Variable Compleja

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

Conjuntos

Conjuntos

- Un conjunto C es una colección de elementos c_i denotada generalmente como:

$$C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$$

- La pertenencia del elemento c_i al conjunto C se indica con la notación $c_i \in C$

Subconjuntos

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a_i \in A \Rightarrow a_i \in B$$

Igualdad de conjuntos

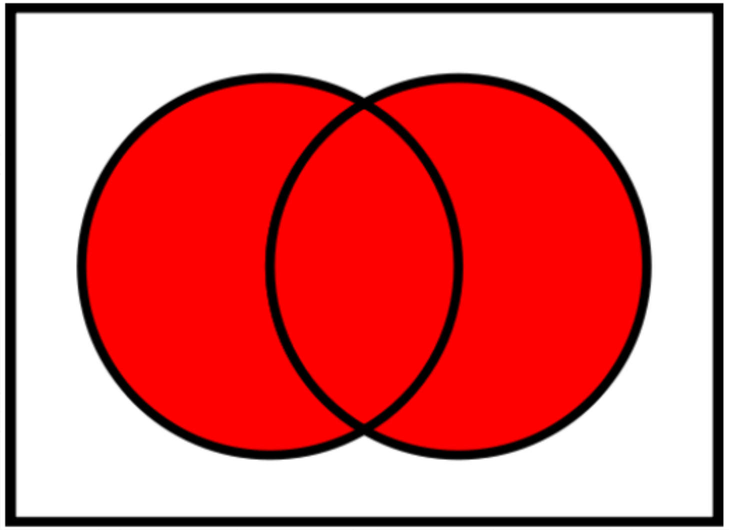
$$A = B \iff \forall a_i \in A \Rightarrow a_i \in B \land \forall b_i \in B \Rightarrow b_i \in A$$

Conjunto vacío

- El conjunto vacío $\emptyset = \{\}$ es siempre un subconjunto de cualquier otro conjunto, y
- Un conjunto siempre es subconjunto de sí mismo.

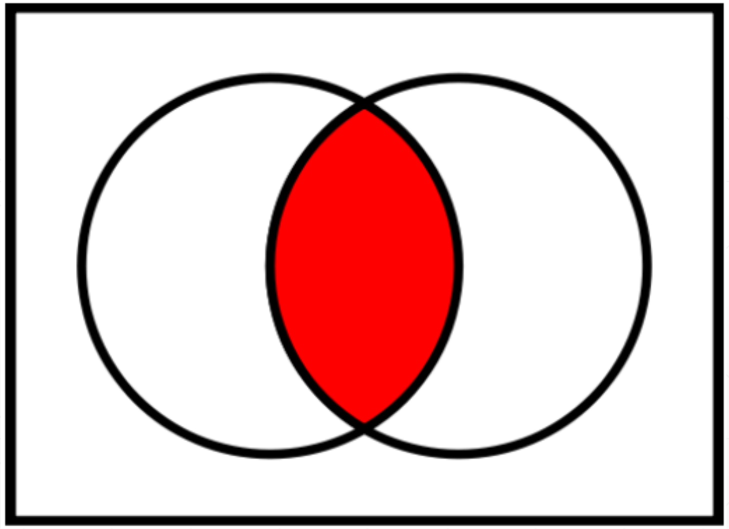
Unión de conjuntos

$$\bigcup_i c_i = \{c | c \in C_1 \lor c \in C_2 \lor c \in C_3 \lor \ldots\}$$



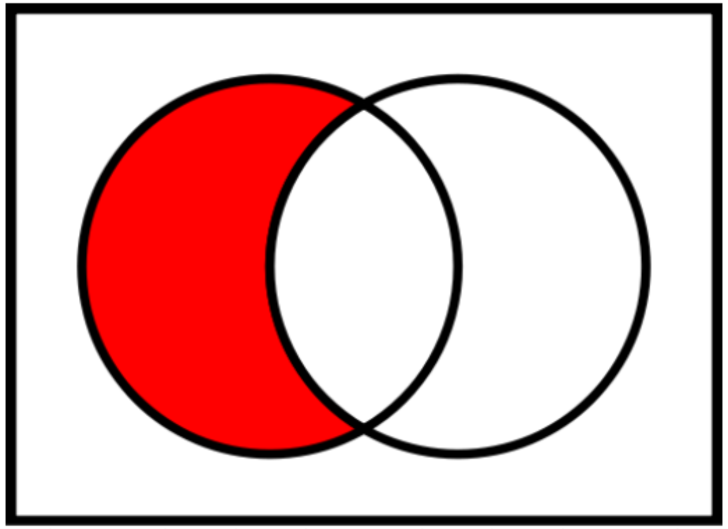
Intersección de conjuntos

$$\bigcap_i c_i = \{c | c \in C_1 \ \wedge \ c \in C_2 \ \wedge \ c \in C_3 \ \wedge \ \ldots\}$$

