Prof. Paulo Henrique Pisani

Tópicos

- Recursividade
- Iteração vs recursão
- Exemplos adicionais

Recursividade

re·cur·são

Ação de recorrer ou de reajustar (linhas, colunas, páginas); Se você ainda não entendeu, ver: **recursão**

https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/recursão/

Slide do Prof. Jesús P. Mena-Chalco:

http://professor.ufabc.edu.br/~jesus.mena/courses/mcta028-3q-2017/

- Recursão é um conceito fundamental em computação!
- Muitos problemas computacionais podem ser solucionados combinando soluções de instâncias menores desses mesmos problemas.

 Em Matemática, muitas funções são definidas de forma recursiva:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & n > 0 \end{cases}$$

•
$$4! = ?$$

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & n > 0 \end{cases}$$

$$4! = 4 \cdot 3!$$

$$3! = 3 \cdot 2!$$

•
$$4! = ?$$

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & n > 0 \end{cases}$$

$$4! = 4 \cdot 3!$$

$$3! = 3 \cdot 2!$$

•
$$4! = ?$$

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & n > 0 \end{cases}$$

$$4! = 4 \cdot 3!$$

•
$$4! = ?$$

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & n > 0 \end{cases}$$

$$4! = 4 \cdot 3!$$

•
$$4! = ?$$

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & n > 0 \end{cases}$$

$$4! = 4 \cdot 6$$

• 4! = ?
$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n, & n > 0 \end{cases}$$
 4! = 4 . 6 = 24

- Em C, a recursão ocorre por meio da definição de funções também!
- Escreveremos funções recursivas, ou seja, funções que chamam a si mesmas.

```
int fatorial(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

- Uma função recursiva deve possuir duas partes básicas:
 - Caso base
 - Chamada recursiva: pelo menos uma chamada a si mesma

```
int fatorial(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

```
int f4(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
}
int f3(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f4(n - 1);
int f2(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f3(n - 1);
}
int fatorial(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f2(n - 1);
```

Vendo de outra forma...

```
int f4(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
}
int f3(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f4(n - 1);
int f2(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f3(n - 1);
}
int fatorial(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f2(n - 1);
```

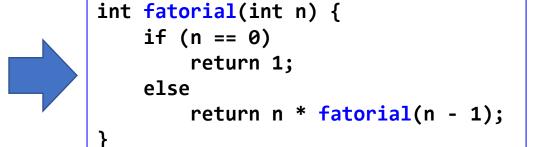
Vendo de outra forma...

Mas esse código está muito ruim!

Não funciona para n > 3 e também há muito código copiado!

```
int f4(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
int f3(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f4(n - 1);
int f2(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f3(n - 1);
}
int fatorial(int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * f2(n - 1);
```

Vendo de outra forma...



Esta versão funciona para n > 3

```
int fatorial(int n =2 ) {
   if (n == 0)
      return 1;
   else
      return n * fatorial(n - 1);
}
```

```
int fatorial(int n =2 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * int fatorial(int n =1 ) {
            if (n == 0)
                return 1;
            else
                     return n * fatorial(n - 1);
        }
}
```

```
int fatorial(int n =2 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * int fatorial(int n =1 ) {
                       if (n == 0)
                           return 1;
                       else
                            return n *
                                       int fatorial(int n =0 ) {
                                           if (n == 0)
                                                return 1;
                                           else
                                                return n * fatorial(n - 1);
```

```
int fatorial(int n =2 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * int fatorial(int n =1 ) {
                       if (n == 0)
                           return 1;
                       else
                           return n *
                                       int fatorial(int n =0 ) {
                                           if (n == 0)
                                               return 1;
                                           else
                                               return n * fatorial(n - 1);
```

```
int fatorial(int n =2 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * int fatorial(int n =1 ) {
        if (n == 0)
            return 1;
        else
            return n * 1
        }
}
```

```
int fatorial(int n =2 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * int fatorial(int n =1 ) {
        if (n == 0)
            return 1;
        else
            return n * 1
        }
}
```

```
int fatorial(int n =2 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * 1
}
```

```
int fatorial(int n =2 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * 1
}
```

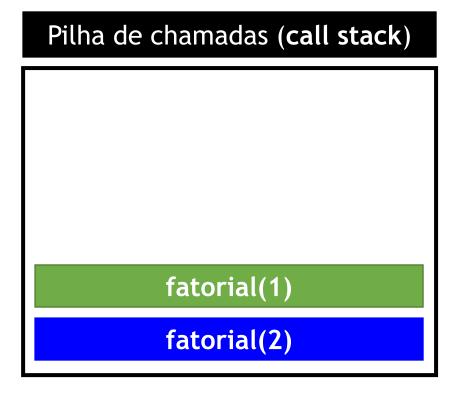
```
int fatorial(int n) {
   if (n == 0)
      return 1;
   else
      return n * fatorial(n - 1);
}
```

