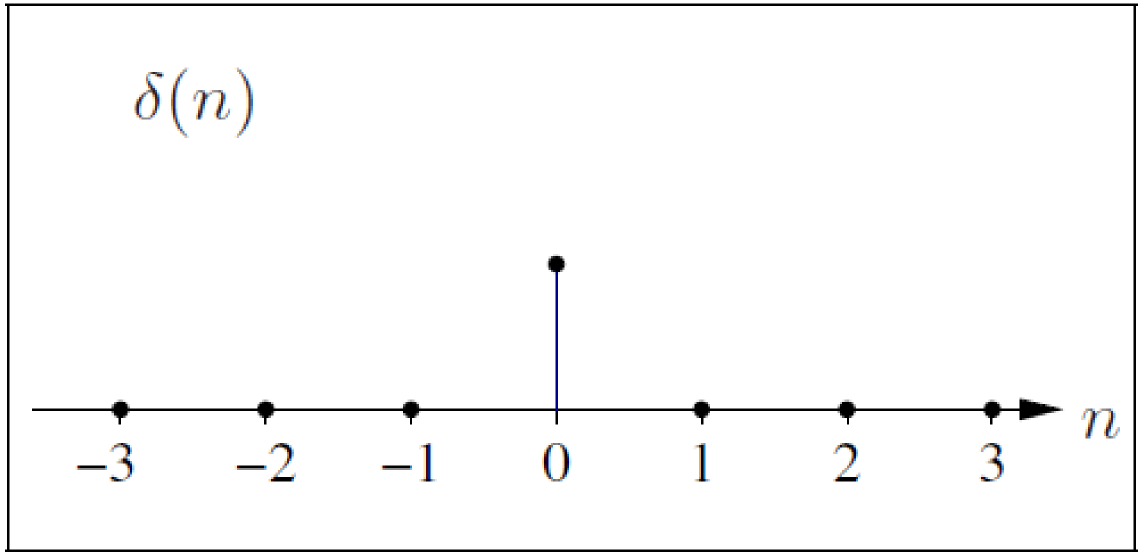


Señales Elementales

Impulso unitario

El impulso unitario $\delta(n)$ está definido como:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & para\, n = 0 \\ 0 & para\, n \neq 0 \end{cases}$$



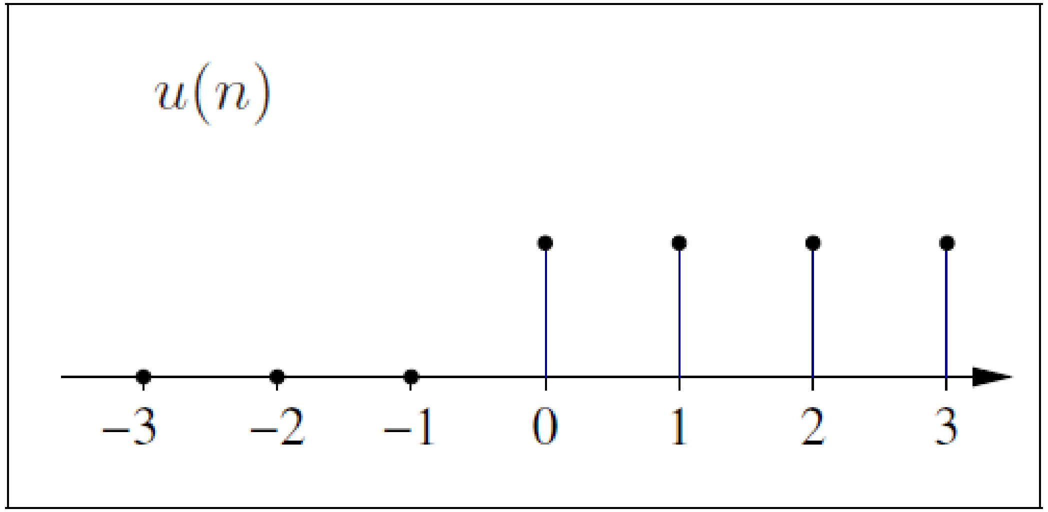
Escalón unitario

El escalón unitario $u(n)$ se define como:

$$u(n) = \begin{cases} 0 & para\, n < 0 \\ 1 & para\, n \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$u(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i)$$



