Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL 4703 Señales y Sistemas

II Semestre 2019
Programa de Tutorías

Tutoría 5: Series complejas

Ejercicio 1. Sea la función:

$$f(z) = \frac{\cos(z+1)}{z(z+1)(z-1)(z^2-6z+25)}$$

Indique cuántos posibles desarrollos de Serie de Laurent centrados en $z_0 = 3$ existen para $f(z)$ y las correspondientes regiones de convergencia.

Respuesta:
Existen cuatro posibles desarrollos de Laurent asociados a las siguientes regiones de convergencia:

$$\begin{aligned} &ROC_1 : |z-3| < 2 \\ &ROC_2 : 2 < |z-3| < 3 \\ &ROC_3 : 3 < |z-3| < 4 \\ &ROC_4 : 4 < |z-3| \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Encuentre el desarrollo en serie de Taylor para la siguiente función:

$$\frac{1}{z(z-4j)}$$

Centrado en el punto $z_0 = 2j$.

Respuesta:

$$f(z) = \sum_{\substack{n=0 \\ n\ par}}^{\infty} \left[\frac{-1}{(2j)^{n+2}} \right] (z-2j)^n$$

Ejercicio 3. Encuentre la serie de Laurent para:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

Alrededor de $z_0 = 0$ y $z_0 = 1$, de forma que estos puntos sean puntos límites de la regiones de convergencia (ROC). Defina dicha región para cada caso.

Respuesta:

Para $z_0 = 0$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) z^n$$

Para $z_0 = 1$:

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

Ejercicio 4. Encuentre la serie de Laurent para:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$$

Centrada alrededor de $z_0 = -1$ para una región de convergencia anular.

Respuesta:

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z+1)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z+1)^{-n}$$
$$ROC: 1 < |z+1| < 2$$

Ejercicio 5. Determine la expansión en serie de Laurent de la función $f(z) = z^2\sin(\frac{1}{z})$ alrededor de $z_0 = 0$.

Respuesta:

$$f(z) = \sum_{\substack{n=-1 \\ n\ impar}}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+2)!}\right)z^{-n}$$
$$ROC: 0 < |z| < \infty$$

Ejercicio 6. La columna izquierda contiene cuatro expansiones en serie de Laurent para la función $f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$. En la columna de la derecha se muestran las regiones de convergencia para los desarrollos de las series propuestas. Asocie cada una de las expansiones con su región de convergencia correspondiente.
Respuestas:

a.	$f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{3}{4}z^2 + \frac{7}{8}z^3 + \frac{15}{16}z^4 + \cdots$	c	$\|z-1\| > 2$
b.	$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \cdots$	-	$\|z-2\| > 2$
c.	$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} + \cdots$	a	$\|z\| < 1$
d.	$f(z) = \frac{2}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3 - \cdots$	d	$0 < \|z-2\| < 1$
		-	$\|z-1\| < 1$
		b	$1 < \|z\| < 2$

Ejercicio 7. Se sabe que una función $f(z)$ se puede expandir en una serie de potencias centrada en $z_0 = 1$ de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$$

Para todo z dentro de la región de convergencia $|z-1| < \frac{1}{2}$.
Indique cuál región de convergencia tiene la siguiente serie:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left(\frac{z+1}{2(z-1)}\right)^n$$

Si los coeficientes a_n son los mismos en ambas series.

Respuesta:

$$ROC : \mathrm{Re}\{z\} < 0$$