Integración Compleja

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

Integrales indefinidas

Integrales indefinidas

Las integrales indefinidas tienen la propiedad:

$$F(x) = \int f(x)dx \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

La continuación analítica de lo anterior puede utilizarse para definir las integrales indefinidas en variable compleja:

$$F(z) = \int f(z)dz \Rightarrow \frac{d}{dz}F(z) = f(z)$$

Integrales definidas

Integrales definidas

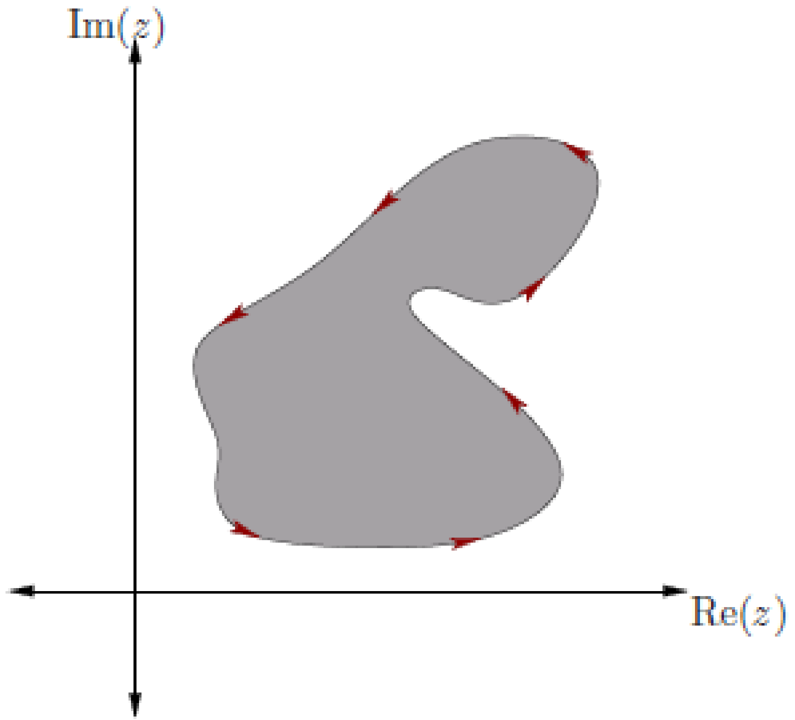
Las integrales **definidas** de funciones reales se definen en un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

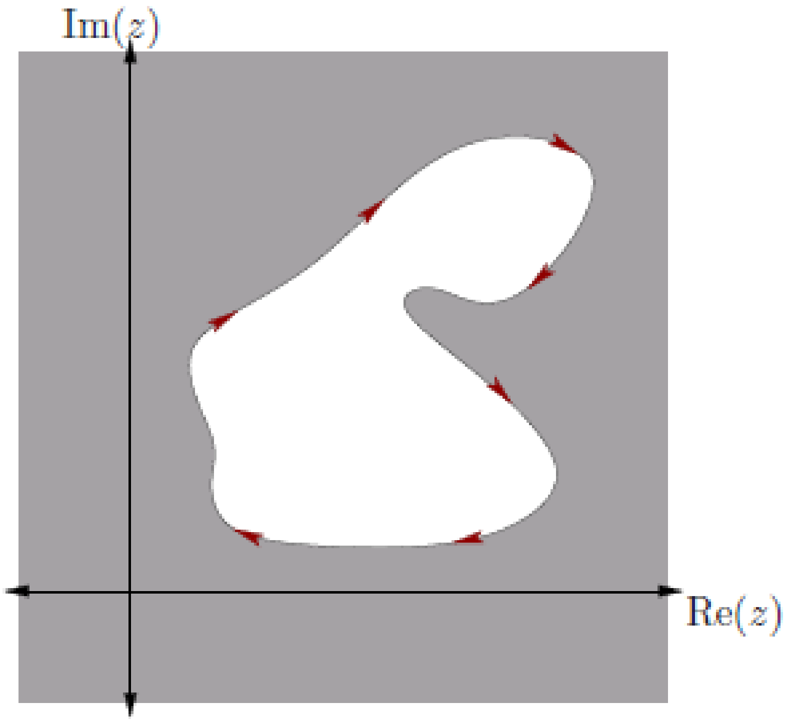
Las integrales **definidas** de funciones de variable compleja requieren una **trayectoria de integración** C:

$$C = \{z: z(t) = x(t) + jy(t), \qquad t_a \leq t \leq t_b\}$$

Curvas de integración cerradas



Sentido positivo



Sentido negativo

Integrales de contorno

Integrales de Contorno

La integral de contorno se define como

$$\int_C f(z)dz$$

En caso de que la trayectoria C sea cerrada se denota como

$$\oint_C f(z)dz$$

Integral compleja en términos reales

Si se utiliza $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, con $z = x + jy$ entonces la integral anterior puede expresarse como

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u(x,y) + jv(x,y)](dx + jdy)$$

$$= \int_C [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + j\int_C [v(x,y)dx + u(x,y)dy]$$

Que corresponden a integrales de línea de variable real.

