Implementación de reguladores analógicos

Control Automático

Escuela de Electrónica

II Semestre 2020

Ing. Luis Miguel Esquivel Sancho

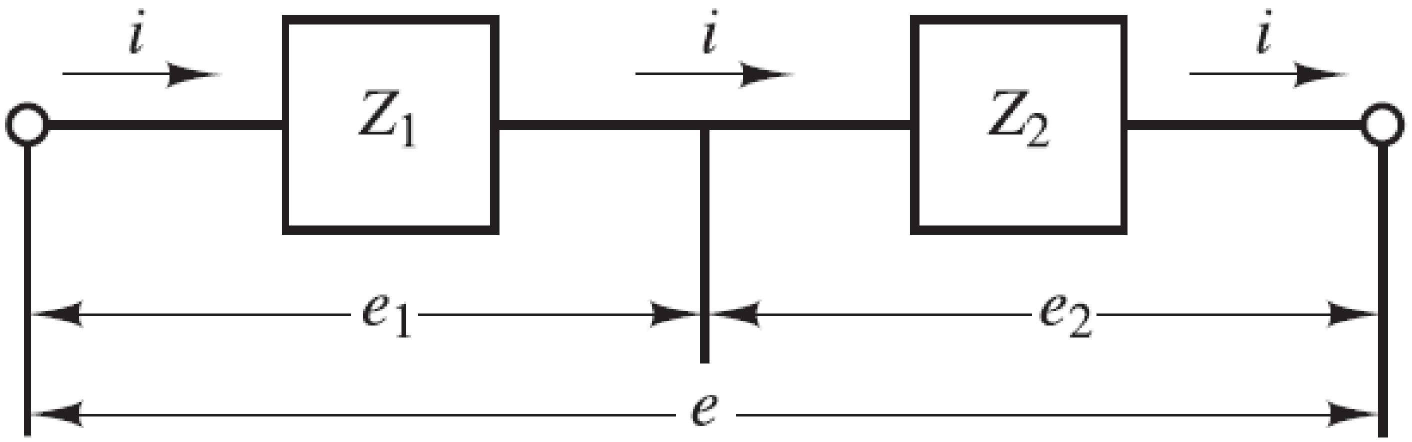
Contenido

- Impedancias complejas
- Función de transferencia de elementos en cascada
- Controladores electrónicos
  - Amplificadores operacionales (Función de transferencia)
  - Reguladores proporcionales
  - Regulador de Adelanto y Atraso
  - Reguladores PI
  - Reguladores PD
  - Reguladores PID

Impedancias complejas

Considérese el sistema que aparece en la Figura. En este sistema, Z_1 y Z_2 representan impedancias complejas. La impedancia compleja $Z(s)$ de un circuito de dos terminales es el cociente entre $E(s)$, la transformada de Laplace del voltaje a través de las terminales, e $I(s)$, la transformada de Laplace de la corriente a través del elemento.

Por tanto $Z(s) = E(s)/I(s)$

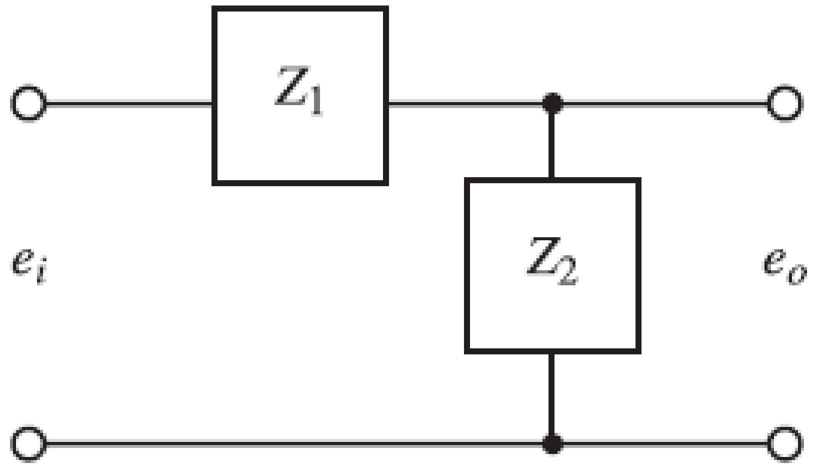


Impedancias complejas

Si los elementos de dos terminales son una resistencia R, una capacitancia C o una inductancia L, la impedancia compleja se obtiene mediante R, $1/Cs$ o Ls, respectivamente. Si se conectan impedancias complejas en serie, la impedancia total es la suma de las impedancias complejas individuales.

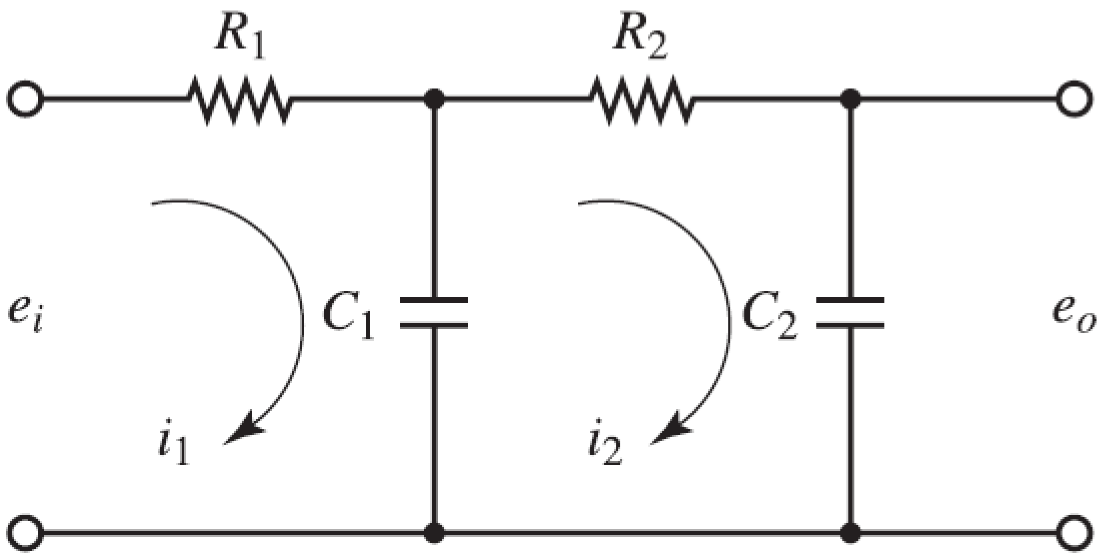
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \qquad Z_1 = Ls + R, \qquad Z_2 = \frac{1}{Cs}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



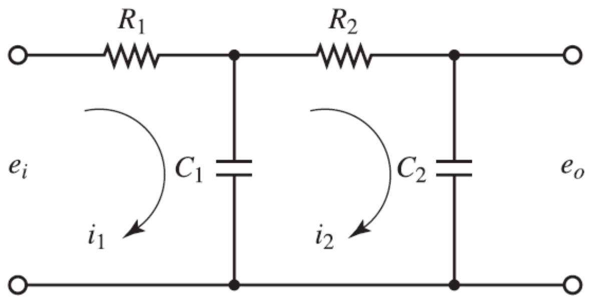
Ejemplo 5.1.

Para el circuito de la figura obténgase la función de transferencia $Eo(s)/Ei(s)$ utilizando la aproximación de la impedancia compleja. (Los condensadores C_1 y C_2 no están cargados inicialmente.)



Ejemplo 5.1.