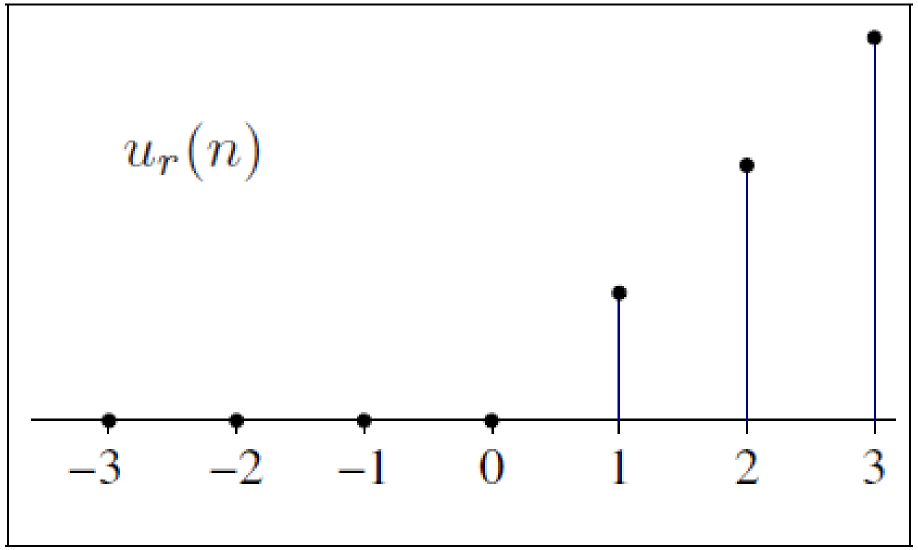
Rampa unitaria

La rampa unitaria se obtiene de

$$u_r(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} u(i-1)$$

lo que resulta en

$$u_r(n) = \begin{cases} 0 & para\ n < 0 \\ n & para\ n \geq 0 \end{cases}$$

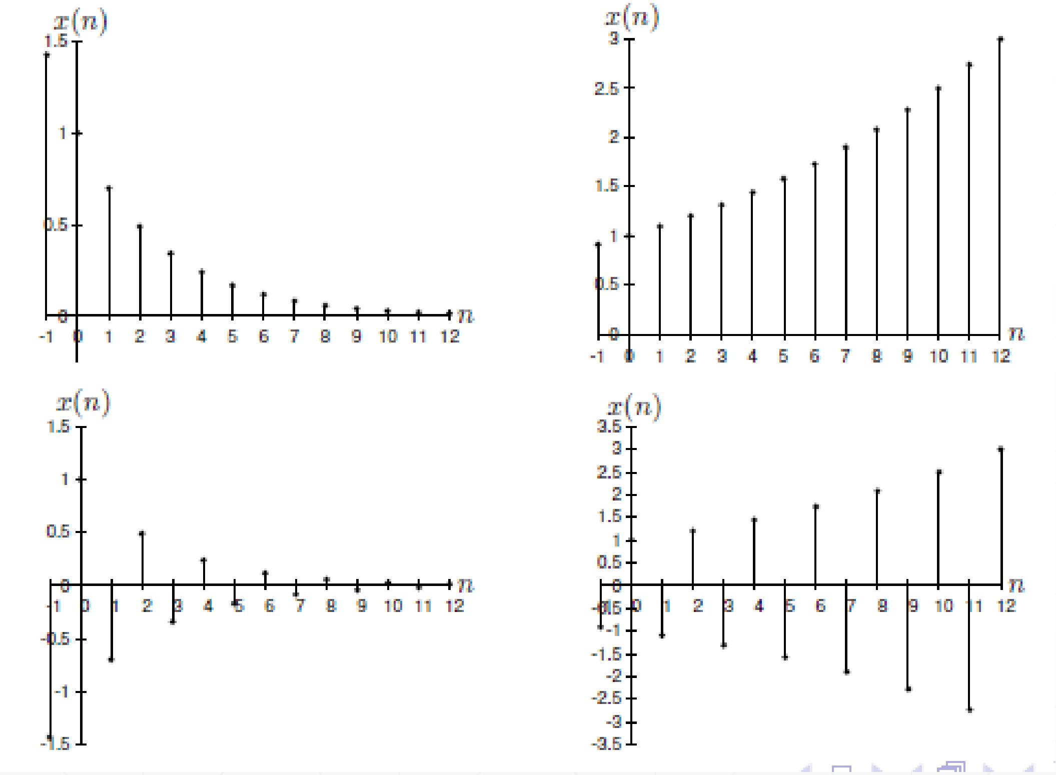


Señal exponencial real

La señal exponencial se define como

$$x(n) = a^n$$

y su comportamiento depende de la constante a. El comportamiento es estable si $|a| < 1$ o inestable si $|a| > 1$.

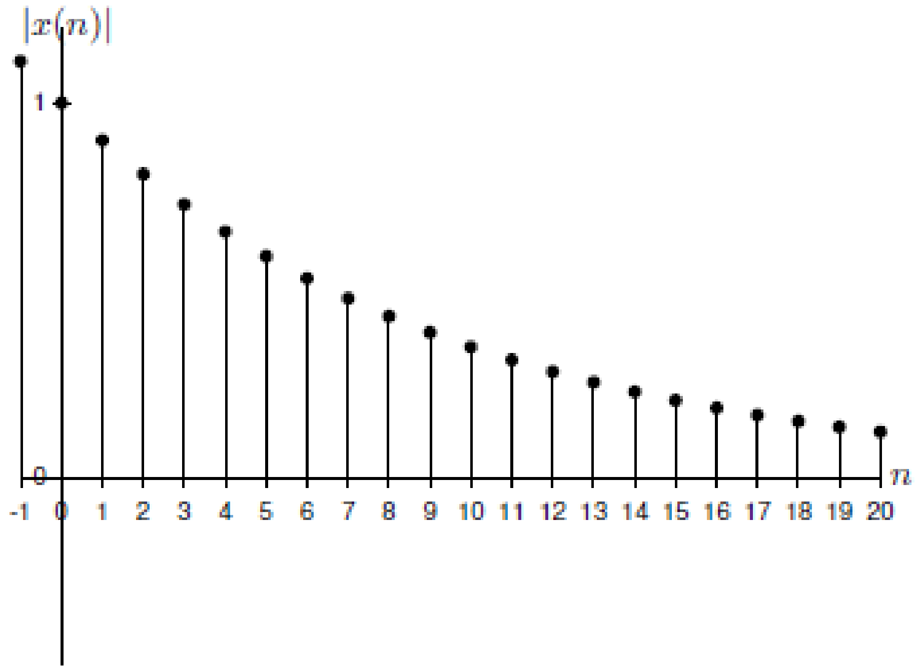


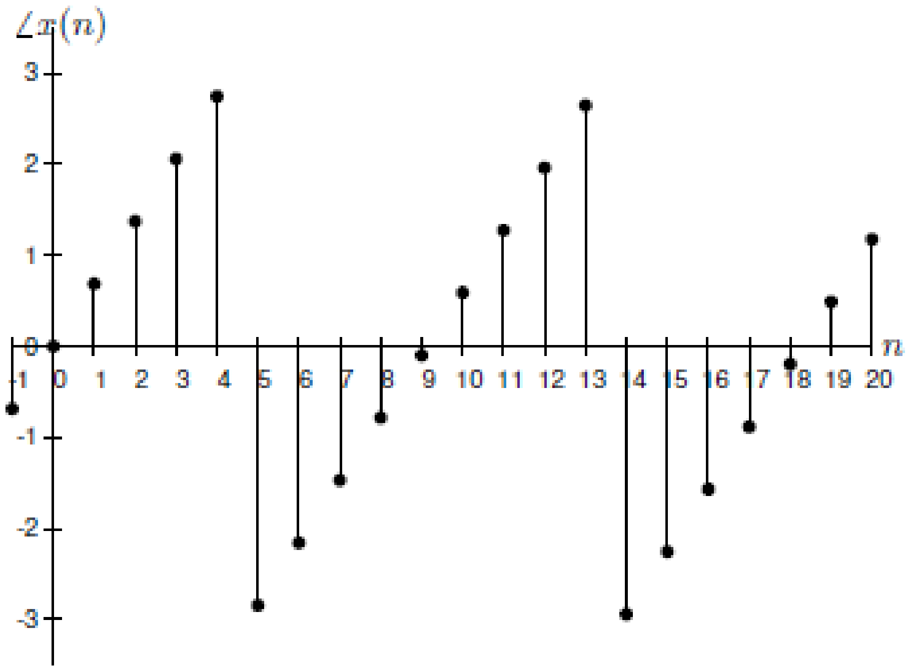
Señal exponencial compleja: magnitud y fase

Si a es complejo entonces la señal exponencial puede expresarse como

$$a = re^{j\psi} \Rightarrow x(n) = r^n e^{j\psi n}$$

es decir, un fasor de magnitud r^n con fase ψn.