Integral compleja en términos reales

Estas integrales pueden calcularse utilizando la expresión paramétrica de C, de tal forma que

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_a}^{t_b} f\big(z(t)\big)\frac{dz(t)}{dt}dt$$

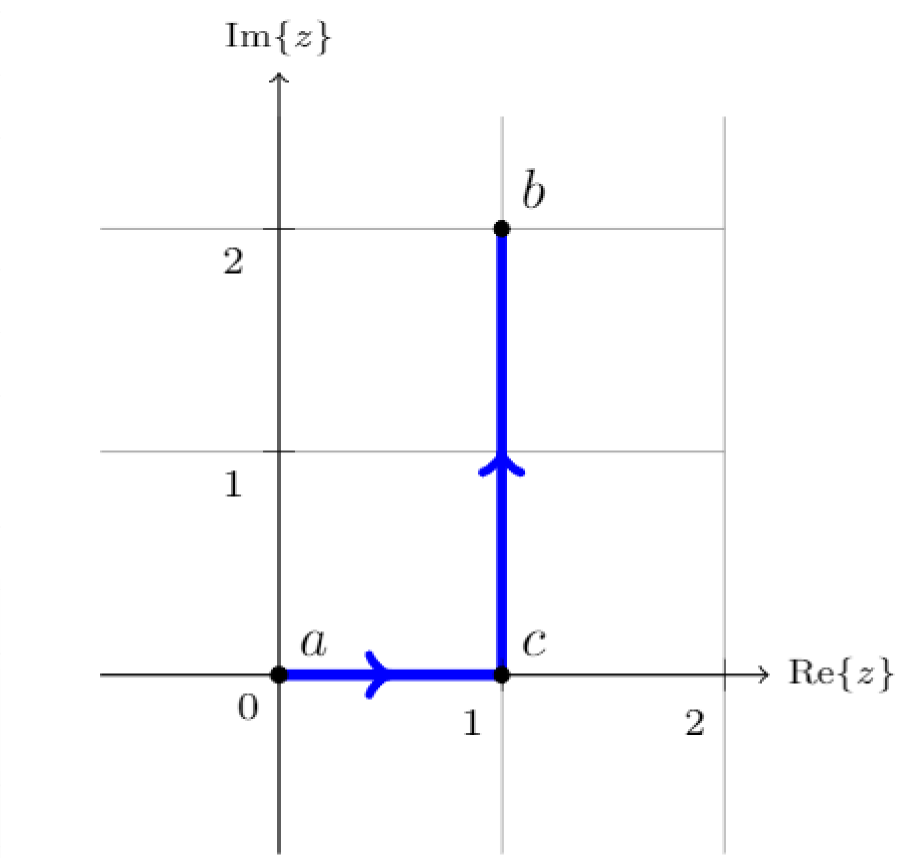
$$= \int_{t_a}^{t_b}[u(x(t), y(t)) + jv\big(x(t), y(t)\big)]\left(\frac{d}{dt}x(t) + j\frac{d}{dt}y(t)\right)dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b}\left[u\big(x(t), y(t)\big)\frac{d}{dt}x(t) - v\big(x(t), y(t)\big)\frac{d}{dt}y(t)\right]dt$$

$$+j\int_{t_a}^{t_b}\left[v\big(x(t), y(t)\big)\frac{d}{dt}x(t) + u(x(t), y(t))\frac{d}{dt}y(t)\right]dt$$

Ejemplo: Integral de contorno (1)

Encuentre el valor de la integral de línea $\int_C z^2 dz$ para la trayectoria C de $a = (0 + j0)$ a $b = (1 + j2)$ formada por dos segmentos de recta, de $a = (0 + j0)$ a $c = (1 + j0)$ y el segundo de $c = (1 + 0j)$ a $b = (1 + j2)$.



Ejemplo: Integral de contorno (2)

Solución: Nótese que el primer segmento ac es horizontal y el segundo cb es vertical

Como

$$z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j(2xy)$$

Entonces con

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u(x,y) + jv(x,y)](dx + jdy)$$

$$= \int_C [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + j\int_C [v(x,y)dx + u(x,y)dy]$$

$$I = \int_C z^2 dz$$

$$= \int_C [(x^2 - y^2)dx - 2xydy] + j\int_C [2xydx + (x^2 - y^2)dy]$$

Ejemplo: Integral de contorno (3)

Esta integral se puede separar como la suma de las integrales en los dos segmentos $I = I_{ac} + I_{bc}$. Para el primero de ellos, por ser horizontal se tiene que y es constante ($y = 0$) y por tanto $dy = 0$:

$$I_{ac} = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

El segmento ca es vertical con x constante ($x = 1$) y por tanto $dx = 0$:

$$\begin{aligned} I_{cb} &= \int_0^2 -2y dy + j \int_0^2 (1 - y^2) dy \\ &= [-y^2]_0^2 + j\left[y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^2 \\ &= -4 - j\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo: Integral de contorno (4)

Y finalmente

$$\int_C z^2 dz = I_{ac} + I_{cb}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) + \left(-4 - j\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{-11 - j2}{3}$$

Integrales cerradas de funciones analíticas

En el ejemplo anterior el integrando es analítico en todo el plano complejo z. En dicho caso siempre se va a cumplir que si la integral indefinida de $f(z)$ es $F(z)$, entonces el valor de la integral

$$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$$

Ejemplo: Integral de contorno alrededor de un polo simple (1)

Encuentre la integral de $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ con una trayectoria circular de radio r alrededor del punto constante complejo z_0.