Solución:



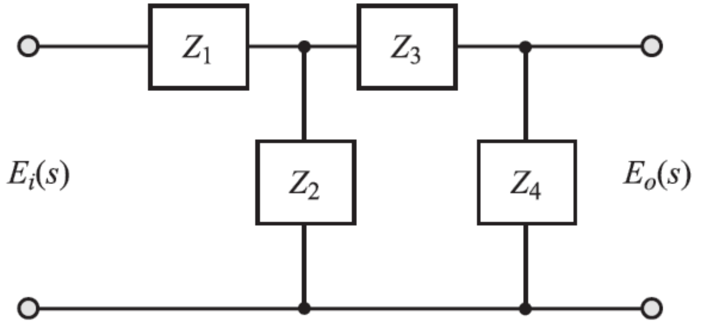
$$Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4) I_2, \qquad I_1 + I_2 = I$$

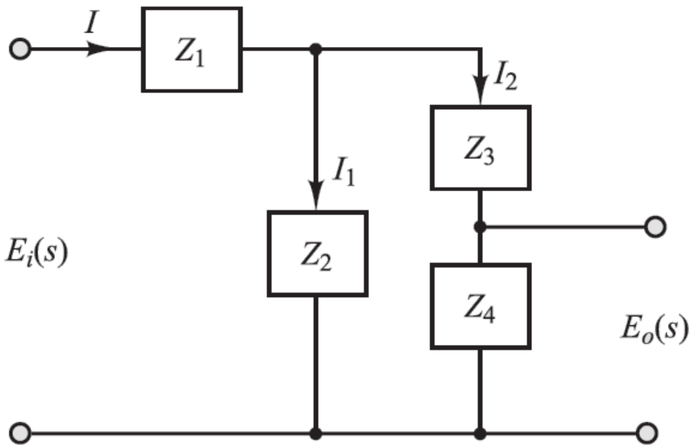
$$I_1 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I, \qquad I_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

$$E_i(s) = Z_1 I + Z_2 I_1 = \left[Z_1 + \frac{Z_2 (Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right] I$$

$$E_o(s) = Z_4 I_2 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 (Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2 (Z_3 + Z_4)}$$



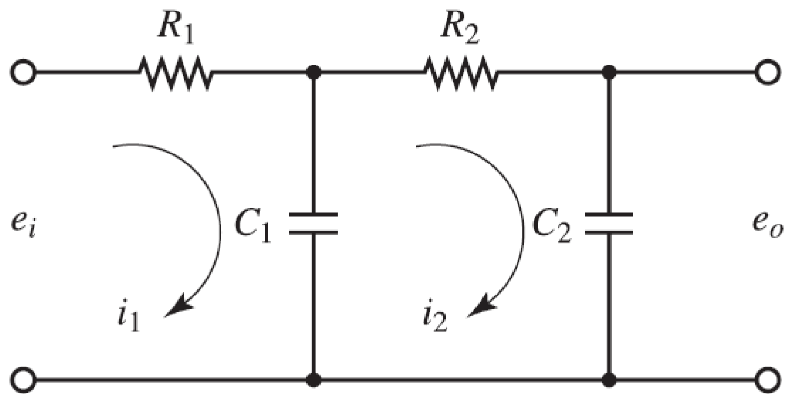


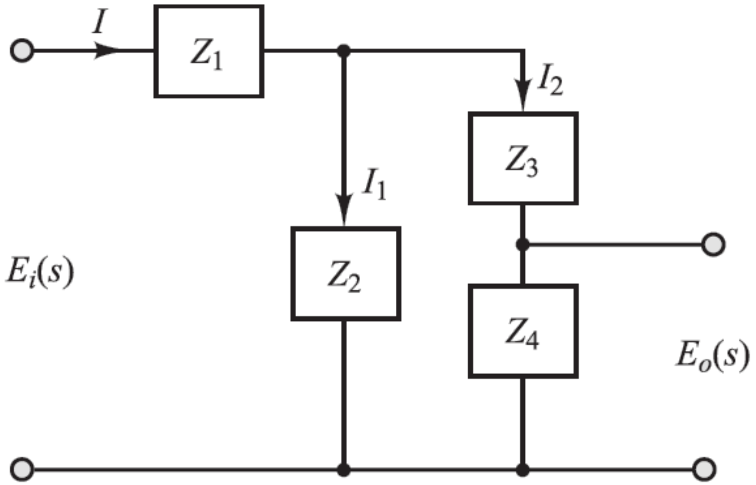
Solución:

$$Z_1 = R_1,\ Z_2 = 1/(C_1 s),\ Z_3 = R_2 \text{ y } Z_4 = 1/(C_2 s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{C_1 s}\,\dfrac{1}{C_2 s}}{R_1\left(\dfrac{1}{C_1 s} + R_2 + \dfrac{1}{C_2 s}\right) + \dfrac{1}{C_1 s}\left(R_2 + \dfrac{1}{C_2 s}\right)}$$

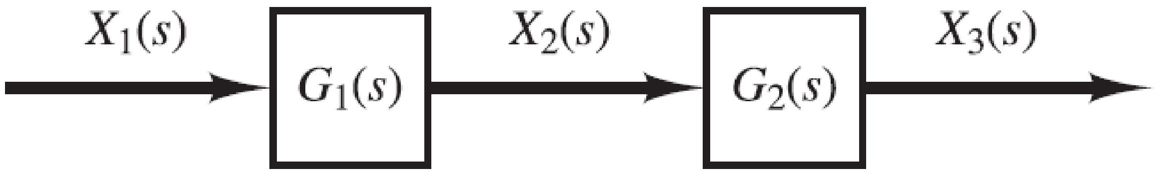
$$\boxed{= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}}$$





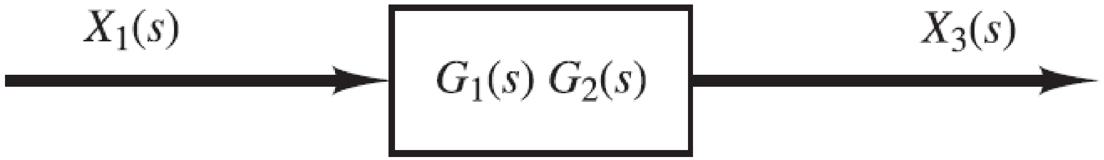
Función de transferencia de elementos en cascada

La función de transferencia de un sistema formado por elementos en cascada sin carga se obtiene eliminando la entrada y la salida intermedias



$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \quad \text{y} \quad G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)X_3(s)}{X_1(s)X_2(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

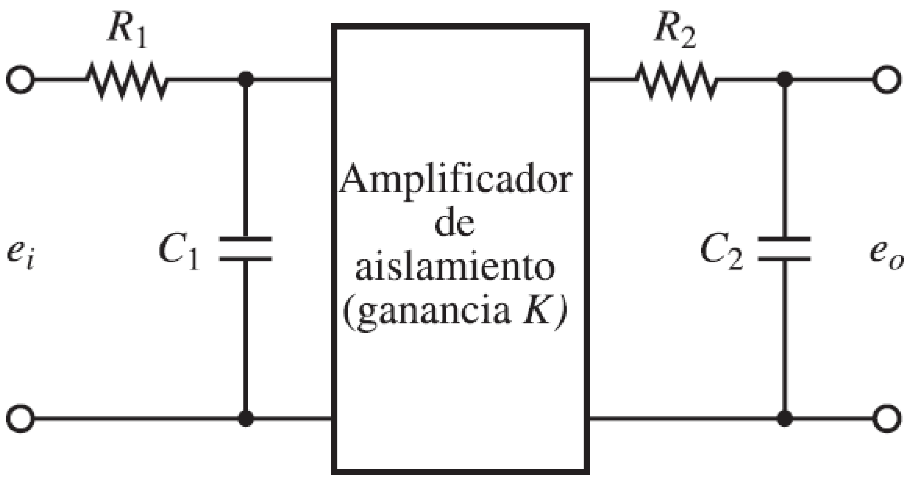


Función de transferencia de elementos en cascada

Considérese el sistema de la Figura. Como los amplificadores tienen impedancias de entrada muy altas, un amplificador de aislamiento insertado entre los dos circuitos justifica la suposición de que no hay carga.