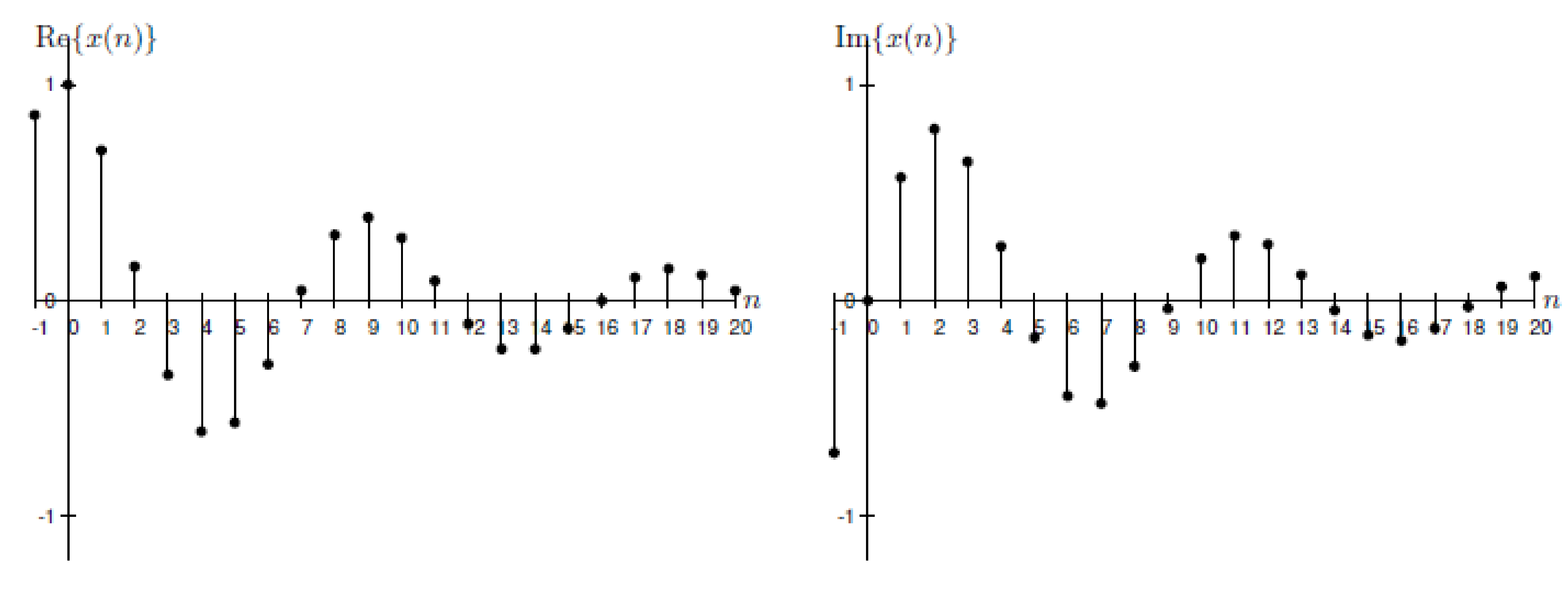


Señal exponencial compleja: Parte real e imaginaria

Utilizando la identidad de Euler se obtiene

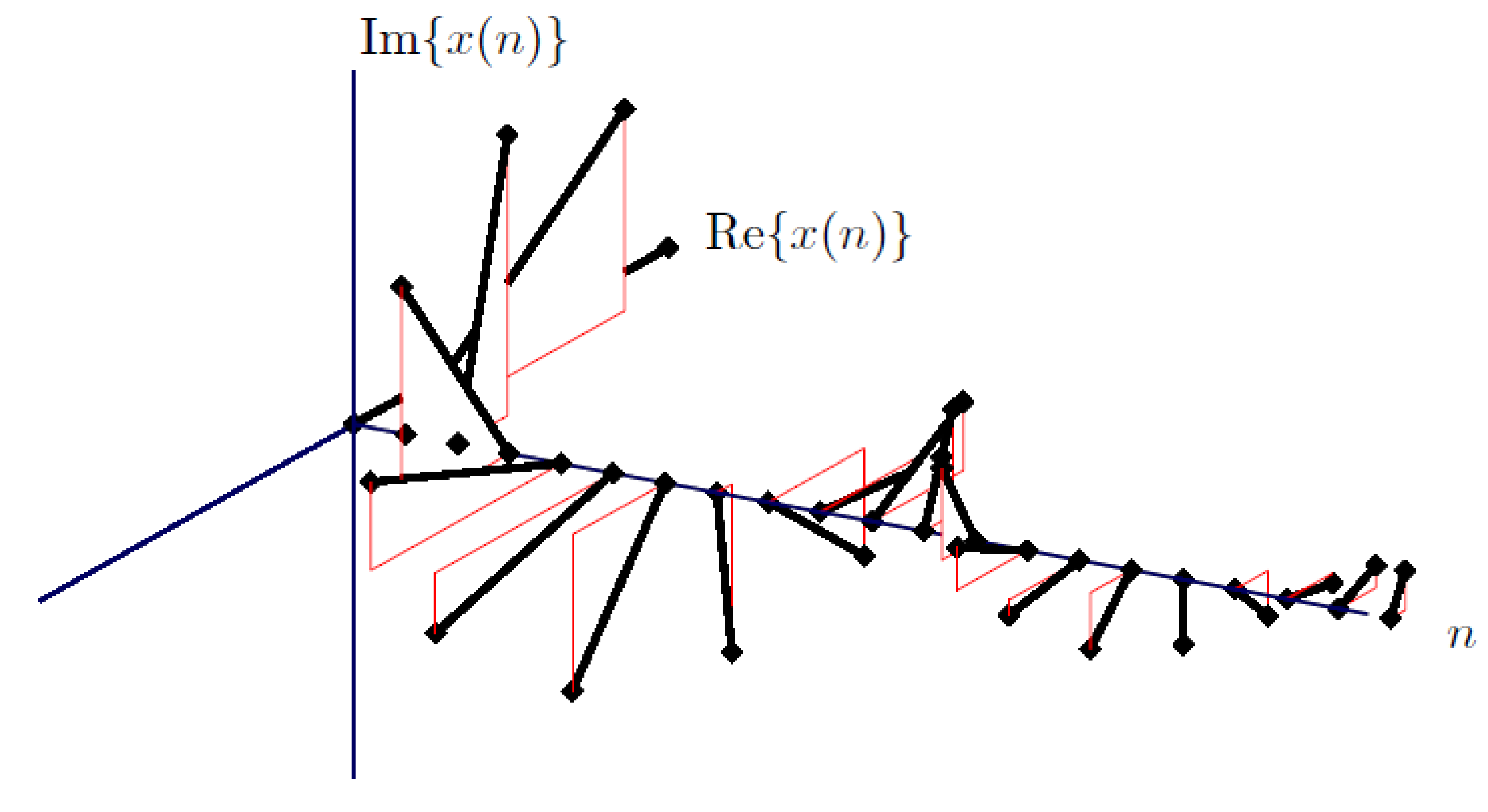
$$x(n) = r^n \cos(\psi n) + j r^n \sin(n\psi)$$

cuyas partes real e imaginaria se ilustran.