Ejemplo: Integral de contorno alrededor de un polo simple (2)

Solución: El cálculo de esta integral se puede simplificar haciendo uso de la sustitución de variable $\tilde{z} = z - z_0$. Puesto que $\mathrm{d}\tilde{z} = dz$ entonces

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}} d\tilde{z}$$

Donde $\tilde{C}$ es entonces ahora una trayectoria circular de radio r alrededor del origen del plano $\tilde{z}$. Esta circunferencia se puede representar paramétricamente como

$$\tilde{z}(t) = rcos(t) + \mathrm{jr\,sen(t)}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ejemplo: Integral de contorno alrededor de un polo simple (3)

Y su derivada es por tanto

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = -rsen(t) + \mathrm{jrcos(t)}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$= j^2 rsen + jrcos(t)$$

$$= j(rcos(t) + jrsen(t))$$

$$= j\tilde{z}(t)$$

Ejemplo: Integral de contorno alrededor de un polo simple (4)

Utilizando

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$$

Se obtiene entonces

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} d\tilde{z}(t) = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)}\frac{d}{dt}\tilde{z}(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{rcos(t) + jrsen(t)} j\big(rcos(t) + jrsen(t)\big)dt$$

$$= j\int_0^{2\pi} dt = 2\pi j$$

Ejemplo: Integral de contorno alrededor de un polo simple (5)

El mismo resultado anterior se obtiene con la parametrización $\tilde{z}(t) = re^{jt}$, con derivada $d\tilde{z}(t)/dt = jre^{jt} = j\tilde{z}(t)$. Entonces

$$\int_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} d\tilde{z}(t) = \int_{\tilde{C}} \frac{1}{\tilde{z}(t)} \frac{d}{dt}\tilde{z}(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{jt}} jre^{jt} dt = j\int_0^{2\pi} dt$$

$$= 2\pi j$$

Si se integra en sentido de las manecillas del reloj (por ejemplo utilizando t de 0 a -2π), entonces el resultado de esta integral sería $-2\pi j$.

Ejemplo: Integral de contorno alrededor de un polo simple (6)

En resumen, si se integra en una trayectoria circular centrada en un polo simple, en sentido contrario a las manecillas del reloj, el valor de la integral es $2\pi j$, independientemente del radio de dicha trayectoria circular y de la ubicación del polo.

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi j$$

Ejemplo: Integral de contorno cerrada alrededor de un polo múltiple (1)

Encuentre la integral de $f(z) = \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n$, para $n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$ alrededor de una circunferencia de radio r.

Ejemplo: Integral de contorno cerrada alrededor de un polo múltiple (2)

Solución: Se reemplaza primero $\tilde{z} = z - z_0$ y $d\tilde{z} = dz$, lo que traslada la trayectoria circular al origen de $\tilde{z}$. Se utiliza como curva:

$$\tilde{z}(t) = re^{jt}, \qquad \frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = jre^{jt} = j\tilde{z}(t)$$

Y considerando que $n \neq 1$ entonces:

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{1}{\left(\tilde{z}(t)\right)^n} d\tilde{z}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{jnt}} jre^{jt} dt$$

$$= jr^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{jt(1-n)} dt = jr^{1-n} \left. \frac{e^{jt(1-n)}}{j(1-n)} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{r^{1-n}}{1-n} \left(e^{j(1-n)2\pi} - 1\right) = 0$$

Ejemplo: Integral de contorno cerrada alrededor de un polo múltiple (3)

Puesto que $(1-n)$ es entero y $e^{j2k\pi}=1$ para $k\in\mathbb{Z}$. Resumiendo, y considerando el resultado del ejemplo anterior:

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi j & si\ n=1 \\ 0 & si\ n\neq 1 \end{cases}$$

Para una trayectoria de integración circular cerrada C centrada en el polo z_0 y en sentido positivo (sentido contrario a las manecillas del reloj).

Teorema de la Integral de Cauchy

Teorema de la integral de Cauchy

Si $f(z)$ es una función analítica con derivada $f'(z)$ continua en todos los puntos dentro y sobre una curva cerrada simple C, entonces se cumple:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Teorema de la integral de Cauchy

Puede demostrarse que el Teorema de la integral de Cauchy sigue siendo válido aún sin la restricción de continuidad de $f'(z)$, en cuyo caso recibe el nombre de teorema de Cauchy-Goursat o teorema fundamental de integración compleja.

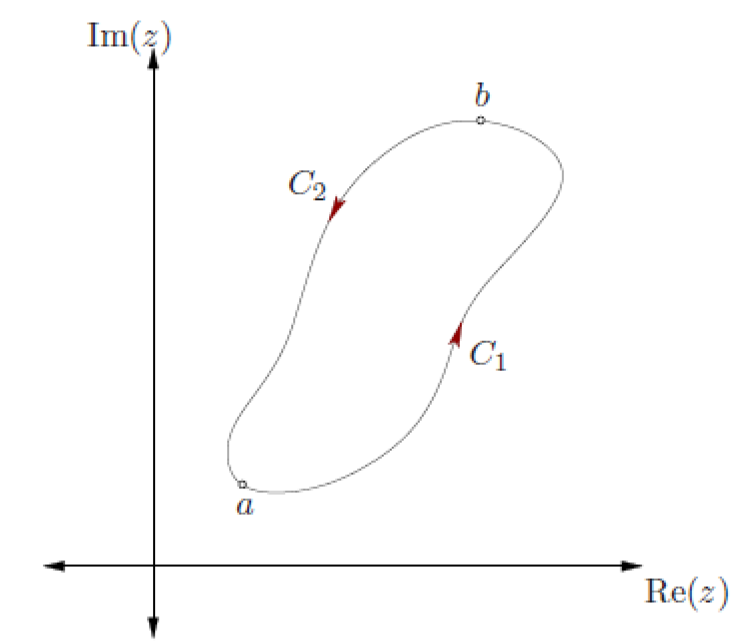
Indepencia de trayectoria

Consecuencia del teorema de la integral de Cauchy: el valor de la integral de contorno de un punto a a un punto b es independiente de la trayectoria:

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{-C_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{-C_2} f(z)dz$$