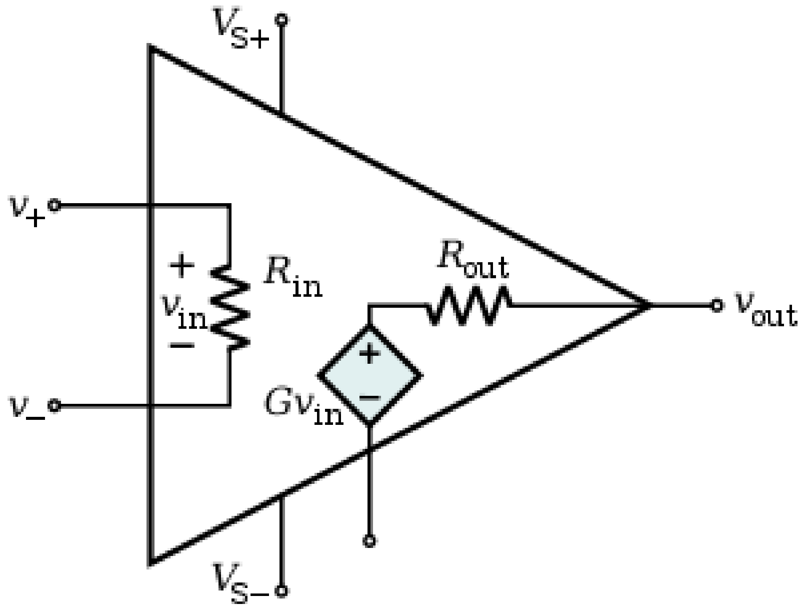
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(\frac{1}{R_1C_1s+1}\right)(K)\left(\frac{1}{R_2C_2s+1}\right)$$

$$= \frac{K}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}$$



Controladores electrónicos

Debido a la característica antes analizada el poder generar la función de transferencia de sistemas en cascada con amplificadores operacionales, es posible implementar sistemas de control a partir de ciertas configuraciones de estos.

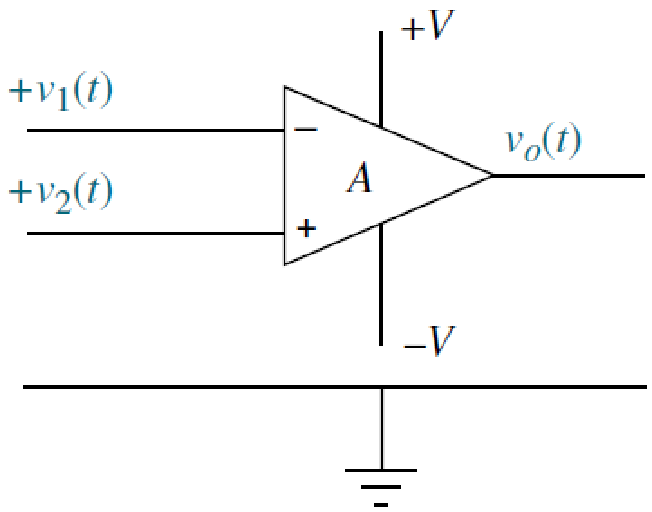


Amplificadores operacionales

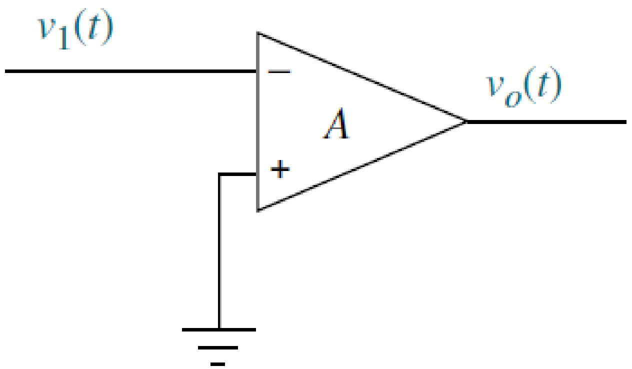
Un amplificador electrónico empleado como elemento básico de construcción para poner en practica funciones de transferencia.

Tienen las siguientes características:

1. Entrada diferencial: $v_2(t) - v_1(t)$
2. Alta impedancia de entrada, $Z_i = \infty$ (ideal)
3. Baja impedancia de salida, $Z_o = 0$ (ideal)
4. Alta ganancia constante de amplificación, $A = \infty$ (ideal)



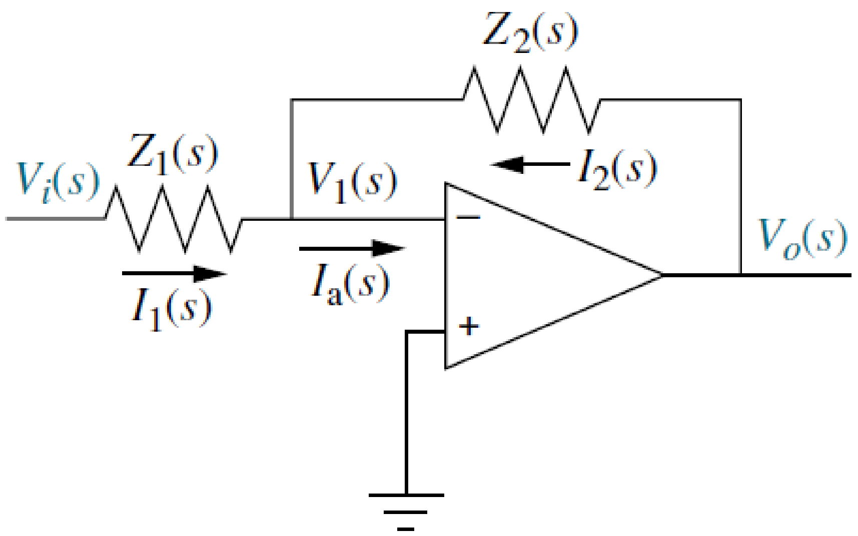
$$v_o(t) = A(v_2(t) - v_1(t))$$



$$v_o(t) = -Av_1(t)$$

Amplificador operacional inversor

Si dos impedancias se conectan al amplificador operacional inversor como se ve en la figura, se puede determinar lo siguiente:



$$I_1(s) = \frac{V_i(s) - V_1(s)}{Z_1(s)} \qquad I_2(s) = \frac{V_0(s) - V_1(s)}{Z_2(s)}$$

- Como tiene alta impedancia de entrada $(Z_i \to \infty)$ entonces $I_a(s) = 0$ y además $I_1(s) = -I_2(s)$
- Como la ganancia constante de amplificación A es alta entonces $v_1(t) \approx 0$.

$$\frac{V_i(s)}{Z_1(s)} = \frac{-V_o(s)}{Z_2(s)}$$

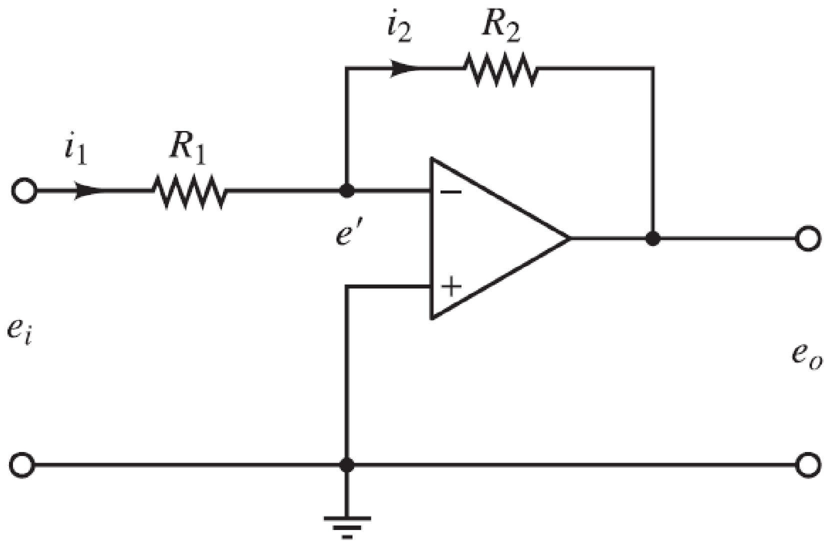
$$\boxed{\frac{\boldsymbol{V_o(s)}}{\boldsymbol{V_i(s)}} = -\frac{\boldsymbol{Z_2(s)}}{\boldsymbol{Z_1(s)}}}$$

Ejemplo 5.2: Reguladores Proporcionales

Solución:

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2}$$



Amplificador Proporcional Inversor

Como $K(0 - e') = e_o$ y $K \gg 1$, e' debe ser casi cero, o $e' \doteq 0$.

