Ortogonalidad y Espacios

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

Espacios Lineales

Espacios lineales

¿Qué es un vector?

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección
- Tradicionalmente se utiliza en ingeniería el concepto de vector como un conjunto ordenado (o tupla) en n cantidades, por ejemplo $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

Vector

Formalmente, un vector es un elemento de un ***espacio lineal*** o ***espacio vectorial***.

Combinación lineal

El vector $\underline{\boldsymbol{x}}$ es una ***combinación lineal*** de los vectores $\underline{\boldsymbol{u}}_1, \underline{\boldsymbol{u}}_2, \dots, \underline{\boldsymbol{u}}_n$ si

$$\underline{\boldsymbol{x}} = c_1\underline{\boldsymbol{u}}_1 + c_2\underline{\boldsymbol{u}}_2 + \cdots + c_n\underline{\boldsymbol{u}}_n$$

Independencia lineal

El conjunto $\mathcal{U} = \{\underline{\boldsymbol{u}}_1, \underline{\boldsymbol{u}}_2, \dots, \underline{\boldsymbol{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$ es:

- **Linealmente dependiente** (o ligado) si algún $\underline{\boldsymbol{u}}_i$ es una combinación lineal de otros elementos de $\mathcal{U}$.
- **Linealmente independiente** (o libre) si $c_1\underline{\boldsymbol{u}}_1 + c_2\underline{\boldsymbol{u}}_2 + \cdots + c_n\underline{\boldsymbol{u}}_n = \underline{\boldsymbol{0}}$ solo con $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\boldsymbol{u}}_1, \underline{\boldsymbol{u}}_2, \dots, \underline{\boldsymbol{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

Si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio.

- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.

Espacio lineal finito

El espacio lineal $\mathbb{V}$ se denomina finito si existe un sistema de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\boldsymbol{u}}_1, \underline{\boldsymbol{u}}_2, \dots, \underline{\boldsymbol{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

que lo engendran, con n finito.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\boldsymbol{u}}_i$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal finito $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.
- Este número de vectores es la **dimensión** del espacio lineal.

Tipos de Espacios Lineales

Espacio métrico

Espacio métrico

Un espacio métrico es una estructura algebraica en la que se define la operación $d(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}})$ denominada métrica

$$d: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

Axiomas para una métrica

- $d\left(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}\right) \geq 0$ (no negatividad)
- $d(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}}) = 0$ (reflexividad)
- $d\left(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}\right) = 0 \ \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{y}}$ (identidad de los indiscernibles)
- $d\left(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}\right) = d\left(\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}}\right)$ (simetría)
- $d(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{z}}) \leq d\left(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}\right) + d(\underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}})$ (desigualdad del triángulo)

Espacio lineal normado

Espacio lineal normado

El espacio lineal normado incluye definición de una norma denotada con $\|\cdot\|$:

$$\|\cdot\|: \mathbb{V} \to \mathbb{R}$$

Axiomas para una norma:

- $\|\underline{\boldsymbol{x}}\| \geq 0$ (positividad)
- $\|a\underline{\boldsymbol{x}}\| = |a|\|\underline{\boldsymbol{x}}\|$ (escalabilidad positiva)
- $\|\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}}\| \leq \|\underline{\boldsymbol{x}}\| + \|\underline{\boldsymbol{y}}\|$ (desigualdad de Minkowski)
- $\|\underline{\boldsymbol{x}}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{0}}$.

Definición de métrica a través de la norma

Usualmente se le asigna a la norma $\left\| \underline{\boldsymbol{x}} \right\|$ el significado de longitud o magnitud del vector $\underline{\boldsymbol{x}}$.