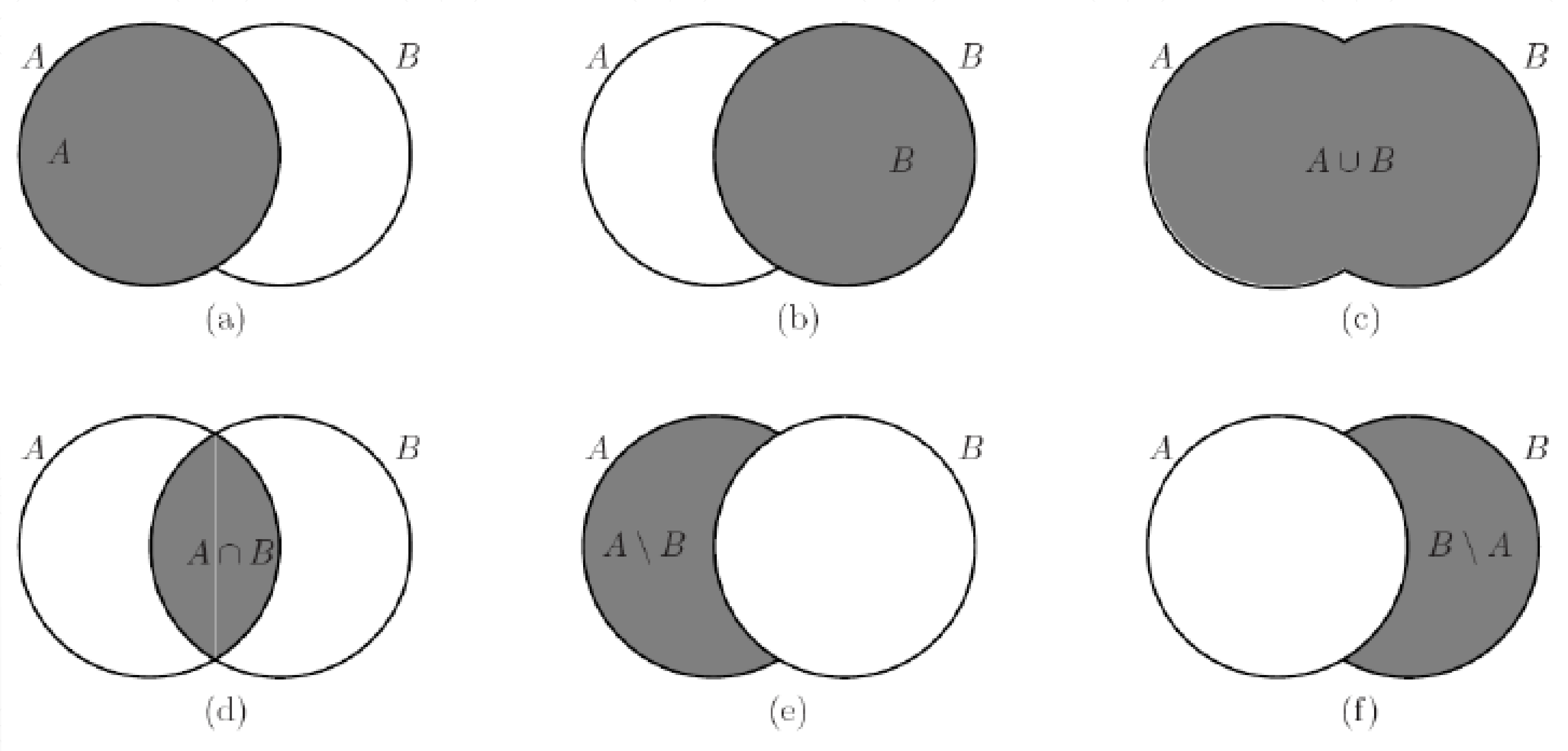


Diferencia de conjuntos

$$A \backslash \mathrm{B} = \{c \mid c \in A \ \wedge \ c \notin B\}$$



Conjuntos



Los Números Naturales

Números Naturales: características

- Cardinalidad
- Ordinalidad

Los Números Enteros

Números enteros

- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ contiene:
  - A los números naturales $\mathbb{N}$, unión con el conjunto de los números enteros negativos (inversos aditivos de los números naturales positivos)

Números enteros: Resta

- Se puede definir ahora la operación resta:
  - Cerrada pero no conmutativa
  - Igual a la suma del primer elemento con el inverso aditivo del segundo $(a - b = a + (-b))$

Los Números Racionales

Números racionales

- Un número racional es un par ordenado (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Dos números racionales (a, b) y (c, d) se dicen equivalentes si se cumple $a \times d = b \times c$.
- $(a, b) \leq (c, d)$ si y solo si $a \times d \leq b \times c$, con $b, d \geq 0$.

