Series de Fourier

Ing. José Miguel Barboza Retana
Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Verano 2019-2020

Series generalizadas de Fourier

Combinación lineal de funciones

Un conjunto de funciones ortogonales $u_i(t)$ conforma una base de un espacio funcional

$$\mathcal{U} = \{u_{n_1}(t), u_{n_1+1}(t), \ldots, u_{n_2-1}(t), u_{n_2}(t)\}$$

que engendra las funciones

$$x_m(t) = \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i u_i(t)$$

Determinación de coeficientes

Utilizando propiedades de espacios lineales (1)

$$\langle u_k(t), x(t)\rangle = \left\langle u_k(t), \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i u_i(t) \right\rangle = \sum_{i=n_1}^{n_2} \langle u_k(t), c_i u_i(t)\rangle$$

$$= \sum_{i=n_1}^{n_2} c_i \langle u_k(t), u_i(t)\rangle = c_k \langle u_k(t), u_k(t)\rangle$$

$$c_k = \frac{\langle u_k(t), x(t)\rangle}{\|u_k(t)\|^2}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t)$$

Serie Generalizada de Fourier

Como **serie generalizada de Fourier** se conoce a la combinación lineal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t) \qquad \text{(Ecuación de síntesis)}$$

con coeficientes calculados con

$$c_k = \frac{\langle u_k(t), x(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} \qquad \text{(Ecuación de análisis)}$$

siempre y cuando la base funcional $\{u_k(t)\}, k \in \mathbb{Z}$ sea completa.

Base canónica para funciones

La función canónica $\delta(t)$

Se busca entonces una función $\delta(t - t')$, tal que

$$x(t') = \langle \delta(t - t'), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') x(t) dt$$

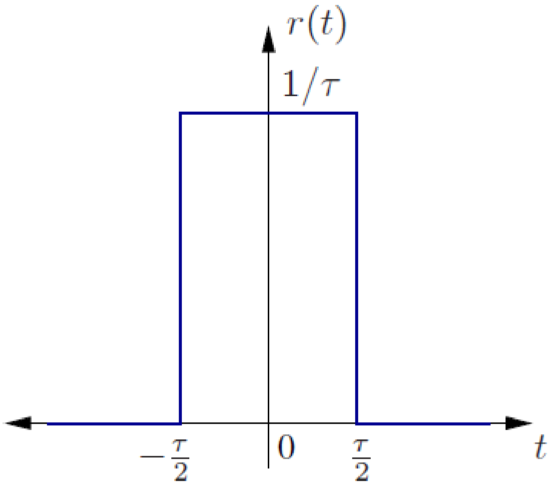
Si se toma por ejemplo $x(t) = 1$ y se realiza un cambio de variable $\xi = t - t'$ entonces se debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = 1$$

lo que indica que el área bajo la curva de la función $\delta(t)$ debe ser igual a uno.

Impulso rectangular

Se parte entonces de un impulso rectangular de área unitaria



El conjunto generador dado por

$$\mathcal{U}_\tau = \{\ldots, r(t+3\tau), r(t+2\tau), r(t+\tau), r(t), r(t-\tau), r(t-2\tau), r(t-3\tau), \ldots\}$$

es ortogonal, puesto que los desplazamientos ocurren siempre en múltiplos del ancho del impulso ($r(t-k\tau)$ con $k \in \mathbb{Z}$).

Norma de impulsos rectangulares

La norma de dichos impulsos está dada por:

$$\|r(t-k\tau)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |r(t-k\tau)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{\tau}}$$

y el coeficiente c_k correspondiente a la función $r(t-k\tau)$, necesario para aproximar una función $x(t)$ se calcula como:

$$c_k = \frac{\langle r(t-k\tau), x(t)\rangle}{\|r(t-k\tau)\|^2} = \tau \int_{k\tau-\frac{\tau}{2}}^{k\tau+\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau} x(t)dt = \int_{k\tau-\frac{\tau}{2}}^{k\tau+\frac{\tau}{2}} x(t)dt$$

y considerando que la integral en un intervalo es siempre igual a la longitud del intervalo multiplicada por el valor de la función en un punto particular $t_k' \in \left[k\tau - \frac{\tau}{2}, k\tau + \frac{\tau}{2}\right]$:

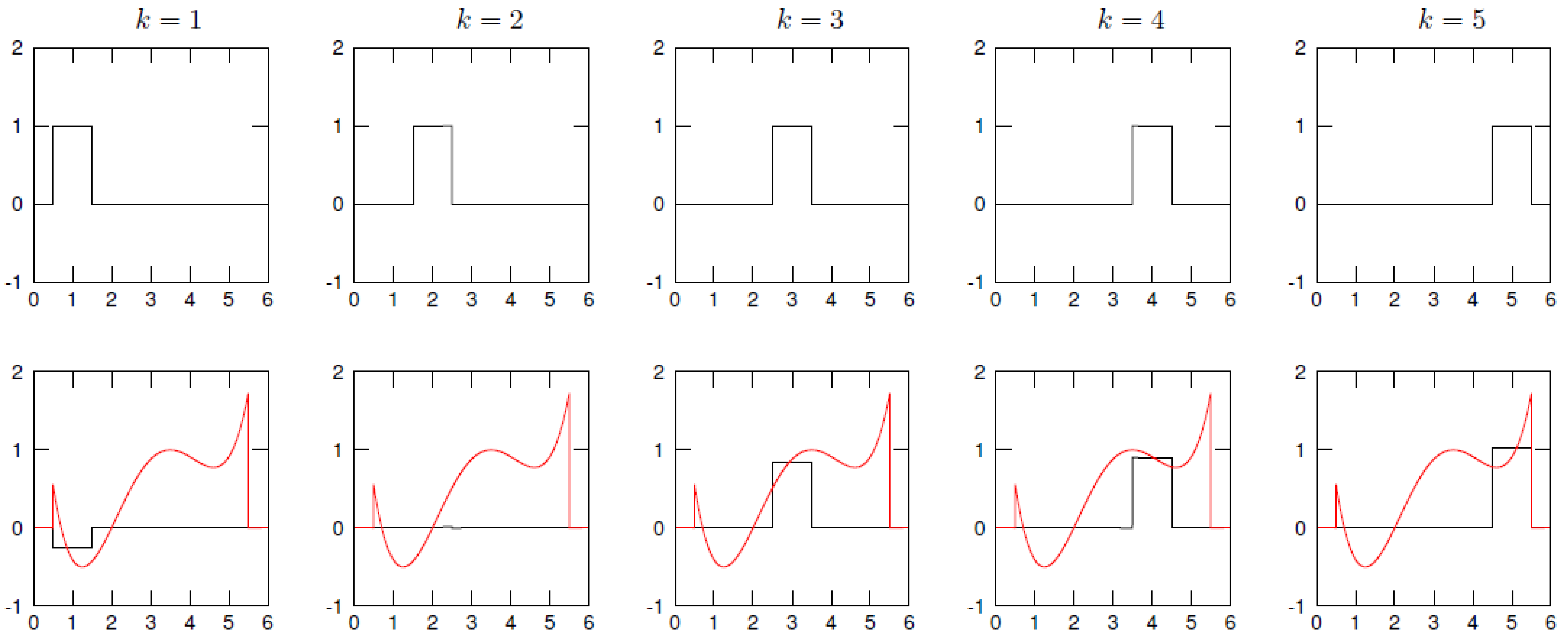
$$c_k = x(t_k')\tau$$

Coeficiente de $\boldsymbol{r(t-k\tau)}$ (1)

El k-ésimo término de la combinación lineal está dado por $c_k r(t-k\tau)$, y así, la mejor aproximación de la función $x(t)$ con la base ortogonal $\mathcal{U}_\tau$ es:

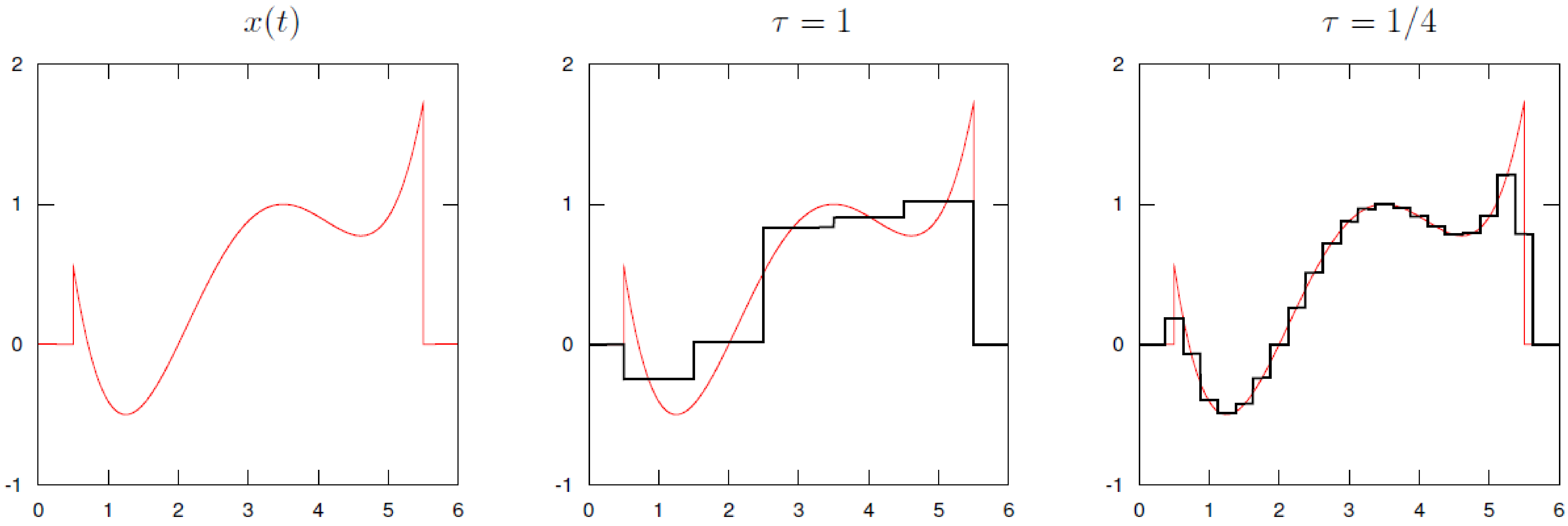
$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, r(t-k\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t'_k) r(t-k\tau)\tau$$

Coeficiente de $r(t - k\tau)$ (2)



Aproximaciones con impulsos rectangulares

Ejemplo con $\tau = 1$ y $\tau = 1/4$ de las mejores aproximaciones:



Espacio funcional completo o espacio de Hilbert

- Para un valor de τ finito el espacio engendrado **no es completo**, puesto que $\|x(t) - x_a(t)\|$ no puede hacerse arbitrariamente pequeña.
- La base es completa cuando τ se hace tender a cero, de modo que

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} r(t) = \begin{cases} \infty & para\, t = 0 \\ 0 & para\, t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$x(t) = \lim_{\tau \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k') r(t - k\tau)\tau \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\delta(t - t')dt'$$

Donde, puesto que $t_k' \in \left[k\tau - \frac{\tau}{2}, k\tau + \frac{\tau}{2}\right]$, al hacer $\tau \to 0$ entonces $t_k' = k\tau = t'$

Ejemplo: Proyección de funciones sobre base canónica funcional (1)

Encuentre los términos de la combinación lineal que aproxima a la función $x(t) = t^2 + 2t - 1$, correspondientes a las funciones de la base canónica $\delta(t+1)$, $\delta(t)$ y $\delta(t-1)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Proyección de funciones sobre base canónica funcional (2)

Solución:

- Con la base de impulsos rectangulares desplazados, el k-ésimo término de la combinación lineal está dado por $c_k u_k(t)$, con

$$c_k = x(k\tau)\tau$$

$$u_k(t) = r(t - k\tau)$$

- Si $\tau \to 0$ se sustituye c_k por $c_{t'} = x(t')dt$ y $u_k(t)$ por

$$u_{t'}(t) = \delta(t - t')$$

Ejemplo: Proyección de funciones sobre base canónica funcional (3)

- Los términos $x(t')\delta(t-t')dt$ solicitados son entonces:

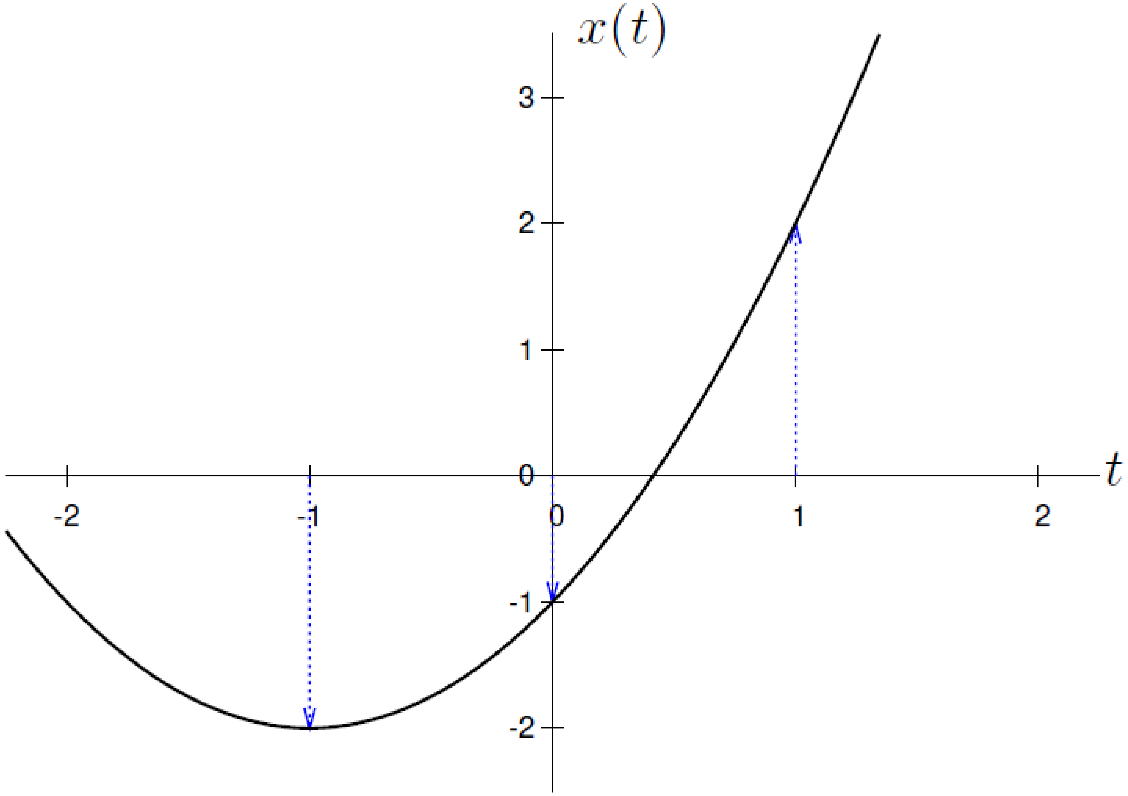
$$x(-1)\delta(t+1)dt = -2\delta(t+1)dt$$

$$x(0)\delta(t)dt = -\delta(t)dt$$

$$x(1)\delta(t-1)dt = 2\delta(t-1)dt$$

Ejemplo: Proyección de funciones sobre base canónica funcional (4)

La figura muestra la función sobrepuesta con las tres componentes calculadas. Nótese que $\delta(t)dt$ tiene una amplitud uno, puesto que proviene de $r(t)\tau = \tau/\tau = 1$.



Periodicidad y funciones armónicamente relacionadas

Función periódica

- Se dice que $x(t)$ es periódica, si para todo t se cumple

$$x(t) = x(t+T)$$

- A T se le denomina entonces **periodo** de la función $x(t)$.

- Al menor T que satisfaga $x(t) = x(t+T)$ se le denomina periodo **fundamental**.

Multiplicidad de periodo

Nótese que si $x(t)$ es periódica con periodo T entonces

$$x(t+2T) = x\big((t+T)+T\big) = x(t+T) = x(t)$$

y en general con $k \in \mathbb{Z}$.

$$x(t+kT) = x\big((t+(k-1)T)+T\big) = x(t+(k-1)T) = \cdots = x(t)$$

Una función periódica con periodo T también es periódica con periodo kT.