Todo espacio normado es a su vez un espacio métrico, pues se puede definir la métrica como

$$d\left(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}\right) = \left\| \underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}} \right\|$$

Espacios con producto interno

Espacios con producto interno

El producto interno es una operación binaria

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{F}$$

que satisface los siguientes axiomas

- $\forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{V}, \langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}} \rangle \geq 0$. (No negatividad, $\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}} \rangle \in \mathbb{R}$).
- $\forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{V}, \langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}} \rangle = 0$ si y solo si $\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{0}}$. (No degenerabilidad).
- $\forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{V}, \left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle = \left\langle \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{x}} \right\rangle^*$. (Conmutatividad conjugada)
- $\forall a \in \mathbb{F}, \forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{V}, \left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, a\underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle = a \left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle$;
- $\forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}} \in \mathbb{V}, \left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} + \underline{\boldsymbol{z}} \right\rangle = \left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle + \langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{z}} \rangle$. (Sesquilinealidad)

Sesquilinealidad

Combinando la sesquilinealidad con la simetría conjugada se obtiene además

$$\forall a \in \mathbb{F}, \forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{V}, \qquad \left\langle a\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle = a^* \left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle$$

$$\forall \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}} \in \mathbb{V}, \qquad \left\langle \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}} \right\rangle = \langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{z}} \rangle + \left\langle \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}} \right\rangle$$

Definición de producto interno a través de la norma

Utilizando el producto interno puede definirse la norma de un vector $\underline{\boldsymbol{x}}$ como

$$\|\underline{\boldsymbol{x}}\| = \sqrt{\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}} \rangle} \Longrightarrow \langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}} \rangle = \|\underline{\boldsymbol{x}}\|^2$$

Ortogonalidad

Ortogonalidad

- Del griego $orthos$ (recto) y $gonia$ (ángulo).
- **Concepto**: lo que aporta una “dimensión” es totalmente independiente de las otras.
- **Ejemplo**: sistema cartesiano de coordenadas
- **Aquí**: extensión del concepto a funciones

Ortogonalidad

- **Ortogonalidad de vectores**
  - En estos espacios lineales con producto interno se dice que dos vectores $\underline{\boldsymbol{x}}$ y $\underline{\boldsymbol{y}}$ diferentes de $\underline{\mathbf{0}}$ son ortogonales si su producto interno $\left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle$ es 0.

- **Ángulo entre vectores**
  - El ángulo entre los dos vectores se define indirectamente por medio de la ecuación

$$\cos\left(\angle\left(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}\right)\right) = \frac{\left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle}{\left\| \underline{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \underline{\boldsymbol{y}} \right\|}$$

Ortogonalidad y Ortonormalidad

- Si $\mathcal{U} = \{\underline{\boldsymbol{u}}_1, \underline{\boldsymbol{u}}_2, \dots, \underline{\boldsymbol{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$ es una base de $\mathbb{V}$ y todo par de vectores $\underline{\boldsymbol{u}}_i$ y $\underline{\boldsymbol{u}}_k$ $(i \neq k)$ es ortogonal, se dice que $\mathcal{U}$ es una base **ortogonal** de $\mathbb{V}$.

- Si además se cumple que la norma de todos los vectores generadores $\|\underline{\boldsymbol{u}}_i\|$ es uno, entonces a $\mathcal{U}$ se le denomina una base **ortonormal**.

Ejemplo: Coeficientes de una base ortogonal (1)

- Si $\mathcal{U}$ es una base ortogonal de $\mathbb{V}$, ¿cómo se pueden calcular los coeficientes para representar un vector $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{V}$ en dicha base?

Ejemplo: Coeficientes de una base ortogonal (2)

- **Solución**: Si $\mathcal{U}$ es una base ortogonal de $\mathbb{V}$ se cumple para todo vector $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{V}$

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\boldsymbol{u}}_i$$

Realizando el producto escalar a ambos lados con un vector generador específico $\underline{\boldsymbol{u}}_k$, utilizando las propiedades del producto interno descritas anteriormente, y haciendo uso de la Ortogonalidad de los vectores generadores $\underline{\boldsymbol{u}}_i$ se obtiene

$$\langle \underline{\boldsymbol{u}}_k, \underline{\boldsymbol{x}} \rangle = \left\langle \underline{\boldsymbol{u}}_k, \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\boldsymbol{u}}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \underline{\boldsymbol{u}}_k, c_i \underline{u}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle \underline{\boldsymbol{u}}_k, \underline{u}_i \rangle$$

$$= c_k \langle \underline{\boldsymbol{u}}_k, \underline{\boldsymbol{u}}_k \rangle = c_k \left\| \underline{\boldsymbol{u}}_k \right\|^2$$