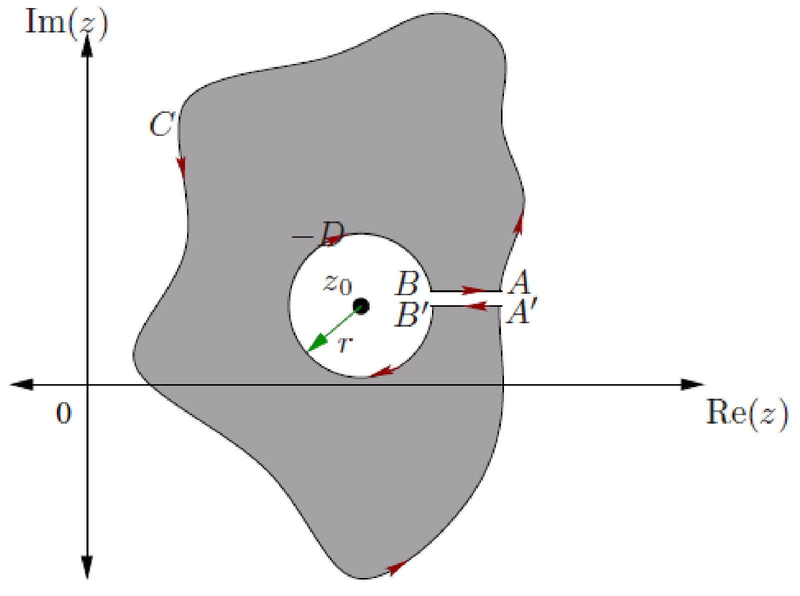


Integración compleja: polos dentro del contorno

En la práctica se utilizan con frecuencia funciones polinomiales racionales, que contienen singularidades del tipo polos; como por ejemplo:

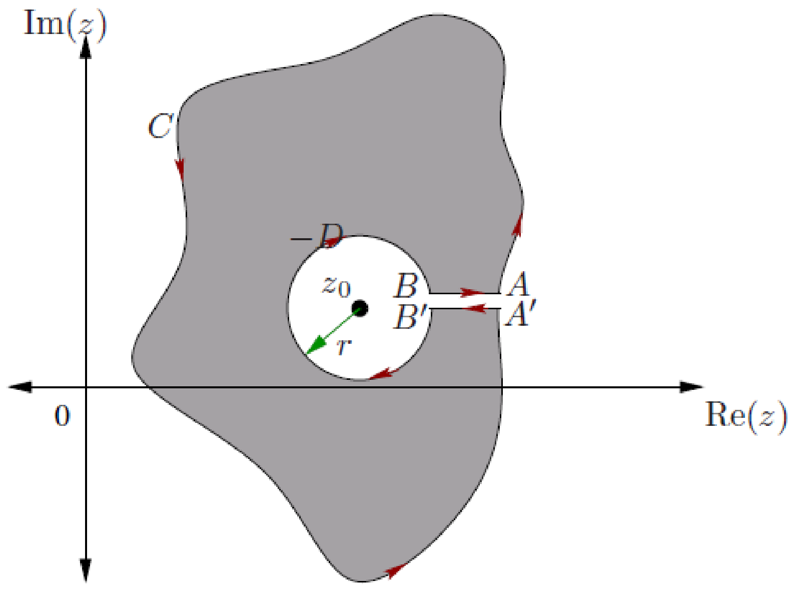
$$f_1(z) = \frac{1}{z - z_0}, \qquad f_2(z) = \frac{z}{(z - z_0)^n (z + z_1)}$$

Para poder evaluar integrales con estas funciones se utiliza una deformación de la trayectoria para evitar incluir la singularidad dentro de la región acotada.



Integración compleja: polos dentro del contorno

El ancho del canal entre BA y $B'A'$ se elige infinitesimalmente pequeño, de tal modo que el segmento de B a A es prácticamente idéntico al que va de A' a B' pero en sentido contrario.



$$\oint_C f(z)dz + \int_{A'B'} f(z)dz + \oint_{-D} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0$$

Integración compleja: polos dentro del contorno

Puesto que $A'B'$ y BA son prácticamente el mismo segmento:

$$\int_{A'B'} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz$$

Y considerando que

$$\oint_{-D} f(z)dz = -\oint_{D} f(z)dz$$

entonces

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{D} f(z)dz$$

El valor de la integral de contorno alrededor de un polo es independiente de la trayectoria de integración elegida para rodear al polo.

Ejemplo: Integración compleja (1)

Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{1}{z-(2+j)}dz$$

alrededor de cualquier contorno cerrado que incluya a $z = 2 + j$

Ejemplo: Integración compleja (2)

Solución:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_D f(z)dz = \oint_C \frac{1}{z-(2+j)}dz$$

Esta integral es igual a integrar en un círculo de un radio r suficientemente pequeño centrado en $z_0 = 2 + j$.