Funciones exponenciales complejas

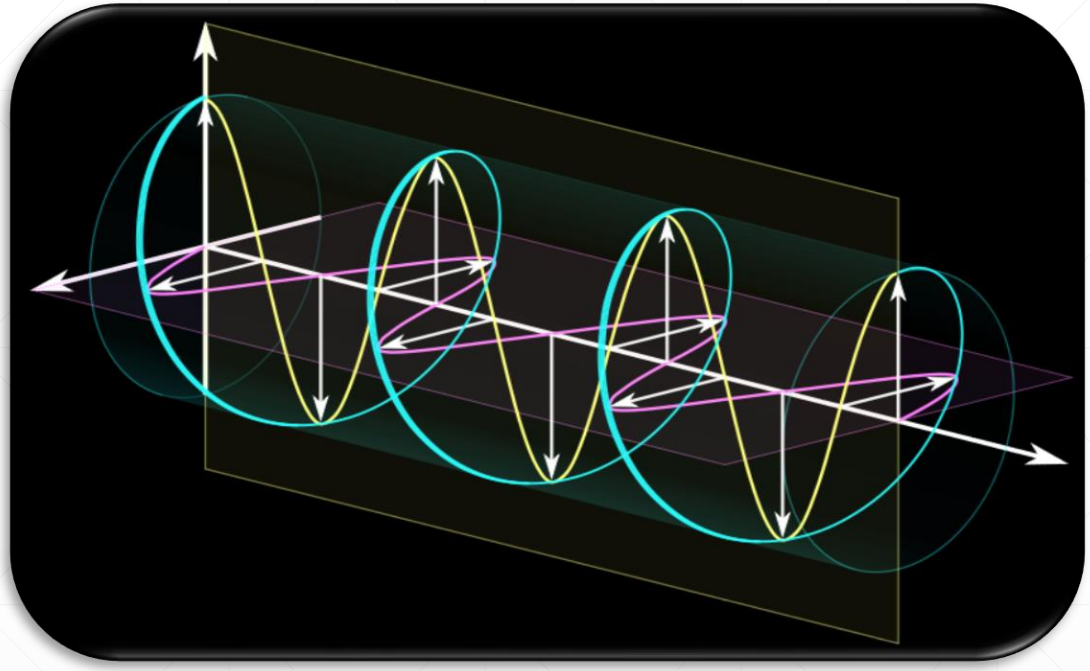
- Las funciones exponenciales complejas

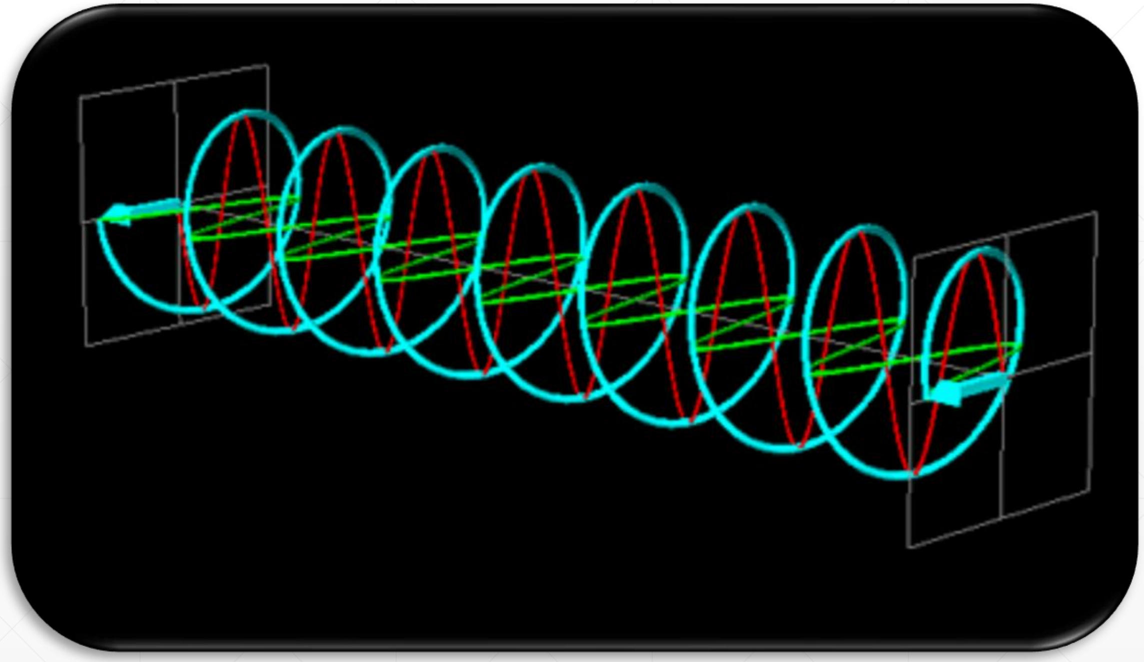
$$s_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{j2\pi k f_0 t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

se dice estar **relacionadas armónicamente** por tener todas un periodo común $T_p = 1/f_0$.

- El periodo fundamental de la señal $s_k(t)$ es $1/(kf_0) = T_p/k$, lo que equivale a una frecuencia kf_0.
- Puesto que una señal periódica con periodo T_p/k es también periódica con periodo $k\left(T_p/k\right) = T_p$ con $k \in \mathbb{Z}$ entonces todas las señales $s_k(t)$ tienen como periodo común T_p.

Funciones exponenciales complejas





Producto interno de dos funciones exponenciales armónicamente relacionadas

Evaluando el producto interno definido en un periodo

$$\langle s_i(t), s_k(t)\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_p} s_i^*(t)s_k(t)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{j\omega_0 it}\right)^* e^{j\omega_0 kt} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 it} e^{j\omega_0 kt} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j\omega_0 (k-i)t} dt$$

Producto interno de dos funciones exponenciales armónicamente relacionadas: caso $k = i$

Para el caso $k = i$ se obtiene

$$\langle s_k(t), s_k(t)\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j\omega_0(0)t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} 1dt = T_p$$

lo que quiere decir que con un periodo T_p común a todas las funciones exponenciales armónicas, la norma de $s_k(t) = e^{j\omega_0 kt}$ está dada por:

$$\|s_k(t)\|^2 = \langle s_k(t), s_k(t)\rangle = T_p$$

Producto interno de dos funciones exponenciales armónicamente relacionadas: caso $k \neq i$

Para el caso $k \neq i$ se obtiene

$$\langle s_i(t), s_k(t)\rangle = \left.\frac{e^{j\omega_0(k-i)t}}{j\omega_0(k-i)}\right|_{t_0}^{t_0+T_p} = \frac{e^{j\omega_0(k-i)t_0}\left(e^{j\omega_0(k-i)T_p}-1\right)}{j\omega_0(k-i)}$$

Considerando finalmente que $\omega_0 T_p = 2\pi$ se obtiene

$$\langle s_i(t), s_k(t)\rangle = \frac{e^{j\omega_0(k-i)t_0}\left(e^{j\omega_0(k-i)T_p}-1\right)}{j\omega_0(k-i)} = 0$$

Con lo que queda demostrada la Ortogonalidad de las funciones exponenciales complejas armónicamente relacionadas $s_k(t) = e^{j\omega_0 kt}$.

Completitud de base $\{s_k(t)\}$

Se pueden demostrar además que el conjunto de todas las funciones $s_k(t)$, con $k \in \mathbb{Z}$ engendran un espacio completo con todas las funciones periódicas que cumplen las llamadas **condiciones de Dirichlet**.

Serie de Fourier

Análisis y síntesis

La **serie de Fourier sintetiza** funciones periódicas $x(t) = x(t + kT_p)$ con:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

y **analiza**, o extrae cada componente armónica con:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)dt$$

Simetría hermítica en funciones reales

- Caso particular: funciones $x(t)$ de valor real
- En este caso, puesto que $x^*a = (xa)^*$ cuando $x \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$, y $x^* + y^* = (x+y)^*$, entonces se cumple con $k \in \mathbb{N}^+$

$$c_{-k} = \frac{\langle s_{-k}(t), x(t)\rangle}{\|s_{-k}(t)\|^2} = \frac{\langle e^{-j\omega_0 kt}, x(t)\rangle}{\|e^{-j\omega_0 kt}\|^2}$$

$$= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{-j\omega_0 kt}\right)^* x(t)dt$$

$$= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{-j\omega_0 kt}x(t)\right)^* dt$$

$$= \frac{1}{T_p}\left(\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt}x(t)dt\right)^*$$

$$= \left(\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt}x(t)dt\right)^* = c_k^*$$

Simetría hermítica en funciones reales

- A esta relación, que también puede escribirse como $c_{-k}^{*} = c_k$ se le conoce como simetría conjugada o simetría hermítica de los coeficientes de Fourier para funciones reales.
- Simetría hermítica implica que la magnitud de c_k y c_{-k} son iguales, y que el ángulo de c_k es igual al inverso aditivo del ángulo de c_{-k} ($\angle c_k = -\angle c_{-k}$)

Serie de cosenos (1)

Utilizando el hecho de que $z + z^* = 2Re\{z\}$ se puede reescribir

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

con $c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$ como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(c_k e^{j\omega_0 kt} \right)^* + c_k e^{j\omega_0 kt} \right)$$

Serie de cosenos (2)

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\{c_k e^{j\omega_0 kt}\} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| Re\{e^{j(\omega_0 kt + \theta_k)}\}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos(\omega_0 kt + \theta_k)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c_k} \cos(\omega_0 kt + \theta_k)$$

con $\tilde{c_k} = 2|c_k|$ que tiene todos valores reales.