Ejemplo: Coeficientes de una base ortogonal (3)

Con lo que se deriva

$$c_k = \frac{\langle \underline{\boldsymbol{u}}_k, \underline{\boldsymbol{x}} \rangle}{\left\| \underline{\boldsymbol{u}}_k \right\|^2}$$

Espacios Euclidianos

Espacio euclidiano

El **espacio euclidiano** de n dimensiones es un caso particular donde los vectores se representan por tuplas de n elementos:

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

Producto interno y producto punto

En un espacio euclidiano el producto interno utilizado es siempre el producto punto, definido como:

$$\left\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \right\rangle = \underline{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\boldsymbol{y}} = \underline{\boldsymbol{x}}^{*T} \underline{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$$

Norma euclidiana

Con el producto punto se define la norma euclidiana $\|\underline{\boldsymbol{x}}\|$ como:

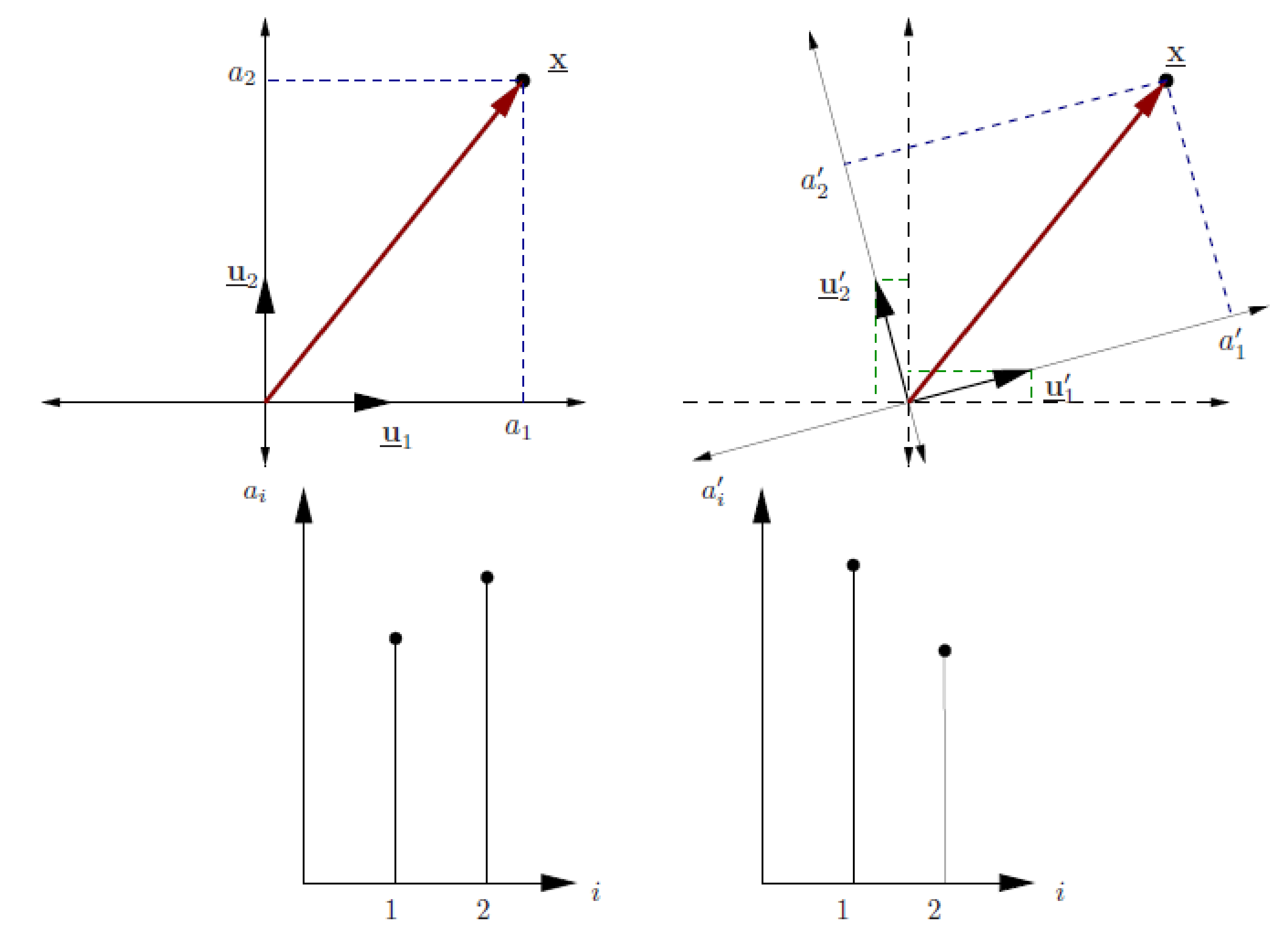
$$\|\underline{\boldsymbol{x}}\| = \sqrt{\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}} \rangle} = \sqrt{\underline{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}} = \sqrt{\underline{\boldsymbol{x}}^{*T} \underline{\boldsymbol{x}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

