Transformada Z Unilateral

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

Sistemas en Tiempo Discreto

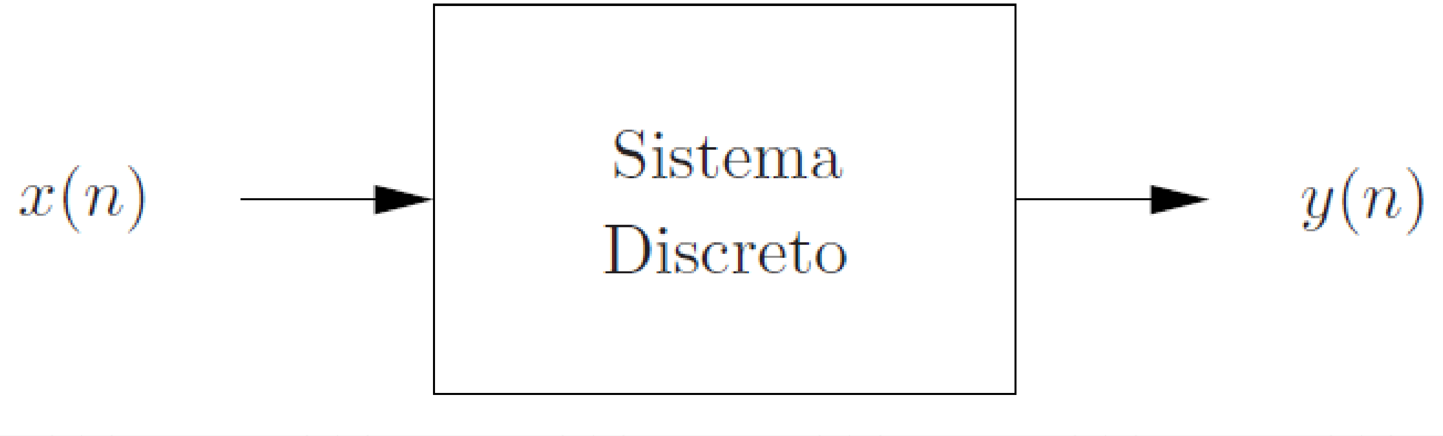
Sistemas en tiempo discreto

Los sistemas en tiempo discreto transforman una señal de entrada $x(n)$ en una señal de salida $y(n)$:

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)]$$

Descripción entrada-salida de sistemas

La descripción de entrada-salida define la relación entre $x(n)$ y $y(n)$. La estructura interna del sistema es desconocida o ignorada, es decir, el sistema se interpreta como una caja negra.



Ejemplo: Descripción entrada-salida (1)

Determine la salida de los siguientes sistemas para la entrada

$$x(n) = \begin{cases} 3 - |n| & para \ -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

1. $y(n) = x(n)$
2. $y(n) = x(n-2)$
3. $y(n) = x(n+1)$
4. $y(n) = \frac{1}{3}(x(n+1) + x(n) + x(n-1))$
5. $y(n) = \max(x(n+1), x(n), x(n-1))$
6. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

Ejemplo: Descripción entrada-salida (2)

Solución:

1. Al sistema $y(n) = x(n)$ se le denomina identidad, pues su salida es idéntica a la entrada: $y(n) = \{1,2,\underbrace{3}_{\uparrow},2,1\}$

2. El sistema $y(n) = x(n-2)$ retarda la entrada dos unidades: $y(n) = \{\underbrace{1}_{\uparrow},2,3,2,1\}$.

3. El sistema $y(n) = x(n+1)$ adelanta la señal una unidad y solo puede ser realizado fuera de línea, por ser imposible en un sistema de tiempo real determinar el valor de la señal una muestra en el futuro: $y(n) = \{1,2,3,\underbrace{2}_{\uparrow},1\}$.

4. El filtro paso bajos $y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$ calcula el promedio de tres muestras: $y(n) = \{1/3,1,2,\underbrace{7/3}_{\uparrow},2,1,1/3\}$.

Ejemplo: Descripción entrada-salida (3)

5. El filtro de rango $y(n) = \max\{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$ entrega el valor máximo de la muestra actual, la anterior y la futura: $y(n) = \{1,2,3,\underbrace{3}_{\uparrow},3,2,1\}$. Este filtro puede considerarse también como filtro paso bajos.

6. El acumulador $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ realiza la "**integración discreta**" de la entrada: $y(n) = \{1,3,\underbrace{6}_{\uparrow},8,9,9,\ldots\}$. Note que el acumulador puede reescribirse como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)}_{y(n-1)} + x(n) = y(n-1) + x(n)$$

Dependencias de la salida

La salida $y(n)$ en el instante n puede depender de

1. Entrada actual $x(n)$
2. Entradas anteriores
3. Salidas anteriores

Por ejemplo, para un sistema

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

la salida depende de la **condición inicial** o **historia anterior** $y(n-1)$

Condiciones iniciales

- El cálculo de la secuencia de salida $y(n)$ para todo instante $n \geq n_0$ tiene como condición inicial al valor $y(n_0 - 1)$, que en cierta forma resume todo el pasado del sistema.
- El sistema está en reposo si $y(n_0 - 1) = 0$.
- Se asume que en $n_0 = -\infty$ todo sistema está en reposo.

Ejemplo: Salida de sistema acumulador (1)

Determine la salida del sistema acumulador para la entrada $x(n) = nu(n)$ con condición inicial $y(-1) = \alpha$.

Ejemplo: Salida de sistema acumulador (2)

Solución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)}_{y(-1)=\alpha} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \alpha + \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde se utiliza

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\sum_{k=0}^{n} k & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n \\
\sum_{k=0}^{n} k & = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 1 \\
\hline
2\sum_{k=0}^{n} k & = & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 \\
 & & & & & & & & \\
2\sum_{k=0}^{n} k & = & n(n+1) & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
\sum_{k=0}^{n} k & = & \frac{n(n+1)}{2} & & & & & &
\end{array}$$

Tipos de Sistemas en Tiempo Discreto

Sistemas variantes e invariantes en el tiempo

Un sistema en reposo $\mathcal{T}$ es invariante en el tiempo o invariante al desplazamiento si y solo si

$$x(n) \overset{\mathcal{T}}{\overbrace{\rightarrow}} y(n) \Rightarrow x(n-k) \overset{\mathcal{T}}{\overbrace{\rightarrow}} y(n-k)$$

Sistemas lineales y no lineales

Un sistema es lineal si satisface el teorema de superposición, es decir para las constantes a_1, a_2 y para las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se cumple

$$\mathcal{T}[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 \mathcal{T}[x_1(n)] + a_2 \mathcal{T}[x_2(n)]$$

Generalización a múltiples entradas

El principio de superposición con M entradas puede generalizarse como

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M} a_k x_k(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) = \sum_{k=1}^{M} a_k \mathcal{T}[x_k(n)]$$

De la propiedad de escalado se deduce además que en un sistema lineal en reposo con entrada cero ($a_1 \neq 0$), entonces la salida debe ser cero.