Números racionales: suma y producto

- La suma y multiplicación de los números racionales se definen a partir del producto y multiplicación de los números enteros como:

$$(a, b) + (c, d) = (a \times d + b \times c, b \times d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (a \times c, b \times d)$$

Recta infinita

- Los números racionales no pueden representar todos los puntos de una recta ideal infinita, como, por ejemplo, aquellos que $a \times a = p$, con p un número entero primo.

Los Números Irracionales

Números irracionales $\mathbb{I}$

- Conjunto de todos los números en una recta infinita que no son racionales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Los Números Reales

Números Reales: ordinalidad

$$x \geq y \ \Rightarrow \ x + z \geq y + z$$

$$x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \Rightarrow \ x \times y \geq 0$$

Números Complejos

Números Complejos

- Formalmente los números complejos se definen como pares ordenados de números reales (a, b) que junto con las operaciones:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (a \times c - b \times d,\ b \times c + a \times d)$$

Los números complejos

Como cuerpo, se deben cumplir los siguientes axiomas para los números complejos s, w, z

- $z + w \in \mathbb{C}, z \times w \in \mathbb{C}$ (ley de clausura)
- $z + w = w + z$ (ley conmutativa de la adición)
- $z + (w + s) = (z + w) + s$ (ley asociativa de la adición)
- $z + (0,0) = (0,0) + z = z$ (elemento neutro de la suma es $(0,0)$)
- $z \times w = w \times z$ (ley conmutativa de la multiplicación)
- $z \times (w \times s) = (z \times w) \times s$ (ley asociativa de la multiplicación)
- $(1,0) \times z = z \times (1,0) = z$ (elemento neutro de la multiplicación $(1,0)$)
- $z \times (w + s) = z \times w + z \times s$ (ley distributiva)
- Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe un solo elemento $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = (0,0)$ (existencia de elemento inverso único con respecto a la suma)
- Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (0,0)$ existe un solo elemento $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \times w = w \times z = (1,0)$ (existencia de elemento inverso único con respecto a la multiplicación)

Números Complejos: componentes

- Sea el número complejo $z = (a, b)$
  - Al número real a se le denomina componente real
  - Al número real b componente imaginaria de z
  - Los operadores $Re\{\cdot\}$ e $Im\{\cdot\}$ se definen tal que:

$$a = Re\{z\}$$

$$b = Im\{z\}$$

Observe que ambos operadores retornan números reales

Números Complejos: igualdad

- Se dice que dos números complejos son iguales si y solo si tantos sus componentes reales como imaginarias son iguales, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ \wedge \ b = d$$

