Singularidades, ceros y residuos

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

Singularidad

Singularidad

Una singularidad de una función de variable compleja $f(z)$ es un punto del dominio de definición donde $f(z)$ no es analítica.

Tipos de singularidad

Un punto $z = z_0$ de $f(z)$ determinado por **Serie de Laurent** centrada sobre dicho punto z_0, con región de convergencia con z_0 como punto límite será:

- **Punto regular**: parte principal igual a cero.
- **Polo**: parte principal con número **finito** de términos

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_k(z - z_0)^k + \cdots$$

Mayor exponente m es el orden del polo, o de otra forma:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m}$$

Donde a_{-m} es finito y distinto de cero.

- **Singularidad esencial**: parte principal con número **infinito** de términos.

Ceros

Ceros

Como cero de una función de variable compleja se conocen aquellos puntos regulares $z = z_0$ donde $f(z_0) = 0$.

Orden del cero

El cero es de orden n si

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

Así, los n primeros términos de la serie de Taylor centrada en el cero desaparecen

$$f(z) = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \cdots$$

$$= (z-z_0)^n[a_n + a_{n+1}(z-z_0) + a_{n+2}(z-z_0)^2 + \cdots]$$

Ejemplos de tipos de puntos

- $f(z) = 1 + 2z - 3z^2$ solo tiene puntos regulares
- $f(z) = z^{-1}$ tiene un polo de primer orden en $z = 0$.
- $f(z) = (z - j)^{-2}$ tiene un polo de segundo orden en $z = j$.
- $f(z) = e^{\frac{1}{(z+1)}}$ tiene una singularidad esencial en $z = -1$.
- La función

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z + 2j)(z - 1)^3}$$

Tiene un cero de primer orden en $z = -1$, un polo de primer orden en $z = -j2$ y un polo de orden 3 en $z = 1$.

Ejemplos de tipos de puntos

- La función $f(z) = \frac{sen(z)}{z}$ no está definida en $z = 0$, pero se extiende con

$$sa(z) = \begin{cases} \frac{sen(z)}{z} & si\ z \neq 0 \\ 1 & si\ z = 0 \end{cases}$$

La serie de Taylor centrada en $z = 0$.

$$sa(z) = \frac{1}{z}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right]$$
$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

Indica que $z = 0$ es regular. La aparente singularidad en $z = 0$ se dice en este caso que es removible.

Esta función tiene ceros en $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

Residuos

Residuos

Residuo de la función $f(z)$ sobre z_0 es el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent centrada en z_0.

¿Qué valor tiene el residuo de una función sobre sus polos, ceros y demás puntos regulares?

Residuo en un polo simple

Si $f(z)$ tiene un polo simple en z_0, entonces su desarrollo en serie de Laurent es:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]$$

Resíduo en un polo doble

Si la función $f(z)$ tiene un polo de orden dos en $z = z_0$ entonces su desarrollo de Laurent es

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

y para aislar el residuo a_{-1} se multiplican ambos lados por $(z-z_0)^2$ seguido de una derivación:

$$(z-z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + a_0(z-z_0)^2 + a_1(z-z_0)^3 + \cdots$$

$$\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right] = a_{-1} + 2a_0(z-z_0) + 3a_1(z-z_0)^2 + 4a_2(z-z_0)^3 + \cdots$$

Con lo que finalmente se obtiene el residuo a_{-1}:

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]$$

Resíduo en un polo de orden m

Para los polos de orden m en $z = z_0$ el residuo es:

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right\}$$

Ejemplo: Cálculo de residuos (1)

Determine el residuo de

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2+1)(2z-1)}$$

en cada uno de los polos

Ejemplo: Cálculo de residuos (2)

Solución: Representando $f(z)$ en forma normalizada se tiene que

$$f(z)=\frac{z}{(z+j)(z-j)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

Ejemplo: Cálculo de residuos (3)

Así, para el residuo en $z = j$.

$$a_{-1} = \lim_{z \to j} (z - j) \frac{z}{(z + j)(z - j)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{z \to j} \frac{z}{(z + j)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{j}{2j\left(j - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1 + 2j}{5}$$