Si para un sistema la propiedad de superposición no se cumple, entonces el sistema se dice ser **no lineal**.

Análisis de Sistemas LTI en tiempo discreto

Dos métodos de análisis

Existen dos métodos básicos para el análisis del comportamiento de un sistema:

1. Descomposición de la señal de entrada en señales elementales para las que se conoce su respuesta.
2. Solución de la ***ecuación de diferencias***.

El análisis de sistemas, independientemente del método seleccionado, se simplifica enormemente si estos son lineales e invariantes en el tiempo (LTI: *Linear and Time Invariant*).

Descomposición en señales elementales

Sea

$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$$

la descomposición de $x(n)$ donde c_k son los coeficientes de ponderación o pesos de la descomposición de la señal $x(n)$.

Uso de linealidad

Si la respuesta del sistema en reposo a $x_k(n)$ es $y_k(n)$, es decir

$$y_k(n) = \mathcal{T}[x_k(n)]$$

entonces con la propiedad de linealidad se obtiene

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_k c_k x_k(n)\right] = \sum_k c_k \mathcal{T}[x_k(n)] = \sum_k c_k y_k(n)$$

Convolución con impulsos unitarios

Utilizando como funciones elementales a impulsos unitarios desplazados $\delta(n-k)$ es posible expresar cualquier función de variable discreta $x(n)$ como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Derivación de convolución

Si $h'(n,k)$ se utiliza para denotar la respuesta de un sistema lineal a un impulso desplazado k unidades $\delta(n-k)$

$$h'(n,k) = \mathcal{T}[\delta(n-k)]$$

entonces la salida del sistema puede calcularse con las respuestas elementales a los impulsos desplazados:

$$y(n) = \sum_{k} c_k y_k(n) = \sum_{k} x(k)\, h'(n,k)$$

Convolución

Si el sistema es además invariante en el tiempo, entonces con $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$ se tiene que $h'(n, k) = h(n-k)$ y por lo tanto

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

que se denomina suma de convolución.

La respuesta del sistema $y(n)$ a la entrada $x(n)$ es igual a la convolución de $x(n)$ con la respuesta al impulso $h(n)$.

Pasos de la convolución

El cálculo de la suma de convolución $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ involucra cuatro pasos equivalentes a los estudiados para el caso de la integral de convolución:

1. **Reflexión** de $h(k)$ con respecto a $k = 0$ para producir $h(-k)$.

2. **Desplazamiento** de $h(-k)$ hacia el punto n que se desea calcular.

3. **Multiplicación** de $x(k)$ y $h(n-k)$ para obtener una secuencia producto $v_n(k) = x(k)h(n-k)$.

4. **Suma** de todos los valores de $v_n(k)$ para obtener $y(n)$.

Los pasos del 2 al 4 deben realizarse para todo instante n que se deseé calcular.

Ejemplo: Convolución (1)

Determine la respuesta a la señal de entrada

$$x(n) = \{\underbrace{1}_{\uparrow}, 2,3,1\}$$

de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso

$$h(n) = \{1, \underbrace{2}_{\uparrow}, 1, -1\}$$

Ejemplo: Convolución (2)

Solución: Siguiendo el procedimiento indicado, primero se calcula la reflexión de la respuesta al impulso $h(-k) = \{-1,1,\underbrace{2}_{\uparrow},1\}$. Los siguientes pasos se resumen en la siguiente tabla:

2. Desplazamiento	3. Multiplicación por $x(k) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$	4. Suma
$h(-1-k)=\{-1,1,2,\underset{\uparrow}{1}\}$	$v_{-1}=\{0,0,0,\underset{\uparrow}{1},0,0,0\}$	$y_{-1}=1$
$h(0-k)=\{-1,1,\underset{\uparrow}{2},1\}$	$v_0=\{0,0,\underset{\uparrow}{2},2,0,0\}$	$y_0=4$
$h(1-k)=\{-1,\underset{\uparrow}{1},2,1\}$	$v_1=\{0,\underset{\uparrow}{1},4,3,0\}$	$y_1=8$
$h(2-k)=\{\underset{\uparrow}{-1},1,2,1\}$	$v_2=\{\underset{\uparrow}{-1},2,6,1\}$	$y_2=8$
$h(3-k)=\{\underset{\uparrow}{0},-1,1,2,1\}$	$v_3=\{\underset{\uparrow}{0},-2,3,2\}$	$y_3=3$
$h(4-k)=\{\underset{\uparrow}{0},0,-1,1,2,1\}$	$v_4=\{\underset{\uparrow}{0},0,-3,1\}$	$y_4=-2$
$h(5-k)=\{\underset{\uparrow}{0},0,0,-1,1,2,1\}$	$v_5=\{\underset{\uparrow}{0},0,0,-1\}$	$y_5=-1$

Ejemplo: Convolución (3)

Con lo que resulta la señal de salida en

$$y(n) = \{1, \underbrace{4}_{\uparrow}, 8,8,3, -2, -1\}$$

Conmutatividad de la convolución

Con un cambio de variable es posible demostrar que la convolución es conmutativa:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$\underbrace{=}_{m=n-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$= h(n) * x(n)$$

Asociatividad y distributividad de la convolución

La convolución es además asociativa y distributiva

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

Ejemplo: Convolución en un sistema exponencial (1)

Encuentre la salida de un sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n), \qquad |a| < 1$$

ante una entrada $x(n) = u(n)$.