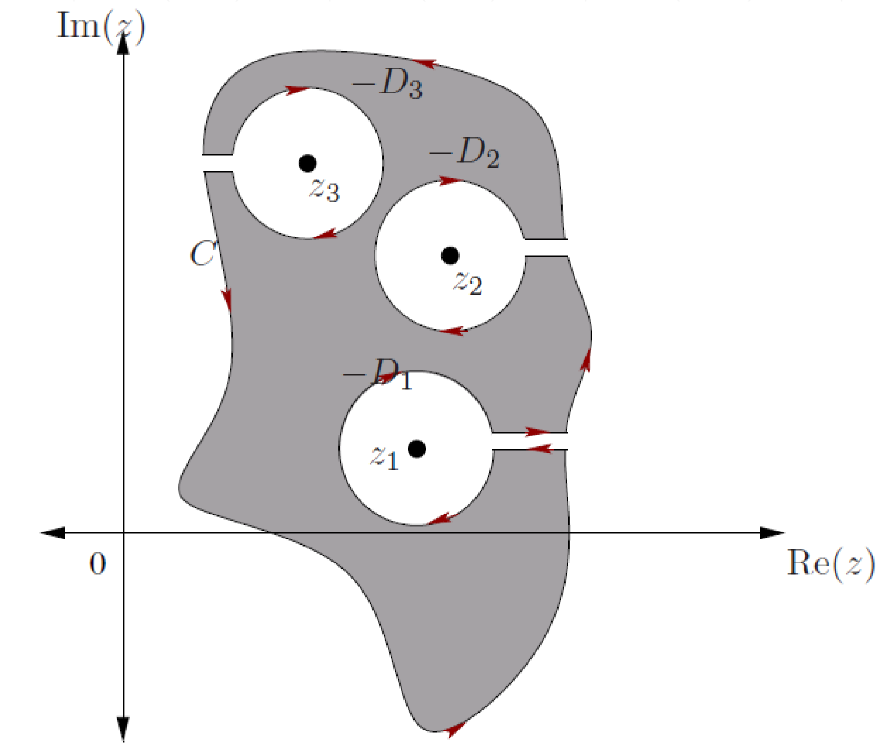
Y considerando que:

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi j & si\ n = 1 \\ 0 & si\ n \neq 1 \end{cases}$$

Se tiene que el valor de esta integral es $2\pi j$.

Varias singularidades

En general, si la curva C encierra a varias singularidades, se puede proceder de forma análoga al principio anterior y evadir las singularidades.



$$\oint_C f(z)dz = \int_{D_1} f(z)dz + \int_{D_2} f(z)dz + \int_{D_3} f(z)dz + \cdots + \int_{D_n} f(z)dz$$

Ejemplo: Teorema de la integral de Cauchy (1)

Encuentre el valor de la integral de contorno cerrado de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+j)}$$

si la trayectoria de integración

1. Contiene a ambas singularidades
2. Contiene a $z = -j$, pero no a $z = 1$.

Ejemplo: Teorema de la integral de Cauchy (2)

Solución: La integral se simplifica si se separa el integrando en fracciones parciales

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-j}{(z-1)} + \frac{1+j}{(z+j)}\right)$$

puesto que ahora la integral se puede reescribir como

$$\oint_C f(z)dz = \frac{1}{2}\left[(1-j)\underbrace{\oint_C \frac{1}{z-1}dz}_{I_1} + (1+j)\underbrace{\oint_C \frac{1}{z+j}dz}_{I_2}\right]$$

donde I_1 e I_2 se pueden calcular fácilmente considerando resultados anteriores.

Ejemplo: Teorema de la integral de Cauchy (3)

Para el caso en que C encierra ambos polos entonces $I_1 = I_2 = 2\pi j$ y así:

$$\oint_C f(z)dz = \frac{2\pi j}{2} 2 = 2\pi j$$

Para el caso en que C solo encierra a $z = -j$ entones I_1 es cero por el teorema de Cauchy e $I_2 = 2\pi j$, lo que resulta en

$$\oint_C f(z)dz = \frac{2\pi j}{2}(1 + j) = \pi(-1 + j)$$

Fórmula de la integral de Cauchy

Fórmula de la Integral de Cauchy

Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre un contorno de integración C. Si z_0 se encuentra dentro de C entonces:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Que también puede reescribirse como:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = f^{(n)}(z_0)\frac{2\pi j}{n!}$$

Ejemplo: Fórmula integral de Cauchy (1)

Encuentre el valor de la integral de contorno cerrado de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+j)}$$

si la trayectoria de integración contiene a ambas singularidades.

Ejemplo: Fórmula integral de Cauchy (2)

Solución: La integral se calcula como:

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{D_1} f(z)dz + \oint_{D_2} f(z)dz$$

Donde D_1 contiene solo a $z = 1$ y D_2 solo a $z = -j$.

Ejemplo: Fórmula integral de Cauchy (3)

El primer término se puede escribir entonces como

$$\oint_{D_1} f(z)dz = \oint_{D_1} \frac{z}{(z-1)(z+j)}dz = \oint_{D_1} \frac{\frac{z}{z+j}}{z-1}dz$$

Lo que ahora se puede calcular utilizando la fórmula integral de Cauchy como

$$\oint_{D_1} f(z)dz = 2\pi j\left(\left.\frac{z}{z+j}\right|_{z=1}\right) = 2\pi j\frac{1}{1+j} = \pi(1+j)$$

Ejemplo: Fórmula integral de Cauchy (4)

El segundo término se resuelve de forma análoga:

$$\oint_{D_2} f(z)dz = \oint_{D_2} \frac{z}{(z-1)(z+j)}dz = \oint_{D_2} \frac{\frac{z}{z-1}}{z+j}dz$$

Y con la fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{D_2} f(z)dz = 2\pi j\left(\left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=-j}\right) = 2\pi j\frac{-j}{-j-1} = \pi(-1+j)$$

De forma tal que

$$\oint_{C} f(z)dz = \pi(1+j-1+j) = 2\pi j$$

Teorema del Residuo

Teorema del Residuo: Construcción (1)

Sea $f(z)$ una función analítica excepto en un número finito de singularidades dentro de la región S delimitada por la curva C. Si el contorno se deforma para excluir a las singularidades, entonces

$$I = \oint_C f(z)dz = \oint_{D_1} f(z)dz + \oint_{D_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{D_n} f(z)dz$$

Donde D_i es una pequeña región circular que evade a la singularidad z_i, $i = 1,2, \dots, n.$

Teorema del Residuo: Construcción (2)

Asúmase que $f(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_i$, lo que conduce a un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}^{(i)}}{(z - z_i)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{z - z_i} + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(z - z_i) + \cdots + a_k^{(i)}(z - z_i)^k + \cdots$$

Válida en el anillo $r_i < |z - z_i| < R_i$.