Señal exponencial compleja: representación integrada

Otra representación de una señal exponencial compleja se presenta en la siguiente figura:



Transformada z Bilateral

Transformada de Laplace de una señal discreta

Tómese ahora la representación $\hat{x}_a(t)$ de una señal muestreada. Su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}\{\hat{x}_a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)\right] e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-snT}$$

Transformada z bilateral

Si se define $z = e^{sT}$ y considerando que $x(n) = x_a(nT)$ se obtiene

$$\mathcal{L}\{x(n)\} = \mathcal{L}\{\hat{x}_a(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-snT}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z)$$

conocido como la **Transformada z bilateral** de $x(n)$, que converge dentro de la **región de convergencia** (**ROC**) de la serie.

La relación entre la secuencia discreta $x(n)$ y su representación $X(z)$ en el dominio z se denota como:

$$x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X(z) \quad \text{ó} \quad x(n) \overset{z}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(z)$$

Relación entre los planos s y z

La relación $z = e^{sT}$ es un mapeo conforme del plano $s = \sigma + j\omega$ al plano complejo z. Puesto que

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

entonces una línea vertical en el plano s, para la cual σ es constante, es transformada en un círculo de radio $e^{\sigma T}$.

¿Cómo deben ser las regiones de convergencia de la transformada z de señales izquierdas, derechas y bilaterales?

Convergencia de $X(z)$

Si se expresa z en su forma polar $z = re^{j\varphi}$, con $r = |z|$ y $\varphi = \angle z$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\varphi n}$$

Dentro de la ROC de $X(z)$, $|X(z)| < \infty$, por lo que:

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\varphi n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n}|$$

es decir, si $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable entonces $|X(z)|$ es finita

Región de convergencia

Para encontrar la **ROC** se debe entonces encontrar el rango de valores de r para los que la secuencia $x(n)r^{-n}$ es absolutamente sumable. Ahora bien, la desigualdad

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

puede reescribirse como:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^{n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

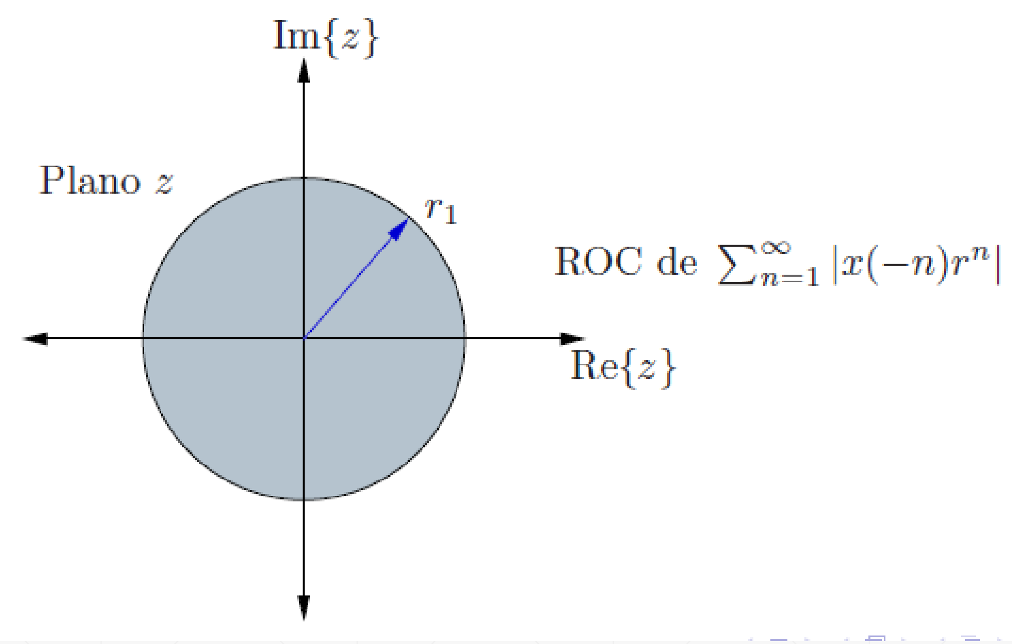
y ambas sumatorias deben converger si $|X(z)|$ debe ser finito.

Convergencia para señal izquierda

Para la primera suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^n|$$

deben existir valores de r suficientemente pequeños para que $x(-n)r^n$ sea absolutamente sumable ($r < r_1$).