Ejemplo: Cálculo de residuos (4)

Para el residuo en $z = -j$ de forma equivalente

$$a_{-1} = \lim_{z \to -j} (z + j) \frac{z}{(z + j)(z - j)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{z \to -j} \frac{z}{(z - j)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-j}{-2j\left(-j - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1 - 2j}{5}$$

Ejemplo: Cálculo de residuos (5)

Y finalmente para $z = \frac{1}{2}$

$$a_{-1} = \lim_{z \to {}^1/_2} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{z}{(z+j)(z-j)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{z \to {}^1/_2} \frac{z}{(z+j)(z-j)}$$

$$= \frac{{}^1/_2}{\left(\frac{1}{2} + j\right)\left(\frac{1}{2} - j\right)}$$

$$= \frac{2}{5}$$

Ejemplo: Cálculo de residuos (1)

Determine los residuos de

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

en cada uno de sus polos en el plano z

Ejemplo: Cálculo de residuos (2)

Solución: La función puede reescribirse como

$$f(z) = \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z-2j)(z+2j)}$$

Lo que implica que $f(z)$ tiene polos simples en $z = 2j$ y $z = -2j$ y un polo doble en $z = -1$. Además la función tiene un cero en $z = 0$ y otro en $z = 2$.

Para los dos primeros polos se procede de la misma manera que en el ejemplo anterior.

Ejemplo: Cálculo de residuos (3)

Para el polo $z = 2j$

$$a_{-1} = \lim_{z \to 2j} (z - 2j) \frac{z(z-2)}{(z+1)^2 (z-2j)(z+2j)}$$

$$= \lim_{z \to 2j} \frac{z(z-2)}{(z+1)^2 (z+2j)}$$

$$= \frac{-4 - 4j}{(2j+1)^2 4j}$$

$$= \frac{1}{25}(7 + j)$$

Ejemplo: Cálculo de residuos (4)

Para el polo $z = -2j$

$$a_{-1} = \lim_{z \to -2j} (z + 2j) \frac{z(z-2)}{(z+1)^2 (z-2j)(z+2j)}$$

$$= \lim_{z \to -2j} \frac{z(z-2)}{(z+1)^2 (z-2j)}$$

$$= \frac{-4+4j}{-(-2j+1)^2 4j}$$

$$= \frac{1}{25}(7-j)$$

Ejemplo: Cálculo de residuos (5)

Para el polo doble en $z = -1$ se utiliza la ecuación

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right\}$$

Con lo que

$$a_{-1} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left[(z+1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)} \right]$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}$$

$$= -\frac{14}{25}$$

Singularidades esenciales

Para singularidades esenciales la ecuación

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right\}$$

NO aplica.

Singularidades esenciales requieren el desarrollo en serie de Laurent.

Ejemplo: Residuo de una singularidad esencial (1)

Encuentre los residuos de la función $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ en $z = 0$ y $z = 1$, e indique qué tipo de puntos son éstos.

Ejemplo: Residuo de una singularidad esencial (2)

Solución:

El punto $z = 0$ es un punto regular $\left(f(0) = \frac{1}{e}\right)$, puesto que la función es holomorfa (analítica allí), y por lo tanto tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en $z = 0$, es decir, la parte principal de la serie de Laurent correspondiente es cero y por tanto el residuo de dicho punto es igual a $a_{-1} = 0$.

Ejemplo: Residuo de una singularidad esencial (3)

El punto $z = 1$ corresponde a una singularidad esencial, puesto que $e^{z'}$ tiene como serie de Taylor

$$e^{z'} = 1 + \frac{z'}{1!} + \frac{z'^2}{2!} + \frac{z'^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$$

Y con $z' = 1/(z-1)$ se obtiene la serie

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{(z-1)^{-1}}{1!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{-3}}{3!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{-n}}{n!}$$

Con parte principal es de longitud infinita.

El coeficiente del término $\frac{1}{z-1}$ es $a_{-1} = 1$ (residuo en $z = 1$).

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.