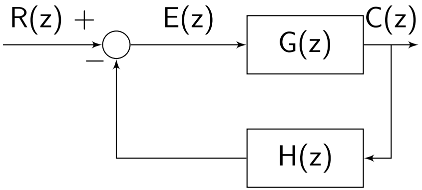
Sistemas en tiempo discreto
Parte 1

Control Automático (EL-5408)

Escuela de de Ingeniería Electrónica

Contenidos



Considere la siguiente ecuación, la cual describe el sistema realimentado:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \tag{1}$$

Así como su ecuación característica:

$$P(z) = 1 + G(z)H(z) = 0 \tag{2}$$

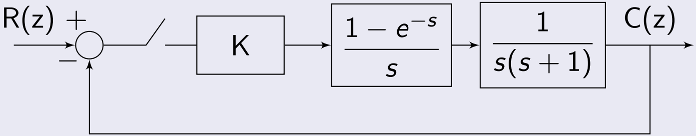
La estabilidad de un sistema como el anterior, se puede determinar por la localización de los polos, por las raíces de las ecuaciones (1) y (2). Condiciones:

- Los polos de (1) o las raíces de (2) deben estar en el círculo unitario en el plano z.
- Un polo en $z=1$ o si un par de polos conjugados se presentan sobre el círculo unitario, se determina al sistema como críticamente estable.
- Los ceros en lazo cerrado no afectan la estabilidad absoluta.

Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto

Análisis de estabilidad en sistemas de lazo cerrado (III)

Ejemplo 1 [Ejercicio 4.2, [2]]



Determine la estabilidad del sistema de la figura cuando K=1, sabiendo que:

$$Z\left\{G(s)\right\} = Z\left\{\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)\right\} = \frac{0.3679z+0.2642}{(z-0.3679)(z-1)} \quad (3)$$

Solución:

$$P(z) = 1 + G(z) = 0, \tag{4}$$

$$P(z) = 1 + \frac{(0.3679z + 0.2642)}{(z - 0.3679)(z - 1)}, \tag{5}$$

$$z^2 - 1.3679z + 0.3679 + 0.3679z + 0.2642 = 0, \tag{6}$$

$$z^2 - z + 0.6321 = 0 \tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
z_1 = 0.5 + 0.6181i \\
\text{y} \\
z_2 = 0.5 - 0.6181i,
\end{gathered}
$$

$$
\mid z_1 \mid = \mid z_2 \mid < 1, \tag{8}
$$

El sistema es estable. ■

Existen 3 pruebas a las que se puede someter a la ecuación característica para determinar la estabilidad de un sistema:

- Método de Jury
- Transformación bilineal y criterio de Routh
- Método de Schur-Cohn

Métodos para probar la estabilidad absoluta

Método de Jury (I)

Se define la ecuación característica:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n \tag{9}$$

$$\Rightarrow a_0 > 0$$

Tabla 1: Tabla para evaluar el criterio de Jury

Renglón	z^0	z^1	z^2	...	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_1	b_0	—
4	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-2}	b_{n-1}	—
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...	c_0	—	—
6	c_0	c_1	c_2	...	c_{n-2}	—	—
...	...	...	...	...	...	...	...
2n-5	p_3	p_2	p_1	...	—	—	—
2n-4	p_0	p_1	p_2	...	—	—	—
2n-3	q_2	q_1	q_0	...	—	—	—

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Criterio de estabilidad de Jury

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{13}$$

$\Rightarrow a_0 > 0$

Es estable sí:

- $\mid a_n \mid < a_0$
- $P\left(z\right) \mid_{z=1} > 0$
- $P(z) \mid_{z=-1} \begin{cases} > 0, & \text{para n par} \\ < 0, & \text{para n impar} \end{cases}$
- $\mid b_{n-1} \mid > \mid b_0 \mid, \mid c_{n-2} \mid > \mid c_0 \mid, \ldots, \mid q_2 \mid > \mid q_0 \mid$