Métrica euclidiana

La métrica euclidiana puede describirse entonces en términos de la norma:

$$d\left(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}\right) = \left\|\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

Representación de un vector con diferentes bases



Ejemplo: Cambio de base para un vector (1)

Una base ortogonal $\mathcal{U}'$ en un espacio euclidiano tridimensional está compuesta por los vectores

$$\underline{\boldsymbol{u}'}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$$
$$\underline{\boldsymbol{u}'}_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$$
$$\underline{\boldsymbol{u}'}_3 = [x_3, y_3, z_3]^T$$

Cuyas coordenadas x_i, y_i y z_i indican las componentes de cada vector de esta base en la base canónica $\mathcal{U} = \{\underline{\boldsymbol{u}}_1, \underline{\boldsymbol{u}}_2, \underline{\boldsymbol{u}}_3\}$ con

$$\underline{\boldsymbol{u}}_1 = [1,0,0]^T$$
$$\underline{\boldsymbol{u}}_2 = [0,1,0]^T$$
$$\underline{\boldsymbol{u}}_3 = [0,0,1]^T$$

Ejemplo: Cambio de base para un vector (2)

Encuentre los coeficientes c_i para representar al vector $\underline{v} = [a, b, c]^T$ (también representado en la base canónica) como combinación lineal de los vectores $\underline{\boldsymbol{u}}'_i$.

Ejemplo: Cambio de base para un vector (3)

Solución: se sabe que

$$\underline{\boldsymbol{v}} = c_1\underline{\boldsymbol{u}'}_1 + c_2\underline{\boldsymbol{u}'}_2 + c_3\underline{\boldsymbol{u}'}_3$$

donde, por ser la base $\mathcal{U}'$ ortonormal, se cumple que

$$c_i = \frac{\left\langle \underline{\boldsymbol{u}'}_i, \underline{\boldsymbol{v}} \right\rangle}{\left\| \underline{\boldsymbol{u}'}_i \right\|^2} = \left\langle \underline{\boldsymbol{u}'}_i, \underline{\boldsymbol{v}} \right\rangle$$

Puesto que el espacio utilizado es euclidiano, se utiliza el producto punto como producto interno, y así:

$$c_1 = ax_1 + by_1 + cz_1$$
$$c_2 = ax_2 + by_2 + cz_2$$
$$c_3 = ax_3 + by_3 + cz_3$$

Ejemplo: Cambio de base para un vector (4)

