Asignatura: Estabilidad y Resistencia de Materiales. Ingeniería Electromecánica. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta

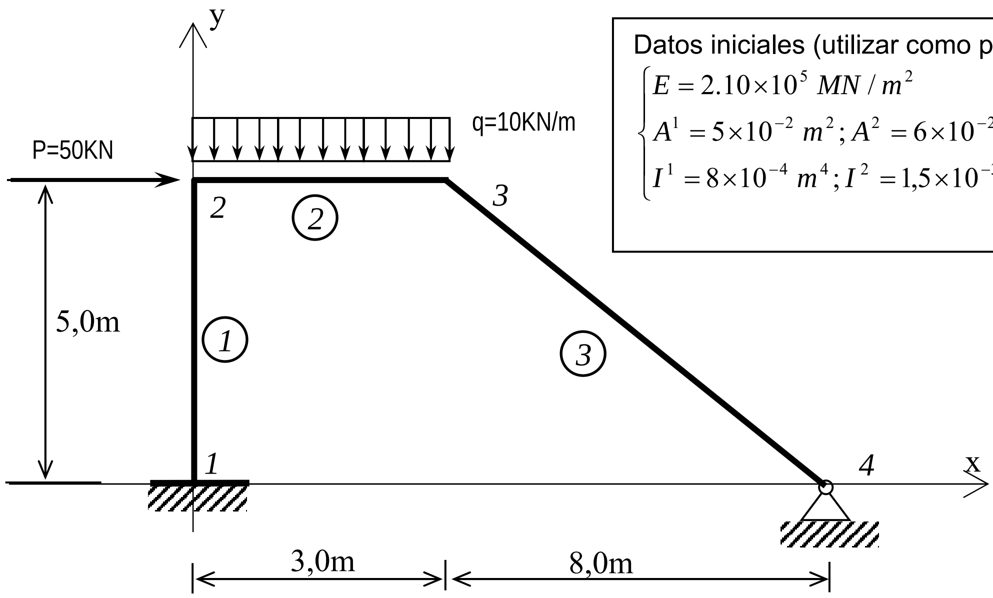
(S. Oller)

Modelo de Procedimiento a seguir para el Cálculo y Dimensionado de la Estructura plana que se asigne resolver.

(Ver archivo adjunto: "Ejemplo Estructura-1- Mat de Rigidez.xls")

ALGUNAS DEFINICIONES A TENER EN CUENTA

Paso 1) **PREDICCIÓN**. Dada la estructura de la figura, obtener a través del "Método de las Matrices de Rigidez" las leyes de Momento Flector, Esfuerzo Cortante y Esfuerzo Axil y Desplazamientos en todos los nudos. Verificar también el equilibrio global. (ver archivo: Ejemplo Estructura-1_Mat de Rigidez.xls)



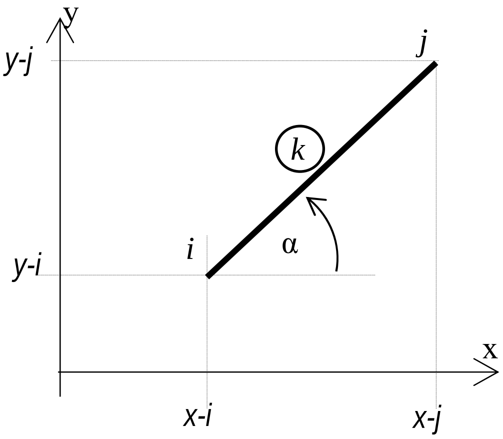
Datos iniciales (utilizar como predictor):

$$\begin{cases} E = 2.10 \times 10^{5}\ MN/m^{2} \\ A^{1} = 5\times 10^{-2}\ m^{2};\ A^{2} = 6\times 10^{-2}\ m^{2};\ A^{3} = 8\times 10^{-2}\ m^{2} \\ I^{1} = 8\times 10^{-4}\ m^{4};\ I^{2} = 1{,}5\times 10^{-3}\ m^{4};\ I^{3} = 2\times 10^{-3}\ m^{4} \end{cases}$$

Tabla de Relaciones Nodales

Barra	*N-i*	*N-j*	*x-i*	*y-i*	*x-j*	*y-j*	*cos(α-i)*	*sen(α-i)*
1	1	2	0,0	0,0	0,0	5,0	$0{,}0\times10^{0}$	$1{,}0\times10^{0}$
2	2	3	0,0	5,0	3,0	5,0	$1{,}0\times10^{0}$	$0{,}0\times10^{0}$
3	3	4	3,0	5,0	11,0	0,0	$8{,}48\times10^{-1}$	$-5{,}3\times10^{-1}$