Números Complejos: ordinalidad

Los números complejos no son ordenados

No es posible indicar si un número complejo es mayor o menor que otro

Plano complejo

Plano complejo o Diagrama de Argand

- Representación de $z = a + jb$ y $z^* = a - jb$

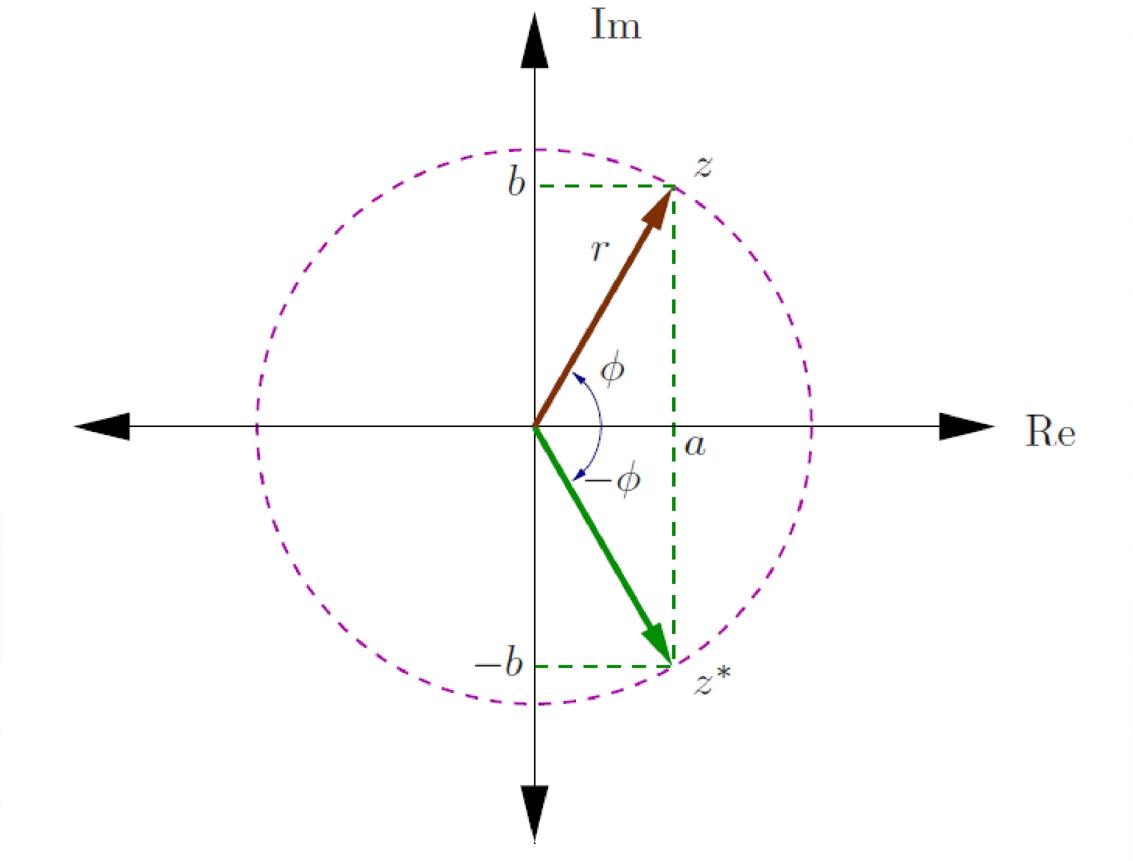


Diagrama de Argand: ejemplo

- Grafique en un diagrama de Argand los conjuntos de números complejos que cumplen las siguientes condiciones:

  - $|z| = 2$
  - $\angle z = \frac{\pi}{3}$
  - $Re\{z\} = 2$
  - $Im\{z\} = 1$

Diagrama de Argand: ejemplo

Solución:

- El conjunto de todos los números complejos z que tienen magnitud 2 está conformado por un círculo de radio 2, centrado en el origen.
- Todos los números complejos que tienen un ángulo igual a $\pi/3$ conforman un rayo que parte del origen con dicho ángulo con respecto al eje central.
- Todos los números complejos sobre una línea vertical que pasa por $z = 2$ cumplen $Re\{2\} = 2$. Por último, todos los puntos sobre una línea horizontal que pasa por $z = j$ cumplen $Im\{z\} = 1$.

