Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL 4703 Señales y Sistemas

II Semestre 2019
Programa de Tutorías

Tutoría 9: Práctica para el Primer Parcial

Ejercicio 1. Defina la equivalencia correcta entre las expresiones relacionadas a números complejos de la segunda columna con las expresiones de la cuarta columna. Para ello escriba la letra respectiva en el espacio que corresponda según su equivalencia. Algunas asociaciones pueden repetirse.

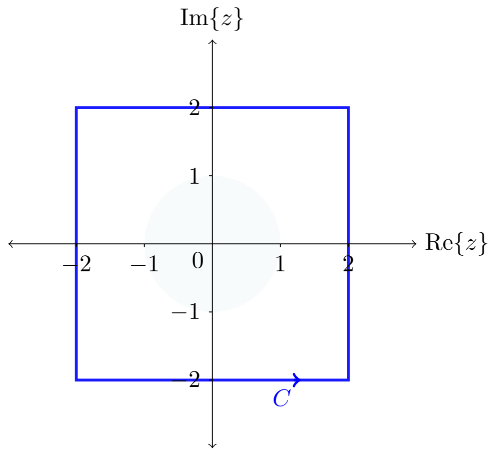
A	1	*F*	$e^{j\frac{k\pi}{2}}$
B	-1	*G*	$e^{jk\pi}$
C	0	*H*	$e^{jk\pi}+e^{j(k+2)\pi}$
D	j	*H*	$e^{jk\pi}-e^{j(k+3)\pi}$
E	$-j$	*A*	$e^{j2k\pi}$
F	j^k	*C*	$e^{jk\pi}+e^{j(k+1)\pi}$
G	$(-1)^k$	*C*	$e^{j\frac{k\pi}{2}}+e^{j\frac{(k+2)\pi}{2}}$
H	$2(-1)^k$	*C*	$e^{j\frac{k\pi}{2}}-e^{j\frac{(k+4)\pi}{2}}$
I	2	*B*	$e^{j(2k+1)\pi}$
J	-2	*D*	$(-j)^{31}$

Ejercicio 2. Indique cual es el mapeo inverso de:

$$f(z)=\frac{2+j3z}{-3+j(z+1)}$$

- ⊗ a) $f(z)=\dfrac{w+j(3w+2)}{3-w}$
- ○ b) $f(z)=\dfrac{3w+2+jw}{w-3}$
- ○ c) $f(z)=\dfrac{-(3w+2)-jw}{w-3}$
- ○ d) $f(z)=\dfrac{w+j(3w+2)}{w-3}$
- ○ e) $f(z)=\dfrac{-(3w+2)+jw}{3-w}$

Ejercicio 3. Considerando la siguiente trayectoria de integración C:



El resultado de la integral $\oint_C \dfrac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\,dz$ siguiendo como trayectoria de integración C es:

- ○ a) $\frac{j\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cos(j2\sqrt{2}) - \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cos(-j2\sqrt{2})$
- ⊗ b) $\frac{j\pi}{4}$
- ○ c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cos(j2\sqrt{2}) - \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cos(-j2\sqrt{2})$
- ○ d) $\frac{j\pi}{4} + j\pi\sqrt{2}\cos(2\sqrt{2})$
- ○ e) $\frac{j\pi}{4} - j\pi\sqrt{2}\cos(2\sqrt{2})$

Ejercicio 4. Determine cual de las siguientes igualdades es verdadera:

- ⊗ a) $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1}{(z^*)^2}\right\} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$
- ○ b) $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1}{(z^*)^2}\right\} = \dfrac{x^2-y^2}{x^4+y^4}$
- ○ c) $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1}{(z^*)^2}\right\} = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$
- ○ d) $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1}{(z^*)^2}\right\} = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+6x^2y^2+y^4}$

Ejercicio 5. Para la función de variable compleja $f(z)$ se han calculado los desarrollos en serie de Laurent mostrados en la columna izquierda de la siguiente tabla, donde para todas las series se han utilizado regiones de convergencia que contienen como punto límite al punto donde ellas se encuentran centradas. Indique en las otras tres columnas el tipo de punto (regular, cero, polo o singularidad esencial) que representa el centro de la serie para la función $f(z)$. Si es un polo o un cero indique el orden respectivo.