Valor CD

Siguiendo $s_0(t) = e^{j\omega_0 0t} = 1$ entonces

$$c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)dt$$

que adquiere siempre un valor real, y equivale al valor medio de la función $x(t)$ en un periodo T_p.

Componente CD

A este coeficiente c_0 se le denomina en ingeniería la componente CD de la señal o función $x(t)$.

Serie de cosenos en forma convencional

Por convención la serie de cosenos se escribe con frecuencia como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 k t + \theta_k)$$

donde $\tilde{c}_0$ es entonces $|c_0|$ y θ_0 es cero si $c_0 \geq 0$ o π si $c_0 < 0$.

Serie de senos y cosenos (1)

Otra representación de la serie de Fourier para funciones reales $x(t)$ se obtiene utilizando la identidad de Euler:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(\cos(\omega_0 kt) - jsen(\omega_0 kt)) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos(\omega_0 kt) + jsen(\omega_0 kt))$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k})(\cos(\omega_0 kt)) + j \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{-k})(sen(\omega_0 kt))$$

Serie de senos y cosenos (2)

y considerando $c^*_{-k} = c_k$

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_k^*)\cos(\omega_0 kt) + j\sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_k^*)\text{sen}(\omega_0 kt)$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\{c_k\}\cos(\omega_0 kt) - \sum_{k=1}^{\infty} 2Im\{c_k\}\text{sen}(\omega_0 kt)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\text{sen}(\omega_0 kt)$$

con $a_0 = 2c_0$, $a_k = 2Re\{c_k\} = 2|c_k|\cos(\theta_k)$ y $b_k = -2Im\{c_k\} = -2|c_k|sen(\theta_k)$, es decir:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

Serie de senos y cosenos (3)

Utilizando

$$c_k = \frac{\langle u_k(t), x(t)\rangle}{\|u_k(t)\|^2}$$

se deriva además:

$$a_k = \frac{\langle \cos(\omega_0 kt), x(t)\rangle}{\|\cos(\omega_0 kt)\|^2} = \frac{2}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\cos(\omega_0 kt)\,dt$$

$$b_k = \frac{\langle \operatorname{sen}(\omega_0 kt), x(t)\rangle}{\|\operatorname{sen}(\omega_0 kt)\|^2} = \frac{2}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\operatorname{sen}(\omega_0 kt)\,dt$$

lo que justifica la elección de $a_0 = 2c_0$ para que sea compatible con la expresión más general de a_k.

Componentes espectrales

- La descomposición de una función real $x(t)$ en una serie de Fourier brindará un conjunto de coeficientes c_k (o a_k y b_k, o $\tilde{c_k}$) que indican qué tan "fuerte" es la ***k*-ésima** componente de la serie con frecuencia angular $k\omega_0$.
- $|c_k|^2$ indica incluso cuánta potencia contiene esa componente.
- La **serie de Fourier** es un primer paso para realizar un análisis en el dominio de la frecuencia.

Condiciones de Dirichlet

Las condiciones de Dirichlet garantizan la convergencia de la serie de Fourier en todo punto de $x(t)$ excepto en sus discontinuidades, donde la serie converge al valor medio de la discontinuidad. Estas condiciones son:

1. La función $x(t)$ es absolutamente integrable en un periodo.

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|dt < \infty$$

2. La función $x(t)$ contiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo.
3. La función $x(t)$ contiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.

Estas condiciones son **suficientes** pero **no necesarias**.

Rapidez de convergencia

Relación de las discontinuidades de $x(t)$ con la rapidez de convergencia de c_k:

1. Si $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades entonces sus coeficientes decrecen a una tasa $1/k$.

2. Si $x(t)$ es continua, pero su primera derivada es discontinua (la función tiene “picos”) entonces los coeficientes decrecen a una tasa $1/k^2$.

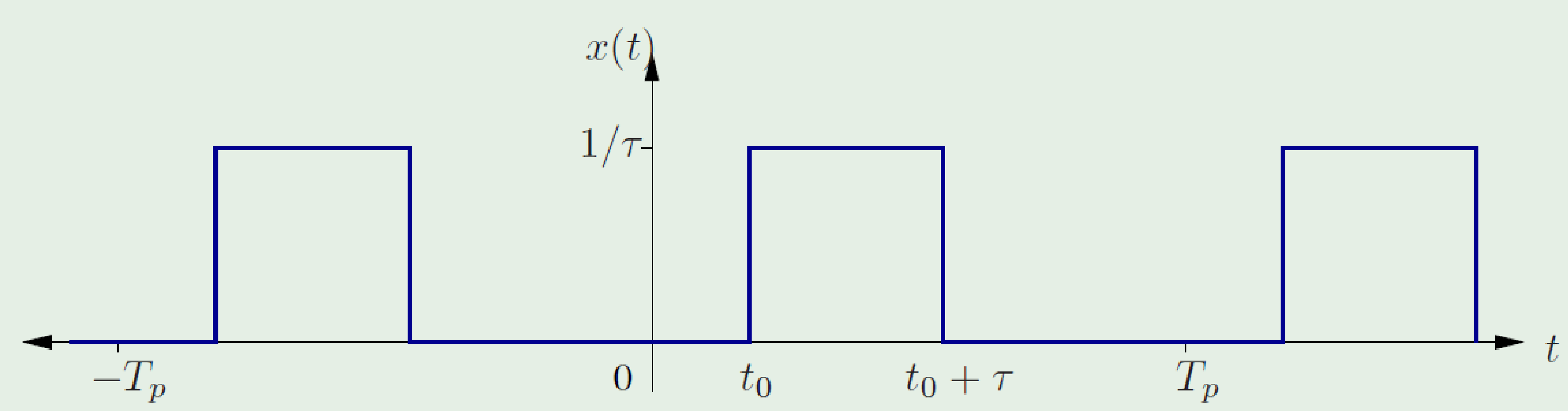
3. Si $x(t)$ y todas sus derivadas hasta de n-ésimo orden son continuas, pero la $(n+1)$-ésima derivada es discontinua entonces los coeficientes decrecen a una tasa $1/k^{n+2}$.

Las observaciones anteriores estipulan que mientras más suave sea una función, más rápido convergerá su **serie de Fourier**.

Señal Rectangular

Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (1)

Calcule los coeficientes de la Serie de Fourier para una señal rectangular utilizando las tres bases funcionales presentadas anteriormente.



Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (2)

Solución:

Los coeficientes de la serie exponencial compleja

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

se calculan como:

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)dt = \frac{1}{T_p \tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-j\omega_0 kt} dt$$

para $k = 0$ se tiene con $e^{-j0} = 1$

$$c_0 = \frac{1}{T_p \tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} dt = \frac{1}{T_p \tau} t\Big|_{t_0}^{t_0+\tau} = \frac{1}{T_p \tau}[(t_0+\tau) - t_0] = \frac{1}{T_p \tau}\tau = \frac{1}{T_p}$$

Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (3)

y para $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{T_p}\frac{e^{-j\omega_0 kt}}{-j\omega_0 k\tau}\Bigg|_{t_0}^{t_0+\tau}$$

$$= \frac{1}{T_p}\frac{e^{-j\omega_0 k(t_0+\tau)} - e^{-j\omega_0 kt_0}}{-j\omega_0 k\tau} = \frac{1}{T_p}e^{-j\omega_0 kt_0}\frac{(e^{-j\omega_0 k\tau} - 1)}{-j\omega_0 k\tau}$$

$$= \frac{2}{T_p}e^{-j\omega_0 kt_0}e^{-j\frac{\omega_0 k\tau}{2}}\frac{(e^{-j\frac{\omega_0 k\tau}{2}} - e^{j\frac{\omega_0 k\tau}{2}})}{-2j\omega_0 k\tau}$$

$$= \frac{2}{T_p}e^{-j\omega_0 k\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}\frac{(e^{j\frac{\omega_0 k\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega_0 k\tau}{2}})}{2j\omega_0 k\tau} = \frac{1}{T_p}\frac{sen\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right)}{\frac{\omega_0 k\tau}{2}}e^{-j\omega_0 k\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p}sa\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right)e^{-j\omega_0 k\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}$$

Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (4)

de donde se obtiene finalmente

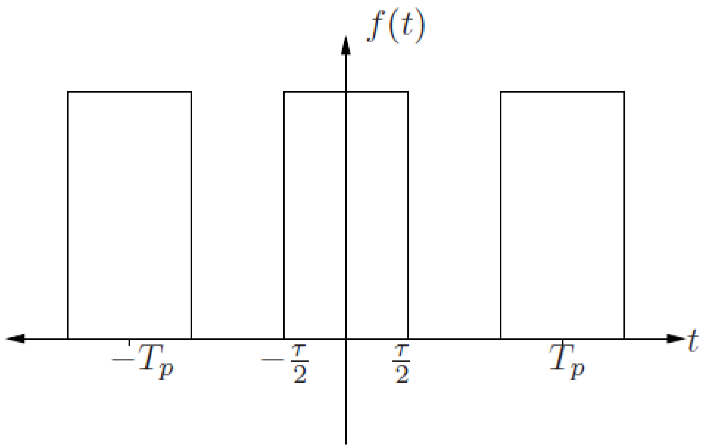
$$|c_k| = \frac{1}{T_p}\left|sa\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right)\right|$$

$$\angle c_k = \begin{cases} -\omega_0 k\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right) & \text{si } sa(\omega_0 k\tau/2) \geq 0 \\ \pi - \omega_0 k\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right) & si\ sa(\omega_0 k\tau/2) < 0 \end{cases}$$

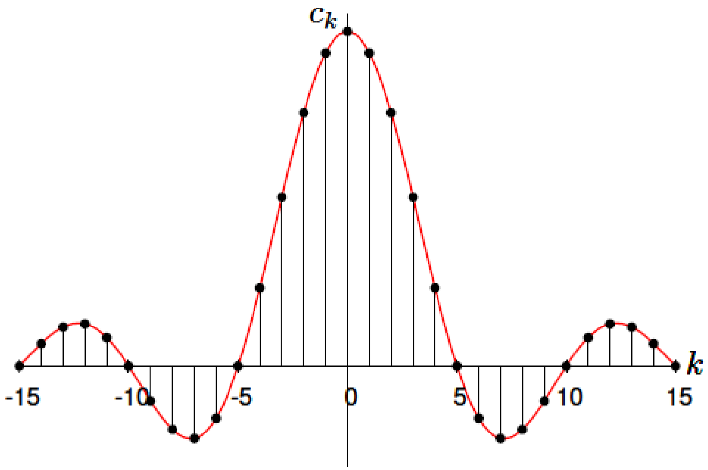
Por existir discontinuidades en la función a aproximar, los coeficientes decrecen a una tasa $1/k$ al ser el seno una función acotada y estar dividida por un término múltiplo de k.

Si t_0 se elige como $-\tau/2$ entonces los coeficientes c_k son reales. Estos pueden graficarse en un eje de frecuencias para varios valores de T_p y τ.

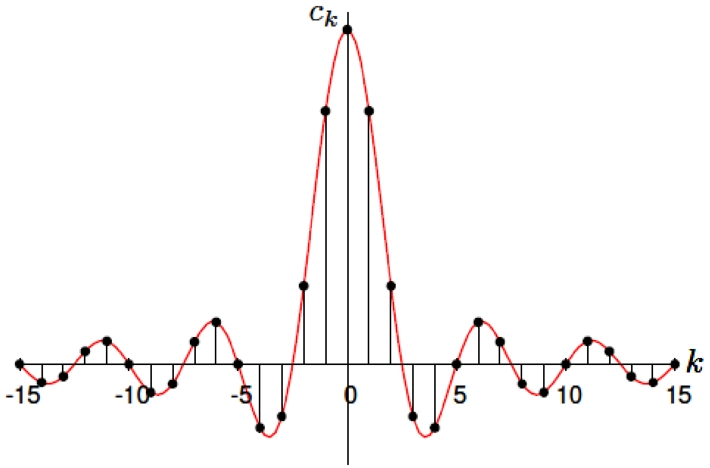
Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (5)



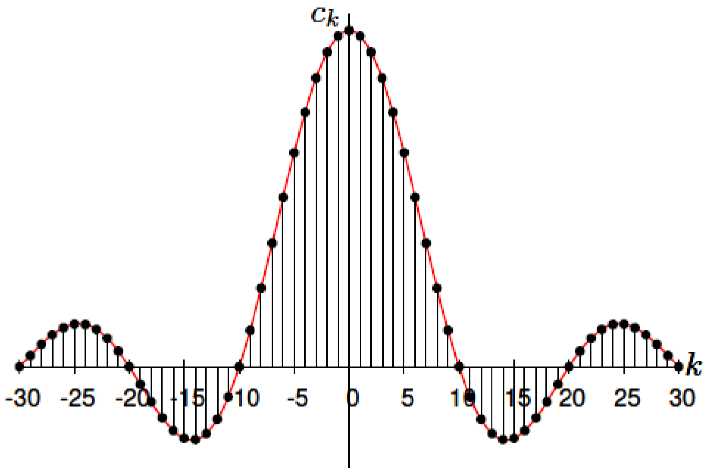
$x(t)$



$\tau = 1$ y $T_p = 5$



$\tau = 2$ y $T_p = 5$



$\tau = 1$ y $T_p = 10$

Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (6)

- Los coeficientes c_k se han espaciado de tal modo que el eje horizontal tiene las mismas unidades de frecuencia, es decir, la distancia entre c_i y c_{i+1} es proporcional a $1/T_p$.
- Nótese que mientras más baja la frecuencia, mayor es T_p y la distancia entre los coeficientes c_k (que se denominarán aquí líneas espectrales) disminuye.
- Por otro lado, si τ aumenta, entonces la función envolvente $sa(\omega_0 k\tau/2)$ se comprime.
- De la ecuación para c_k se observa incluso que si τ tiende a T_p, entonces $\omega_0 k\tau/2$ tiende a πk, y puesto que $sa(k\pi)$ es cero para todo $k \neq 0$, entonces $c_k = 0$ para $k \neq 0$.
- El único coeficiente diferente de cero es en este caso entonces c_0. Esto tiene sentido puesto que si $\tau \rightarrow T_p$ entonces $x(t)$ será una función constante, y su única componente espectral se encuentra en la frecuencia cero.

Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (7)