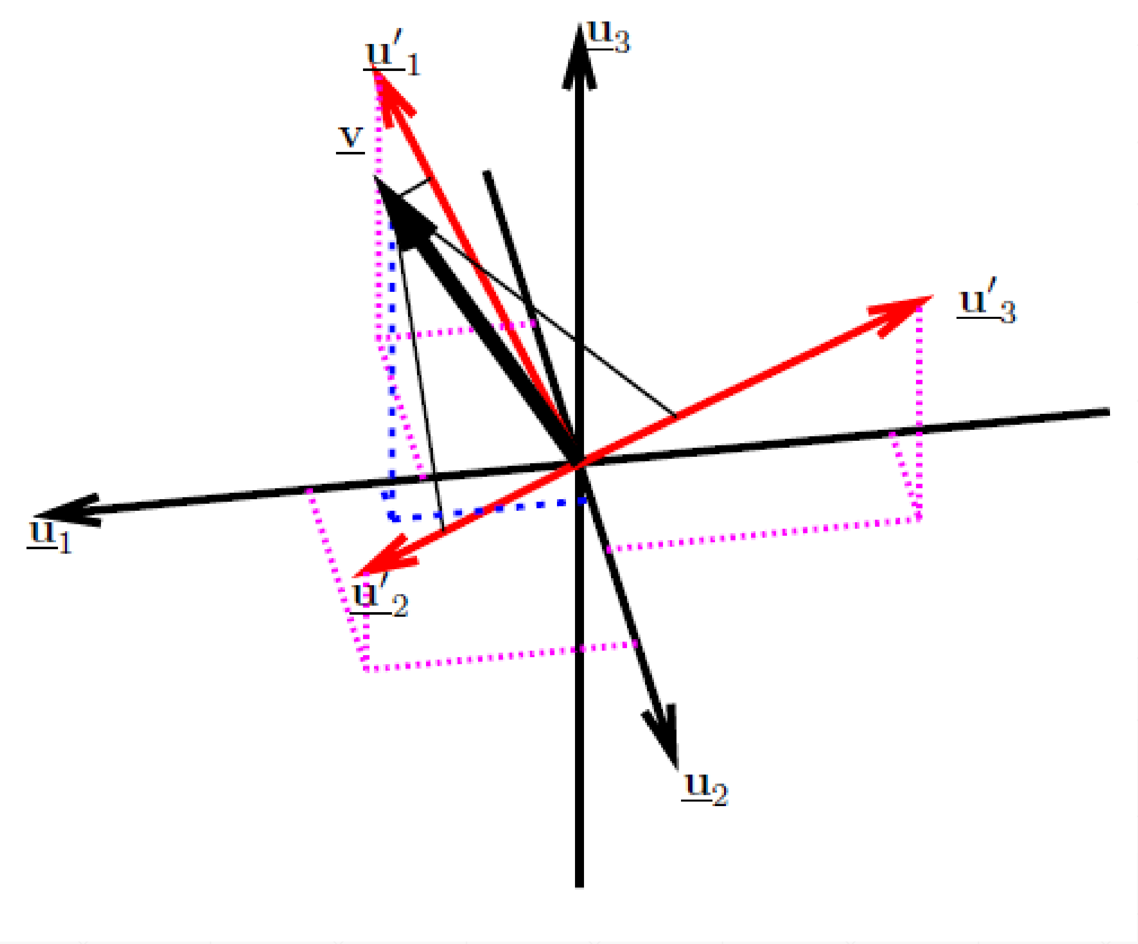
que puede expresarse de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