Ejemplo: Convolución en un sistema exponencial (2)

Solución: Para determinar la salida $y(n)$ del sistema con la entrada escalón unitario $u(n)$ se utiliza la sumatoria de convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k)h(k)$$

Para $n < 0$ el producto de $u(n-k)$ y $h(k)$ es siempre cero y por tanto $y(n) = 0$. Evaluando para algunos valores de n se obtiene:

$$y(0) = h(0) = 1$$
$$y(1) = h(0) + h(1) = 1 + a$$
$$y(2) = h(0) + h(1) + h(2) = 1 + a + a^2$$
$$\vdots$$
$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k) = \sum_{k=0}^{n} a^k$$

Ejemplo: Convolución en un sistema exponencial (3)

Puesto que

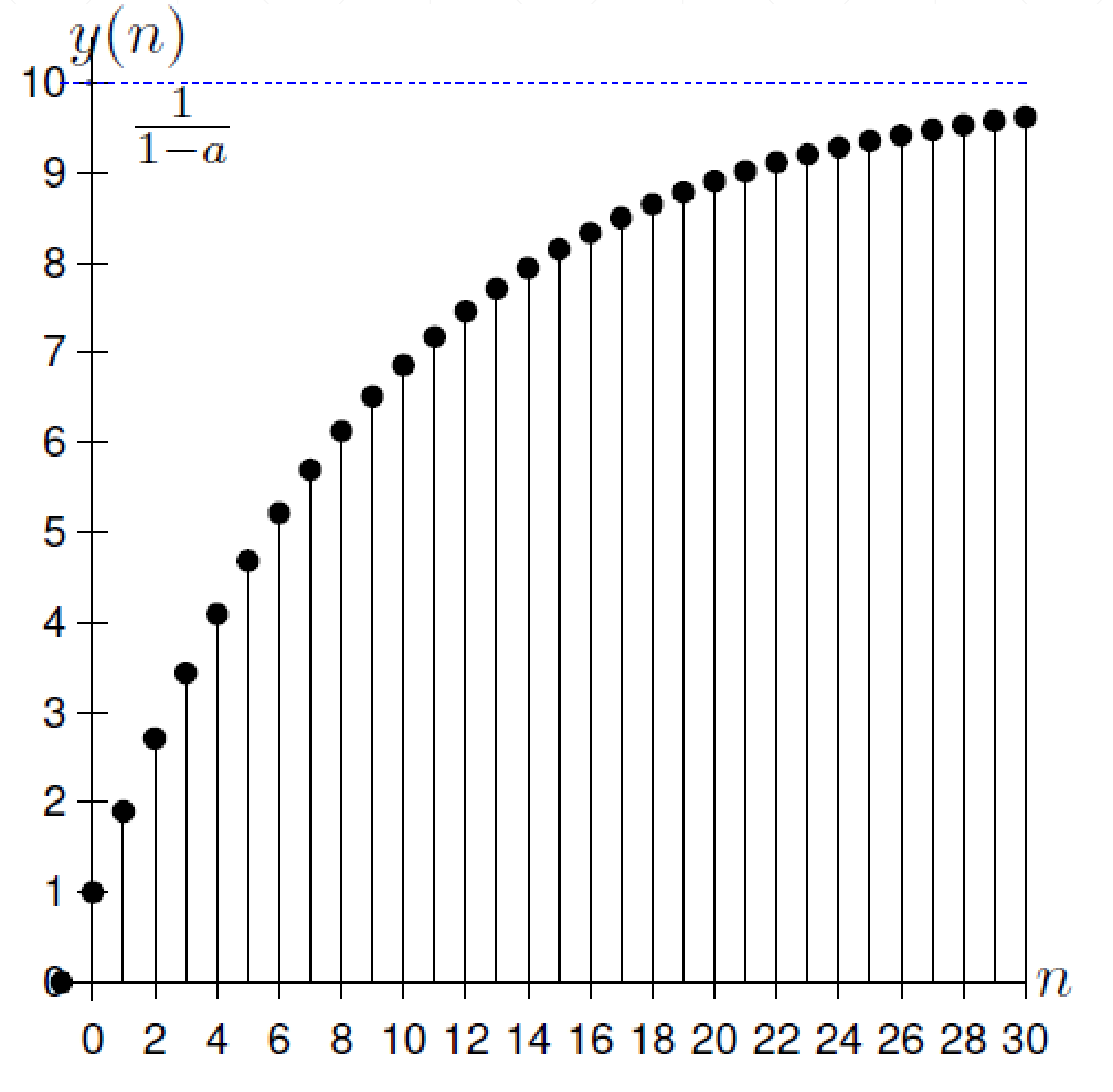
$$\begin{array}{rclllll} \sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1 & +a & +a^2 & +\ldots & +a^n & \\ a\sum_{k=0}^{n} a^k & = & & a & +a^2 & +\ldots & +a^n & +a^{n+1} \\ \hline (1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1-a^{n+1} & & & & & \end{array}$$

se deriva para $n \geq 0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Si $|a| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$ lo que implica que $y(\infty) = \frac{1}{1-a}$. La figura muestra un ejemplo de la respuesta para $a = 0{,}9$.

Ejemplo: Convolución en un sistema exponencial (4)



Función de transferencia

En sistemas de variable discreta también se le denomina a $H(z)$ función de transferencia del sistema, que corresponde con la transformada z de la respuesta al impulso unitario $h(n)$.

Si $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}$ y $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ entonces se cumple:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Cálculo de respuesta al impulso

Si se conoce la transformada de la salida $Y(z)$ y la transformada $X(z)$ de la entrada que dio origen a dicha salida, es entonces posible encontrar la respuesta al impulso:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h(n)$$

Ejemplo: Sistemas lineales discretos en el dominio z (1)

Encuentre la salida de un sistema con respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n), \qquad |a| < 1$$

ante una entrada $x(n) = u(n)$ utilizando la transformada z para su solución.

Ejemplo: Sistemas lineales discretos en el dominio z (2)

Solución: En secciones anteriores se demostró:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Con lo que se obtiene la salida en el dominio z:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})}$$

Ejemplo: Sistemas lineales discretos en el dominio z (3)

que se puede descomponer en fracciones parciales como:

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})} = \frac{1}{1 - a}\left[\frac{1}{1 - z^{-1}}\right] - \frac{a}{1 - a}\left[\frac{1}{1 - az^{-1}}\right]$$

y transformando al dominio del tiempo discreto resulta en

$$y(n) = \frac{1}{1 - a}u(n) - \frac{a}{1 - a}a^{n}u(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}u(n)$$

Lo que confirma el resultado del ejemplo anterior.