Teorema del Residuo: Construcción (3)

Ahora, si se integra en el círculo D_i que rodea a z_i se tiene:

$$\oint_{D_i} f(z)dz = \oint_{D_i} \left[\frac{a_{-m}^{(i)}}{(z-z_i)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}^{(i)}}{z-z_i} + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(z-z_i) + \cdots + a_k^{(i)}(z-z_i)^k + \cdots\right] dz$$

$$= a_{-m}^{(i)} \oint_{D_i} \frac{1}{(z-z_i)^m} dz + \cdots + a_{-1}^{(i)} \oint_{D_i} \frac{1}{z-z_i} dz + a_0^{(i)} \oint_{D_i} dz + \cdots + a_k^{(i)} \oint_{D_i} (z-z_i)^k dz + \cdots$$

$$\oint_{D_i} f(z)dz = a_{-1}^{(i)} 2\pi j$$

Teorema del Residuo: Construcción (4)

Con lo que finalmente se obtiene

$$I = \oint_C f(z)dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} a_{-1}^{(i)}$$

Ejemplo: Integración por teorema del residuo (1)

Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{1}{z(1+z)}\,dz$$

Si C es

1. $|z| = \frac{1}{2}$
2. $|z| = 2$

Ejemplo: Integración por teorema del residuo (2)

Solución: Las singularidades están en $z_1 = 0$ y $z_2 = -1$, y los residuos están dados por:

$$a_{-1}^{(1)}\Big|_{z_1=0} = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z+1)} = 1$$

$$a_{-1}^{(2)}\Big|_{z_2=-1} = \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{1}{z(z+1)} = -1$$

Así que para el primer caso, donde la curva solo encierra al polo $z_1 = 0$, el resultado de la integral es

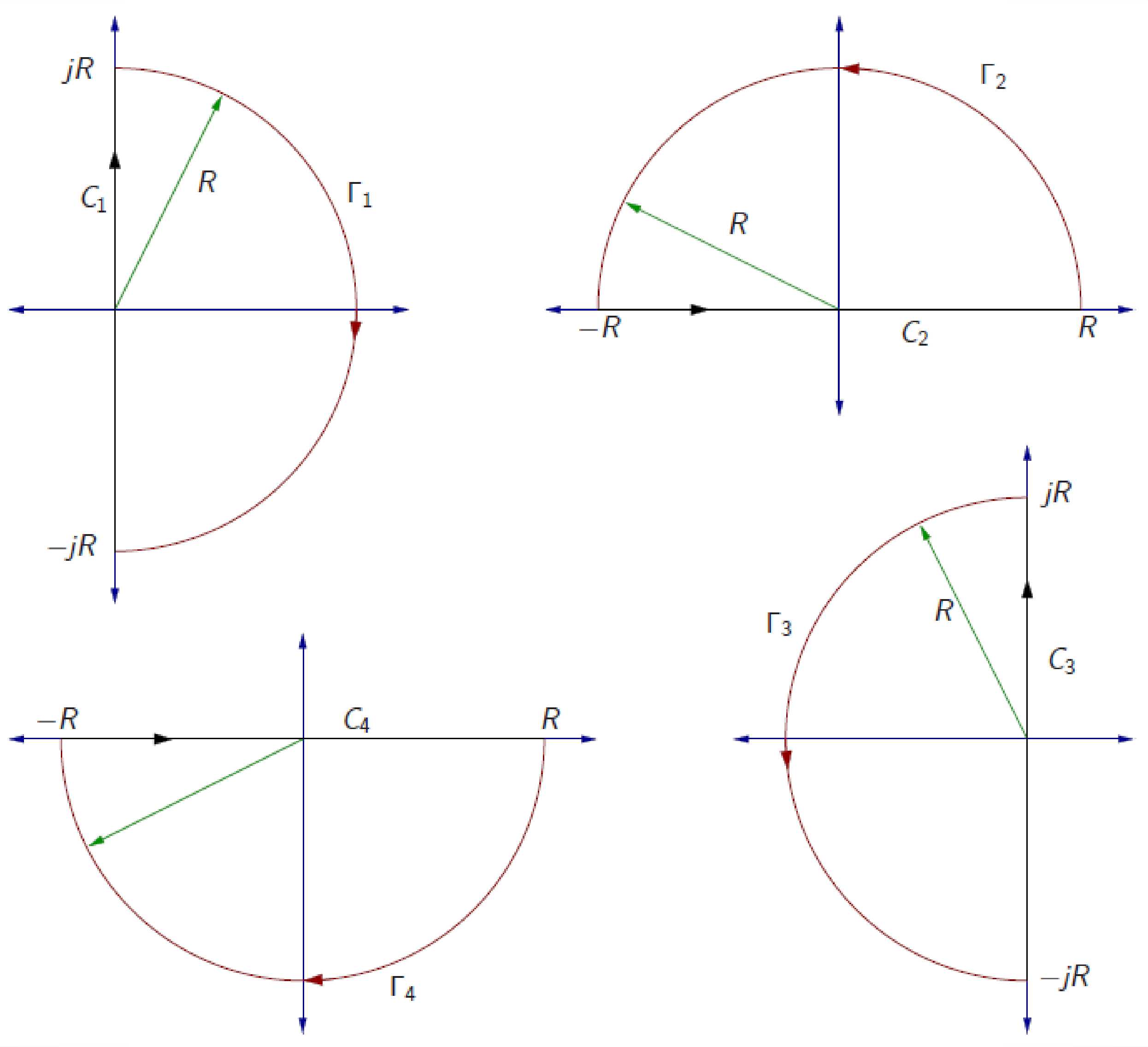
$$\oint_C \frac{1}{z(1+z)} dz = 2\pi j$$