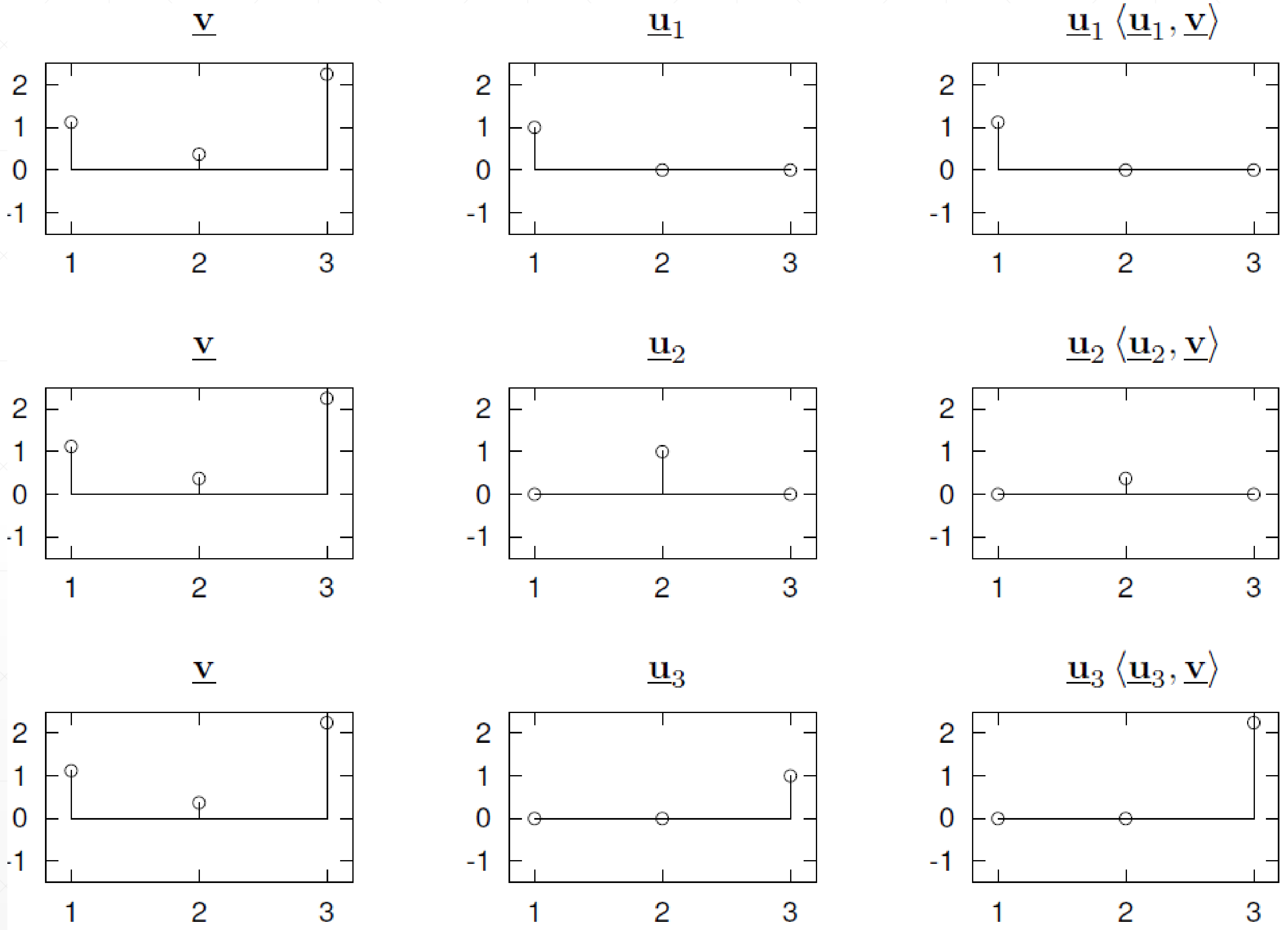
Así, el producto del vector representado en la base canónica puede ser transformado a otro vector en la base $\mathcal{U}'$ multiplicándolo por la izquierda con una matriz cuyas filas corresponden a los vectores generadores de la nueva base, representados sobre la base canónica.

Los valores c_i pueden interpretarse como "qué tanto" de cada vector $\underline{\boldsymbol{u}}_i$ está contenido en $\underline{\boldsymbol{v}}$, de modo que la suma de los tres "tantos" genera dicho vector.