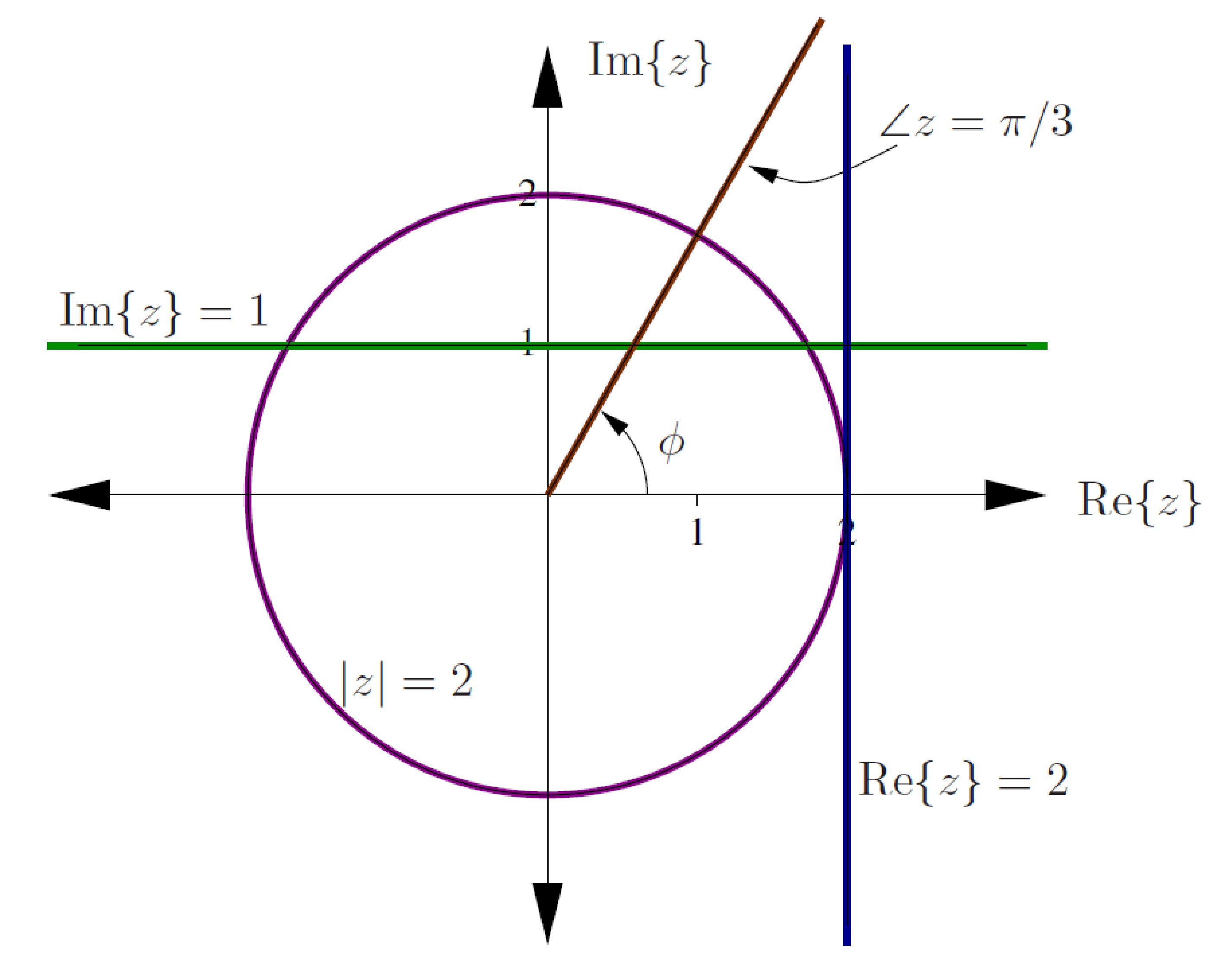


Diagrama de Argand

Ejemplo

Ejemplo: números complejos (1)

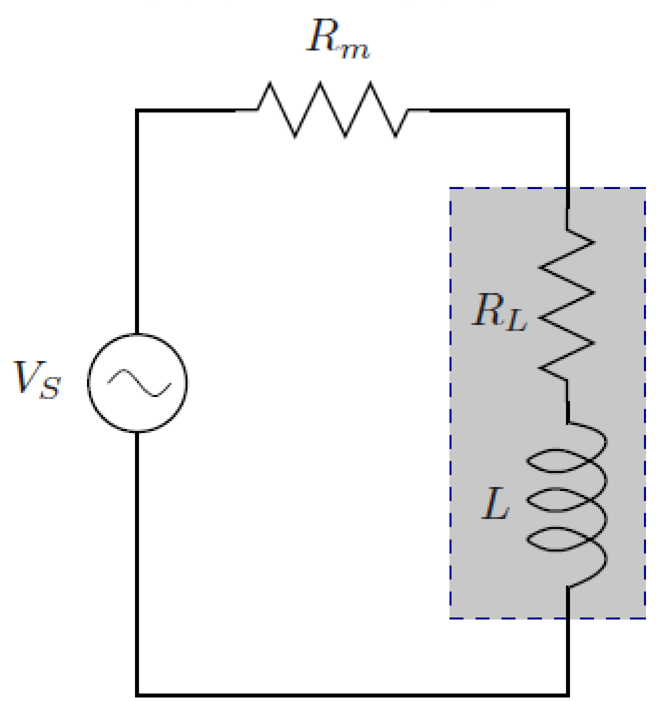
- Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Se sabe que $|z| = 2$, $\angle w = \pi/4$ y $z + w = 1 - j$. Encuentre gráficamente z y w.

Respuesta:

- $z = -j2$
- $w = 1 + j$

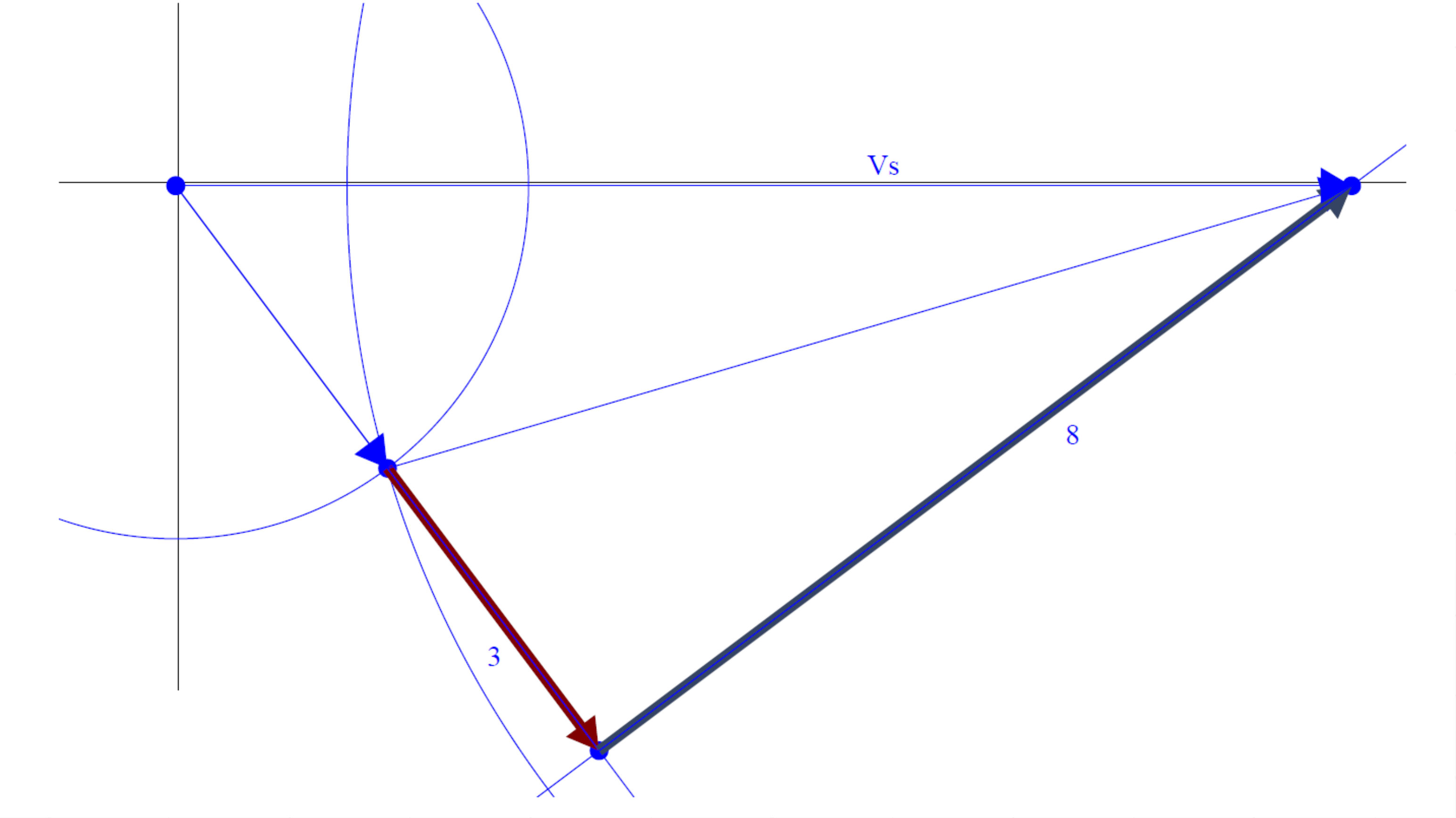
Circuitos en CA: solución gráfica

- El circuito que se muestra se utiliza para calcular el valor de R_L, la cual modela la resistencia de bobinado de una bobina real.
- Con un voltímetro digital se determina que la tensión RMS en la fuente es $V_s = 10\,V$, la tensión RMS en la resistencia de medición R_m es $V_{Rm} = 3\,V$ y la tensión RMS en la bobina real (la región demarcada) es $V_L = 8{,}544\,V$.
- Determine gráficamente cúal es el valor de L y de R_L si se sabe que la fuente utiliza una frecuencia de $\frac{1}{2\pi}\,kHz$, y $R_m = 100\,\Omega$.



Circuitos en CA: solución gráfica

Solución:



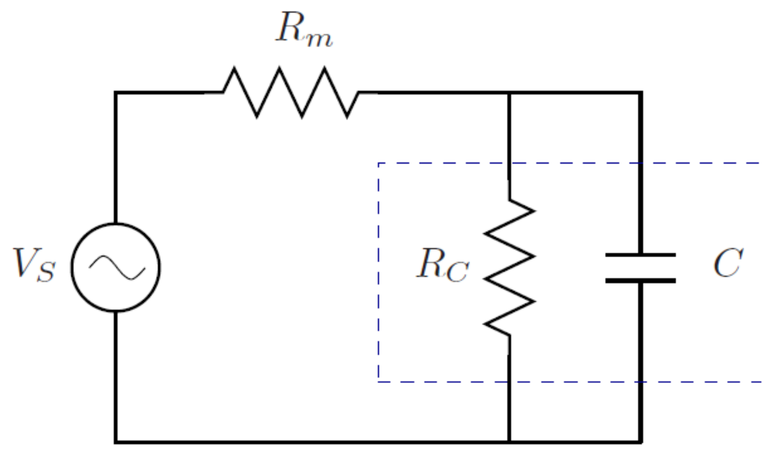
Circuitos en CA: solución gráfica

Resultados:

- La tensión en el inductor real descomponerse entonces en las tensiones sobre R_L y L, donde la tensión V_{R_L} está en fase con la corriente y por tanto con la tensión en R_m, y la tensión en el inductor L debe estar a $+90^o$ con respecto a las tensiones en las resistencias.
- $I_m = \frac{3V}{100\Omega} = 30\ mA$
- $V_{R_L} = 3V$
- $R_L = \frac{3V}{30mA} = 100\ \Omega$
- $|jwL| = \left|\frac{V_L}{I_L}\right|$
- $L = \frac{8V}{2\pi f 30mA} = \frac{4}{15}\ H$

Circuitos en CA: solución gráfica (T.M.)