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2} \qquad e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$$

Donde: $\boxed{-\frac{R_2}{R_1} = K}$ ganancia proporcional

Ejemplo 5.3: Reguladores Proporcionales

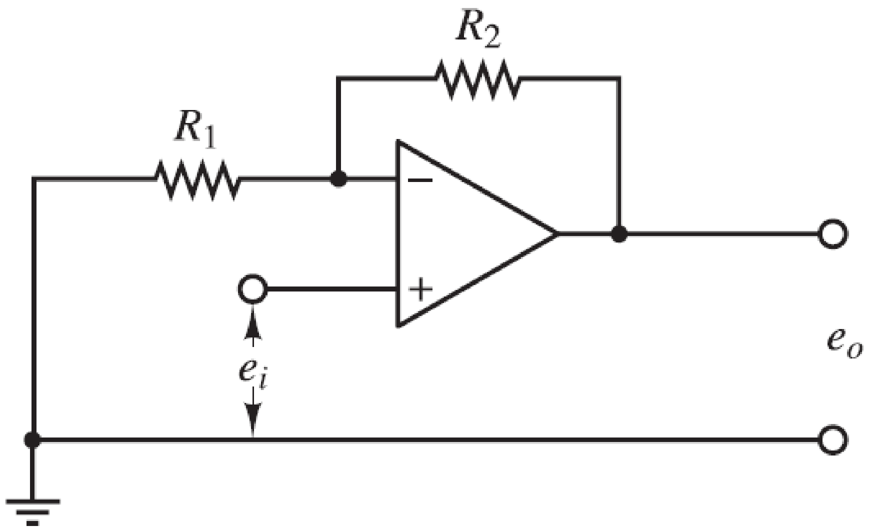
Solución:

$$e_o = K\left(e_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o\right)$$

$$e_i = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{K}\right) e_o$$

Como $K \gg 1$, si $R_1/(R_1 + R_2) \gg 1/K$, entonces

$$e_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e_i$$



Amplificador Proporcional No Inversor

Donde: $\boxed{\left(1 + \frac{R2}{R1}\right) = K}$ ganancia proporcional

Obtención de F.T. por impedancias para amp-op.

Obtener la FT del circuito de la figura:

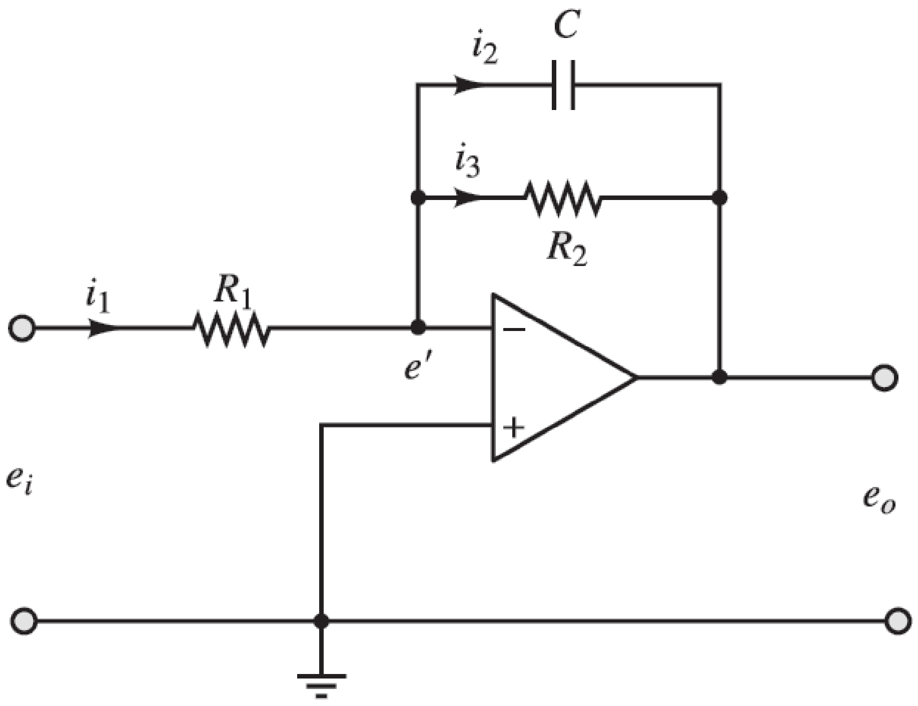
$$\frac{e_i - e'}{R_1} = C\frac{d(e' - e_o)}{dt} + \frac{e' - e_o}{R_2}$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\frac{e_i}{R_1} = -C\frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

$$\frac{E_i(s)}{R_1} = -\frac{R_2Cs + 1}{R_2}E_o(s)$$

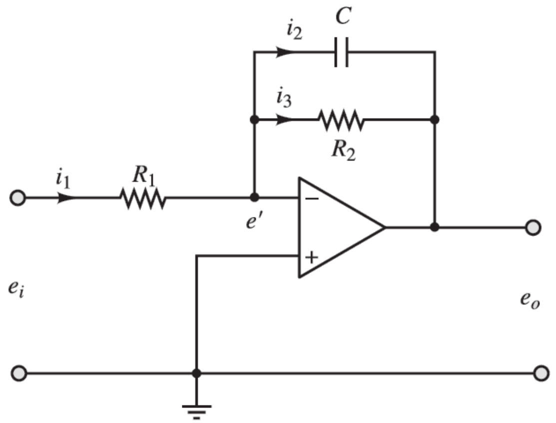
$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs + 1}}$$



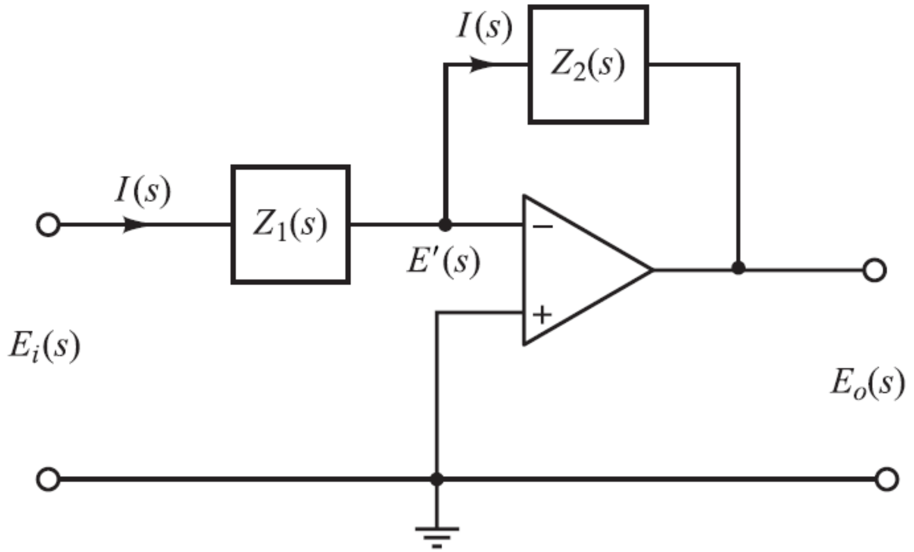
Obtención de F.T. por impedancias para amp-op.

Mismo Caso Aplicando impedancias

$$\frac{E_i(s) - E'(s)}{Z_1} = \frac{E'(s) - E_o(s)}{Z_2} \qquad \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



$$Z_1(s) = R_1 \quad \text{y} \quad Z_2(s) = \frac{1}{Cs + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_2Cs + 1}$$

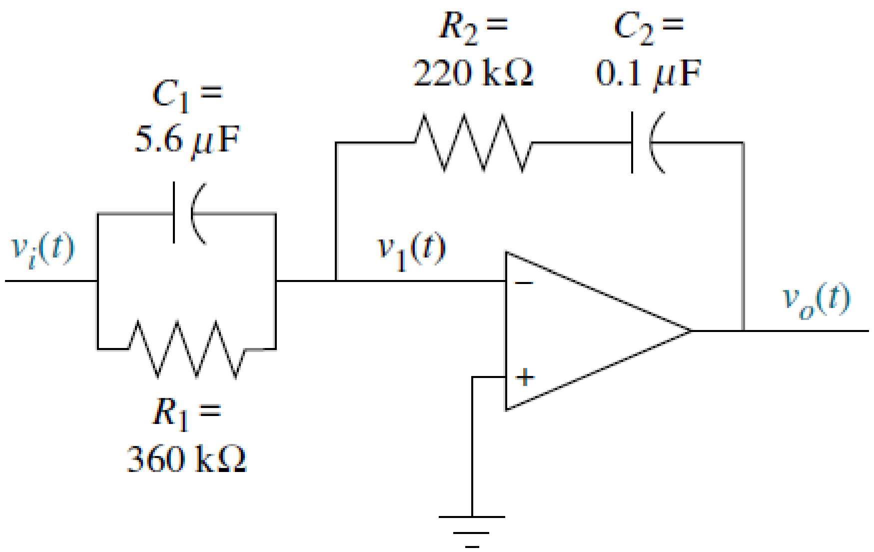


$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs + 1}}$$

Ejercicio 5.1: F.T. y circuito amplificador operacional inversor

Encuentre la función de transferencia de $\boldsymbol{V_o(s)/V_i(s)}$ para el circuito dado en la figura.