Orientación de la barra (cambio de base)



$$\cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$$

$$sen\alpha = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}$$

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x^e \\ y^e \\ \varphi^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Definición de las matrices elementales "e"

$$\mathbf{K}^e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^e_{ii} & \mathbf{K}^e_{ij} \\ \mathbf{K}^e_{ji} & \mathbf{K}^e_{jj} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^e = \begin{Bmatrix} u^N{}_i \\ u^Q{}_i \\ \varphi_i \\ \hline u^N{}_j \\ u^Q{}_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^e_i \\ \mathbf{U}^e_j \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ \hline N_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^e_i \\ \mathbf{F}^e_j \end{Bmatrix} \quad ; \quad \left(\mathbf{F}^e\right)^q = \begin{Bmatrix} N^q_i \\ Q^q_i \\ M^q_i \\ \hline N^q_j \\ Q^q_j \\ M^q_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\mathbf{F}^e_i\right)^q \\ \left(\mathbf{F}^e_i\right)^q \end{Bmatrix}$$

Ecuación de equilibrio local (para cada elemento e)

$$\boxed{\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{U}^e + \left(\mathbf{F}^e\right)^q}$$

o también, agrupada por nodos

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \mathbf{F}^e_i \\ \mathbf{F}^e_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^e_{ii} & \mathbf{K}^e_{ij} \\ \mathbf{K}^e_{ji} & \mathbf{K}^e_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^e_i \\ \mathbf{U}^e_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(\mathbf{F}^e_i\right)^q \\ \left(\mathbf{F}^e_i\right)^q \end{Bmatrix}}$$

Rotación, Colocación y Ensamblaje de las matrices correspondientes a cada elemento "e"

$$\boxed{\mathbf{F}_G = \underbrace{\mathop{A}_{e=1}^{n}\left\{\mathbf{\Pi}_e^T \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{\Pi}_e\right\}}_{\mathbf{K}_G} \cdot \mathbf{U}_G + (\mathbf{F})_G^q} \quad ; \text{ con: } \mathbf{\Pi}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_e \end{bmatrix}$$

Solución de la estructura

$$\boxed{\mathbf{U}_G = \mathbf{K}_G^{-1} \cdot \left[\mathbf{F}_G - (\mathbf{F})_G^q\right]}$$

Teniendo las siguientes formas detallada para cada una de estas matrices

$$\mathbf{K}_G = \mathop{A}_{e=1}^{n}\left\{\mathbf{\Pi}_e^T \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{\Pi}_e\right\} = \mathop{A}_{e=1}^{n}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_e \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e \\ \mathbf{K}_{ji}^e & \mathbf{K}_{jj}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_e \end{bmatrix}\right\}$$

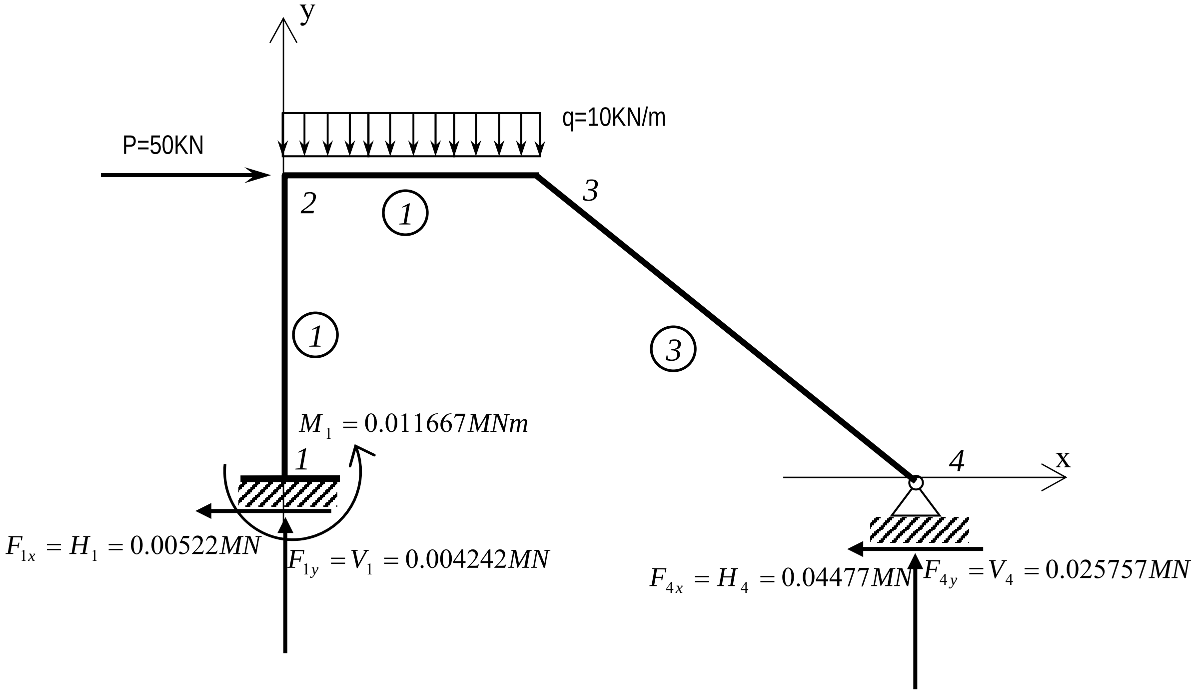
$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T\mathbf{K}_{11}^1\mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1^T\mathbf{K}_{12}^1\mathbf{T}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{T}_1^T\mathbf{K}_{21}^1\mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1^T\mathbf{K}_{22}^1\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2^T\mathbf{K}_{22}^2\mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_2^T\mathbf{K}_{23}^2\mathbf{T}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2^T\mathbf{K}_{32}^2\mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_2^T\mathbf{K}_{33}^2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3^T\mathbf{K}_{33}^3\mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_3^T\mathbf{K}_{34}^3\mathbf{T}_3 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_3^T\mathbf{K}_{43}^3\mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_3^T\mathbf{K}_{44}^3\mathbf{T}_3 \end{bmatrix}$$