- El circuito que se muestra se utiliza para calcular el valor de R_C, la cual modela las pérdidas del dieléctrico del condensador.
- Con un voltímetro digital se determina que la tensión RMS en la fuente es $V_s = 1\,V$, la tensión RMS en la resistencia de medición R_m es $V_{Rm} = 0{,}3\,V$ y la tensión RMS en el condensador real (la región demarcada) es $V_C = 0{,}8\,V$.
- Determine gráficamente cuál es el valor de C y de R_C si se sabe que la fuente utiliza una frecuencia de $100 Hz$, y $R_m = 1\,M\Omega$.



Circuitos en CA: solución gráfica

Resultados:

$$R_C = 4{,}74\ M\Omega$$

$$C = 493{,}46\ pF$$

PD: Los resultados son siguiendo cálculos numéricos, no gráficos.

Identidad de Euler

Identidad de Euler

- Para un ángulo de valor real ϕ se cumple:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

- Un número complejo $z = a + jb = r \times (\cos\phi + j\sin\phi)$ se puede representar como $z = r \times e^{j\phi}$, o simplemente la notación del producto $z = re^{j\phi}$.

Formas adicionales de la Identidad de Euler

$$\cos\phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$

$$\sin\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{j2}$$

Operaciones con números complejos

Notaciones para números complejos

- Forma cartesiana:

$$z = a + jb$$

- Forma polar:

$$z = \mathrm{r}\angle\theta = re^{j\theta} = rexp(j\theta)$$

- Redundancia de forma polar:

$$z = \mathrm{r}e^{j\theta} = re^{j(\theta+2k\pi)}$$

Conjugación compleja

- Si $z = x + jy = re^{j\theta} \in \mathbb{C}$ entonces $z^* = \bar{z} = x - jy = re^{-j\theta}$

- Para un polinomio con $a_i \in \mathbb{R}$

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$
$$= a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

- Si $z_i \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ entonces $P_n(z_i^*) = P_n(z_i) = 0$

Valor absoluto o magnitud

- Para $z = x + jy = re^{j\theta}$ el módulo, magnitud o valor absoluto es:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

- Se cumple siempre:

$$|z|^2 = r^2 = z \times z^*$$

Propiedades del valor absoluto

- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (con $z_2 \neq 0$)
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Suma y Resta

- Para $z_1 = x_1 + jy_1$ y $z_2 = x_2 + jy_2$ se cumple:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

$$z_1^* + z_2^* = (x_1 - jy_1) + (x_2 - jy_2) = (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2) = (z_1 + z_2)^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^* = \sum_{i=1}^{n} (x_i - jy_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - j\sum_{i=1}^{n} y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^*$$

Suma y resta de pares conjugados

$$z_1 + z_1^* = 2Re\{z_1\}$$

$$z_1 - z_1^* = j2Im\{z_1\}$$

Multiplicación y División

- Para $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ y $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ se cumple:

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$= r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Conjugación de productos

$$z_1^* \times z_2^* = \left(r_1 e^{-j\theta_1}\right)\left(r_2 e^{-j\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{-j(\theta_1+\theta_2)} = (z_1 \times z_2)^*$$

$$\prod_{i=1}^{n} z_i^* = \prod_{i=1}^{n} (r_i e^{-j\theta_i}) = \left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right) e^{-j\sum_{i=1}^{n}\theta_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right)^*$$