Ejemplo 2: (Problema 4-4, [2])

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0 \quad (14)$$

Determine la estabilidad del sistema descrito por (a) utilizando el método de Jury

Solución:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1.2 \quad a_2 = 0.07 \quad a_3 = 0.3 \quad a_4 = 0.08 \quad (15)$$

1. $|-0.08| < 1$
2. $P(1) = (1)^4 - 1.2(1)^3 + 0.07(1)^2 + 0.3(1) - 0.08 \rightarrow P(1) = 0.09$

$$P(1) > 0$$

3. n es par, por lo que P(-1) debe ser mayor a 0:

$$P(-1) = (-1)^4 - 1.2(-1)^3 + 0.07(-1)^2 + 0.3(-1) - 0.08 \rightarrow P(-1) = 1.89$$

$$\therefore P(-1) > 0$$

4. Para este caso se deben calcular:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.08 & 0.3 \\ 1 & -1.2 \end{vmatrix} = -0.204 \tag{16}$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.08 & 0.07 \\ 1 & 0.07 \end{vmatrix} = -0.0756 \tag{17}$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_4 & a_1 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.08 & -1.2 \\ 1 & 0.3 \end{vmatrix} = 1.176 \tag{18}$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.08 & 1 \\ 1 & -0.08 \end{vmatrix} = -0.9936 \tag{19}$$

Así como:

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_3 & b_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.9936 & 1.176 \\ -0.204 & -0.0756 \end{vmatrix} = 0.3150 \tag{20}$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_0 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.9936 & -0.204 \\ -0.204 & -0.9936 \end{vmatrix} = 0.9456 \tag{21}$$

Ahora se analiza:

$$| b_3 | > | b_0 | \rightarrow | -0.9936 | > | -0.204 |$$
$$| c_2 | > | c_0 | \rightarrow | 0.9456 | > | 0.3150 |$$

$\therefore$ Estable ■

Ejemplo 3: (Problema 4-5, [2])

$$P(z) = z^3 - 1.1z^2 - 0.1z + 0.2 = 0 \tag{22}$$

Determine la estabilidad del sistema descrito por (b) utilizando el método de Jury

Solución:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1.1 \quad a_2 = -0.1 \quad a_3 = 0.2 \quad a_4 = 0.2 \tag{23}$$

1. $\mid 0.2 \mid < 1$
2. $P(1) = (1)^3 - 1.1(1)^2 - 0.1(1) + 0.2 \rightarrow P(1) = 0$

Ya que $P(1) = 0$, el sistema se define como críticamente estable, lo que no es deseable, y genera que se pueda detener el análisis en este punto.

3. n es impar, por lo que $P(-1)$ debe ser menor a 0:
$P(-1) = (-1)^3 - 1.1(-1)^2 - 0.1(-1) + 0.2 \rightarrow P(-1) = -1.8$
$\therefore P(-1) < 0$

4. Para este caso se deben calcular:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 & -0.1 \\ 1 & -1.1 \end{vmatrix} = -0.12 \tag{24}$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 & 1 \\ 1 & 0.2 \end{vmatrix} = -0.96 \tag{25}$$

Ahora se analiza:

$$\mid b_2 \mid > \mid b_0 \mid \rightarrow \mid -0.96 \mid > \mid -0.12 \mid$$

$\therefore$ Críticamente estable ■

$$z = \frac{w+1}{w-1} \tag{26}$$

o bien,

$$w = \frac{z+1}{z-1} \tag{27}$$

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{28}$$

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \ldots + b_n \tag{29}$$

El proceso consiste en una sustitución de variables en la ecuación característica (28), la cual se transforma a (29) y es analizada con el criterio de estabilidad de Routh.