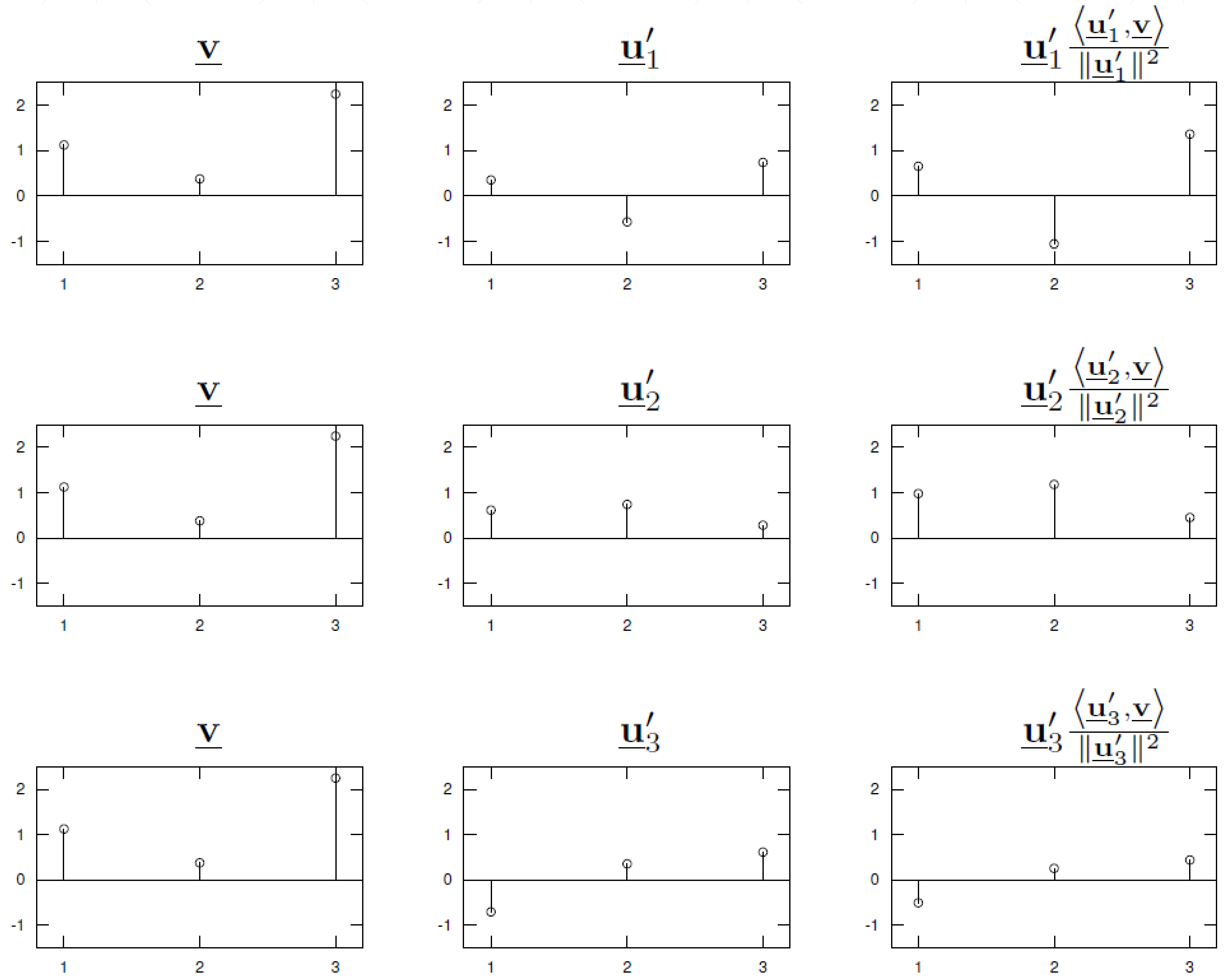
Ejemplo: Cambio de base para un vector (5)



Ejemplo: Cambio de base para un vector (6)



Ejemplo: Cambio de base para un vector (7)



Ortogonalidad de funciones

Definición de vector por componentes “etiquetados”

El vector $\underline{\boldsymbol{x}}$ a través de sus componentes x_i puede interpretarse como función de variable discreta $x: \{1,2, \ldots n\} \rightarrow \mathbb{F}$:

$$x(i) = x_i$$

Generalización a enteros

El dominio de la función se puede generalizar a cualquier rango entero. De este modo el producto se puede expresar como:

$$\langle \underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}} \rangle = \sum_{i=n_1}^{n_2} x^*(i) y(i)$$

Generalización a reales y complejos

La restricción de un dominio entero también puede eliminarse, y extenderse a funciones de variable real o compleja. Con estas funciones, el producto punto se reemplaza por:

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x^*(t)y(t)dt$$

Norma de funciones

La norma de la función se define como:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}$$

Ángulo entre funciones

Es posible incluso definir el ángulo entre funciones

$$\cos\left(\angle\left(x(t), y(t)\right)\right) = \frac{\langle x(t), y(t)\rangle}{\|x(t)\|\|y(t)\|}$$

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.