Sistemas LTI Causales

Sistemas LTI causales

Un sistema es **causal** si $y(n)$ depende solo de las entradas presentes y pasadas $\{x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots\}$, y salidas pasadas $\{y(n-1), y(n-2), \ldots\}$.

Sistemas que funcionan “en línea” deben ser causales por la imposibilidad de determinar el valor de la entrada o la salida en el futuro.

Implicaciones de causalidad

Como un sistema LTI

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \underbrace{x(n_0 - k)}_{\substack{Muestras \\ pasadas\ y \\ actual}} + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k) \underbrace{x(n_0 - k)}_{\substack{Muestras \\ futuras}}$$

se deriva que para que la salida sea independiente de entradas futuras entonces se debe cumplir $h(k) = 0$ para todo $k \leq -1$.

Un sistema LTI es causal si y solo si $h(n) = 0, \forall n < 0$.

Esto es consistente con lo mencionado para sistemas de variable continua.

Convolución con sistemas causales

Si un sistema es causal entonces la convolución puede simplificarse

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

Se suele generalizar el término causal a cualquier secuencia $x(n)$ con $x(n) = 0$ para $n < 0$, y de lo contrario, secuencia no causal.

Convolución de entradas y sistemas causales

Si tanto la entrada $x(n)$ como la respuesta impulsional son causales, entonces la convolución se simplifica en:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

Nótese que esta respuesta es a su vez causal, es decir, $y(n) = 0$ para todo $n < 0$.

ROC de sistemas causales

En general, puesto que un sistema causal tiene como respuesta al impulso una señal $h(n)$ causal, se puede afirmar que la región de convergencia de la función de transferencia $H(z)$ es el exterior de un círculo centrado en el origen.

Lo contrario no es cierto.

Estabilidad de sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Estabilidad de sistemas LTI

Un sistema arbitrario en reposo se dice ser estable de entrada acotada-salida acotada (*BIBO: bounded input – bounded output*) si toda entrada acotada produce una salida acotada:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \overset{\mathcal{T}}{\overbrace{\rightarrow}} |y(n)| \leq M_y < \infty, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Si para alguna entrada acotada se produce una salida no acotada (infinita), el sistema se dice ser inestable.

Condición de estabilidad (1)

Dada la convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

se cumple para su valor absoluto

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|M_x \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Lo que implica que $|y(n)|$ es acotada solo si

$$S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Condición de estabilidad (2)

En consecuencia un sistema LTI es **estable** si su respuesta al impulso es **absolutamente sumable**.

Esta condición es **necesaria** y **suficiente**.

Estabilidad en el dominio z (1)

Considerando que

$$|H(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$$

con $|z| = 1$, que es el círculo unitario en el plano z:

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty\,, \qquad |z| = 1$$

lo que implica un sistema descrito por $H(z)$ es estable si **ROC incluye al círculo unitario**.

Estabilidad en el dominio z (2)

De lo anterior se deriva que si un sistema es estable y causal, entonces los polos de su función de transferencia deben estar **dentro del círculo unitario**.

Sistemas en tiempo discreto y ecuaciones de diferencias

Ecuaciones de diferencias

El cálculo de la convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

sólo es aplicable en sistemas LTI que tienen una respuesta al impulso de longitud finita (llamados también sistemas **FIR** por ***Finite Impulse Response***).

Las **ecuaciones de diferencias** permiten implementar sistemas **IIR** y equivalen a las ecuaciones diferenciales en el dominio continuo.

Sistemas recursivos

Un sistema es **recursivo** si

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N), x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$$

El sistema se denomina **no recursivo** si depende únicamente de las entradas presentes y pasadas:

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$$

Sistemas FIR/IIR y recursividad

Los sistemas LTI causales FIR son **no** recursivos pues

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

Los sistemas recursivos son IIR, pero la respuesta puede calcularse en tiempo finito, requiriendo un cálculo secuencial.

Ejemplo: Sistemas discretos recursivos y no recursivos (1)

Determine la naturaleza recursiva del sistema de media acumulativa

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k)$$

Ejemplo: Sistemas discretos recursivos y no recursivos (2)

Solución: El sistema de media acumulativa es recursivo pues

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)$$

$$\Rightarrow ny(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)$$

$$\Rightarrow \ (n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$

$$= \frac{1}{n+1}\big(ny(n-1) + x(n)\big)$$

Ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes

Los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes son una subclase de los sistemas recursivos y no recursivos.

Por ejemplo

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

Los sistemas descritos por ecuaciones de diferencias son LTI.

Evaluación de ecuaciones de diferencias (1)

Si se evalúa la respuesta del sistema anterior ante la entrada $x(n)$ con condición inicial $y(-1)$:

$$y(0) = ay(-1) + x(0)$$
$$y(1) = ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1)$$
$$y(2) = ay(1) + x(2) = a^3y(-1) + a^2x(0) + ax(1) + x(2)$$

$$\vdots$$

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + a^n x(0) + a^{n-1}x(1) + \cdots + a^0 x(n)$$

$$= \underbrace{a^{n+1}y(-1)}_{y_{zi}(n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)}_{y_{zs}(n)}, \qquad n > 0$$

Evaluación de ecuaciones de diferencias (2)

- El término $y_{zi}(n)$ es la respuesta de entrada cero, respuesta natural o respuesta libre.
- El término $y_{zs}(n)$ es la respuesta de estado cero o respuesta forzada, dada por la convolución de $x(n)$ con $h(n)$:

$$h(n) = a^n u(n)$$

donde los índices son finitos debido a la causalidad de ambas señales $\mathrm{x}(n)$ y $h(n)$.

Evaluación de ecuaciones de diferencias (3)

El caso general se puede denotar como:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

o con $a_0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

con N el orden de la ecuación de diferencias (o del sistema).

Evaluación de ecuaciones de diferencias (4)

- Las condiciones iniciales $y(-1), \ldots, y(-N)$ resumen toda la historia pasada del sistema, y son necesarias para efectuar el cálculo de las salidas presentes y futuras.
- Cualquier sistema recursivo descrito por una ecuación de diferencias lineal con coeficientes constantes es un sistema de respuesta infinita al impulso, pero no todo sistema de respuesta infinita LTI puede ser descrito con estas ecuaciones.