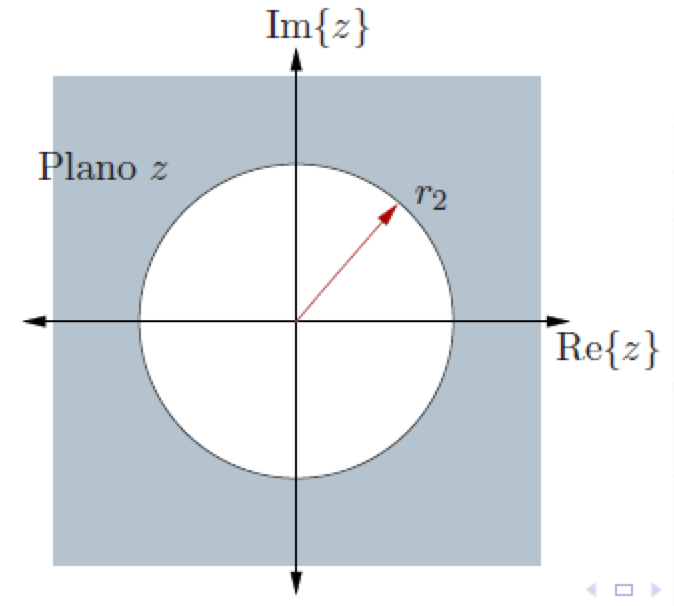


Convergencia para señal derecha

Para que la segunda suma

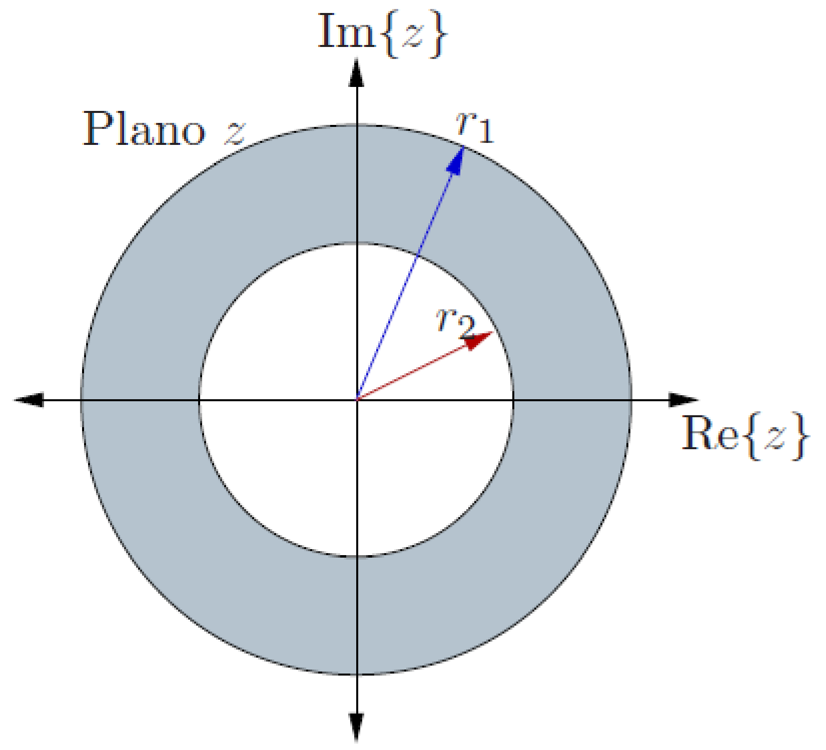
$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

Converja, se necesitan valores de r suficientemente grandes para que $x(n)r^{-n}$ sea absolutamente sumable. Por ellos, la **ROC** serán los puntos fuera de una circunferencia $r > r_2$.



Convergencia de señal bilateral

Como ambas sumas deben converger la ROC de $X(z)$ es la región anular del plano z, $r_2 < \mathrm{r} < r_1$, lo que concuerda con el análisis anterior basado en el mapeo $z = e^{sT}$.



Ejemplo: Transformada z de funciones finitas (1)

Calcule la transformada z de:

1. $x_1(n) = \{1,2,5,7,0,1\}$
2. $x_2(n) = \left\{1,2,5,\underbrace{7}_{\uparrow},0,1\right\}$
3. $x_3(n) = \delta(n)$
4. $x_4(n) = \delta(n+k), k > 0$

Ejemplo: Transformada z de funciones finitas (2)

Solución:

1. $x_1(n) = \{1,2,5,7,0,1\}$

   $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 1z^{-5}$, ROC $= z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

2. $x_2(n) = \left\{1,2,5,\underbrace{7}_{\uparrow},0,1\right\}$

   $X_2(z) = z^3 + 2z^2 + 5z + 7 + z^{-2}$, ROC $= z \in \mathbb{C} \setminus \{0,\infty\}$

3. $x_3(n) = \delta(n)$

   $X_3(z) = 1$, ROC $= z \in \mathbb{C}$

4. $x_4(n) = \delta(n+k), k > 0$

   $X_4(z) = z^{+k}$, ROC $= z \in \mathbb{C} \setminus \{\infty\}$

Ejemplos de transformada z de funciones exponenciales

Ejemplo: Transformada z de función exponencial cuasal (1)

Determine la transformada z de:

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$

Ejemplo: Transformada z de función exponencial cuasal (2)

Solución: Se tiene que

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

que converge si $|\alpha z^{-1}| < 1$ ($|z| > |\alpha|$) a $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$.

Nótese que si $\alpha = 1$, se tiene la transformada z del escalón unitario:

$$x(n) = u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad ROC: z > 1$$

Ejemplo: Transformada z de f. exponencial anticuasal (1)

Determine la transformada z de:

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$$

Ejemplo: Transformada z de f. exponencial anticuasal (2)

Solución:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-m} z^m$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^m$$

que converge sólo si $|\alpha^{-1} z| < 1$, es decir, si $|z| < |\alpha|$, a:

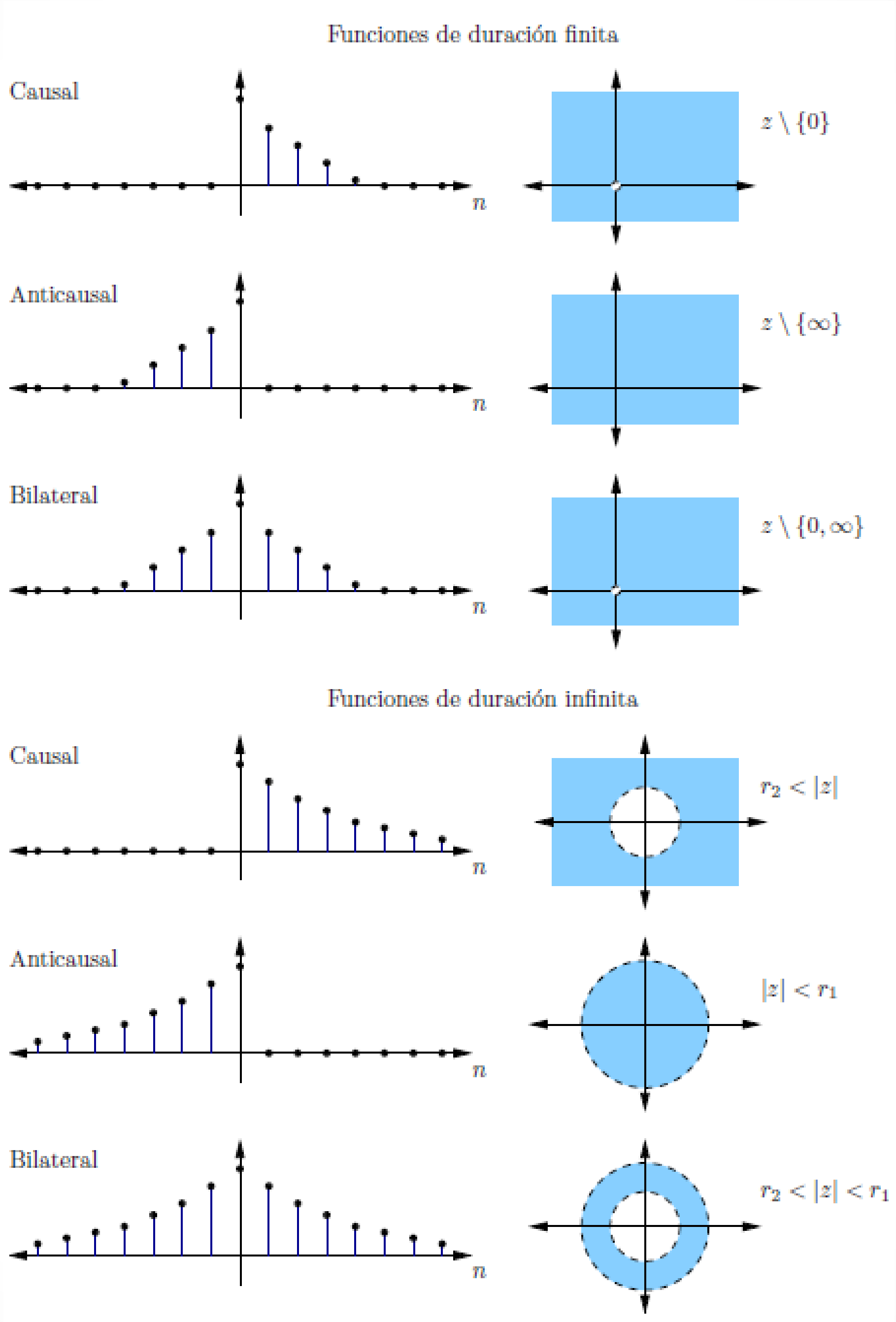
$$X(z) = -\left(\frac{1}{1-\alpha^{-1}z} - 1\right) = -\frac{\alpha^{-1}z}{1-\alpha^{-1}z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

