Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Electrónica
EL 4703 Señales y Sistemas

II Semestre 2019
Programa de Tutorías

# Tutoría 10: Transformada de Fourier

**Ejercicio 1.** Determine la transformada de Fourier de

$$x(t) = [1 + \cos(\pi t)]\, u(t+1)u(-t+1)$$

utilizando la integral de definición. La función $u(t)$ corresponde al escalón unitario (función de Heaviside).

**Ejercicio 2.** Encuentre la señal $x(t)$ que tiene como transformada de Fourier a

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) - \pi\delta(\omega + 4\pi)$$

**Ejercicio 3.** Sea $x(t)$ una función que se puede expresar como la resta $x(t) = h(t) - h(-t)$, donde $h(t)$ es una función de valor real. Si la transformada de Fourier de $h(t)$ es $H(j\omega)$ y la de $x(t)$ es $X(j\omega)$, entonces utilice las propiedades de la transformada de Fourier para encontrar $X(j\omega)$ en términos de la parte imaginaria de $H(j\omega)$.

**Ejercicio 4.** Encuentre la transformada de Fourier de la función mostrada en la figura 1, utilizando linealidad y la propiedad de derivación. Exprese, en caso de ser posible, el resultado en términos puramente reales o puramente imaginarios.

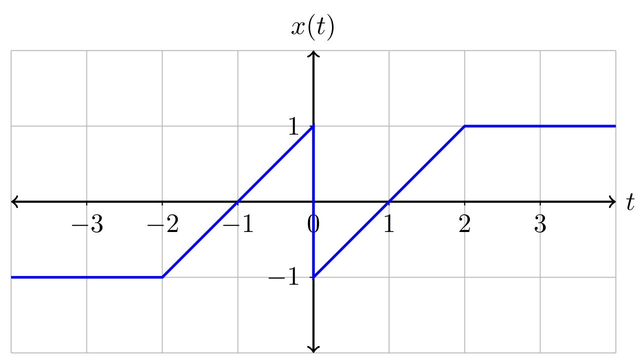


Figura 1: Función $x(t)$ a utilizar en ejercicio 4.

**Ejercicio 5.** Considerando que $u(t)$ es el escalón unitario, defínanse dos funciones

$$x_1(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$r(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Paso a paso se encontrará en este ejercicio la transformada de Fourier de una función $f(t)$ mostrada en la figura 2.

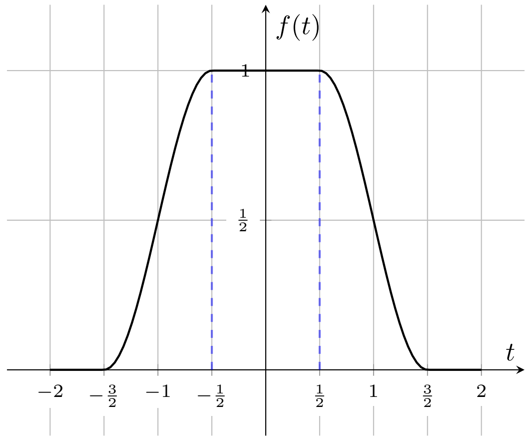


Figura 2: Función $f(t)$ del ejercicio 5.

a. Grafique las funciones $x_1(t)$ y $r(t)$.

b. Demuestre que la transformada de Fourier de $x_1(t)$ es

$$x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(j\omega) = \begin{cases} j2\omega \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\omega\right)}{\omega^2 - 1} & \omega \neq \pm 1 \\ -j\frac{\pi}{2} & \omega = 1 \\ j\frac{\pi}{2} & \omega = -1 \end{cases}$$

c. Demuestre que la transformada de Fourier de $r(t)$ es

$$r(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, R(j\omega) = \operatorname{sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

d. Defínase ahora la función:

$$x_2(t) = \begin{cases} f(t) & -\infty < t \leq -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Esta función $x_2(t)$ puede obtenerse también como una combinación de las funciones $x_1(t)$ y $r(t)$ especificadas en el enunciado, tal que:

$$x_2(t) = \alpha x_1(\beta t - \tau_0) + \kappa r(\gamma t - \tau_1)$$

Encuentre los valores de $\alpha$, $\beta$, $\kappa$, $\gamma$, $\tau_0$ y $\tau_1$ que cumplen con esa tarea.

*Sugerencia:* Realice los desplazamientos temporales como última operación, es decir, encuentre primero una función idéntica a la buscada excepto por su posición y luego realice el desplazamiento adecuado.

e. Si para el intervalo $t \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$ se define $x_3(t) = f(t)$ y fuera de ese intervalo $x_3(t) = 0$, entonces encuentre una expresión para $x_3(t)$ primero en términos de $x_2(t)$ y luego a través de esta en términos de $x_1(t)$ y $r(t)$.

f. Encuentre una expresión para $f(t)$ en términos de $r(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.

g. Encuentre la transformada de Fourier de $x_2(t)$ en términos de $X_1(j\omega)$ y $R(j\omega)$.

h. Encuentre la transformada de Fourier de $x_3(t)$ en términos de $X_2(j\omega)$.

i. ¿$X_1(j\omega)$ es una función par o impar? Justifique.

j. ¿$R(j\omega)$ es una función par o impar? Justifique.

k. Encuentre la transformada de Fourier de $f(t)$ utilizando los resultados anteriores. Considere la simetría de $f(t)$ y exprese el resultado en términos únicamente reales o imaginarios, según corresponda.