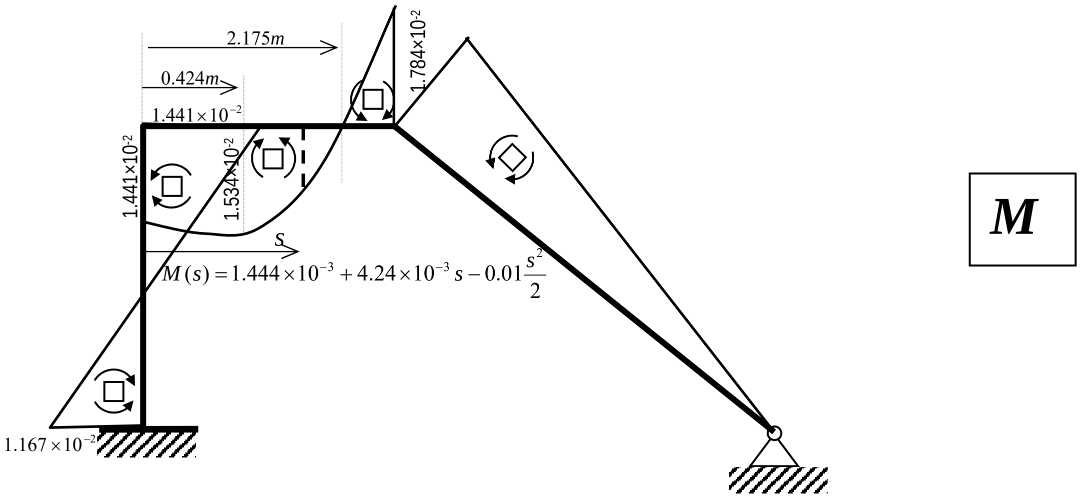
$$(\mathbf{F})_G^q = \mathop{A}_{e=1}^{n}\left\{\mathbf{\Pi}_e^T \cdot (\mathbf{F}^e)^q\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{T}_1^T(\mathbf{F}_1^1)^q \\ \mathbf{T}_1^T(\mathbf{F}_2^1)^q + \mathbf{T}_2^T(\mathbf{F}_2^2)^q \\ \mathbf{T}_2^T(\mathbf{F}_3^2)^q + \mathbf{T}_3^T(\mathbf{F}_3^3)^q \\ \mathbf{T}_3^T(\mathbf{F}_4^3)^q \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (F_{x1})^q \\ (F_{y1})^q \\ (M_1)^q \\ (F_{x2})^q \\ (F_{y2})^q \\ (M_2)^q \\ (F_{x3})^q \\ (F_{y3})^q \\ (M_3)^q \\ (F_{x4})^q \\ (F_{y4})^q \\ (M_4)^q \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0+0 \\ 0+\dfrac{qL_2}{2} \\ 0-\dfrac{qL_2^2}{12} \\ 0+0 \\ \dfrac{qL_2}{2}+0 \\ \dfrac{qL_2^2}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} ;$$