Para la representación como serie infinita de funciones cosenoidales desfasadas

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 k t + \theta_k)$$

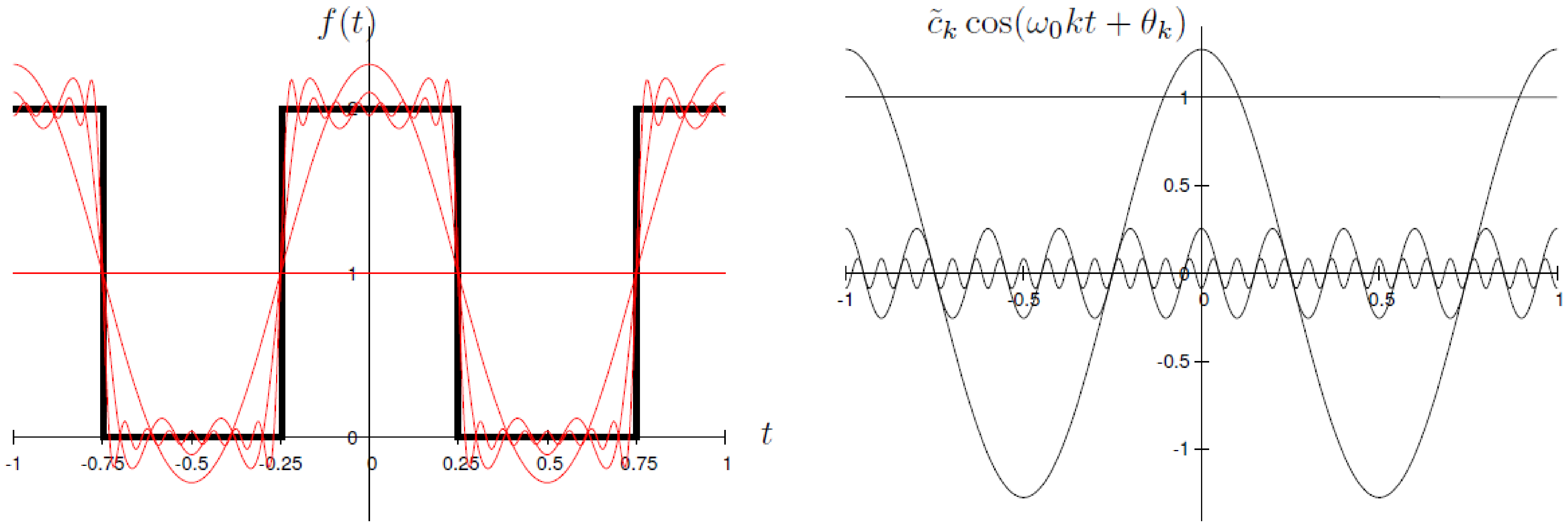
se obtiene de lo anterior

$$\tilde{c}_0 = c_0 = \frac{1}{T_p}$$

$$\tilde{c}_k = 2|c_k| = \frac{2}{T_p}\left|sa\left(\frac{\omega_0 k \tau}{2}\right)\right|, \qquad k > 0$$

$$\theta_k = \angle c_k = \begin{cases} -\omega_0 k\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right) & \text{si } sa(\omega_0 k\tau/2) \geq 0 \\ \pi - \omega_0 k\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right) & \text{si } sa(\omega_0 k\tau/2) < 0 \end{cases}$$

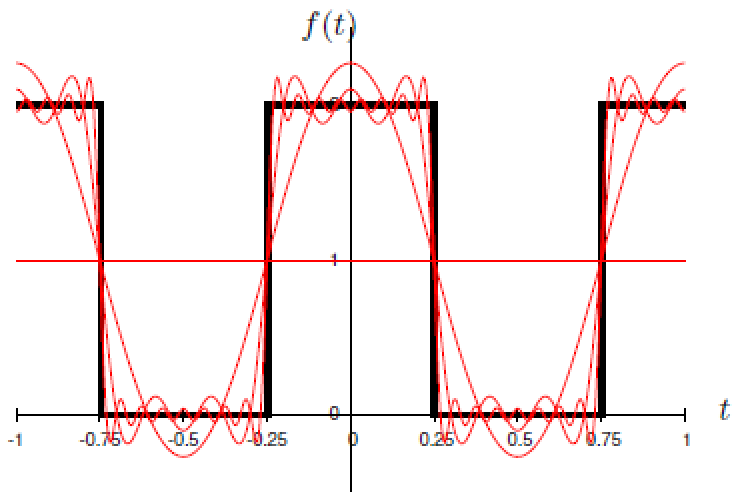
Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (8)



Armónicos $1, 2, 5$ y 15

Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (9)

- La convergencia es relativamente rápida
- Las aproximaciones en la discontinuidad de $x(t)$ pasan por el promedio de los límites de la señal a la izquierda y a la derecha.
- La aproximación de la función en las cercanías de la discontinuidad siempre exhibirá sobreoscilaciones conocidas como el **fenómeno de Gibbs**.
- Este fenómeno no desaparece, simplemente el pico producido se acerca arbitrariamente a la discontinuidad.



Ejemplo: Serie de Fourier de señal rectangular (10)

Para la última representación como serie infinita trigonométrica

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(\omega_0 kt)$$

los coeficientes a_k y b_k se pueden obtener directamente

$$a_0 = 2c_0 = \frac{2}{T_p}$$

$$a_k = 2|c_k|\cos(\theta_k) = \frac{2}{T_p} sa\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right)\cos\left(\omega_0 k\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)\right)$$

$$b_k = -2|c_k|\,\mathrm{sen}(\theta_k) = \frac{2}{T_p} sa\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\omega_0 k\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)\right)$$

Para $t_0 = -\tau/2$ entonces todos los términos b_k desaparecen.

Ejemplo: Serie de Fourier (1)

Determine la serie de Fourier utilizada para sintetizar la función periódica $x(t)$, conociendo que el periodo es de 4.

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Ejemplo: Serie de Fourier (2)

Solución:

Debido a que la señal no presenta componente CD, el coeficiente c_0 es igual a 0.

Luego, se tiene que la síntesis que se desea realizar está dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

De forma que los coeficientes c_k están dados por:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Ejemplo: Serie de Fourier (3)

Asi, la integral por resolver está dada por:

$$c_k = \frac{1}{4}\int_0^2 \sin(\pi t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$c_k = \frac{1}{4}\int_0^2 \left[\frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2j}\right] e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$c_k = \frac{1}{8j}\int_0^2 \left[e^{j(\pi - k\omega_0)t} - e^{-j(\pi + k\omega_0)t}\right] dt$$

Ejemplo: Serie de Fourier (4)

$$c_k = \frac{1}{8j}\int_0^2 \left[e^{j(\pi-k\omega_0)t} - e^{-j(\pi+k\omega_0)t}\right] dt$$

$$= \frac{1}{8j}\left[\frac{e^{j(\pi-k\omega_0)t}}{j(\pi-k\omega_0)} - \frac{e^{-j(\pi+k\omega_0)t}}{-j(\pi+k\omega_0)}\right]\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{-e^{j(\pi-k\omega_0)2}}{(\pi-k\omega_0)} - \frac{e^{-j(\pi+k\omega_0)2}}{(\pi+k\omega_0)} + \frac{1}{(\pi-k\omega_0)} + \frac{1}{(\pi+k\omega_0)}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{-(-1)^k}{(\pi-k\omega_0)} + \frac{-(-1)^k}{(\pi+k\omega_0)} + \frac{1}{(\pi-k\omega_0)} + \frac{1}{(\pi+k\omega_0)}\right]$$

Ejemplo: Serie de Fourier (5)

$$c_k = \frac{1}{8}\left[\frac{1-(-1)^k}{(\pi - k\omega_0)} + \frac{1-(-1)^k}{(\pi + k\omega_0)}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\pi + k\omega_0 + \pi - k\omega_0}{(\pi - k\omega_0)(\pi + k\omega_0)}\right]\left(1-(-1)^k\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2\pi}{(\pi - k\omega_0)(\pi + k\omega_0)}\right]\left(1-(-1)^k\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{(\pi^2 - k^2{\omega_0}^2)}\right]\left(1-(-1)^k\right)$$

$$= \frac{1-(-1)^k}{\pi(4-k^2)}$$

Ejemplo: Serie de Fourier (6)

Así, para el caso de $k = 2$:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{8j}\int_0^2 \left[e^{j\left(\pi-2\frac{2\pi}{4}\right)t} - e^{-j\left(\pi+2\frac{2\pi}{4}\right)t}\right] dt \\ &= \frac{1}{8j}\int_0^2 1dt - \frac{1}{8j}\int_0^2 e^{-j2\pi t}\,dt \\ &= \frac{1}{8j}2 - \frac{1}{8j}\left[\frac{e^{-j2\pi t}}{-j2\pi}\right]\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{1}{4j} \end{aligned}$$