Producto y división de pares conjugados

$$z_1 \times z_1^* = r_1^2$$

$$\frac{z_1}{z_1^*} = e^{j2\theta_1}$$

Potenciación

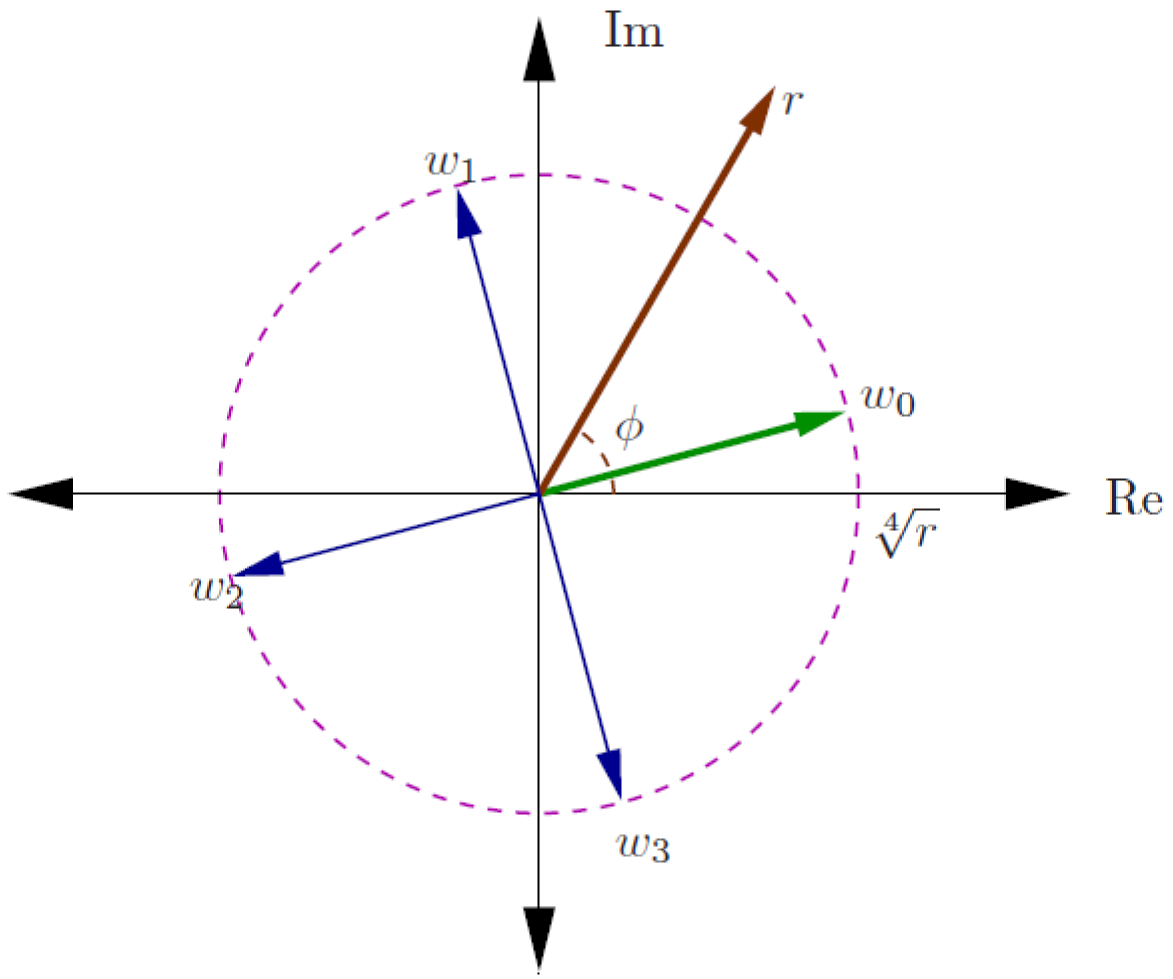
- Para colección de n números $z_i = x_i + jy_i = r_i e^{j\theta_i}$

$$\prod_{i=1}^{n} z_i = \left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right) e^{j\sum_{i=1}^{n}\theta_i}$$

- Si todos los elementos z_i son iguales a $z = x + jy = re^{j\theta}$ se obtiene el teorema de Moivre:

$$w = z^{1/n} = \left(re^{j\theta}\right)^{1/n} = \left(re^{j(\theta+2k\pi)}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{j\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$\Rightarrow$ cualquier número complejo z tiene n n-ésimas raíces



Raíces enteras de números complejos

Ejemplo de las cuatro raíces cuartas de re^{j60^o}

Exponenciación

$$e^{z} = e^{(x+jy)}$$

$$= e^{x}e^{jy}$$

$$= e^{x}\cos(y) + je^{x}sen(y)$$

$$\cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos(x)\cosh(y) - jsen(x)senh(y)$$

$$\text{sen}(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = sen(x)\cosh(y) + jcos(x)senh(y)$$

Logaritmo

$$In\, z = In\left[re^{j(\theta+2k\pi)}\right] = In\, r + In\left(e^{j(\theta+2k\pi)}\right) = In\, r + j(\theta + 2k\pi)$$

$\Rightarrow$ $z \in \mathbb{C}$ tiene un infinito número de logaritmos.

$\Rightarrow$ Con $k = 0$ se obtiene el valor principal $Ln\, z = In|z| + j\angle z$

Otros Conjuntos

Álgebras de Clifford:

- Cuaterniones
- Octoniones
- Sedeniones
- …