Tutoría 7: Ortogonalidad, Serie Generalizada de Fourier y Serie de Fourier

Ejercicio 1. Utilizando la ecuación que involucra el uso del producto interno entre funciones, determine el ángulo existente entre las funciones $\sin(\alpha)$ y $\sin(\alpha + \theta)$.

Respuesta: $\angle(\sin(\alpha), \sin(\alpha + \theta)) = \theta$

Ejercicio 2. Sea una base de funciones ortogonales periódicas $u_i(t) = u_i(t + T)$ con periodo $T = 6$ dadas por:

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad 1 \leq t \leq 3 \\ -1 & \text{para} \quad -3 \leq t \leq -1 \\ 0 & \text{para} \quad -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$u_k(t) = u_{k-1}(3t)$$

Lo que implica que $u_2(t) = u_1(3t)$, $u_2(3t) = u_1(9t)$, etc.

Algunas funciones periódicas se pueden aproximar con:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i u_i(t)$$

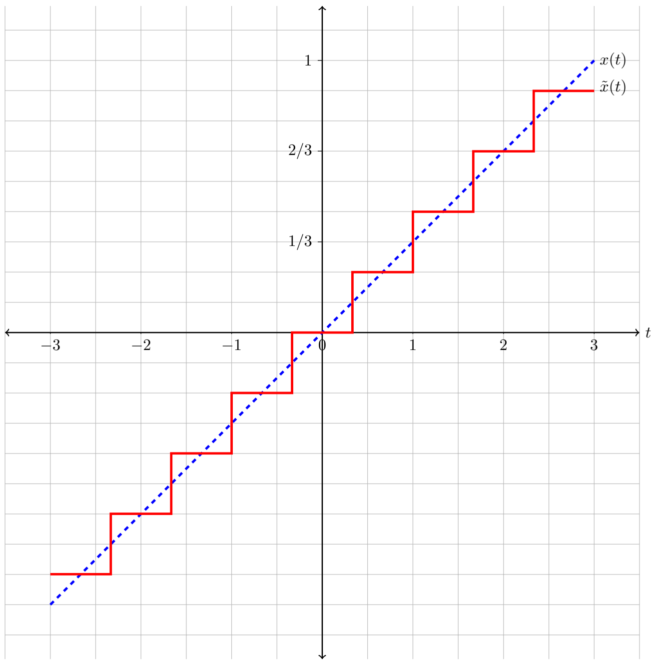
La función periódica $x(t) = t/3$ para $-3 \leq t \leq 3$, con periodo $T = 6$ se sabe que tiene $a_2 = 2/9$. Determine la norma de $u_1(t)$, el valor de a_1 y grafique tanto la función $x(t)$ como su aproximación $\tilde{x}(t)$ para $N = 2$ en el intervalo $t \in [-3; 3]$.

Respuesta:

a. $||u_1(t)|| = 2$.

b. $a_1 = \dfrac{2}{3}$

c. $f(t) \approx \dfrac{2}{3}u_1(t) + \dfrac{2}{9}u_2(t)$



Ejercicio 3. Dadas las siguientes funciones

- $\varphi_0(t) \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$
- $\varphi_1(t) \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/2 \\ -1 & 1/2 < t < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$
- $\varphi_2(t) \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/4 \\ -1 & 1/4 < t < 1/2 \\ 1 & 1/2 < t < 3/4 \\ -1 & 3/4 < t < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

a. Demuestre que estas funciones forman un conjunto ortogonal sobre el intervalo $t \in [0,1]$.

b. Determine si el conjunto de funciones son ortonormales sobre el mismo intervalo de $t \in [0,1]$.

c. Represente la señal $f(t)$ en el intervalo $t \in [0,1]$ utilizando una combinación lineal de las funciones $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$. La función $f(t)$ se define como:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t < 1/2 \\ -2t + 2 & 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

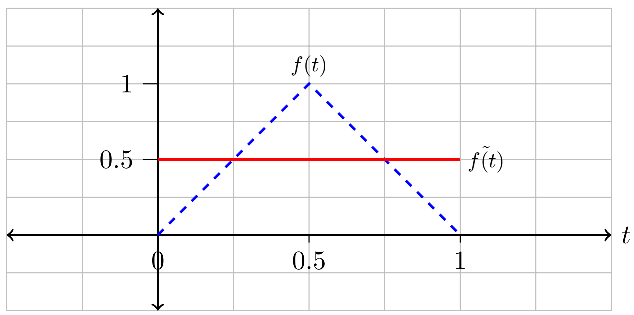
d. Grafique la representación de $f(t)$ utilizando las funciones $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ como la combinación lineal obtenida en el punto anterior.

Respuesta:

a. $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son ortogonales.

b. $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ son ortonormales.

c. $f(t) \approx \frac{1}{2}\varphi_0(t)$.

d. 

Ejercicio 4. Demuestre que las funciones $\cos(\omega_0 kt)$ y $\sin(\omega_0 kt)$ son ortogonales en el intervalo $T_p = 2\pi/\omega_0$, para ello se debe analizar:

a. $\langle \cos(\omega_0 kt), \cos(\omega_0 lt) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T_p/2 & k = l \end{cases}$

b. $\langle \cos(\omega_0 kt), \sin(\omega_0 lt) \rangle = 0$

c. $\langle \sin(\omega_0 kt), \sin(\omega_0 lt) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T_p/2 & k = l \end{cases}$

para $k,l \in \mathbb{N}^+$.

Respuesta: demostraciones válidas para los tres casos.

Ejercicio 5. Utilizando los resultados del ejercicio anterior, demuestre que las funciones $\cos(\omega_0 kt + \theta_k)$, $k \in \mathbb{N}^+$ son ortogonales entre sí.

Respuesta: demostración válida.

Ejercicio 6. Para la señal periódica continua

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

a. Determine la frecuencia fundamental ω_0.

b. Encuentre los coeficientes c_k de la serie exponencial de Fourier.

c. Indique si $x(t)$ es una señal par o impar.

Respuesta:

a. $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$

b. $c_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ 1/2 & k = \pm 2 \\ -2j & k = 5 \\ 2j & k = -5 \\ 0 & \textit{para el resto} \end{cases}$

c. $x(t)$ *no tiene ninguna simetría, ni par, ni impar.*

Ejercicio 7. Una señal periódica continua $x(t)$ es de valor real y tiene un periodo fundamental de $T = 8$. Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier diferentes de cero para $x(t)$ son:

$$c_1 = c_{-1} = 2$$
$$c_3 = c_{-3}^* = 4j$$

Exprese $x(t)$ de la forma $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$.

Respuesta:

$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) = 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 8\cos\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$