Y, por simetría hermítica $c_k = c_{-k}^*$ se tiene que:

$$c_{-2} = \frac{-1}{4j}$$

Propiedades de la serie de Fourier

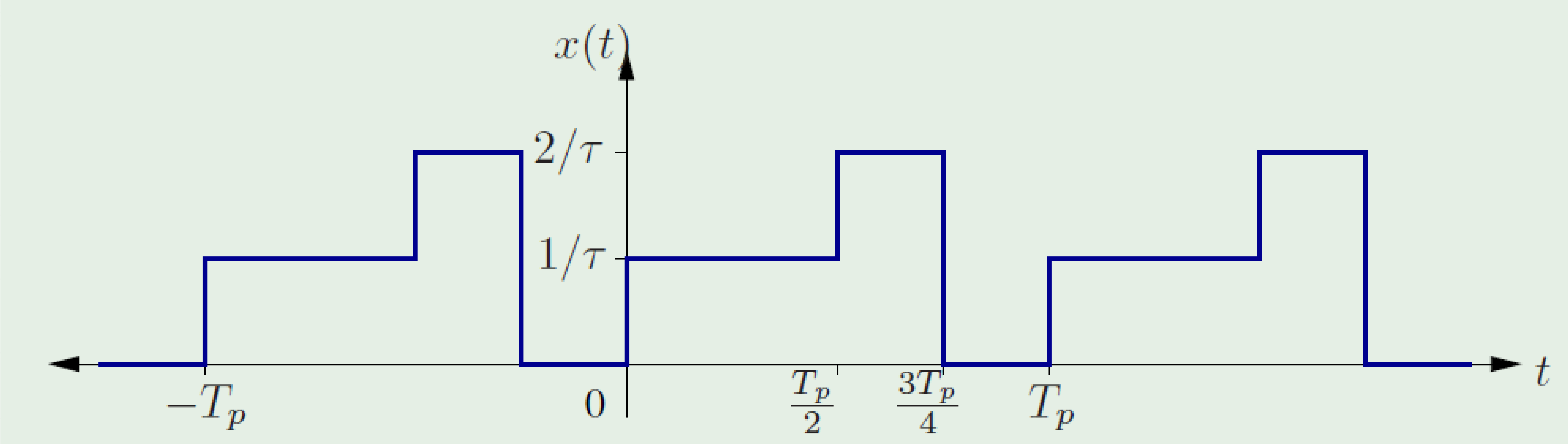
Linealidad

Sean dos funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y dos valores escalares α_1 y α_2. Un operador $\mathcal{O}\{\cdot\}$ se denomina operador lineal si cumple con la propiedad

$$\mathcal{O}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{O}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{O}\{x_2(t)\}$$

Ejemplo: Linealidad en las series de Fourier (1)

Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier para la función mostrada utilizando la propiedad de linealidad y la serie de Fourier de un tren de impulsos rectangulares calculado anteriormente.



Ejemplo: Linealidad en las series de Fourier (2)

Solución: Hay varias maneras de generar la función mostrada como combinación lineal de funciones rectangulares. Aquí se mostrará solo un ejemplo.

Si $x_1(t)$ es igual a la función rectangular con $\tau = T_p/2$ y $t_0 = 0$ entonces su desarrollo es:

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_1 e^{j\omega_0 kt}$$

$$c_{1_k} = \frac{1}{T_p} sa\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right) e^{-j\omega_0 k\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{1}{T_p} sa\left(\frac{\pi k}{2}\right) e^{-j\frac{\pi k}{2}}$$

Ejemplo: Linealidad en las series de Fourier (3)

Si $x_2(t)$ es igual a la función rectangular con $\tau = T_p/4$ y $t_0 = T_p/2$ entonces

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} e^{j\omega_0 kt}$$

$$c_{2k} = \frac{1}{T_p} sa\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right) e^{-j\omega_0 k\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)} = \frac{1}{T_p} sa\left(\frac{\pi k}{4}\right) e^{-j\frac{5\pi k}{4}}$$

La función $x(t)$ tiene entonces como coeficientes

$$c_k = c_{1k} + 2c_{2k}$$

$$= \frac{1}{T_p} sa\left(\frac{\pi k}{2}\right) e^{-j\frac{\pi k}{2}} + \frac{2}{T_p} sa\left(\frac{\pi k}{4}\right) e^{-j\frac{5\pi k}{4}}$$

Simetrías

La función $x(t)$ es

- **par** o **simétrica** si $x(t) = x(-t)$
  - $c_k \in \mathbb{R}$ y $c_k = c_{-k}$

- **impar** o **asimétrica** si $x(t) = -x(-t)$
  - c_k es puramente imaginaria y $c_k = -c_{-k}$.

Descomposión de una función: componentes par e impar

Asúmase que $x(t)$ se puede descomponer en dos partes: una par y otra impar:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Si esto es cierto entonces $x_e(t) = x_e(-t)$ y $x_o(t) = -x_o(-t)$, y por tanto

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$
$$x(-t) = x_e(t) - x_o(t)$$

Sumando y restando las dos ecuaciones se obtiene

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$
$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

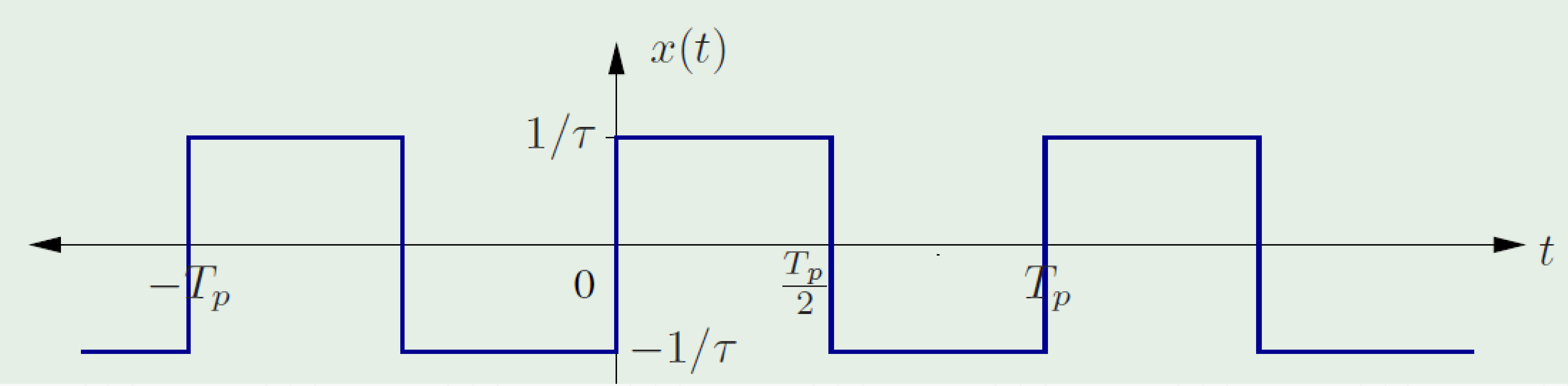
Implicaciones de simetrías

Por linealidad

- La componente **real** de los coeficientes c_k de $x(t)$ proviene de $x_e(t)$; y
- La componente **imaginaria** proviene de $x_o(t)$.

Ejemplo: Simetría en series de Fourier (1)

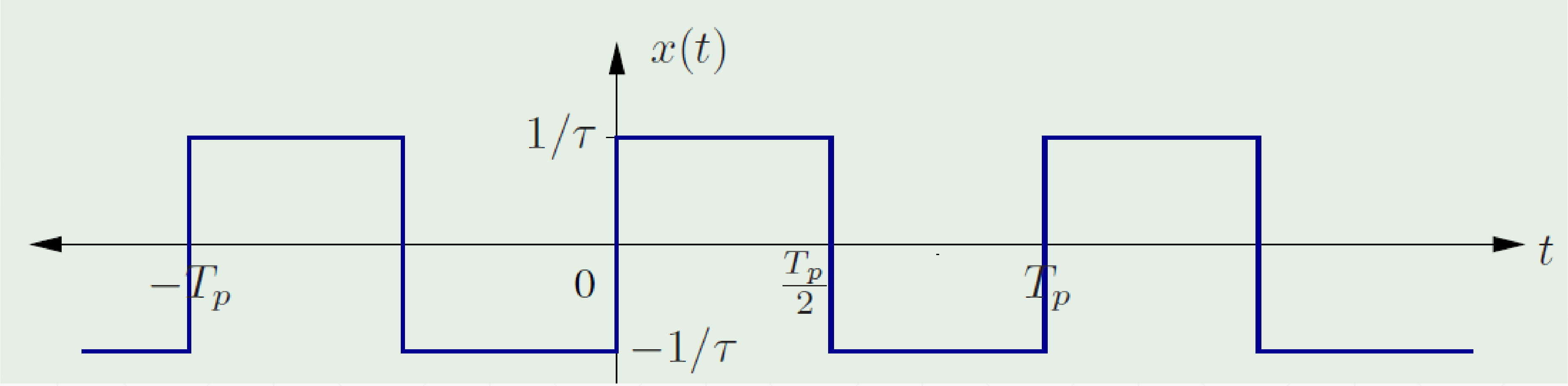
Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier para la función periódica representada en la siguiente figura:



Ejemplo: Simetría en series de Fourier (2)

Solución:

- La figura muestra una función rectangular impar
- Esta función se diferencia de las utilizadas en ejemplos anteriores únicamente en nivel CD, que en este caso es cero, y por tanto el coeficiente c_0 es cero.