Evaluación de ecuaciones de diferencias (5)

En el dominio z la ecuación de diferencias se transforma con la propiedad de desplazamiento, en

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Longitud infinita a sistemas recursivos

Puesto que la descomposición en fracciones parciales de $H(z)$ contendrá una suma de términos con **un único polo** de orden n con una secuencia de **longitud infinita**, se deriva que todo sistema descrito por una **ecuación de diferencias con coeficientes constantes** tiene una respuesta al impulso $h(n)$ de **longitud infinita**.

Ejemplo: Ecuación de diferencias y transformada z (1)

Encuentre la ecuación de diferencias correspondiente a un sistema causal con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

Ejemplo: Ecuación de diferencias y transformada z (2)

Solución: se tiene que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

esto es equivalente a

$$Y(z)\left[1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right] = X(z)[1 + z^{-1}]$$

$$\updownarrow$$

$$y(n) + \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

con lo que finalmente se obtiene

$$y(n) = -\frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

Transformada z unilateral: definición y propiedades

Al igual que en el caso de sistemas en tiempo continuo, la mayoría de aplicaciones en ingeniería involucran sistemas y señales causales, por lo que tiene sentido definir la transformada z unilateral.

Transformada z unilateral

La transformada z unilateral se define como:

$$\mathcal{Z}_u\{x(n)\} = X(z) \stackrel{!}{\triangleq} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

y la relación se denota como

$$x(n) \overset{\mathcal{Z}_u}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(z)$$

Características de la transformada z unilateral

Tiene las siguientes características

1. No contiene información sobre la señal $x(n)$ para los valores negativos de n.
2. Es única sólo para señales causales, puesto que éstas son las únicas señales que son cero para $n < 0$.
3. $\mathcal{Z}_u\{x(n)\} = \mathcal{Z}\{x(n)u(n)\}$
4. Puesto que $x(n)u(n)$ es causal, la **ROC** de su transformada $X(z)$ es siempre exterior a un círculo.

Por lo tanto, cuando se trate con transformadas z unilaterales, no es necesario referirse a su región de convergencia.

Ejemplo: Transformada z unilateral (1)

Determine la transformada z unilateral de:

1. $x_1(n) = \{\underbrace{1}_{\uparrow}, 2,5,7,0,1\}$
2. $x_2(n) = \{1,2, \underbrace{5}_{\uparrow}, 7,0,1\}$
3. $x_3(n) = \{2,4, \underbrace{5}_{\uparrow}, 7,0,1\}$
4. $x_4(n) = \delta(n)$
5. $x_5(n) = \delta(n-k), k > 0$
6. $x_6(n) = \delta(n+k), k > 0$

Ejemplo: Transformada z unilateral (2)

Solución:

1. $x_1(n) = \left\{\underbrace{1}_{\uparrow}, 2,5,7,0,1\right\} \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 1z^{-5}$
2. $x_2(n) = \left\{1,2,\underbrace{5}_{\uparrow}, 7,0,1\right\} \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$
3. $x_3(n) = \left\{2,4,\underbrace{5}_{\uparrow}, 7,0,1\right\} \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$
4. $x_4(n) = \delta(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1$
5. $x_5(n) = \delta(n-k), k > 0 \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-k}, k > 0$
6. $x_6(n) = \delta(n+k), k > 0 \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 0, k > 0.$

Nótese que la transformada z unilateral no es única para señales con componentes diferentes (por ejemplo: $X_2(z) = X_3(z)$).

Propiedades de la transformada z unilateral

Retardo temporal

Si $x(n) \overset{z_u}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(z)$, entonces

$$x(n-k) \overset{z_u}{\circ\!\!-\!\!\bullet} z^{-k}\left[X(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^{n}\right]$$

para $k > 0$. Si $x(n)$ es causal entonces $x(n-k) = z^{-k}X(z)$.

Adelanto temporal

Si $x(n) \overset{z_u}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(z)$, entonces

$$x(n+k) \overset{z_u}{\circ\!\!-\!\!\bullet} z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{-n} \right]$$

para $k > 0$.

Ejemplo: Transformada z unilateral y desplazamiento en el tiempo (1)

Calcule la transformada z unilateral de:

1. $x(n) = a^n$
2. $x_2(n) = x(n-2)$
3. $x_3(n) = x(n+2)$

Ejemplo: Transformada z unilateral y adelanto en el tiempo (2)

Solución:

- Caso 1

$$\mathcal{Z}_u\{x(n)\} = \mathcal{Z}\{x(n)u(n)\} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- Caso 2

$$\mathcal{Z}_u\{x(n-2)\} = z^{-2}\left[X(z) + \sum_{n=1}^{2} x(-n)z^{n}\right]$$

$$= z^{-2}[X(z) + x(-1)z + x(-2)z^{2}]$$

$$= \frac{z^{-2}}{1 - az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$$

Ejemplo: Transformada z unilateral y adelanto en el tiempo (3)

- Caso 3

$$\mathcal{Z}_u\{x(n+2)\} = z^2\left[X(z) - \sum_{n=0}^{1} x(n)z^{-n}\right]$$

$$= z^2\left[\frac{1}{1-az^{-1}} - 1 - az^{-1}\right]$$

$$= \frac{z^2}{1-az^{-1}} - z^2 - az^1$$

Condiciones iniciales no nulas

La propiedad de desplazamiento de la transformada z unilateral se utiliza en la solución de ecuaciones de diferencias con coeficientes constantes y **condiciones iniciales no nulas**.

Teorema del valor final

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

Ejemplo: Teorema del valor final (1)

Determine la respuesta del sistema con respuesta impulsional $h(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1$, ante un escalón unitario, cuando $n \to \infty$.

Ejemplo: Teorema del valor final (2)

Solución: La salida del sistema ante la entrada dada se calcula en el dominio z como:

$$y(n) = h(n) * x(n) \qquad Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z^2}{(z - a)(z - 1)}$$

ROC: $|z| > 1$

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1} (z - 1) \underbrace{\frac{z^2}{(z - a)(z - 1)}}_{ROC:|z|>a<1} = \frac{1}{1 - a}$$

Respuestas natural y forzada

Ejemplo: Respuestas natural y forzada (1)

Un sistema LTI en tiempo discreto está descrito por la ecuación de diferencias:

$$y(n) = \frac{4}{5}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) + x(n) - x(n-2)$$

Encuentre la respuesta natural del sistema ante las condiciones iniciales $y(-1) = 0$ y $y(-2) = -4$, y la respuesta forzada del sistema ante un escalón unitario.