Solución:



Ejercicio 5.1: F.T. y circuito amplificador operacional inversor

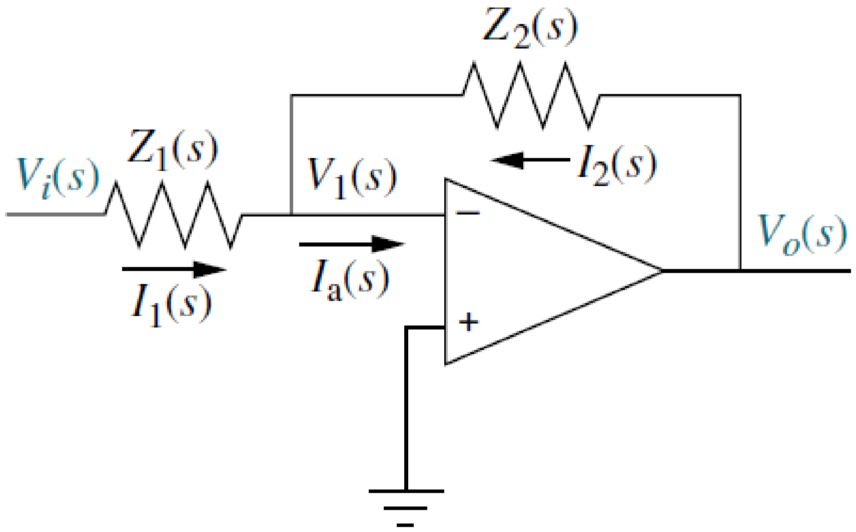
Solución:

Ejercicio 5.1: F.T. y circuito amplificador operacional inversor

Solución:

Construcción física de compensadores

Temas atrás deducimos las funciones de transferencia de compensadores empleados en cascada o en serie con la planta. Estos compensadores estuvieron definidos por su configuración de polo y cero; eran controladores activos ya sea PI, PD o PID, o compensadores pasivos de atraso de fase, de adelanto de fase o bien de adelanto-atraso de fase. Ahora veremos cómo poner en practica controladores activos y pasivos de forma analógica.



Función de transferencia de un amplificador operacional inversor:

$$\boxed{\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}}$$

Construcción de un circuito activo

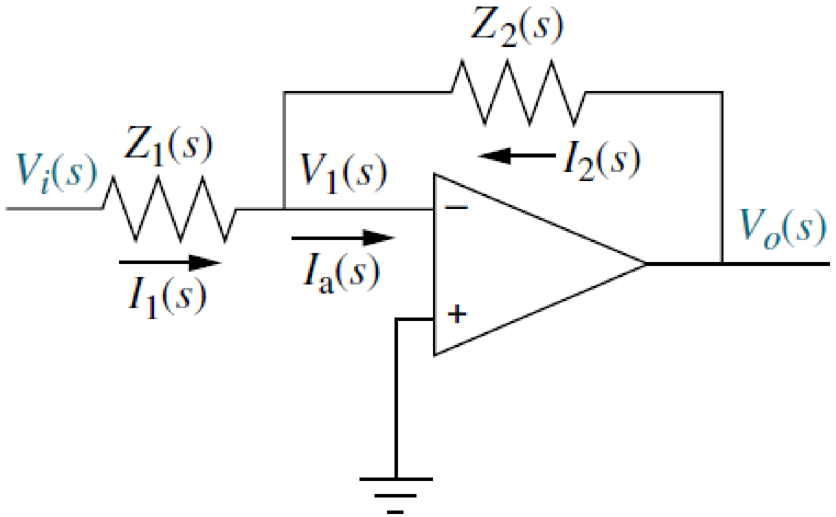


Tabla 1. Construcción activa de controladores y de compensación, usando un amplificador operacional

Function	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Gain	R_1	R_2	$-\frac{R_2}{R_1}$
Integration	R	C	$-\frac{\frac{1}{RC}}{s}$
Differentiation	C	R	$-RCs$

Construcción de un circuito activo

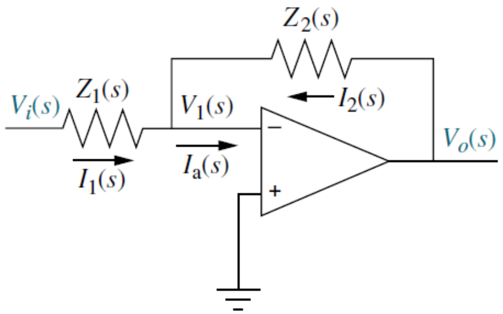
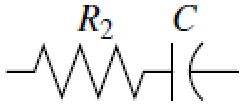
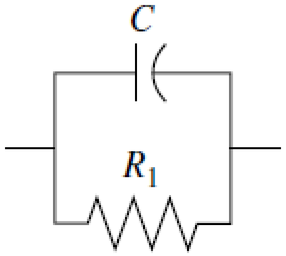
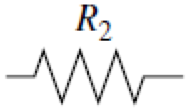
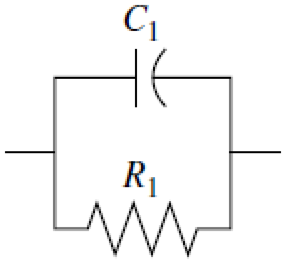
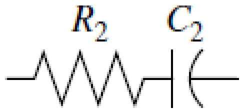


Tabla 1. Construcción activa de controladores y de compensación, usando un amplificador operacional

Function	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
PI controller			$-\frac{R_2}{R_1}\frac{\left(s+\frac{1}{R_2C}\right)}{s}$
PD controller			$-R_2C\left(s+\frac{1}{R_1C}\right)$
PID controller			$-\left[\left(\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2}\right)+R_2C_1s+\frac{\frac{1}{R_1C_2}}{s}\right]$