Ejemplo 4: (Problema A-4-3, [2])

$$P(z) = z^3 - 1.3z^2 - 0.08z + 0.24 = 0 \tag{30}$$

Determine su alguna de las raíces de la ecuación característica se encuentra fuera del círculo unitario del plano z. Utilice la transformación bilineal y criterio de estabilidad de Routh.

Solución:

$$P(w) = \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 1.3\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0.08\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0.24 = 0 \tag{31}$$

$$\frac{(w+1)^3 - 1.3(w+1)^2(w-1) - 0.08(w+1)(w-1)^2 + 0.24(w-1)^3}{(w-1)^3} = 0 \tag{32}$$

$$\begin{gathered} w^3 + 3w^2 + 3w + 1 - 1.3w^3 - 1.3w^2 + 1.3w + 1.3 + \dots \\ -0.08w^3 + 0.08w^2 + 0.08 - 0.08 + 0.24w^3 - 0.72w^2 + 0.72w - 0.24 = 0 \end{gathered} \tag{33}$$

$$-0.14w^3 + 1.06w^2 + 5.1w + 1.98 = 0 \tag{34}$$

$$\frac{-0.14w^3 + 1.06w^2 + 5.1w + 1.98}{-0.14} = 0 \tag{35}$$

Se divide entre -0.14 para simplificar la aplicación del criterio de Routh:

$$w^3 - 7.5714w^2 - 36.4286w - 14.1429 = 0 \tag{36}$$

Arreglo de Routh:

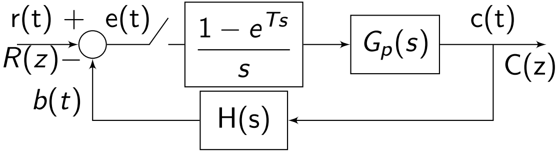
$$\begin{array}{lcc} w^3 & 1 & -36.43 \\ w^2 & -7.57 & -14.14 \\ w^1 & -38.30 & - \\ w^0 & -14.14 & \end{array}$$

Como se puede observar, hay un cambio de signo en las primeras filas, por lo que se determina como un sistema inestable.

Error de estado estacionario de sists. en tiempo discreto

Clasificación de los sistemas de control (I)

Se clasifican según su capacidad de seguir entradas escalón, rampa, parábola.



La función de transferencia a lazo abierto, se define como:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)...(T_m s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)...(T_p s + 1)} \qquad (37)$$

$\Rightarrow s^N$:
En (37), este término representa un polo de multiplicidad N. Este valor N es el tipo de sistema. Es importante resaltar que al aumentar el número de tipo, la precisión aumenta, pero se compromete la estabilidad.

El error de estado estacionario se define como el error después que se termina la respuesta transitoria del sistema. Se calcula por medio del teorema de valor final. Basándose en la figura anterior se obtiene:

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_p(s)H(s)}{s} \right\} \tag{38}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \tag{39}$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \tag{40}$$

Finalmente, el error de estado estacionario se calcula como:

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \right] \tag{41}$$

Como ya se mencionó, el tipo de entrada afecta el valor de error de estado estacionario y se procede al cálculo de las siguientes constantes:

- Constante de error de posición estática (Escalón unitario)

$$K_p = \lim_{z \to 1} GH(z) \tag{42}$$

Con un error de estado estacionario:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \tag{43}$$

- Constante de error de velocidad estática (Rampa unitaria)

$$K_v = \lim_{z \to 1} \frac{(1 - z^{-1})GH(z)}{T} \tag{44}$$

Con un error de estado estacionario:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \tag{45}$$

Un polo doble en z=1, indica una constante $K_v = \infty$.