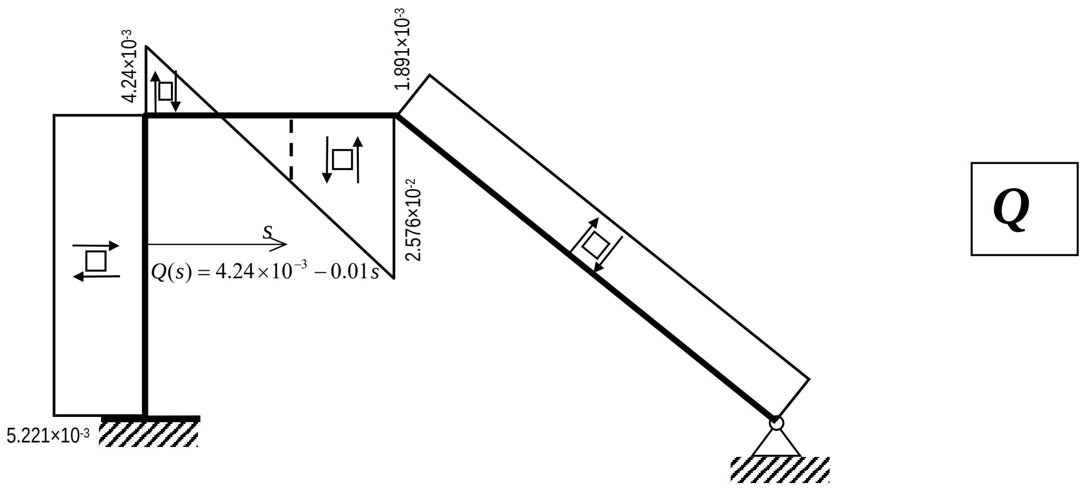
$$\mathbf{F}_G = \mathop{A}_{e=1}^{n}\left\{\mathbf{\Pi}_e^T \cdot \mathbf{F}^e\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{T}_1^T\left(\mathbf{F}_1^1\right) \\ \hline \mathbf{T}_1^T\left(\mathbf{F}_2^1\right) + \mathbf{T}_2^T\left(\mathbf{F}_2^2\right) \\ \hline \mathbf{T}_2^T\left(\mathbf{F}_3^2\right) + \mathbf{T}_3^T\left(\mathbf{F}_3^3\right) \\ \hline \mathbf{T}_3^T\left(\mathbf{F}_4^3\right) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ \hline F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \\ \hline F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline P \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline H_4 \\ V_4 \\ 0 \end{array}\right\};$$

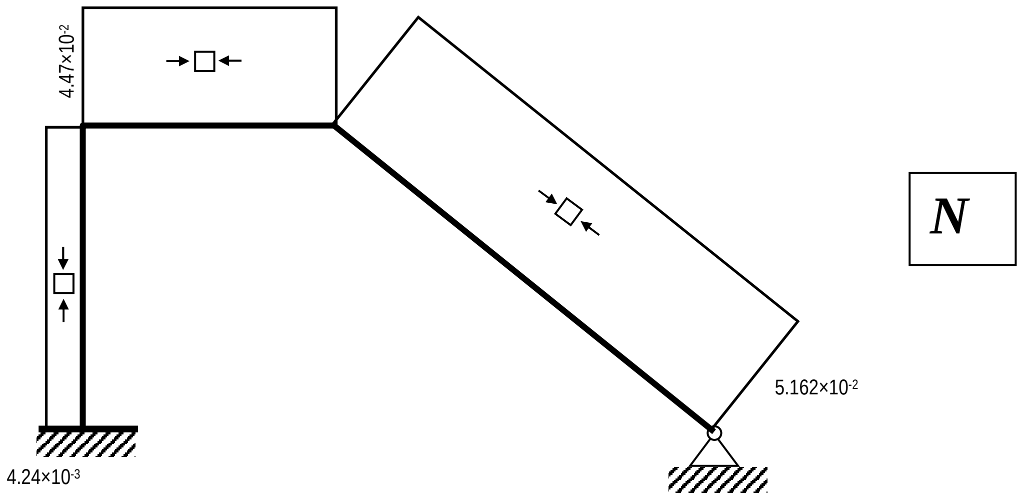
$$\mathbf{U}_G = \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_4 \end{array}\right\}$$

Reacciones y Leyes de Esfuerzo (Ver hoja Excel)









Paso 2) CORRECCIÓN DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES Y NUEVO CÁLCULO: Dimensionar todas las barra de la estructura con **perfiles normalizados o chapa plegada**.