Serie	Tipo	Orden	Ubicación
$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} 2^{-k}(z-1-j)^k$	*polo*	*2*	$z_0 = 1+j$
$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}(z-j)^k$	*punto regular*	-	$z_0 = j$
$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}}(z-2)^k$	*cero*	*1*	$z_0 = 2$
$f(z) = \sum_{k=-3}^{\infty} \frac{j^k}{k}(z+1)^{-k}$	*singularidad esencial*	-	$z_0 = -1$
$f(z) = \sum_{k=4}^{\infty} z^k$	*cero*	*4*	$z_0 = 0$
$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z+4j)^{k-1}$	*polo*	*1*	$z_0 = -j4$

Ejercicio 6. La función de variable compleja $w = f(z)$ esta dada por:

$$f(z) = \frac{2z+2j}{z-1}$$

donde $w = u + jv$ y $z = x + jy$. Considerando las regiones del plano z dadas por:

$$R_2 : x - y \leq 1$$
$$R_1 : |z| \leq 1$$

a. Calcule el mapeo inverso de la función $f(z)$.

b. Encuentre los puntos fijos del mapeo w.

c. Descomponga el mapeo dado en mapeos elementales (rotaciones, traslaciones, escalados e inversiones) e indique la secuencia correspondiente.

d. Bosqueje las regiones R_1, R_2 y la región que muestre la intersección entre ambas regiones en el plano z.

e. Determine y bosqueje las regiones en el plano w correspondientes a R_1 y R_2 en el plano z, si se utiliza el mapeo dado.

f. Bosqueje la imagen de $R_1 \cap R_2$ en el plano w.

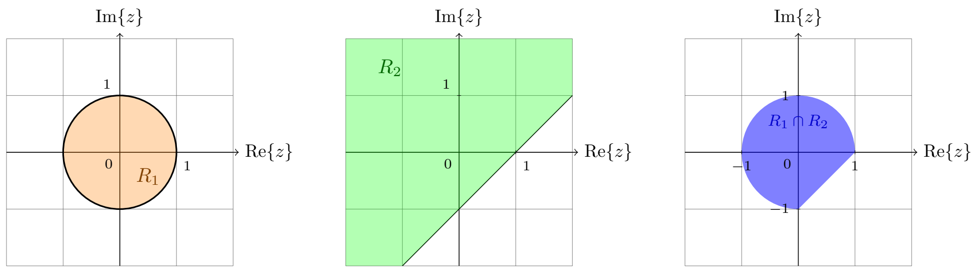
Respuestas:

a. $z = \dfrac{w+j2}{w-2}$

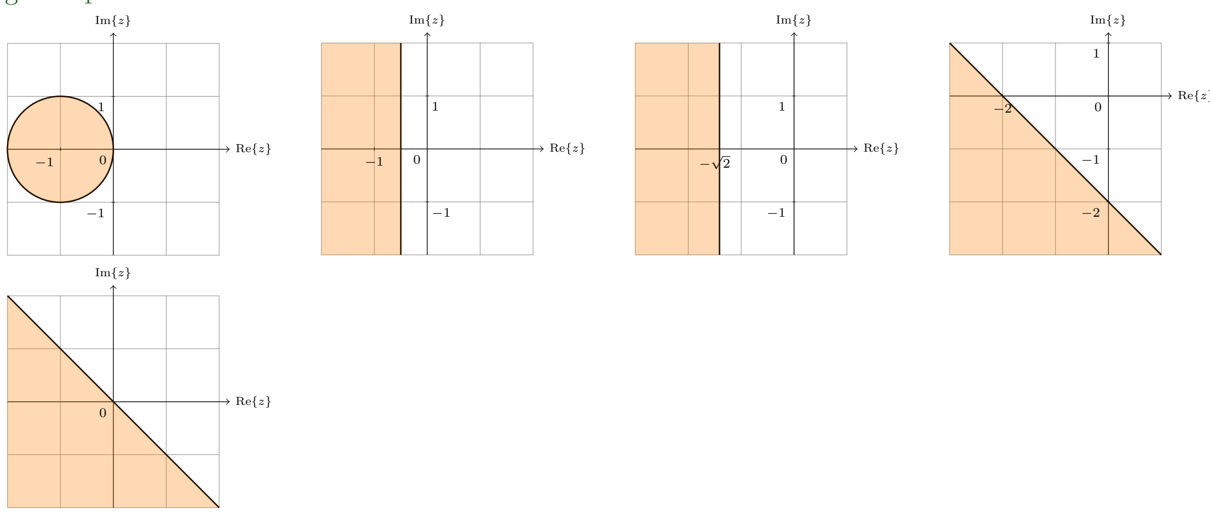
b. $z_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + j8}}{2}$

c. 1. *Trasladar 1 hacia la izquierda.*
   2. *Inversión.*
   3. *Escalar $2\sqrt{2}$.*
   4. *Rotar 45^o antihorario.*
   5. *Trasladar 2.*