Veremos a recursão de outra forma ainda!!!

```
int fatorial(int n =2 ) {
   if (n == 0)
      return 1;
   else
      return n * fatorial(n - 1);
}
```

Pilha de chamadas (call stack)
fatorial(2)

```
int fatorial(int n =1) {
   if (n == 0)
      return 1;
   else
      return n * fatorial(n - 1);
}
```



```
int fatorial(int n =1 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

```
int fatorial(int n =0 ) {
   if (n == 0)
      return 1;
   else
      return n * fatorial(n - 1);
}
```

Pilha de chamadas (call stack) fatorial(0) fatorial(1) fatorial(2)

```
int fatorial(int n =1 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

```
int fatorial(int n =0 ) {
    if (n == 0)

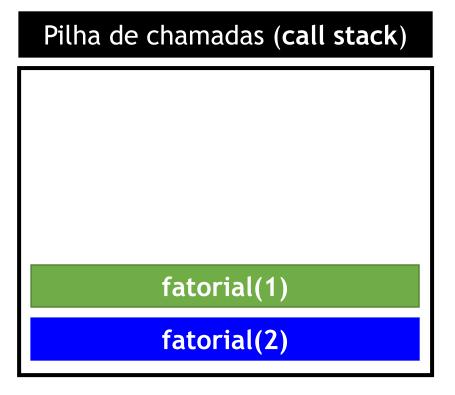
    return 1;
    else
        return n * fatorial(n - 1);
}
```

```
fatorial(0)

fatorial(1)

fatorial(2)
```

```
int fatorial(int n =1 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * 1;
}
```



```
int fatorial(int n =2 ) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * 1;
}
```

Pilha de chamadas (call stack)
fatorial(2)

Pilha de chamadas (call stack)

Retomando...

- Uma <u>função recursiva</u> deve possuir duas partes básicas:
 - Caso base
 - Chamada recursiva: pelo menos uma chamada a si mesma

Retomando...

É importante ter cuidado ao definir o caso base! Caso contrário poderá ocorrer infinitas chamadas recursivas

- Uma <u>função recursiva</u> deve possum dadas partes básicas:
 - Caso base
 - Chamada recursiva: pelo menos uma chamada a si mesma

Caso base

- É importante ter cuidado ao definir o caso base!
 - Caso contrário, poderá ocorrer infinitas chamadas recursivas!
 - Na verdade, o que ocorre nesse é o chamado estouro da pilha de chamadas: stack overflow
 - O controle das chamadas a outros métodos é realizado por meio de uma pilha, como vimos no exemplo do fatorial.

Caso base e chamada recursiva

- Se a instância é pequena:
 - Resolva-a diretamente e retorne o resultado.
- Senão:
 - Reduza a uma instância menor e aplique o mesmo método nesta instância menor.

As chamadas recursivas devem ir reduzindo a instância do problema de forma a ir em direção a um caso base.

Teste A

 O que será impresso neste programa?

```
#include <stdio.h>
void imprimir(int i) {
  if (i > 0) {
     imprimir(i - 1);
     int j;
     for (j = 1; j <= i; j++)
        printf("*");
     printf("\n");
int main() {
   imprimir(5);
   return 0;
```

Exemplo dos slides dos professores Emílio Francesquini e Carla Negri Lintzmayer (http://professor.ufabc.edu.br/~carla.negri/cursos/2018Q3-PE/aulas/09.recursao.pdf)

```
#include <stdio.h>
void imprime_elemento(int v[], int n) {
  if (n == 0) {
     printf("\n");
     return;
  imprime_elemento(v, n-1);
  printf("%d ", v[n-1]);
int main() {
  int vetor[6] = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\};
  imprime_elemento(vetor, 6);
                      O que será impresso
  return 0;
                      neste programa?
```

Há diferença entre as duas funções?

```
void imprime_elemento(int v[], int n) {
   if (n == 0) {
      printf("\n");
      return;
   imprime_elemento(v, n-1);
   printf("%d ", v[n-1]);
void imprime_elemento2(int v[], int n) {
   if (n == 0) {
      printf("\n");
      return;
   printf("%d ", v[n-1]);
   imprime_elemento2(v, n-1);
```

Há diferença entre as duas funções?

```
void imprime_elemento(int v[], int n) {
   if (n == 0) {
      printf("\n");
      return;
   }
   imprime_elemento(v, n-1);
   printf("%d ", v[n-1]);
}
```

Inverte a ordem de impressão dos números do vetor!

```
void imprime_elemento2(int v[], int n) {
   if (n == 0) {
      printf("\n");
      return;
   }
   printf("%d ", v[n-1]);
   imprime_elemento2(v, n-1);
}
```

Iteração vs Recursão

Iteração vs recursão

- Toda função pode ser escrita usando recursão (sem o uso de iteração);
- A recíproca também é verdadeira: toda função pode ser escrita usando iteração (sem o uso de recursão).
- Muitas vezes a implementação recursiva é mais simples, mas é menos eficiente computacionalmente que a versão iterativa.

