RESUMEN ALGEBRA 1

FINAL

NUMEROS COMPLEJOS

Números Complejos.

6.1 Cuerpos.

Definición 6.1.1. **(Cuerpo.)**

Se dice que $(K,+,\cdot)$ es un *cuerpo* si

- $+$ y $\cdot$ son operaciones asociativas y conmutativas.
- Existe un elemento neutro para la suma, que se nota 0_K, es decir $\forall x \in K$ se tiene $x + 0_K = x$, y un elemento neutro para el producto, que se nota 1_K, es decir $\forall x \in K$ se tiene $x \cdot 1_K = x$.
- Cualquiera sea $x \in K$, x tiene un inverso aditivo, u opuesto, que se nota $-x$, es decir $x + (-x) = 0_K$, y cualquiera sea $x \in K$, $x \neq 0$, x tiene un inverso multiplicativo que se nota x^{-1}, es decir $x \cdot x^{-1} = 1_K$.
- La operación $\cdot$ es distributiva sobre $+$, es decir $\forall x, y, z \in K$ se tiene $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

cada lado $-0 \cdot x$ se obtiene $0 \cdot x = 0$. También se deduce que $\forall x, y \in K$ no nulos, vale que $x \cdot y \neq 0$ pues si fuera $x \cdot y = 0$ con $x \neq 0$ entonces, como existe x^{-1}, se tendría $y = x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 = 0$.

En particular, cuando K es un cuerpo, notando $K^{\times} := K - \{0\}$, se tiene que $\cdot : K^{\times} \times K^{\times} \to K^{\times}$, y tanto $(K,+)$ como $(K^{\times}, \cdot)$ son grupos abelianos.

6.2 Números complejos: forma binomial.

Teorema 6.2.1. **(El cuerpo de los números complejos.)**

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo.

- $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ y en general,

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Definición 6.2.2. (Forma binomial, parte real, parte imaginaria, conjugado, módulo.)

- Dado $z \in \mathbb{C}$, la forma $z = a + b \cdot i$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se llama la *forma binomial* de z, su parte real es $\Re e(z) := a \in \mathbb{R}$ y su parte imaginaria es $\Im m(z) := b \in \mathbb{R}$.
- Dado $z = a + b\,i$ con $a, b \in \mathbb{R}$, el *conjugado* de z es $\overline{z} := a - b\,i \in \mathbb{C}$, y el *módulo* de z es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Observemos que $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, y que si $z \neq 0$, entonces $|z| \in \mathbb{R}_{>0}$.

Además se tiene las siguientes relaciones entre $\overline{z}$ y $|z|$:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \ \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \ \forall z \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Proposición 6.2.3. (Propiedades del conjugado y del módulo.)

Para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene

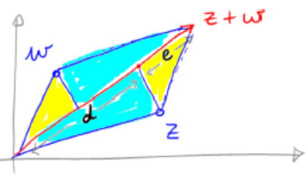
- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
- $z + \overline{z} = 2\,\Re e(z)$,
- $z - \overline{z} = 2\,\Im m(z)\,i$,
- $|\Re e(z)| \leq |z|$ *e* $|\Im m(z)| \leq |z|$.

Además, para todo $z, \omega \in \mathbb{C}$, se tiene

- $\overline{z + \omega} = \overline{z} + \overline{\omega}$.
- $\overline{z \cdot \omega} = \overline{z} \cdot \overline{\omega}$.
- *Si* $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$.
- *Si* $z \neq 0$, $\overline{z^k} = \overline{z}^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
- $|z + \omega| \leq |z| + |\omega|$.
- $|z \cdot \omega| = |z| \cdot |\omega|$
- *Si* $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.
- *Si* $z \neq 0$, $|z^k| = |z|^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

La propiedad $|z + \omega| \leq |z| + |\omega|$ se llama la *desigualdad triangular* y se puede comprobar geométricamente:

$d \leq |z|$, $e \leq |\omega| \implies |z+\omega| = d+e \leq |z|+|\omega|$



Proposición 6.2.4. **(Raíces cuadradas de números complejos.)**

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces existe $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^2 = (-\omega)^2 = z$. Si $z \neq 0$, entonces z tiene exactamente dos raíces cuadradas distintas, que son ω y $-\omega$.

<u>EJEMPLO IMPORTANTE:</u>

Ejemplo: Calcular las raíces cuadradas complejas de $z = 3 - 4\,i$.

