
Tutoría 6: Integración compleja

Ejercicio 1. Encuentre el valor de las integrales:

a. $\int_C (x^2 + j2xy + y^2) dz$

b. $\int_C z^2 dz$

Para las trayectorias de integración:

1. $z(t) = \min(t + 1; 2) + j \max(t - 2; -1)$ para $0 \leq t \leq 4$
2. Segmento de recta de $1 - j$ a $2 + 2j$

Respuestas:

- La integral a. con ambas trayectorias $-\frac{8}{3} + j12$ (coincidencia, pues no hay independencia de trayectorias).
- La integral b. con ambas trayectorias: $-\frac{14}{3} + j6$

Ejercicio 2. Evalúe la siguiente integral

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 - 1)(z + 3)} dz$$

considerando el contorno de integración $C : |z + 3| = 1$

Respuesta: $\oint_C \frac{1}{(z^2 - 1)(z + 3)} dz = j\frac{\pi}{4}$

Ejercicio 3. Si C es el contorno completo en sentido positivo conformado por todos los puntos frontera de la región $|z| \leq 2$, $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, entonces determine el resultado de la siguiente integral compleja

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z\frac{\pi}{2})}{1 - z^3} dz$$

Respuesta: $\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z\frac{\pi}{2})}{1 - z^3} dz = -j\frac{2\pi}{3}$

Ejercicio 4. Evalúe la integral $\oint_C z^* dz$ cuando el contorno de integración C es $|z| = 2$ en sentido positivo.

Respuesta: $\oint_C z^* dz = j8\pi$

Ejercicio 5. Evalúe las siguientes integrales reales utilizando métodos de integración compleja

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$$

$$\text{Respuesta: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^3} dx$$

$$\text{Respuesta: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^3} dx = \frac{3\pi}{256}$$

Ejercicio 6. Resuelva las siguientes integrales trigonométricas por medio de integración compleja

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{\frac{5}{2} + 2 \cos(\theta)} d\theta$$

$$\text{Respuesta: } \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{\frac{5}{2} + 2 \cos(\theta)} d\theta = -\frac{2\pi}{3}$$

$$2. \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2(\theta)}$$

$$\text{Respuesta: } \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2(\theta)} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$