**Ejercicio 6.** Asocie a cada función no periódica en el tiempo mostrada al lado izquierdo de la figura 3 su correspondiente espectro, dado a través de sus partes real e imaginaria. Para esto utilice las propiedades de la Transformada de Fourier. Justifique su respuesta.

**Ejercicio 7.** Considere una señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$. Suponga que se cumplen los siguentes hechos:

- $x(t)$ es una función de valor real.
- $\mathscr{F}^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$, donde $A$ es independiente de $t$ y $\tau$ es una constante real positiva.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega = 2\pi$

a. Determine una expresión de forma cerrada para $x(t)$ si $\tau \neq 1$.

b. Encuentre ahora la expresión de $x(t)$ para el caso particular $\tau = 1$.

**Ejercicio 8.** Determine el espectro de la función $\dfrac{d}{dt}\{u(-2-t)+u(t-2)\}$.

**Ejercicio 9.** Se conoce el espectro de una función $x(t)$ en el tiempo:

$$|X(j\omega)| = 2[u(\omega+3) - u(\omega-3)]$$
$$\angle X(j\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi$$

a. Encuentre $x(t)$ utilizando la integral de la transformada inversa de Fourier.

b. Verifique $x(t)$ utilizando propiedades de la transformada de Fourier y la tabla de transformadas en el formulario.

c. Use su respuesta para determinar los valores de $t$ donde $x(t) = 0$.

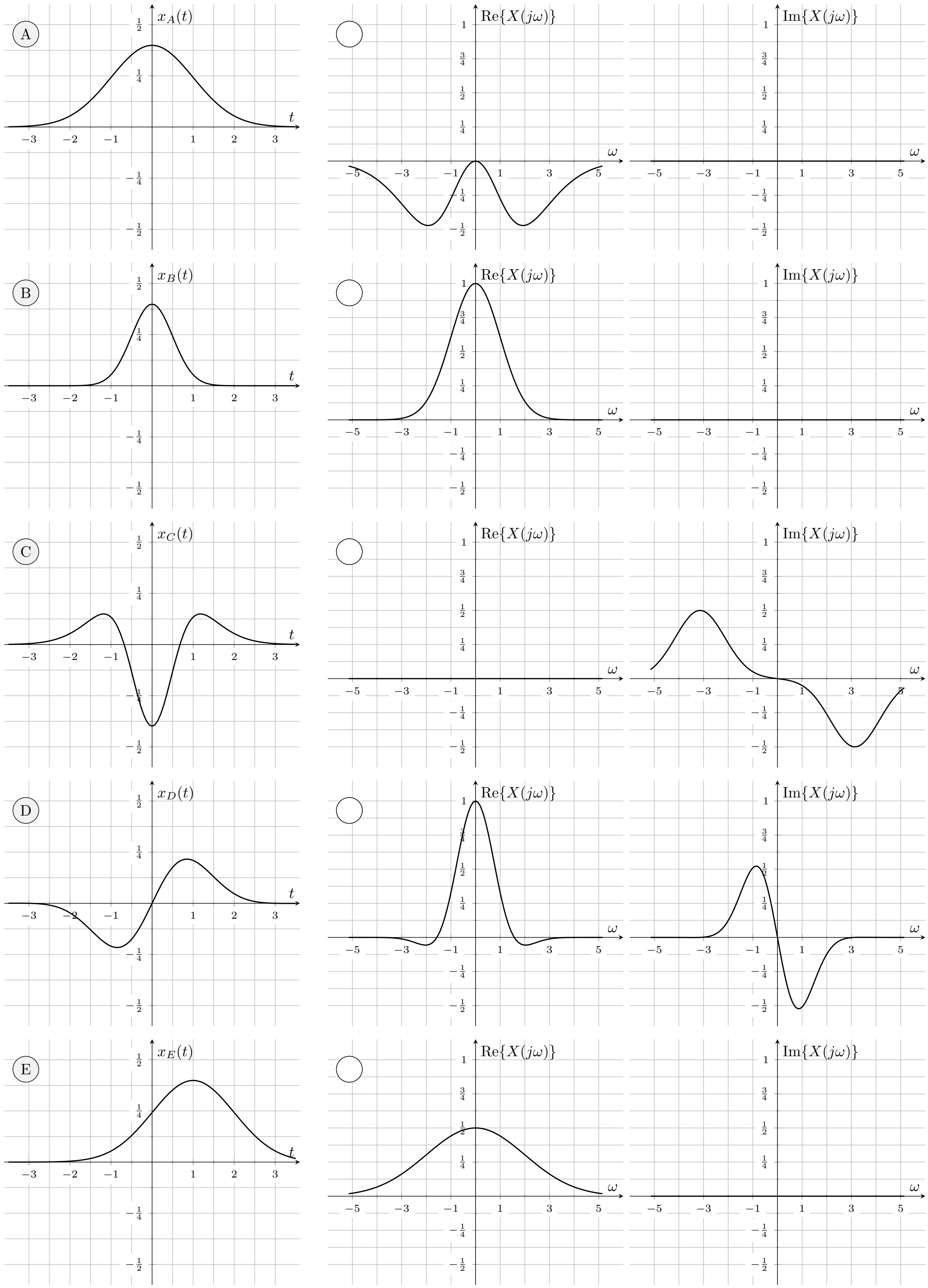


Figura 3: Figura para asocie del ejercicio 6