Construcción de un circuito activo

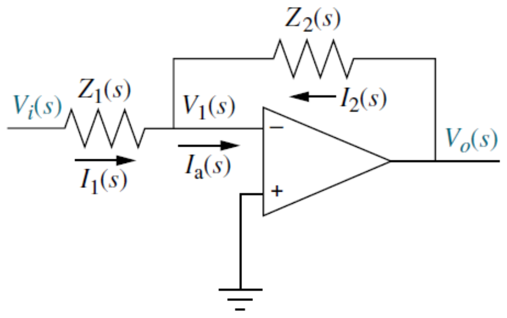
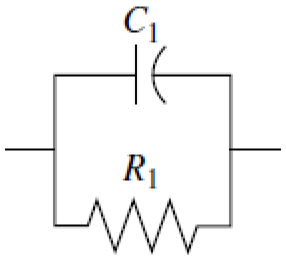
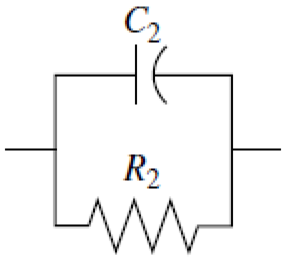
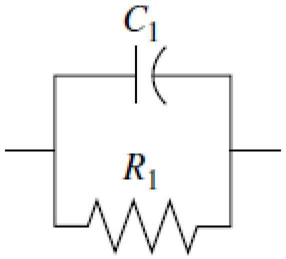
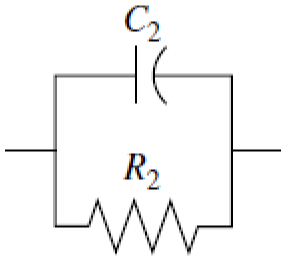
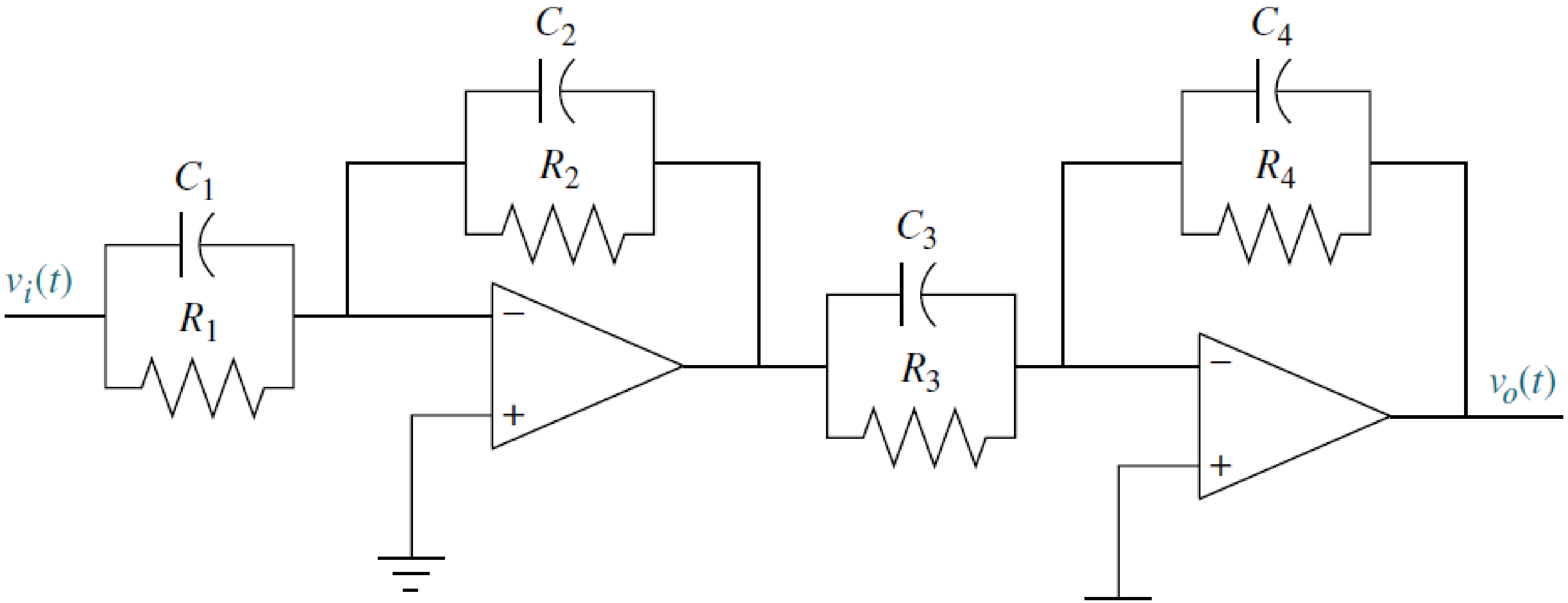


Tabla 1. Construcción activa de controladores y de compensación, usando un amplificador operacional

Function	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Compensación de atraso de fase			$-\frac{C_1}{C_2}\frac{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}$ where $R_2C_2 > R_1C_1$
Compensación de adelanto de fase			$-\frac{C_1}{C_2}\frac{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}$ where $R_1C_1 > R_2C_2$

Construcción de un circuito activo

Por ejemplo, un compensador de adelanto-atraso de fase se puede formar al poner en cascada el compensador de atraso de fase, con el compensador de adelanto de fase, como se ve en la figura.



Compensador de atraso

$R_2C_2 > R_1C_1$

Compensador de adelanto

$R_3C_3 > R_4C_4$

Ejercicio 5.2: Implementación de un controlador PID

Determine una implementación analógica de un controlador PID a partir de la función de transferencia del controlador a continuación:

$$G_c(s) = \frac{(s+55.92)(s+0.5)}{s}$$

Ejercicio 5.2: Implementación de un controlador PID

Solución:

$$G_c(s) = \frac{(s + 55.92)(s + 0.5)}{s}$$

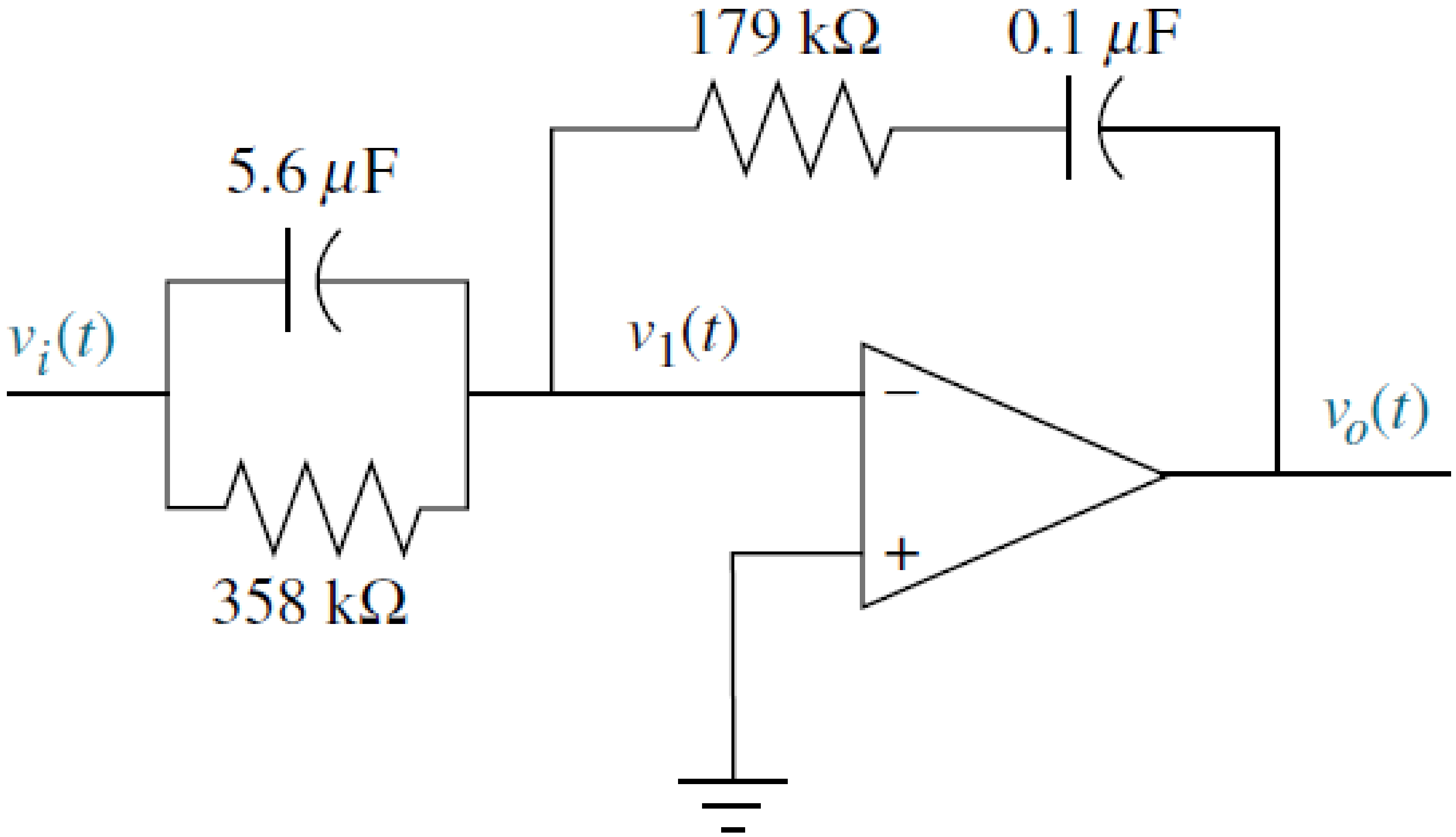
Ejercicio 5.2: Implementación de un controlador PID

Solución:

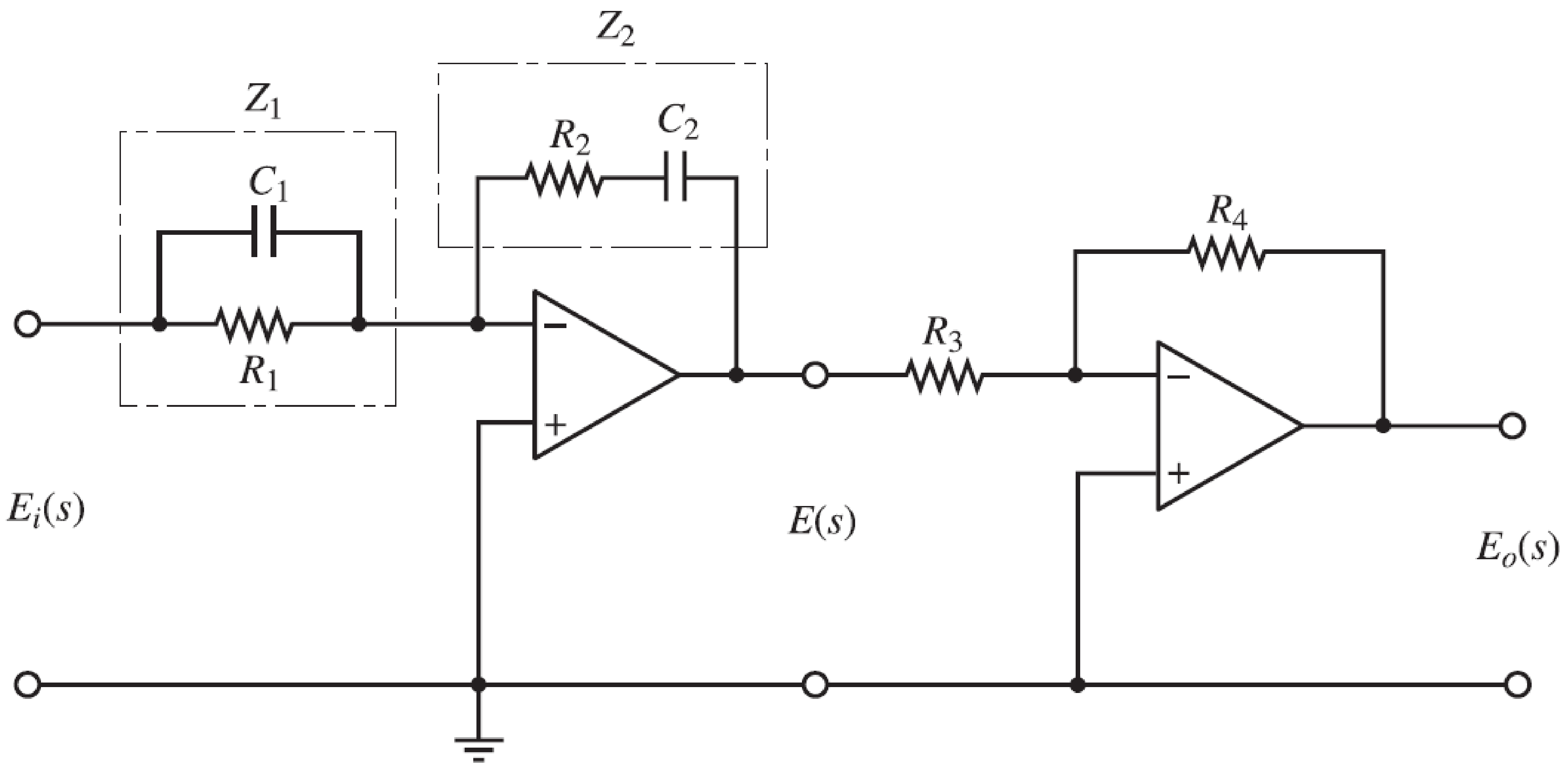
Ejercicio 5.2: Implementación de un controlador PID

Solución:

Solución:



Regulador PID

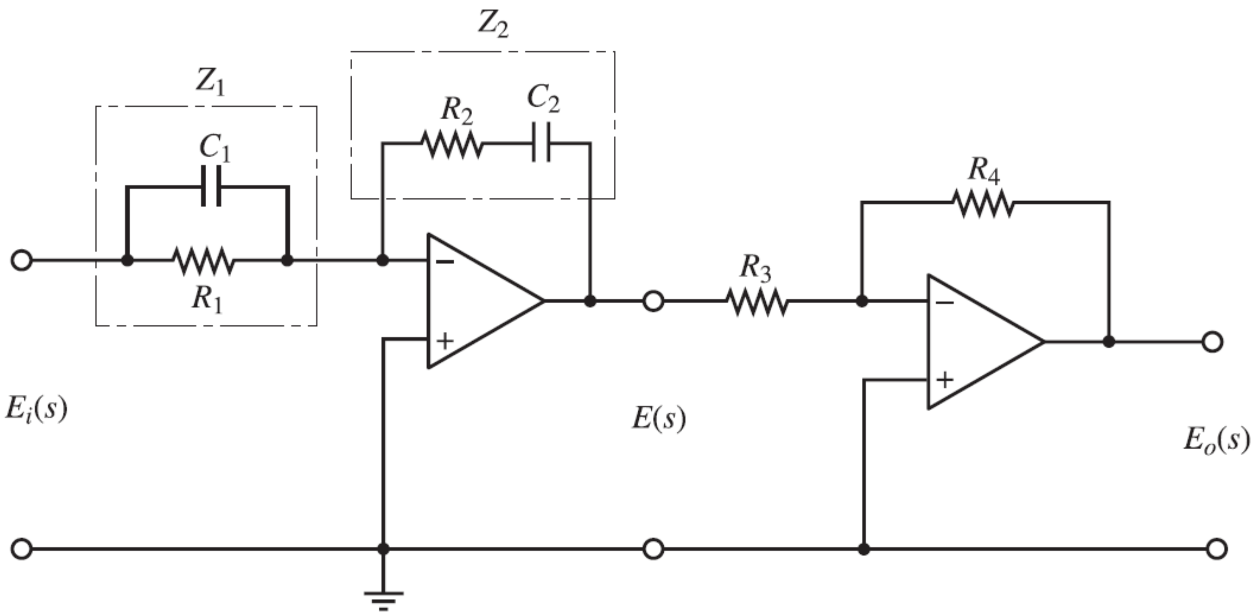


Regulador PID

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}, \qquad Z_2 = \frac{R_2C_2s + 1}{C_2s}$$

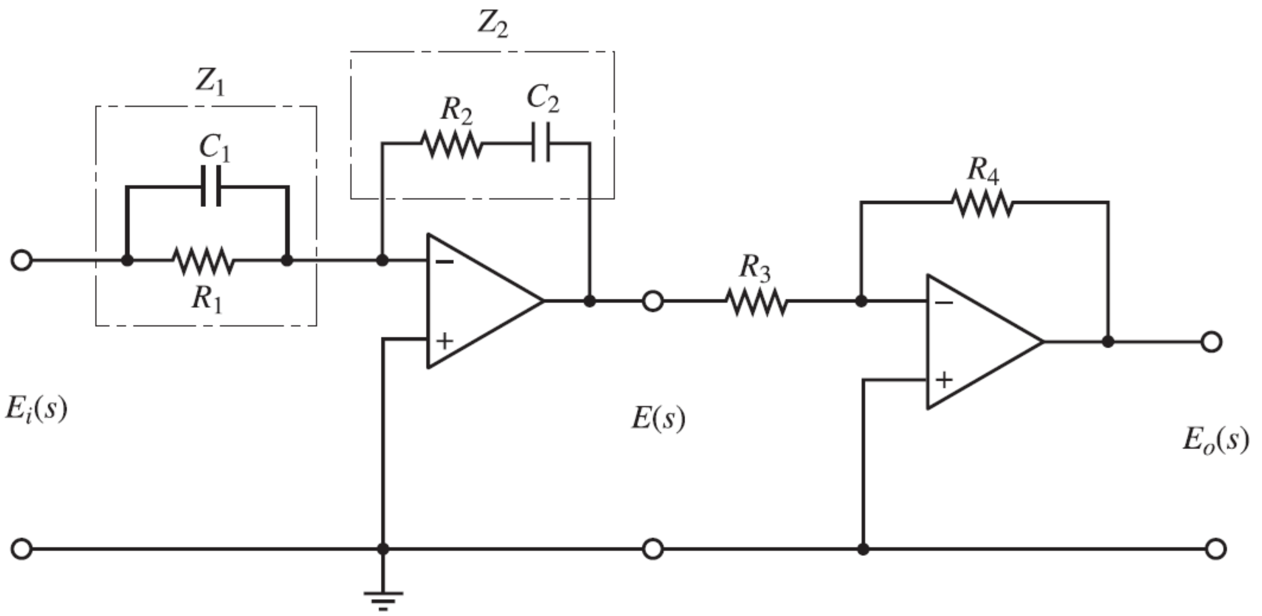
$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\left(\frac{R_2C_2s + 1}{C_2s}\right)\left(\frac{R_1C_1s + 1}{R_1}\right)$$