Nótese que esta expresión es idéntica a la obtenida para $x(n) = \alpha^n u(n)$

Ambiguedad de expresiones algebraicas sin ROC

Se concluye que la forma compacta de la transformada z no especifica una única señal en el dominio del tiempo. Esto sólo ocurre indicando además la **ROC**.

El término transformada z indica entonces no sólo la expresión $X(z)$, sino también su **ROC**.



ROC de Transformada z

Transformada z bilateral de algunas funciones comunes

Señal $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano z
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-(a^n)u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$-n(a^n)u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > a$
$a^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > a$

Propiedades de la transformada z bilateral

Linealidad

Si $x_1(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(z)$ y $x_2(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_2(z)$, entonces

$$x(n) = ax_1(n) + a_2x_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

Desplazamiento en el tiempo

Si $\mathrm{x}(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(z)$, entonces $\mathrm{x}(n-k) \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-k}X(z)$

La ROC de $z^{-k}X(z)$ es la misma de $X(z)$ excepto

- $z = 0$ si $k > 0$ y
- $z = \infty$ si $k < 0$.

Escalamiento en el dominio z

Si $x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(z)$, ROC: $r_1 < |z| < r_2$, entonces

$$a^n x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(a^{-1}z), \qquad \text{ROC: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

para todo $a \in \mathbb{C}$.

Demostración:

$$\mathcal{Z}\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

Conjugación

Si $x(n)$ tiene como transformada z a $X(z)$ con ROC R entonces

$$x^*(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X^*(z^*), \qquad ROC: R$$

Si $x(n)$ es real entonces $X(z) = X^*(z^*)$

Inversión temporal

$$x(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(z), \qquad ROC: r_1 < |z| < r_2$$

$$x(-n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(z^{-1}), \qquad ROC: \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

Diferenciación en el dominio z

$$x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(z)$$

$$nx(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\; -z\frac{d}{dz}X(z)$$

Convolución de dos secuencias

Si

$$x_1(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(z), \qquad ROC: R_1$$
$$x_2(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_2(z), \qquad ROC: R_2$$

entonces

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

la **ROC** es al menos $R_1 \cap R_2$.

Teorema del valor inicial

Si $x(n)$ es causal ($x(n) = 0, \forall n < 0$), entonces:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Puesto que $x(n)$ es causal:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + \cdots$$

Si $z \to \infty$ todos los términos z^{-1}, z^{-2}, etc. tienden a cero y por tanto:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Propiedades de la transformada z bilateral

Propiedad	Dominio n	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$	$X(z)$	$R = \{z \mid r_2 < \|z\| < r_1\}$
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	por lo menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en n	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$R \setminus \{0\}$ si $k > 0$ y $R \setminus \{\infty\}$ si $k < 0$
Escalado en z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
Reflexión en n	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
Parte real	$\mathrm{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye R
Parte imaginaria	$\mathrm{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye R
Derivación en z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Por lo menos $R_1 \cap R_2$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ es causal	$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$	

Transformada z inversa

Transformada z inversa: Derivación (1)

Utilizando el **teorema integral de Cauchy** y la fórmula integral de Cauchy se demuestra que se cumple

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1-k}dz = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

para un contorno de integración C que rodea al origen.

Transformada z inversa: Derivación (2)

A partir de la definición de la transformada z para una señal de variable discreta $x(k)$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

se obtiene multiplicando ambos lados por z^{n-1}, e integrando en un contorno cerrado que contienen al origen, y que está dentro de la ROC:

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k+n-1}dz$$

Como la serie converge dentro de C, la integral y la sumatoria pueden ser intercambiadas:

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\oint_C z^{-k+n-1}dz$$

Transformada z inversa: Derivación (3)

que con el resultado anterior sólo es diferente de cero para $k = n$, es decir:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Ejemplo: Transformada z inversa (1)

Encuentre la transformada z inversa de la expresión

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

si se sabe que la señal correspondiente es causal.

Ejemplo: Transformada z inversa (2)

Solución: Aplicando la integral de definición se obtiene

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}z^{n-1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z}{z-\alpha}z^{n-1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n}{z-\alpha}dz
\end{aligned}
$$

Como C debe estar dentro de la **ROC**, y la señal es causal, entonces se escoge una circunferencia de radio mayor que $|\alpha|$.

Ejemplo: Transformada z inversa (3)

En

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - \alpha} dz$$

se observa que para $n > 0$ se tiene un cero de orden n en $z = 0$, o ningún cero cuando $n = 0$, y en ambos casos hay un polo en $z = \alpha$.

En estos casos se puede aplicar la **fórmula integral de Cauchy** para obtener directamente

$$x(n) = z^n \Big|_{z=\alpha} = \alpha^n$$

Ejemplo: Transformada z inversa (4)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - \alpha} dz$$

Para $n < 0$ la función $f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = 0$, que también está dentro de C, por lo que dos polos $z_1 = 0$ y $z_2 = \alpha$ contribuyen al valor de la integral.

Ejemplo: Transformada z inversa (5)

Con $n = -1$ y la fórmula integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z(z-\alpha)}dz = \left.\frac{1}{z-\alpha}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{z}\right|_{z=\alpha}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = 0$$

Ejemplo: Transformada z inversa (6)

Con $n = -2$:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z^2(z-\alpha)}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{-\frac{1}{\alpha}}{z^2} + \frac{-\frac{1}{\alpha^2}}{z} + \frac{\frac{1}{\alpha^2}}{z-\alpha}dz$$

$$= 0 - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

Esto se puede repetir para todo $n < -2$ resultando en $x(n) = 0$. Por tanto, resumiendo ambos casos en una ecuación se obtiene:

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$

Transformada z inversa por expansión en series

La idea de este método es expandir $X(z)$ en una serie de potencias de la forma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

que converge en la región de convergencia asociada a $X(z)$.