• Faça uma função para somar os *n* primeiros elementos da seguinte série:

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

Assuma que k é inteiro e >= 0.

• Faça uma função para somar os *n* primeiros elementos da seguinte série:

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

```
#include<math.h>
```

Versão iterativa

```
int somatorio(int k, int n) {
   int soma = 0;
   int i;
   for (i = 1; i <= n; i++)
        soma += lround(pow(i, k));
   return soma;
}</pre>
```

 Faça uma função para somar os n primeiros elementos da seguinte série:

```
1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k
                          Observe que usamos o Iround para
                          converter o double retornado por
   #include<math.h>
                              pow para int (long int)
   int somatorio(int k, int n) {
       int soma = 0;
       int i;
       for (i = 1; i <= n; i++)
           soma += lround(pow(i, k));
       return soma;
```

• E como seria a forma recursiva?

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

Assuma que k é inteiro e >= 0.

• E como seria a forma recursiva?

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

 Primeiro, vamos tentar formular qual seria o caso base e qual a chamada recursiva:

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k,n-1), & n > 1 \end{cases}$$

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k, n - 1), & n > 1 \end{cases}$$

s(2,3) = ?

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k,n-1), & n > 1 \end{cases}$$

$$s(2,3) = 3^2 + s(2,2)$$

$$s(2,2) = 2^2 + s(2,1)$$

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k, n - 1), & n > 1 \end{cases}$$

$$s(2,3) = 3^2 + s(2,2)$$

$$s(2,2) = 2^2 + s(2,1)$$

$$s(2,1) = 1$$

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k,n-1), & n > 1 \end{cases}$$

$$s(2,3) = 3^2 + s(2,2)$$

$$s(2,2) = 2^2 + 1$$

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k,n-1), & n > 1 \end{cases}$$

$$s(2,3) = 3^2 + 5$$

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k,n-1), & n > 1 \end{cases}$$

$$s(2,3) = 3^2 + 5 = 14$$

Ótimo, agora vamos escrever a função recursiva em C!

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k,n-1), & n > 1 \end{cases}$$



Ótimo, agora vamos escrever a função recursiva em C!

$$s(k,n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n^k + s(k,n-1), & n > 1 \end{cases}$$

```
#include<math.h>
int somatorio_recursivo(int k, int n) {
   if (n == 1)
       return 1;
   else
      return lround(pow(n, k)) + somatorio_recursivo(k, n-1);
}
```

```
#include<math.h>
int somatorio(int k, int n) {
   int soma = 0;
   int i;
   for (i = 1; i <= n; i++)
        soma += lround(pow(i, k));
   return soma;
}</pre>
```

```
#include<math.h>
int somatorio_recursivo(int k, int n) {
   if (n == 1)
      return 1;
   else
      return lround(pow(n, k)) + somatorio_recursivo(k, n-1);
}
```

```
#include<math.h>
int somatorio(int k, int n) {
   int soma = 0;
   int i;
   for (i = 1; i <= n; i++)
       soma += lround(pow(i, k));
   return soma;
}</pre>
```

Para pensar: veja que na versão iterativa, o índice aumenta enquanto que na versão recursiva ele diminui.

Mesmo assim, na prática, a soma é feita na ordem do menor n (n=1) até o maior nos dois casos.

```
#include<math.h>
int somatorio_recursivo(int k, int n) {
   if (n == 1)
      return 1;
   else
      return lround(pow(n, k)) + somatorio_recursivo(k, n-1);
}
```

Exemplo

• Como seria uma função recursiva para calcular o valor de xⁿ? Assuma que n é inteiro e >= 0.

Exemplo

• Como seria uma função recursiva para calcular o valor de xⁿ? Assuma que n é inteiro e >= 0.

```
int potencia(int b, int e) {
  if (e == 0) return 1;
  return b * potencia(b, e-1);
}
```

Exemplos adicionais

Outro exemplo: Fibonacci

 A série de Fibonacci é definida da seguinte forma:

$$fib(i) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 1, & i = 1 \\ fib(i-1) + fib(i-2), & i > 1 \end{cases}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Outro exemplo: Fibonacci

 A série de Fibonacci é definida da seguinte forma:

Casos base

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Versão recursiva

Casos base

```
fib(i) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 1, & i = 1 \end{cases} \begin{cases} fib(i-1) + fib(i-2), & i > 1 \end{cases}
```