Ejemplo: Integración por teorema del residuo (3)

Y para el segundo caso, donde ambos polos se encuentran dentro del círculo entonces

$$\oint_C \frac{1}{z(1+z)} dz = 2\pi(1-1) = 0$$

Integración sobre semicírculos extensos

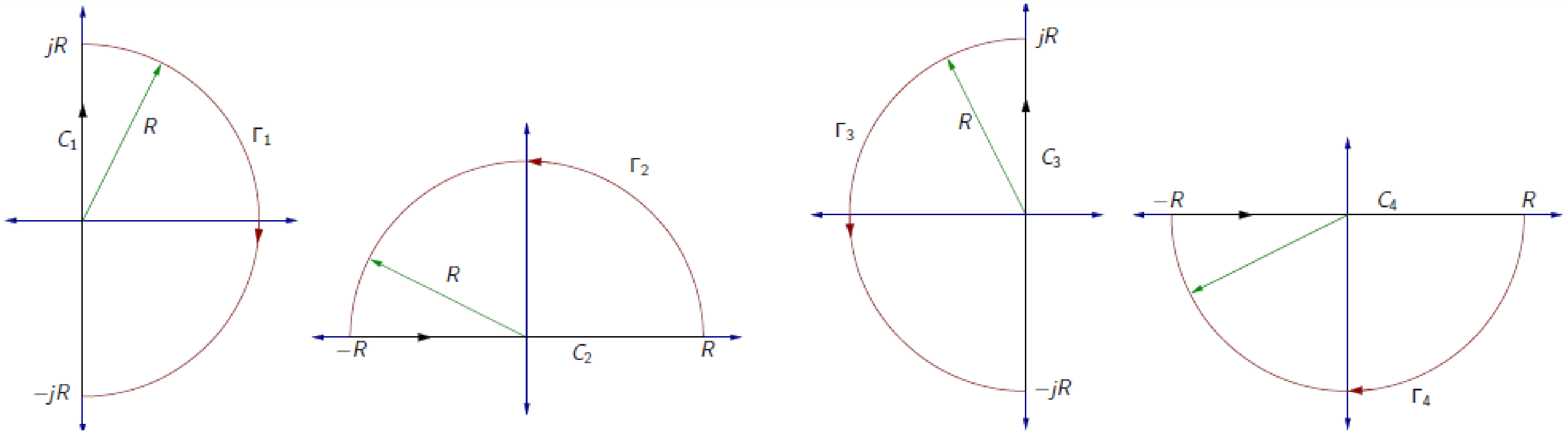


Semicírculos extensos

Valores de integrales en semicírculos extensos

Resumen

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = 0$	si $\displaystyle\lim_{R\to\infty}$ máx $\lvert Rf(Re^{j\theta})\rvert = 0$, para $i \in \{1,2,3,4\}$
$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_1} f(z)e^{az}\,dz = 0$	si $\displaystyle\lim_{R\to\infty}$ máx $\lvert f(Re^{j\theta})\rvert = 0$, $a < 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$
$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_3} f(z)e^{az}\,dz = 0$	si $\displaystyle\lim_{R\to\infty}$ máx $\lvert f(Re^{j\theta})\rvert = 0$, $a > 0$ y $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$
$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_2} f(z)e^{jaz}\,dz = 0$	si $\displaystyle\lim_{R\to\infty}$ máx $\lvert f(Re^{j\theta})\rvert = 0$, $a > 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi$
$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_4} f(z)e^{jaz}\,dz = 0$	si $\displaystyle\lim_{R\to\infty}$ máx $\lvert f(Re^{j\theta})\rvert = 0$, $a < 0$ y $\pi \leq \theta \leq 2\pi$



Evaluación de integrales reales

Caso 1: Integrales impropias

Evaluación de integrales reales: integrales impropias

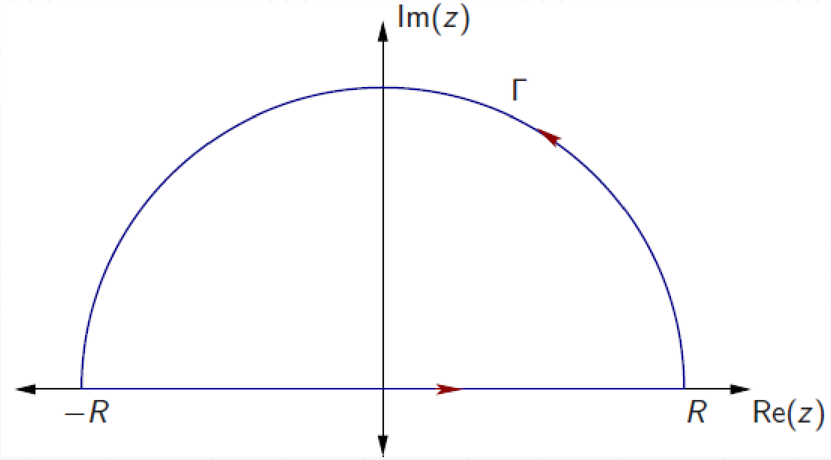
La integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad .$$

se continúa analíticamente en una integral de contorno de variable compleja

$$\oint_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz\right]$$

con la trayectoria de integración C



Evaluación de integrales reales: integrales impropias

Si el segundo término

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \quad si \lim_{R\to\infty} máx\left|Rf\left(Re^{j\theta}\right)\right| = 0$$

tiende a cero conforme R tiene a infinito, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_{C} f(z)dz$$