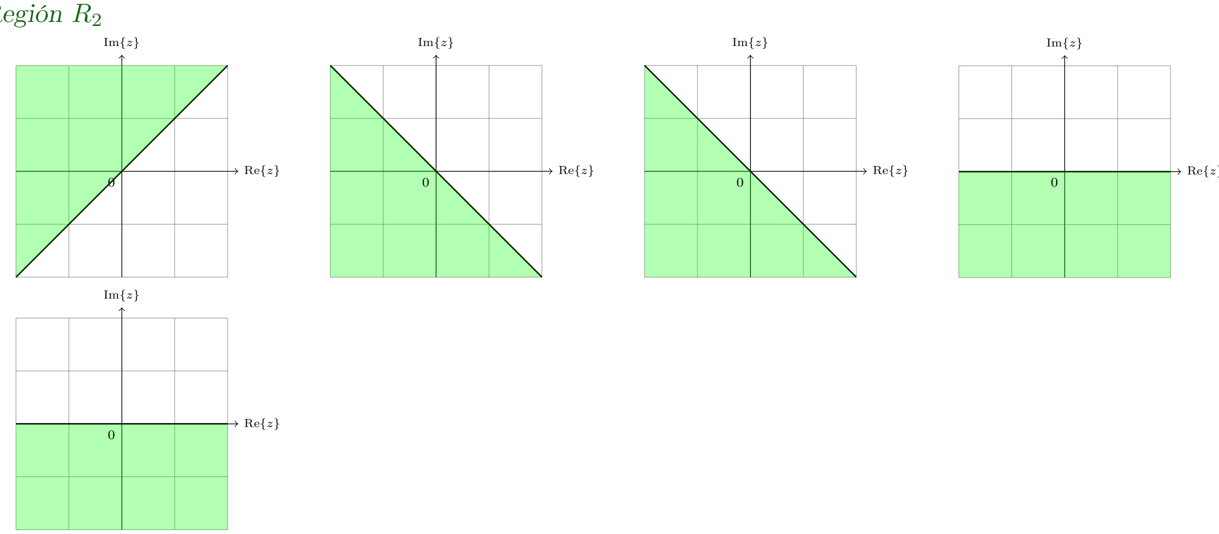
d. *Regiones: R_1, R_2 y $R_1 \cap R_2$*



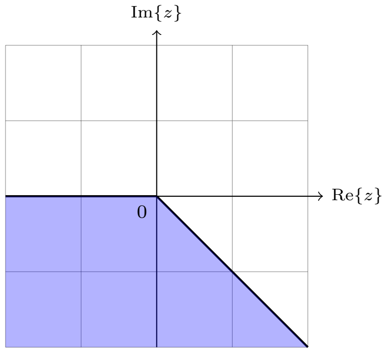
e. *Mapeos de las regiones: R_1 y R_2.*
Región R_1



Región R_2



f. Mapeo de la región $R_1 \cap R_2$.



Ejercicio 7. Se dice que una función periódica $f(t)$ con período T es *armónica impar* si, en su representación en serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{1}$$

$c_k = 0$ para cada k entero par diferente de cero.

a. Demuestre, utilizando la ecuación de síntesis, que si $f(t)$ es armónica impar, entonces se cumple que:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \tag{2}$$

b. Demuestre, utilizando la ecuación de análisis, que si $f(t)$ satisface la ecuación (2), entonces es armónica impar.

c. Suponga que $f(t)$ es una función periódica armónica impar con período 2 tal que

$$f(t) = t \qquad \text{para } \; 0 < t < 1$$

bosqueje $f(t)$ e indique como deberán comportarse los coeficientes c_k de $f(t)$ considerando su naturaleza real o compleja, su simetría o asimetría, y su forma (continuidad o discontinuidad de la función y sus derivadas).

d. Calcule el valor CD de $f(t)$.

e. Calcule los coeficientes c_k de $f(t)$ para $k \neq 0$.

f. De manera análoga a la señal armónica impar, podríamos definir una señal *armónica par* como aquella para la cual $c_k = 0$ para k impar en la ecuación (1). ¿Sería posible que T fuera el período fundamental para dicha señal? Justifique su respuesta.

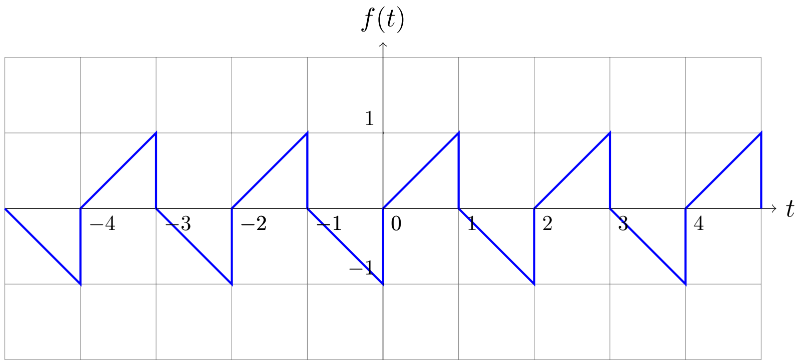
Respuestas:

a. Demostración.

b. Demostración.

c.
- $c_k = c_{-k}^*$.
- $c_k \in \mathbb{C}$.

- $c_k \approx \dfrac{1}{k}$.
- $c_k = 0$ *para* k *par.*



d. $c_0 = CD = 0$

e. $c_k = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ -j\dfrac{1}{\pi k} - \dfrac{2}{\pi^2 k^2} & k \text{ impar} \end{cases}$

f. *No es posible, ya que el periodo fundamental mínimo sería de* $T/2$.