Ejemplo: Respuestas natural y forzada (2)

Solución: Aplicando la transformada z unilateral, sus propiedades de retraso en el tiempo, y considerando que la entrada $x(n)$ es causal, se cumple:

$$Y(z) = \frac{4}{5}[Y(z)z^{-1} + y(-1)] - \frac{1}{4}[Y(z)z^{-2} + y(-1)z^{-1} + y(-2)]$$
$$+X(z) - X(z)z^{-2} - x(-1)z^{-1} - x(-2)$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right] = X(z)[1 - z^{-2}] + \frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2)$$
$$-\frac{1}{4}z^{-1}y(-1)$$

Ejemplo: Respuestas natural y forzada (3)

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} X(z)}_{Respuesta\ forzada} + \underbrace{\frac{\frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) - \frac{1}{4}z^{-1}y(-1)}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}}_{Respuesta\ Natural}$$

Ambas componentes, la natural y la forzada, comparten los mismos polos, y determinan la forma de las señales en cuanto a atenuación/amplificación exponenciales y la frecuencia de las componentes oscilatorias.

Los ceros serán responsables de la fase y amplitud de las señales.

Ejemplo: Respuestas natural y forzada (4)

La respuesta natural del sistema se obtiene haciendo $X(z) = 0$:

$$Y(z) = \frac{\frac{4}{5}y(-1) - \frac{1}{4}y(-2) - \frac{1}{4}z^{-1}y(-1)}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

y con las condiciones iniciales dadas

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - j\frac{2}{3}}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)} + \frac{\frac{1}{2} + j\frac{2}{3}}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)}$$

Ejemplo: Respuestas natural y forzada (5)

Por lo tanto

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n\, arctan\frac{3}{4}\right) u(n) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n sen\left(n\, arctan\frac{3}{4}\right) u(n)$$

La respuesta forzada ante un escalón unitario estará dada por la transformada z inversa de

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

El cero en 1 se cancela con el polo en el mismo sitio.

Ejemplo: Respuestas natural y forzada (6)

El lector puede demostrar por descomposición en fracciones parciales que: expresión se puede reescribir como:

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - j\frac{7}{3}}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} + j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)} + \frac{\frac{1}{2} + j\frac{7}{3}}{\left(1 - \left(\frac{2}{5} - j\frac{3}{10}\right)z^{-1}\right)}$$

que corresponde a la señal

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n \arctan\frac{3}{4}\right)u(n) + \frac{14}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n sen\left(n\, arctan\frac{3}{4}\right)u(n)$$

Interconexión de sistemas

Interconexión de sistemas

Hay dos maneras fundamentales de interconectar sistemas:

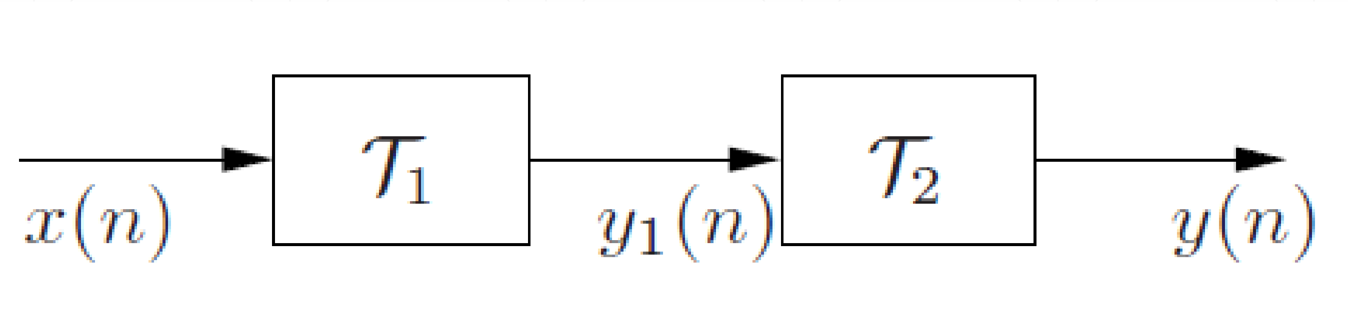
- Interconexión en cascada (serie)
- Interconexión paralela

Interconexión en Cascada

La interconexión en cascada se describe con sistemas de la forma:

$$y(n) = \mathcal{T}_1\left[\mathcal{T}_2[x(n)]\right] = \mathcal{T}_c[x(n)]$$

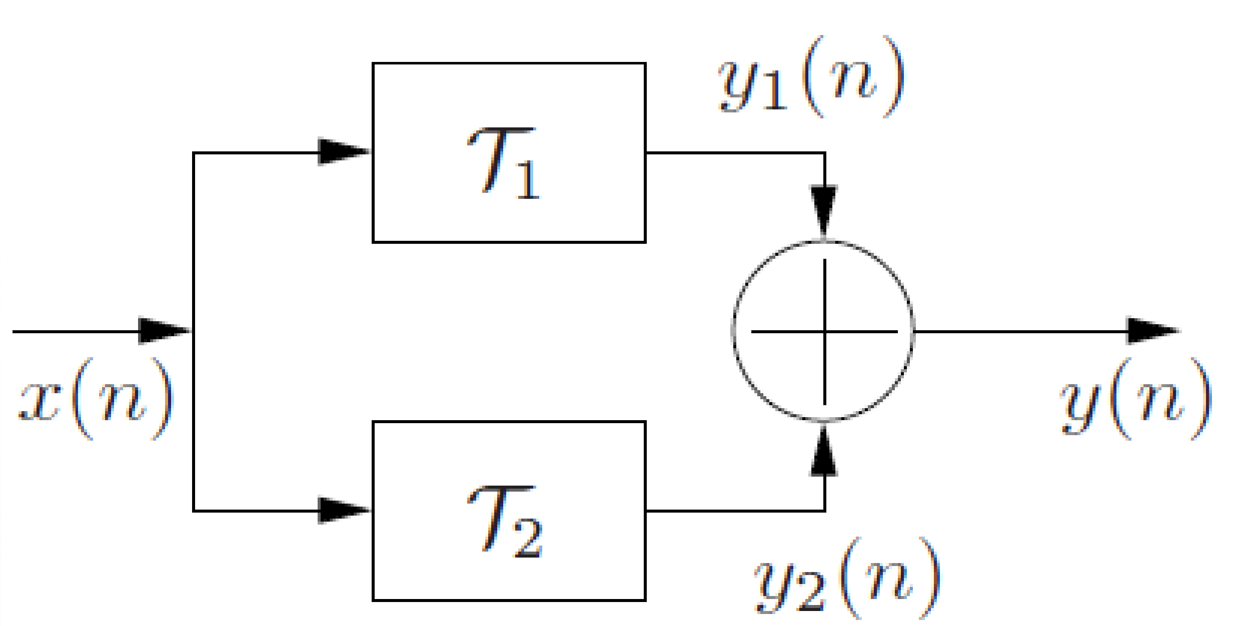
En general, para la conexión en cascada el orden de los bloques no es relevante. Si los sistemas son lineales e invariantes en el tiempo entonces $\mathcal{T}_c$ es invariante en el tiempo, y $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$.