Ejemplo: Simetría en series de Fourier (3)

- Observando que la amplitud de la señal es dos veces la utilizada en el ejemplo del impulso rectangular se tiene entonces que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

$$c_k = \frac{2}{T_p} sa\left(\frac{\omega_0 k\tau}{2}\right) e^{-j\omega_0\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{2}{T_p} sa\left(\frac{\pi k}{2}\right) e^{-j\frac{\pi k}{2}}; k \neq 0$$

$$c_k = \begin{cases} -j\dfrac{4}{T_p k\pi} & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par o } 0 \end{cases}$$

que es completamente imaginario y es una función de variable entera impar en k.

Desplazamiento en el tiempo

- Desplazamiento temporal no altera T_p.
- Si tiene una función $x(t)$ con coeficientes de serie de Fourier c_k. Al realizar un desplazamiento de la función en el tiempo por un valor de τ, los coeficientes de la función $x(t-\tau)$ están dados por:

$$c'_k = e^{-j\omega_0 k\tau} c_k$$

Es decir, un **desplazamiento en el tiempo** produce un **cambio de fase**.

Inversión en el tiempo

Si $x(t)$ tiene como expansión en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

La función $x(-t)$ tiene como coeficientes c_{-k}.

Escalamiento en el tiempo

- La dilatación o contracción del eje temporal t (con inversión o sin ella) se plantea en términos de un escalamiento temporal, es decir, multiplicando la variable t por una constante α.
- Cuando esto ocurre, el periodo de la nueva señal $x(\alpha t)$ es modificado por la constante α:

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k(\alpha t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(\alpha\omega_0)kt}$$

- Esto puede interpretarse de la siguiente manera: el escalamiento en el tiempo de una función no altera los coeficientes c_k, pero sí la serie de Fourier, puesto que sus bases funcionales $e^{j(\alpha\omega_0)kt}$ tienen una nueva frecuencia fundamental $\alpha\omega_0$.

Multiplicación

Dos propiedades por analizar:

- los coeficientes del producto de funciones.
- la función que tiene como coeficientes el producto de los coeficientes correspondientes a dos funciones.

Coeficientes del producto de dos funciones (1)

Utilizando esto, pueden encontrarse los coeficientes del producto de dos funciones periódicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, ambas con el mismo periodo T_p, y con coeficientes c_{1k} y c_{2k} para sus respectivos desarrollos en series de Fourier:

$$x(t) = x_1(t)x_2(t) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} c_{l'} e^{jw_0 l' t}$$

Donde

$$c_{l'} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1k} c_{2(l'-k)}$$

La cual se le conoce como **convolución discreta** de c_{1k} y c_{2k}.

Función correspondiente al producto de coeficientes (1)

- Sean c_{1k} y c_{2k} los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente.
- Se desea ahora encontrar la función $x(t)$ que tiene como coeficientes c_k el producto $c_k = c_{1k}c_{2k}$.
- De lo cual se obtiene que:

$$x(t) = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

La cual se conoce como la convolución periódica de $x_1(t)$ y $x_2(t)$

Conjugación y simetría conjugada

- Si $x(t)$ es una función compleja, interesa observar cómo se comportan los coeficientes de $x^*(t)$, en comparación a los c_k correspondientes a $x(t)$.

- Aplicando la conjugación compleja a ambos lados de la representación de función como serie se obtiene

$$(x(t))^* = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \right)^*$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \, e^{-j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}^* \, e^{j\omega_0 kt}$$

es decir, $x^*(t)$ tiene como coeficientes c_{-k}^*

- Esto confirma el resultado obtenido para funciones reales, pues en dicho caso $x(t) = x^*(t)$ y por lo tanto $c_k = c_{-k}^*$, lo que representa simetría hermítica con respecto al índice k.

Derivación

Considerando la función $x(t)$ y su desarrollo en serie de Fourier se puede observar el efecto de aplicar el operador de derivación de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{d}{dt} e^{j\omega_0 kt}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (j\omega_0 k c_k) e^{j\omega_0 kt}$$

En otras palabras, la derivación de una función equivale a multiplicar cada uno de sus coeficientes c_k por $j\omega_0 k$.

Integración (1)

¿Cuándo es posible integrar una función periódica de tal modo que el resultado sea periódico?

Integración (2)

- La integración es posible si y solo si el coeficiente $c_0 = 0$, puesto que de otra forma la integral crecerá indefinidamente y dejaría de ser periódica, condición necesaria para el cálculo de la **serie de Fourier**.
- Por otro lado, el valor de la integral depende del punto inicial de integración:

$$\int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k\tau}\right)d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t} e^{j\omega_0 k\tau}d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left.\frac{e^{j\omega_0 k\tau}}{j\omega_0 k}\right|_{\tau=t_0}^{t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\frac{e^{j\omega_0 kt} - e^{j\omega_0 kt_0}}{j\omega_0 k}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{j\omega_0 k} e^{j\omega_0 kt} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{j\omega_0 k} e^{j\omega_0 kt_0}$$

Integración (3)

- El segundo término del lado derecho no depende de la variable t, y por lo tanto corresponde a una constante determinada por el instante t_0 en el que inicia la integración.
- Por convención se toma la constante como cero cuando t_0 se hace tender $\rightarrow -\infty$.
- De esta forma, la integral de la función $x(t)$ tiene como coeficientes $c_k/(j\omega_0 k)$

Implicaciones de la derivación y la integración

- Como conclusión debe anotarse que los coeficientes de la derivada de $x(t)$, al estar multiplicados por $j\omega_0 k$ decrecen más despacio que los coeficientes originales de $x(t)$ y por tanto la serie converge más lentamente que la serie de $x(t)$.
- Por el contrario, al estar divididos los coeficientes de la integral de $x(t)$ por $j\omega_0 k$ entonces esta serie converge más rápido que la de $x(t)$.

Energía y potencia

A las funciones de la forma $|x(t)|^2$ se les asocia usualmente el concepto de **potencia instantánea**, y su integral $\int_{t_0}^{t} |x(\tau)|^2 d\tau$ el concepto de **energía**.

¿Cómo se relaciona la **potencia promedio** de una señal periódica en un periodo con respecto a los coeficientes de su **serie de Fourier**?

Relación de Parseval

A esta relación

$$P_f = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

se le conoce como la **relación de Parseval** e implica que la potencia media de la señal equivale a la suma de las potencias medias de cada uno de los componentes frecuenciales c_k, a los que también se les denomina **armónicos**.

Densidad espectral de potencia

- La gráfica de $|c_k|^2$ en función de $k\omega_0$ se conoce como **densidad espectral de potencia**.
- Si $x(t) \in \mathbb{R}$ entonces $|c_{-k}| = |c_k^*| = |c_k|$ lo que implica que la densidad espectral de potencial es par.
- Al par de gráficas de $|c_k|$ y $\angle c_k$ contra $k\omega_0$ se les denomina **espectro de tensión**, con $|c_k|$ par e $\angle c_k$ impar para funciones reales.

Propiedades de la Serie de Fourier

Propiedad	Señal en el tiempo	Coeficientes
	$x(t), x_1(t), x_2(t)$	c_k, c_{1_k}, c_{2_k}
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 c_{1_k} + \alpha_2 c_{2_k}$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$c_k = \frac{2}{T_p}\int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t)\cos(\omega_0 kt)\, dt$ $c_k \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$c_k = -\frac{2j}{T_p}\int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 kt)\, dt$ $c_k \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$c_k = c^*{}_{-k}$
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-j\omega_0 k\tau} c_k$
Conjugación	$x^*(t)$	$c^*{}_{-k}$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	c_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t),\ \alpha > 0$	c_k
Convolución periódica	$\int_{T_p} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\, d\tau$	$T_p c_{1_k} c_{2_k}$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1_l} c_{2_{k-l}}$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 c_k$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\, dt,\ c_0 = 0$	$\frac{c_k}{jk\omega_0}$
Relación de Parseval	$\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$	

Bibliografía

- [1] P. Alvarado, Señales y Sistemas. Fundamentos Matemáticos. Instituto Tecnológico de Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico, 2008.