$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

Regulador PID

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)}\frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1}\frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$$

$$= \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1}\left(\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + R_1 C_1 s\right)$$

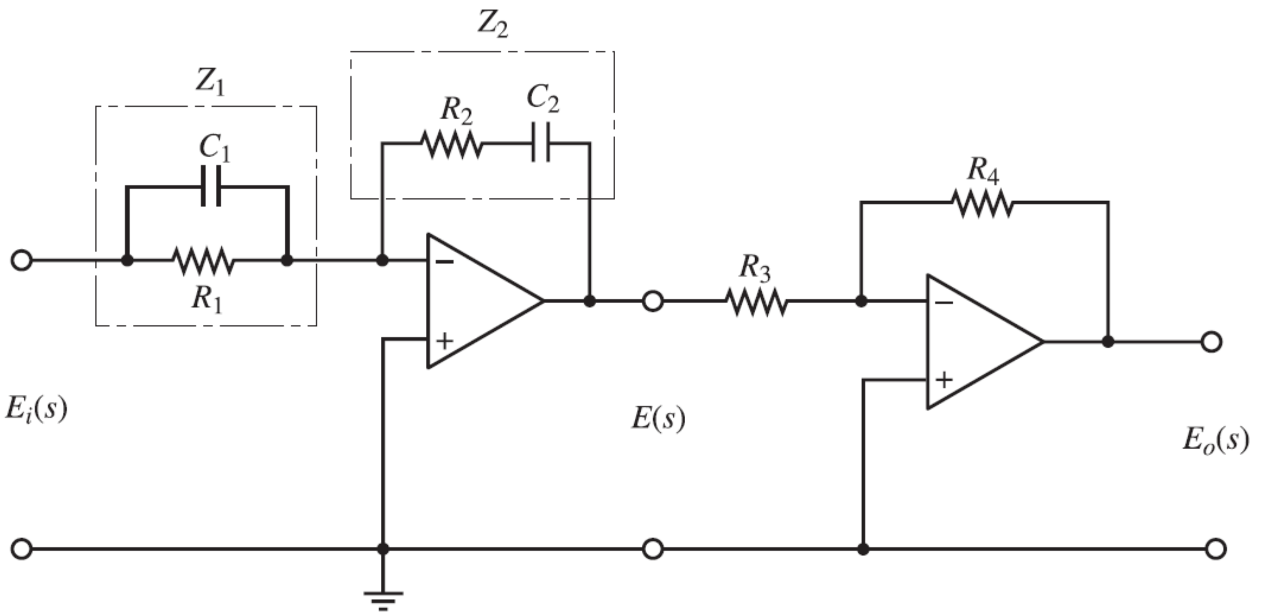
$$= \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2}\left[1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2)s} + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s\right]$$

Regulador PID

$$K_p = \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2}$$

$$T_i = \frac{1}{R_1C_1 + R_2C_2}$$

$$T_d = \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}$$



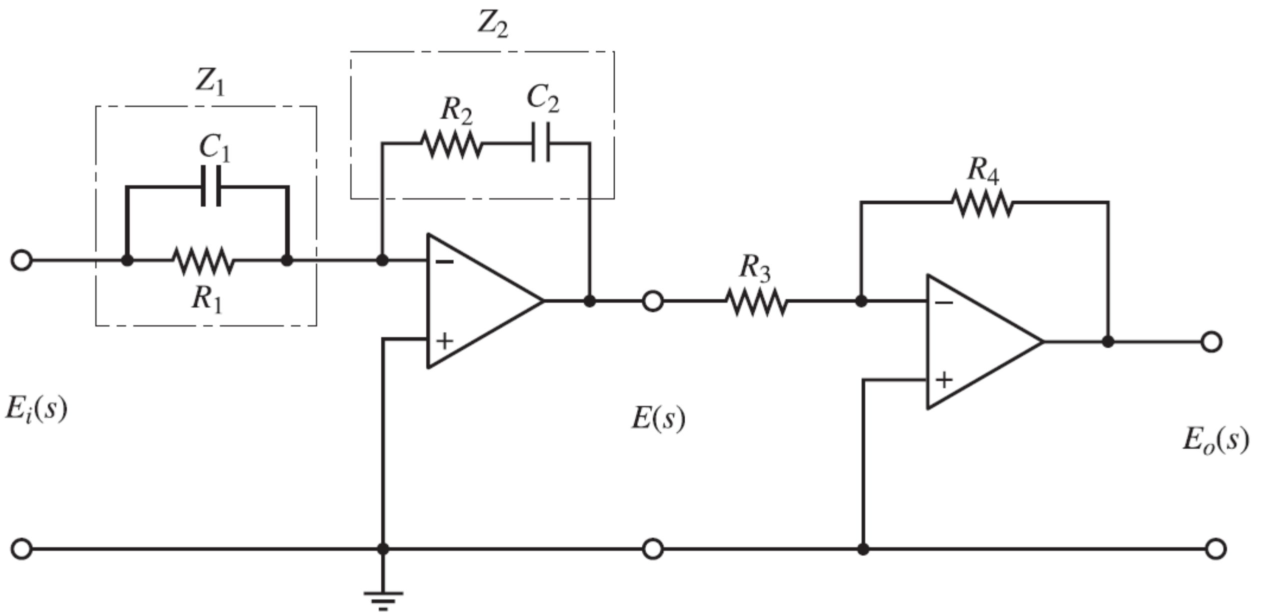
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p\left(1 + \frac{T_i}{s} + T_d s\right)$$

Regulador PID

$$K_p = \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2}$$

$$K_i = \frac{R_4}{R_3R_1C_2}$$

$$K_d = \frac{R_4R_2C_1}{R_3}$$



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Construcción de un circuito pasivo

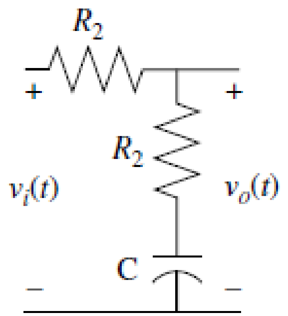
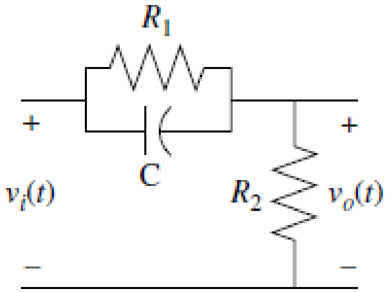
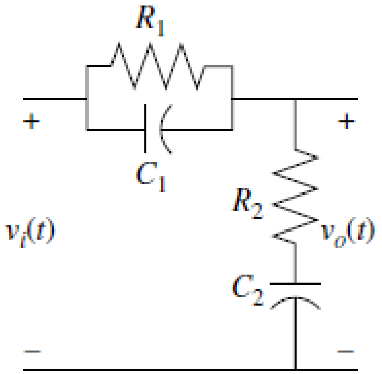
Los compensadores de atraso de fase, de adelanto de fase y de adelanto-atraso de fase se pueden implementar como redes pasivas. La siguiente Tabla 2, muestra un resumen de sus funciones de transferencia.

La función de transferencia de adelanto-atraso de fase se puede expresar como :

$$G_c(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right)\left(s + \frac{\alpha}{T_2}\right)}$$

Tabla 2.

Construcción pasiva de compensación

Function	Network	Transfer function, $\dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$
Compensación de atraso de fase		$$\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{s+\dfrac{1}{R_2C}}{s+\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}}$$
Compensación de adelanto de fase		$$\frac{s+\dfrac{1}{R_1C}}{s+\dfrac{1}{R_1C}+\dfrac{1}{R_2C}}$$
Compensación de adelanto-atraso de fase		$$\frac{\left(s+\dfrac{1}{R_1C_1}\right)\left(s+\dfrac{1}{R_2C_2}\right)}{s^2+\left(\dfrac{1}{R_1C_1}+\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{1}{R_2C_1}\right)s+\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

Referencias

- Ogata, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna, 5a. Ed. Prentice Hall, 2010, México.
- Nise, Norman. Control Systems Engineering, Sixth Edition.