Chamadas recursivas

```
int numero_fibonacci(int i) {
   if (i == 0)
      return 0;
   else if (i == 1)
      return 1;
   else
      return numero_fibonacci(i - 1) + numero_fibonacci(i - 2);
}
```

Versão iterativa

$$fib(i) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ 1, & i = 1 \\ fib(i-1) + fib(i-2), & i > 1 \end{cases}$$



Mais um exemplo: somar elementos de um vetor

```
Essa a versão iterativa!
#include<stdio.h>
double soma_vetor(double vetor[], int n) {
    double soma = 0.0;
    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)
        soma += vetor[i];
    return soma;
                                                    Como seria a
int main() {
                                                  versão recursiva?
    double v[] = \{1, 2, 3, 4.5, 5.5\};
    printf("%.21f\n", soma_vetor(v, 5));
    return 0;
```

Mais um exemplo: somar elementos de um vetor

```
Essa a versão recursiva!
#include<stdio.h>
double soma vetor rec(double vetor[], int n) {
    if (n == 0)
        return 0;
    else
        return vetor[n-1] + soma_vetor_rec(vetor, n-1);
int main() {
    double v[] = \{1, 2, 3, 4.5, 5.5\};
    printf("%.21f\n", soma_vetor_rec(v, 5));
    return 0;
```

Exemplo

- 1. Como seria uma função recursiva para verificar se um número x está presente no vetor?
- 2. E para encontrar o menor valor em um vetor?

Exemplo (1)

```
Comprimento
                                                    Número a ser
                                                    localizado
                               do vetor
int encontra_numero(int v[], int n, int numero) {
   if (n==0) return 0;
   if (v[n-1] == numero)
       return 1;
   else
       return encontra_numero(v, n-1, numero);
                               Comprimento
                                                    Número a ser
                               do vetor
                                                    localizado
int encontra_numero(int v[], int n, int numero) {
   if (n==0) return 0;
   return (v[n-1] == numero) || encontra_numero(v, n-1, numero);
```

Exemplo (2)

• Escreva uma função recursiva que retorne a soma dos n primeiros números ímpares. Por exemplo: soma_impares(3) = 1 + 3 + 5 = 9.

int soma_impares(int n)

 Faça uma função recursiva que calcule o valor de PI usando a série Gregory:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

double calcula_pi(int n)

n é o número de elementos a considerar da série de Gregory

 Faça uma função recursiva que calcule o valor de PI usando a série Gregory:

```
double calcula_pi(int n) {
    if (n == 1)
        return 4.0;
    else
        return 4*(n%2 == 0 ? -1 : 1) * (1.0/(2.0*n-1)) + calcula_pi(n-1);
}
```

- O professor ABC escreveu uma função, mas esqueceu para que ela servia... Você pode ajuda-lo a descobrir a função misterio faz?
- Faça também uma versão iterativa dela.
- Há risco dessa função recursiva executar indefinidamente?

```
#include<stdio.h>
```

```
int misterio(char t[], int c) {
    if (t[c] == '\0')
        return 0;
    else
        return 1 + misterio(t, c + 1);
int main() {
    char vetor[50];
    printf("%d\n", misterio(vetor, 0));
    return 0;
```

Referências

- Slides do Prof. Jesús P. Mena-Chalco:
 - http://professor.ufabc.edu.br/~jesus.mena/cours es/mcta028-3q-2017/
- Slides do Prof. Fabrício Olivetti:
 - http://folivetti.github.io/courses/ProgramacaoEstruturada/
- Slide do Prof. Monael Pinheiro Ribeiro:
 - https://sites.google.com/site/aed2018q1/
- CELES, W.; CERQUEIRA, R.; RANGEL, J. L. Introdução a Estruturas de Dados. Elsevier/Campus, 2004.

Bibliografia básica

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. Algoritmos: teoria e prática. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Campus, 2002.
- FORBELLONE, A. L. V.; EBERSPACHER, H. F. Lógica de programação: a construção de algoritmos e estruturas de dados. 3. ed. São Paulo, SP: Prentice Hall, 2005.
- PINHEIRO, F. A. C. Elementos de programação em C. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012.

Bibliografia complementar

- AGUILAR, L. J. Programação em C++: algoritmos, estruturas de dados e objetos. São Paulo, SP: McGraw-Hill, 2008.
- DROZDEK, A. Estrutura de dados e algoritmos em C++. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2009.
- KNUTH D. E. The art of computer programming. Upper Saddle River, USA: Addison- Wesley, 2005.
- SEDGEWICK, R. Algorithms in C++: parts 1-4: fundamentals, data structures, sorting, searching. Reading, USA: Addison-Wesley, 1998.
- SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de dados e seus algoritmos. 3. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1994.
- TENENBAUM, A. M.; LANGSAM, Y.; AUGENSTEIN, M. J. Estruturas de dados usando C. São Paulo, SP: Pearson Makron Books, 1995.