Interconexión en paralelo

La interconexión en paralelo se describe por:

$$y(n) = \mathcal{T}_1[x(n)] + \mathcal{T}_2[x(n)] = \mathcal{T}_p[x(n)]$$



Interconexión en el dominio z (1)

Si el sistema es LTI, entonces $y_1(n) = x(n) * h(n)$ y por tanto en el dominio z $Y_1(z) = X(z)H_1(z)$. Puesto que también se cumple $Y(z) = H_2(z)Y_1(z)$ se concluye que

$$Y(z) = [H_1(z)H_2(z)]X(z)$$

o en otras palabras la función de transferencia de la cascada de sistemas es igual al producto de las mismas.

Interconexión en el dominio z (2)

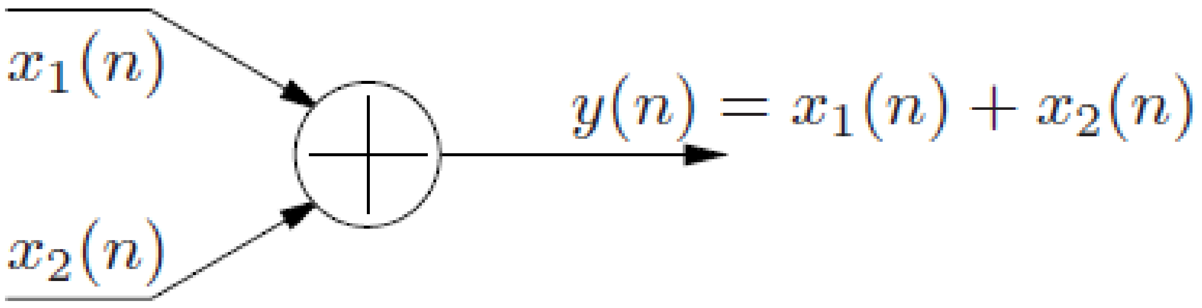
Para la conexión en paralelo se puede hacer uso de la linealidad y así obtener

$$Y(z) = [H_1(z) + H_2(z)]X(z)$$

Diagrama de Bloques

Sumador

El **sumador** es un bloque que realiza la adición entre dos señales, sumando las muestras en un instante dado y se representa como lo indica la figura:



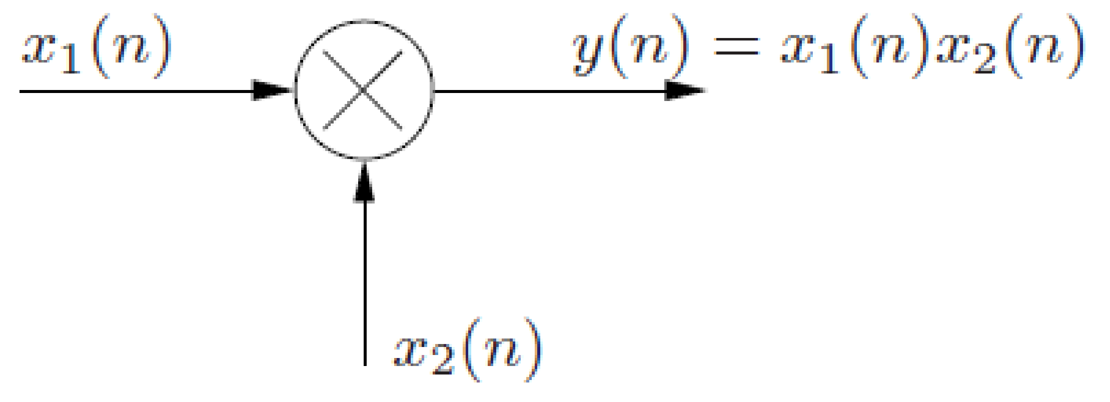
Multiplicador por constante

El **multiplicador** por constante es un bloque que escala la amplitud y cambia la fase de una señal.

$$x(n) \xrightarrow{\quad a \quad} y(n) = ax(n)$$

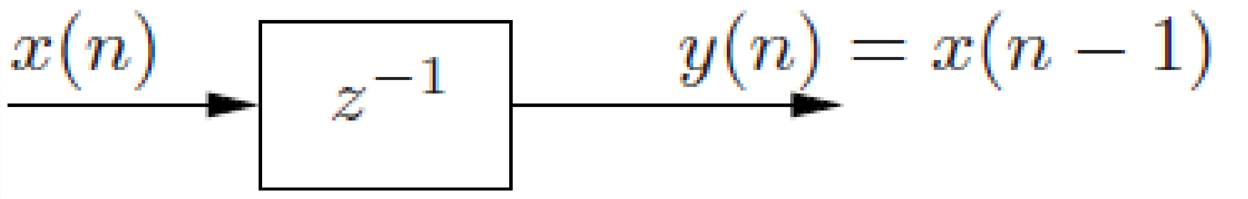
Multiplicador de señal

El **multiplicador** de señal es un bloque que multiplica en cada instante de tiempo sus diversas entradas.