Considerar un acero cuya Tensión al Límite Elástico es $f_y = 225\,N/mm^2\;[MN/m^2]$, Tensión de Rotura $f_u = 360\,N/mm^2\;[MN/m^2]$, Módulo de Elasticidad a Tracción $E = 210.000\,N/mm^2\;[MN/m^2]$, Módulo de Elasticidad a Compresión[1] $E = 21.000\,N/mm^2\;[MN/m^2]$, Módulo a Cortante $G = 81.000\,N/mm^2\;[MN/m^2]$, Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, Coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 1,2\times10^{-5}\;{}^0C^{-1}$.

Se define a también la *Resistencia de Cálculo* $f_{yd} = \dfrac{f_y}{\gamma_{M1}} = \dfrac{225}{1,05} = 214,29\,N/mm^2$, siendo $\gamma_{M1} = 1,05$ el *coeficiente de seguridad del material*, y la *Resistencia última de Comprobación* $f_{ud} = \dfrac{f_u}{\gamma_{M2}} = \dfrac{360}{1,25} = 288,00\,N/mm^2$, siendo $\gamma_{M2} = 1,25$ el *coeficiente de seguridad de resistencia última del material*.

Procedimiento a seguir para el dimensionado de cada una de las barras: Se supone una estructura plana, en la que los esfuerzos axiles N, esfuerzos de corte Q y momentos flectores M, son esfuerzos de cálculo (están afectados por la combinación de acciones y de los coeficientes de seguridad correspondiente).

[1] Simulación simplificada del fenómeno de inestabilidad por compresión simulando el fenómeno cinemático de inestabilidad a través de una aproximación constitutiva.

i) Obtención de la **sección transversal mínima necesaria** A^{nec} del perfil normalizado/chapa plegada para resistir el esfuerzo axil máximo de la barra N,

$$A^{nec} \geq \frac{N}{f_{yd}}$$

ii) Obtención del **módulo resistente** W_{11}^{nec} **(y su inercia** I_{11}^{nec}**) mínimo necesario** del perfil normalizado/chapa plegada para resistir el momento flector máximo de la barra M,

$$W_{11}^{nec} \geq \frac{M}{f_{yd}} \quad \Rightarrow \; I_{11}^{nec}$$

iii) Se selecciona el perfil/chapa plegada más grande de los obtenidos en i) y ii), y se realiza la **comprobación de la tensión** σ **máxima a flexión compuesta recta**,

$$\sigma = \frac{N}{A^{nec}} + \frac{M}{W_{11}^{nec}} \leq f_{yd}$$

iv) Se selecciona el perfil/chapa plegada más grande de los obtenidos en i) y ii), y se realiza la **comprobación de la tensión tangencial** τ **máxima a cortante**,

$$\tau = \frac{Q\, m_{11}^{*}}{I_{11}^{nec}\,\delta} \leq \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$$

Siendo δ el espesor en el punto de la sección transversal, dónde el momento estático m_{11}^{*} es máximo.

Procedimiento de recalculo de la estructura: Una vez se ha obtenido para cada barra de la estructura la sección transversal A^{nec} y la inercia I_{11}^{nec}, que garantizan que la tensión $\sigma \leq f_{yd}$ y $\tau \leq f_{yd}\big/\sqrt{3}$ son inferiores a las correspondientes resistencia de cálculo, y teniendo en cuenta el signo del esfuerzo axil (Elasticidad reducida si es de compresión), **se realiza un nuevo recalculo de la estructura con estos nuevos valores**.

Esta corrección realizada en el **Paso 2,** se repite hasta que la estructura alcanza un comportamiento estacionario, es decir que la sección transversal A^{nec} y la inercia I_{11}^{nec} no cambian.

RESUMEN DE LOS PASOS A SEGUIR:

1) Obtener el área necesaria "A_{nec}", y con ella se busca un área igual o la inmediata superior y se selecciona el perfil normalizado correspondiente.

2) Obtener el módulo resistente necesario "W_{nec}", y con esta magnitud se busca un módulo resistente igual o la inmediata superior y se selecciona el perfil normalizado correspondiente.

3) **Se elige el perfil/chapa plegada mayor de los dos que se han obtenido anteriormente** (1 o 2). Con este se hace la verificación correspondiente a Flexión Compuesta y a Corte. Si las tensiones "σ" y "τ" son menores que las resistencias máximas admitidas "f_{yd}","$f_{yd}/\sqrt{3}$", se procede a utilizarlo en el nuevo cálculo de la estructura.