Ejemplo: Transformada z inversa por división polinomial (1)

Calcule la secuencia en tiempo discreto $x(n)$ si su transformada z tiene como expresión algebraica

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Para las regiones de convergencia

1. ROC: $|z| > 1$
2. ROC: $|z| < 1/2$

Ejemplo: Transformada z inversa por división polinomial (2)

Solución: Debido a que la ROC $|z| > 1$ es el exterior de un círculo y $X(z)$ es racional, entonces $x(n)$ es una señal causal. Para calcularla se ordenan el numerador y el denominador del mayor coeficiente al menor y se divide:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1+\frac{1}{2}z^{-1} & & & & & 1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2} \\
\hline
-(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}) & & & & & 1+2z^{-1}+\frac{5}{2}z^{-2}+\frac{11}{4}z^{-3}+\frac{23}{8}z^{-4}+\dots \\
\hline
2z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2} & & & & & \\
-(2z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}) & & & & & \\
\hline
\frac{5}{2}z^{-2}-z^{-3} & & & & & \\
-(\frac{5}{2}z^{-2}-\frac{15}{4}z^{-3}+\frac{5}{4}z^{-4}) & & & & & \\
\hline
\frac{11}{4}z^{-3}-\frac{5}{4}z^{-4} & & & & & \\
-(\frac{11}{4}z^{-3}-\frac{33}{8}z^{-4}+\frac{11}{8}z^{-5}) & & & & & \\
\hline
\frac{23}{8}z^{-4}-\frac{11}{8}z^{-5} & & & & &
\end{array}
$$

Con lo que se deduce $x(n) = \{\underbrace{1}_{\uparrow}, 2, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{23}{8}, \ldots\}$.

Ejemplo: Transformada z inversa por división polinomial (2)

La **ROC** $|z| < 1/2$ corresponde a una señal anticausal. Para este caso se ordenan el numerador y el denominador de menor a mayor y se divide:

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{1}{2}z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ \cline{2-2}
-\left(\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{3}{2} + z\right) & z + 5z^2 + 13z^3 + 29z^4 + 61z^5 + \ldots \\ \cline{1-1}
\qquad \frac{5}{2} - z & \\
\qquad -\left(\frac{5}{2} - \frac{15}{2}z + 5z^2\right) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad \frac{13}{2}z - 5z^2 & \\
\qquad\qquad -\left(\frac{13}{2}z - \frac{39}{2}z^2 + 13z^3\right) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad \frac{29}{2}z^2 - 13z^3 & \\
\qquad\qquad\qquad -\left(\frac{29}{2}z^2 - \frac{87}{2}z^3 + 29z^4\right) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{61}{2}z^3 - 29z^4 &
\end{array}
$$

y finalmente $x(n) = \left\{\ldots, 61, 29, 13, 5, 1, \underbrace{0}_{\uparrow}\right\}$

Transformada z inversa con series: Limitaciones

Este método no provee la forma cerrada de $x(n)$ y resultada tedioso si se desea determinar $x(n)$ para n grande.

Es además inestable numéricamente si se automatiza para ser calculado en computador.

Es posible utilizar series conocidas para encontrar las correspondientes transformadas z.

Ejemplo: Transfromada z inversa por series de Taylor (1)

Determine la transformada z inversa de:

$$X(z) = In(1 + \alpha z^{-1}), \qquad ROC: |z| > |\alpha|$$

Ejemplo: Transfromada z inversa por series de Taylor (2)

Solución: Puesto que la serie de Taylor para $\ln(1+x)$, $|x|<1$ es

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

entonces

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\alpha^n z^{-n}}{n}$$

de donde se obtiene directamente $x(n) = \frac{(-1)^{n+1}\alpha^n}{n} u(n-1)$

Transformada z inversa con fracciones parciales

La expresión algebraica racional $X(z)$ se puede descomponer como combinación lineal:

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \cdots + \alpha_k X_k(z)$$

donde $\{X_i(z)\}$ son las transformaciones de las señales $\{x_i(n)\}$ disponibles en tablas.

Por linealidad se tiene que

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \cdots + \alpha_k x_k(n)$$

Descomposición en fracciones parciales

Si $X(z)$ es una función racional, entonces:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

Nótese que si $a_0 \neq 1$, lo anterior se puede obtener dividiendo numerador y denominador por a_0.

Una función impropia ($M \geq N$) siempre se puede representar como la suma de un polinomio y una función racional propia.

Funciones racionales impropias

En general, cualquier función racional impropia ($M \geq N$) se puede expresar como:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_{M-N} z^{-(M-N)} + \frac{N_1(z)}{D(z)}$$

La transformada z inversa de un polinomio en términos de z^{-1} resulta en las primeras muestras causales de la señal.

Se prestará ahora especial atención a la transformada de funciones racionales propias.

Descomposición en fracciones parciales (1)

Sea $X(z)$ una función racional propia:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

con $a_N \neq 0$ y $M < N$. Multiplicando por z^N tanto el numerador como el denominador:

$$X(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

puesto que $N > M$ entonces

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \cdots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

que es siempre propia

Descomposición en fracciones parciales (2)

Para descomponer la función

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \cdots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

como una suma de fracciones parciales, se factoriza el denominador en factores que contengan los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ de $X(z)$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \cdots + b_M z^{N-M-1}}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_N)}$$

Caso: Polos diferentes de primer orden

Si todos los polos son diferentes y de primer orden, entonces se busca la expansión:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{A_N}{z - p_N}$$

donde

$$A_k = (z - p_k)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=p_k}$$

Ejemplo: Descomposición en fracciones parciales (cont.) (1)

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + \frac{11}{6}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

y con ella la transformada inversa $x(n)$ de la función $X(z)$, si se sabe que ésta es causal.

Ejemplo: Descomposición en fracciones parciales (cont.) (2)

Solución: Como $X(z)$ es impropia se debe realizar una división polinomial para descomponer la función, de la cual se obtiene:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

Así, cada uno de los términos de la expresión de $X(z)$ se transforman por separada utilizando la propiedad de linealidad.