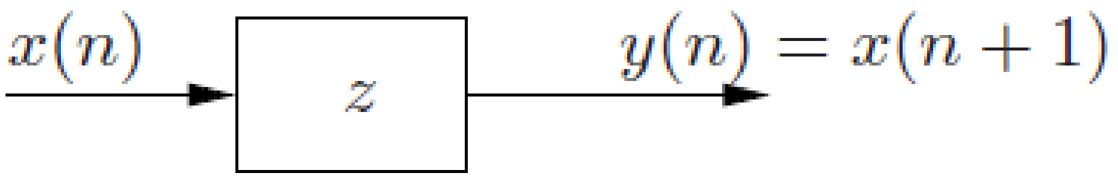
Retardador de un elemento

El **retardador** es un bloque que retrasa la señal de entrada en una unidad de tiempo. Este es utilizado principalmente en el análisis y modelado de sistemas discretos.



Adelantador de un elemento

El **adelantador** es un elemento que adelanta una señal una unidad de tiempo en el futuro. No es realizable físicamente y solo existe en sistemas discretos que operan “fuera de línea”.



Ejemplo: Diagrama de bloques (1)

Realice el diagrama de bloques para

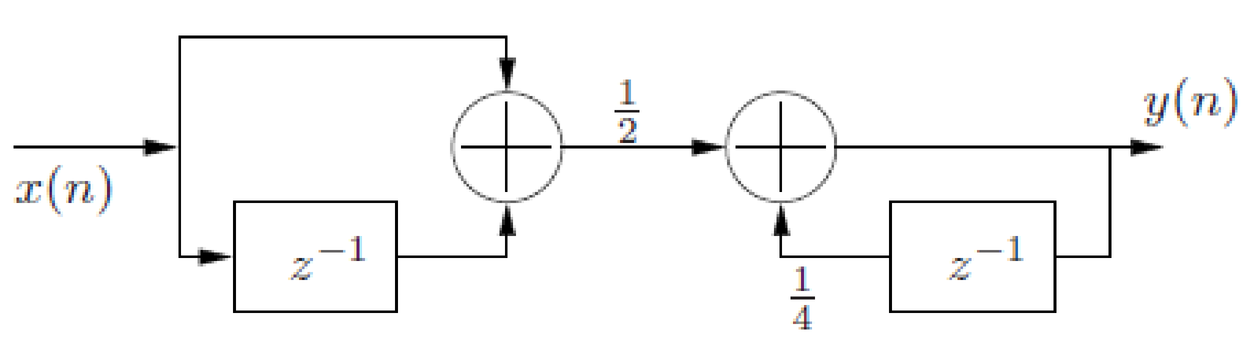
$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

Ejemplo: Diagrama de bloques (2)

Solución: Nótese primero que esta expresión puede reescribirse de la siguiente forma:

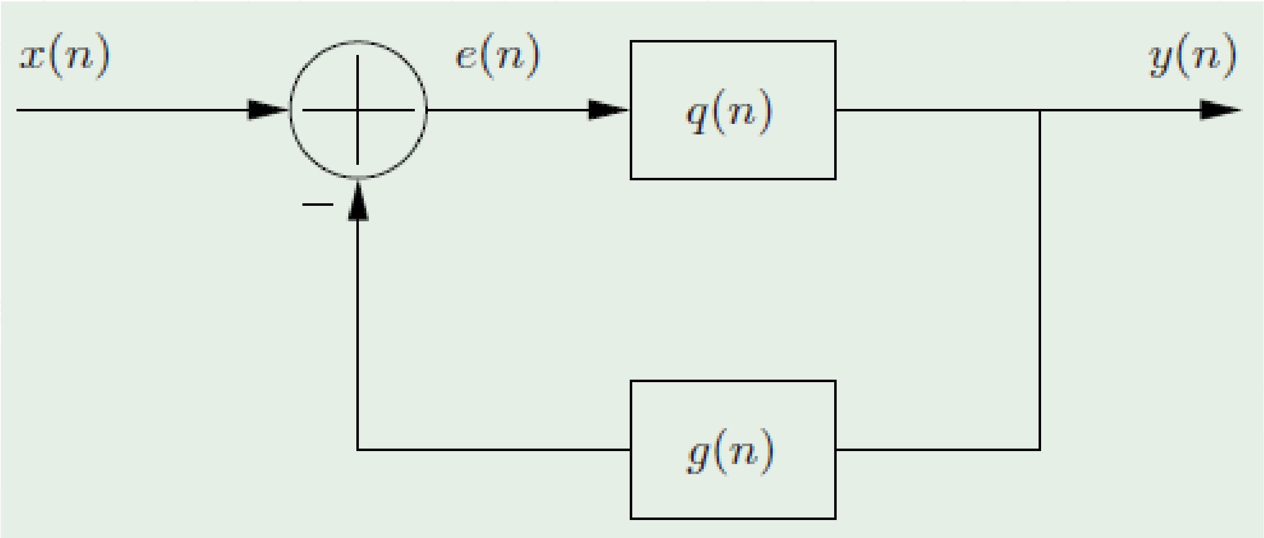
$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1))$$

con lo que se deriva fácilmente el diagrama mostrado en la siguiente figura:



Ejemplo: Sistema retroalimentado (1)

Encuentre la función de transferencia del sistema mostrado en la siguiente figura:



Ejemplo: Sistema retroalimentado (2)

Solución: Las funciones en los bloques denotan sus respuestas al impulso. Así se tiene que los bloques y señales tienen las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} x(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ X(z) \\ y(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(z) \\ q(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ Q(z) \\ g(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ G(z) \\ e(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ E(z) \end{aligned}$$

La señal $e(n)$ se obtiene con la substracción de la entrada $x(n)$ y la salida del bloque con función de transferencia $G(z)$, y se cumple entonces en el dominio z que $E(z) = X(z) - Y(z)G(z)$

Ejemplo: Sistema retroalimentado (3)

Aplicando las propiedades de linealidad y de convolución se tiene que:

$$E(z)Q(z) = Y(z)$$

$$[X(z) - G(z)Y(z)]Q(z) = Y(z)$$

$$X(z)Q(z) = Y(z)[1 + G(z)Q(z)]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Q(z)}{1 + G(z)Q(z)}$$

Esta estructura será utilizada ampliamente en control automático. Nótese que si $X(z)$, y $Q(z)$, $G(z)$ son funciones racionales, entonces $H(z)$ también lo será.

FIN

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.