Ejemplo: Integración infinita real (1)

Encuentre el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx$$

Ejemplo: Integración infinita real (2)

Solución: se considera la continuación analítica de la función $f(x)$ como

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

y se tiene que verificar que

$$\lim_{R\to\infty} z f(z) = 0 \qquad con\, z = Re^{j\theta}$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{z}{(z^2+4)^2} = 0$$

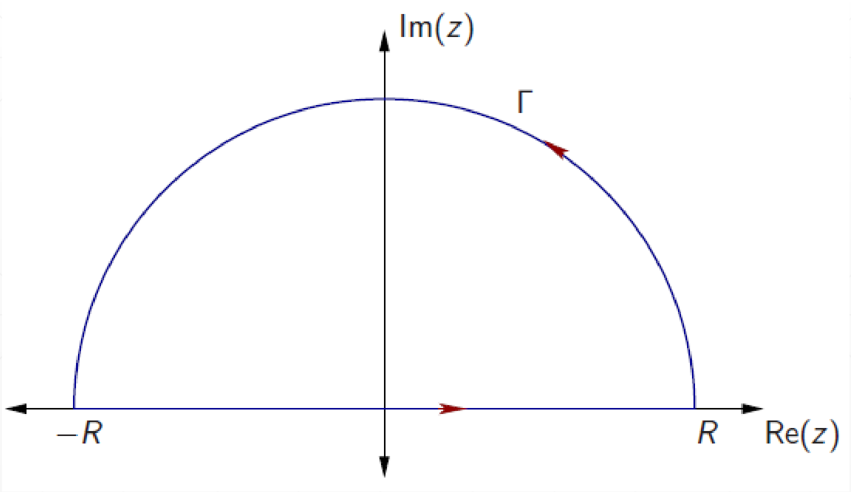
Ejemplo: Integración infinita real (3)

Por lo tanto se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_C f(z)dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} dx = \oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$$

donde C es el contorno



Ejemplo: Integración infinita real (4)

Se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{(z+2j)^2(z-2j)^2}$$

la cual tiene dos polos dobles en $\pm 2j$, pero el contorno C solo encierra al polo en $z = 2j$.

Así, se calcula el valor de la integral utilizando el Teorema del residuo y se tiene que

$$a_{-1}\Big|_{z=2j} = \lim_{z\to 2j} \frac{d}{dz}\left[(z-2j)^2 \frac{1}{(z+2j)^2(z-2j)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to 2j} \frac{-2}{(z+2j)^3} = -\frac{2}{(4j)^3} = -\frac{1}{32}j$$

Ejemplo: Integración infinita real (5)

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = 2\pi j\left(-\frac{1}{32}j\right) = \frac{\pi}{16}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \frac{\pi}{16}$$

Evaluación de integrales reales

Caso 2: Integrales de funciones reales trigonométricas

Evaluación de integrales reales: integrales de funciones reales trigonométricas

Si $G(sen(\theta), \cos(\theta))$ es una función racional de senos y cosenos, entonces la integral real

$$\int_0^{2\pi} G(sen(\theta), \cos(\theta))d\theta$$

puede resolverse a través de integrales de contorno de variable compleja.

Si $z = e^{j\theta}$, entonces

$$sen(\theta) = \frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right), \qquad \cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Evaluación de integrales reales: integrales de funciones reales trigonométricas

Además

$$z = e^{j\theta}$$

$$dz = je^{j\theta}d\theta, \qquad d\theta = \frac{dz}{jz}$$

Así, la integral

$$\int_0^{2\pi} G(sen(\theta), \cos(\theta))d\theta$$

Puede calcularse a través de la integral

$$\oint_C f(z)dz$$

donde C es el círculo unitario $|z| = 1$ parametrizado con $z = e^{j\theta}$

Ejemplo: Integración de una función trigonométrica real (1)

Evalúe la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(\theta)}\, d\theta$$

Ejemplo: Integración de una función trigonométrica real (2)

Solución: Sustituyendo $z = e^{j\theta}$, $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ y $d\theta = \frac{dz}{jz}$ se obtiene la integral de variable compleja

$$\oint_C \frac{1}{jz\left[2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]} dz = \frac{2}{j} \oint_C \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$$

Donde la trayectoria de integración C es el círculo unitario $|z| = 1$.

Se factoriza el integrando para buscar los polos y se tiene que

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 1} = \frac{1}{\left(z - \left(-2 - \sqrt{3}\right)\right)\left(z - \left(-2 + \sqrt{3}\right)\right)}$$

Ejemplo: Integración de una función trigonométrica real (2)

El contorno de integración solo incluye a $z = -2 + \sqrt{3}$. Por lo tanto utilizando el T.R. se tiene:

$$a_{-1}\Big|_{z\to -2+\sqrt{3}} = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \left[\frac{2}{j}\left(z+2-\sqrt{3}\right)\frac{1}{\left(z+2-\sqrt{3}\right)\left(z+2+\sqrt{3}\right)}\right]$$

$$a_{-1}\Big|_{z\to -2+\sqrt{3}} = \frac{1}{j\sqrt{3}}$$

Así:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(\theta)}\,d\theta = 2\pi j\left(\frac{1}{j\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.