Ejemplo: Descomposición en fracciones parciales (cont.) (3)

Para la fracción propia resultante se multiplica por $\frac{z^2}{z^2}$ y se obtiene:

$$\frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}\cdot\frac{z^2}{z^2}=\frac{\frac{1}{6}z}{z^2+\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}z}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{A_1}{\left(z+\frac{1}{3}\right)}+\frac{A_2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

- Nótese que no fue necesario dividir por z pues la función racional resultante es propia desde un principio.
- Multiplicando ambos lados por $(z+1/3)$ y haciendo $z\to-1/3$ se obtiene $A_1=-\frac{1}{3}$.
- Por otro lado, multiplicando ambos lados por $(z+1/2)$ y haciendo $z\to-1/2$ se obtiene $A_2=\frac{1}{2}$.

Ejemplo: Descomposición en fracciones parciales (cont.) (4)

Se cumple entonces:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\left(z+\frac{1}{3}\right)}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}+\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u(n-1)$$

donde se ha hecho uso de las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo.

Ejemplo: Descomposición en fracciones parciales (cont.) (5)

Falta únicamente transformar los términos $1+2z^{-1}$ que corresponden en el tiempo discreto a $\delta(n)+2\delta(n-1)$. De este modo se cumple

$$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n-1)$$

Ejemplo: Fracciones parciales con solo polos simples (1)

Determine la expansión en fracciones parciales de

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}}$$

Ejemplo: Fracciones parciales con solo polos simples (2)

Solución: Multiplicando por $\frac{z^2}{z^2}$ se obtiene:

$$X(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z + 1}{z^2 - z + \frac{1}{2}}$$

con los polos $p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{\pm j45^o}$ se puede realizar la siguiente descomposición:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} \Rightarrow \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$$

Ejemplo: Fracciones parciales con solo polos simples (3)

$$A_1 = (z-p_1)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=p_1} = \left.\frac{z+1}{z-p_2}\right|_{z=p_1} = \frac{p_1+1}{p_1-p_2} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{2}e^{-j71,6^o}$$

$$A_2 = (z-p_2)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=p_2} = \left.\frac{z+1}{z-p_1}\right|_{z=p_2} = \frac{p_2+1}{p_2-p_1} = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{2}e^{j71,6^o}$$

Recuérdese que para el caso en que los coeficientes de los polinomios en el numerador son reales, entonces si $p_1 = p_2^*$ se cumple $A_1 = A_2^*$

Ejemplo: Fracciones parciales con solo polos simples (4)

Asumiendo que se trata de una señal causal, se obtiene de la tabla de transformadas

$$\mathcal{Z}\{X(z)\} = x(n) = [A_1 p_1^n + A_1^* p_1^{*n}]u(n)$$

$$= |A_1||p_1|^n\left[e^{j(\angle A_1 + n\angle p_1)} + e^{-j(\angle A_1 + n\angle p_1)}\right]u(n)$$

$$= 2|A_1||p_1|^n \cos(\angle A_1 + n\angle p_1)$$

$$= \sqrt{\frac{10}{2^n}}\cos(n45^o - 71{,}6^o)$$

Caso de polos de orden múltiple

Si hay un polo de orden l, $(z - p_k)^l$, entonces la expansión en fracciones parciales tendrá términos:

$$\frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \cdots + \frac{A_{lk}}{(z - p_k)^l}$$

donde los coeficientes $\{A_{ik}\}$ pueden obtenerse por medio de derivaciones sucesivas

Ejemplo: Fracciones parciales con polos dobles (1)

Determine la expansión en fracciones parciales de:

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

y encuentre la señal causal equivalente $x(n)$

Ejemplo: Fracciones parciales con polos dobles (2)

Solución: Multiplicando numerador y denominador por z^3 resulta en:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{(z+1)} + \frac{A_2}{(z-1)} + \frac{A_3}{(z-1)^2}$$

A_1 y A_3 se encuentran fácilmente multiplicando por los denominadores parciales y haciendo $z = p_i$:

$$A_1 = (z+1)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$A_3 = (z-1)^2\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=1} = \frac{z^2}{(1+z)}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Fracciones parciales con polos dobles (3)

Para calcular A_2 se procede:

$$(z-1)^2\frac{X(z)}{z} = A_1\frac{(z-1)^2}{z+1} + A_2(z-1) + A_3$$

y se deriva con respecto a z:

$$\left.\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\right\}\right|_{z=1} = A_1\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2}{z+1}\right] + A_2\frac{d}{dz}[z-1]$$

$$= A_1\left.\left[\frac{2(z-1)(z+1)+(z-1)^2)}{(z+1)^2}\right]\right|_{z=1} + A_2$$

$$\left.\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z+1}\right)\right|_{z=1} = \left.\frac{2z(z+1)-z^2}{(z+1)^2}\right|_{z=1} = \frac{3}{4} = A_2$$

Ejemplo: Fracciones parciales con polos dobles (4)

Por lo tanto, se cumple

$$X(z) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+z^{-1}}\right] + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]$$

y si la señal buscada es causal, se obtiene con las propiedades de linealidad y la tabla de transformadas:

$$x(n) = \left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n\right]u(n)$$

Inversión de términos

Para obtener la inversión de $X(z)$ se utiliza entonces la linealidad junto con el hecho ya demostrado de que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u(n) & si\ ROC\colon |z| > |p_k| \\ -(p_k)^n u(-n-1) & si\ ROC\colon |z| < |p_k| \end{cases}$$

Polos complejos conjugados

La ROC es $|z| > p_{max} = máx\{|p_1|, |p_2|, \dots, |p_N|\}$ para la señal causal $x(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \cdots + A_N p_N^n) u(n)$.

Si los coeficientes de la función racional son reales los polos complejos aparecen en pares conjugados, así como los coeficientes, por tanto:

$$x_k(n) = [A_k p_k^n + A_k^* p_k^{*n}] u(n)$$

Expresando en forma polar: $A_k = |A_k| e^{j\alpha_k}, p_k = |p_k| e^{j\beta_k}$

$$x_k(n) = |A_k||p_k|^n \left[e^{j(\beta_k n + \alpha_k)} + e^{-j(\beta_k n + \alpha_k)}\right] u(n)$$

$$= 2|A_k||p_k|^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) \mathrm{u(n)}, \qquad \mathrm{ROC:} \ |\mathrm{z}| > |p_k| = r_k$$

Efectos de los polos complejos conjugados

- Nótese entonces que un par de polos complejos conjugados da origen a una señal sinusoidal con envolvente exponencial, donde
  - La distancia del polo al origen determina la atenuación exponencial
  - El ángulo de los polos respecto al eje real determina la frecuencia de la oscilación.
- Los ceros afectan la amplitud y fase a través de su influencia en los coeficientes A_k.
- Para el caso de polos múltiples se utilizan tablas, pero es usual encontrar

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}\right\} = np^n u(n), \qquad ROC: |z| > |p|$$

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.