- Constante de error de aceleración estática (Aceleración unitaria)

$$K_a = \lim_{z \to 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 GH(z)}{T^2} \tag{46}$$

Con un error de estado estacionario:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \tag{47}$$

Lo anterior se puede representar de la siguiente manera:

Tabla 2: Errores en estado permanente según el tipo de entrada

Sistema	Entrada escalón	Entrada rampa	Entrada de aceleración
Tipo 0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Ejemplo 5: (Ejercicio 16.4 [1])

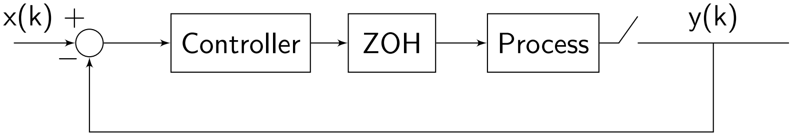
Un algoritmo de control se usa en un sistema digital, el cual se muestra en la figura, y el cual se caracteriza la ecuación diferencial:

$$u(k) = u(k-1) + K_p e(k) - 0.9512 K_p e(k-1). \tag{48}$$

Además se da un tiempo de muestreo de $0.1s$, y la función de transferencia:

$$T_p(s) = \frac{0.25}{s+1} \tag{49}$$

Derive una expresión para el error de estado estacionario del sistema en respuesta a una entrada de rampa unitaria. Además, encuentre el valor del error de estado estacionario para el valor dado para la ganancia del controlador.



Busque la solución sabiendo que:

$$T_c(z) = K_p \frac{z - 0.9512}{z - 1} \tag{50}$$

$$T_p(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{0.25}{s(s+1)} \right] = \frac{0.0238}{z - 0.905} \tag{51}$$

$$T_{OL}(z) = T_c(z) T_p(z) = \frac{0.0238 K_p (z - 0.9512)}{(z - 1)(z - 0.905)} \tag{52}$$

Solución:

$$T_E = \frac{1}{1 + T_{OL}} = \frac{1}{1 + \dfrac{0.0238K_p(z - 0.9512)}{(z-1)(z-0.905)}} \tag{53}$$

$$T_E = \frac{1}{\dfrac{(z-1)(z-0.905) + 0.0238K_p(z-0.905))}{(z-1)(z-0.905)}} \tag{54}$$

$$T_E = \frac{(z-1)(z-0.905)}{z^2 - z - 0.905z + 0.905 + 0.0238K_pz - 0.02264K_p} \tag{55}$$

$$T_E = \frac{(z-1)(z-0.905)}{z^2 + (0.0238K_p - 1.905)z + (0.905 - 0.2264K_p)} \tag{56}$$

De T_E tenemos que la ecuación característica es:

$$EC : z^2 + (0.0238K_p - 1.905)z + (0.905 - 0.2264K_p) = 0 \qquad (57)$$

Por medio de la transformación bilineal, se llega a la ecuación en términos de w:

$$\begin{aligned}(1 + 0.0238K_p - 1.905 + 0.905 - 0.02264K_p)w^2 + \ldots \\ (2 - 1.81 + 0.04528K_p)w + \ldots \\ +(1 - 0.0238K_p + 1.905 + 0.905 - 0.02264K_p) = 0\end{aligned} \qquad (58)$$

$$0.00116K_p w^2 + (0.19 + 0.04528K_p)w + (3.81 - 0.04644K_p) = 0 \qquad (59)$$

Lo anterior, permite determinar el rango de K_p para asegurar la estabilidad del sistema en $-4.19 < K_p < 82.04$. Al conocer el valor máximo de K_p, se procede a calcular e_{ss}:

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1} \frac{T}{(1 - z^{-1}) T_{OL}(z)} \tag{60}$$

Sustituyendo los valores dados en (52) y el valor de T, para un valor máximo de $K_{p_{max}} = 82.04$ se obtiene:

$$e_{ss} = 0.1. \tag{61}$$

■

Bibliografía

B.T. Kulakowski, J.F. Gardner, and J.L. Shearer.
Dynamic modeling and control of engineering systems.
Cambridge University Press, EE.UU., 2007.

K. Ogata.
Sistemas de control en tiempo discreto.
Pearson educación, EE.UU., 1996.