Planteemos $\omega^2 = z$ donde $\omega = x + y\,i \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ a determinar. Esto implica $|\omega^2| = |z|$, es decir $|\omega|^2 = |z|$ también. Por lo tanto, de $\omega^2 = 3 - 4\,i$ y $|\omega|^2 = |3 - 4\,i| = \sqrt{25} = 5$, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy\,i = 3 - 4\,i \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

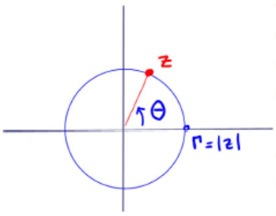
De la primera ecuación $2x^2 = 5 + 3 = 8$, y de la tercera $2y^2 = 5 - 3 = 2$. Luego

$$x = \pm\sqrt{\frac{8}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad \text{e} \quad y = \pm\sqrt{\frac{2}{2}} = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$$

O sea que en principio tenemos 4 posibilidades, eligiendo x e y positivos y/o negativos. Pero la segunda condición nos dice que $x\,y = -2$, el producto es negativo, por lo tanto si se toma $x = 2$ se debe tomar $y = -1$ y si se toma $x = -2$ se debe tomar $y = 1$: los candidatos a raíces cuadradas son entonces

$$\omega = 2 - i \quad \text{y} \quad \omega' = -\omega = -2 + i.$$

6.3 Números complejos: forma trigonométrica.



Sea $z \in \mathbb{C}^\times$. Entonces z no solo está determinado por su parte real $\Re e(z) \in \mathbb{R}$ y su parte imaginaria $\Im m(z) \in \mathbb{R}$, pero también se lo puede determinar de otra forma por su módulo $r = |z| \in \mathbb{R}_{>0}$, que determina en qué circunferencia se encuentra z, y por un ángulo θ con respecto a (por ejemplo) el semieje real positivo, como lo muestra el dibujo.

Luego,

$$z = r\,(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta)$$

donde

$$r = |z| \quad \text{y} \quad \theta \text{ es tal que } \cos\theta = \frac{\Re e(z)}{|z|} \text{ y } \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\Im m(z)}{|z|}.$$

se denomina la *Fórmula de Euler* $e^{\theta i} = \cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta, \quad \forall\,\theta \in \mathbb{R}.$

Por lo tanto $z = r\,e^{\theta i}$ donde $r = |z| \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta \in \mathbb{R}$ es tal que $\cos\theta = \frac{\Re e(z)}{|z|}$ y $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\Im m(z)}{|z|}$.

El ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ está por convención dado en radianes

Claramente, el ángulo no está determinado en forma única, ya que sabemos que $\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi)$ y $\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}(\theta + 2k\pi)$, $\forall\,k \in \mathbb{Z}$. Así,

$$e^{\theta i} = e^{(\theta + 2k\pi)i}, \quad \forall\,k \in \mathbb{Z},$$

y más aún, para $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, se tiene

$$s\,e^{\varphi i} = r\,e^{\theta i} \iff \begin{cases} s = r \\ \varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

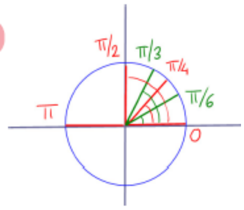
Si elegimos θ con $0 \leq \theta < 2\pi$, entonces este ángulo está determinado en forma única y se denomina el *argumento de* z que se denota $\arg(z)$.

La *forma trigonométrica o polar* de $z \in \mathbb{C}^\times$ es

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta) \;=\; r\,e^{\theta i} \quad \text{con} \quad r \in \mathbb{R}_{>0} \;\; \text{y} \;\; 0 \leq \theta < 2\pi.$$

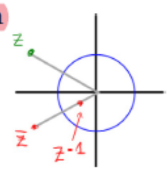
Repasemos los ángulos típicos con sus coseno y seno:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0



Observación 6.3.1. Sea $z = r\,(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta) = r\,e^{\theta i}$ con $r \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces

- $\overline{z} = r\,\big(\cos(-\theta) + i\,\operatorname{sen}(-\theta)\big) = r\,e^{-\theta i}$,
- $z^{-1} = r^{-1}\,\big(\cos(-\theta) + i\,\operatorname{sen}(-\theta)\big) = r^{-1}\,e^{-\theta i}$.



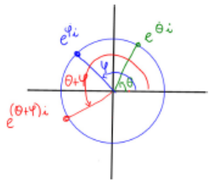
Teorema 6.3.2. **(Fórmula de de Moivre.)**

Sean $z = r\,(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta) = r\,e^{\theta i}$ *y* $\omega = s(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi) = s\,e^{\varphi i}$ *con* $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ *y* $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$z \cdot \omega = rs\,\big(\cos(\theta+\varphi) + i\,\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\big) = rs\,e^{(\theta+\varphi)i}.$$

Es decir

$$r\,e^{\theta i} \cdot s\,e^{\varphi i} = rs\,e^{(\theta+\varphi)i}.$$



En particular,

$$\arg(z \cdot \omega) = \arg(z) + \arg(\omega) - 2k\pi$$

con $k = 0$ *o* 1 *elegido de modo tal que*

$$0 \leq \arg(z) + \arg(\omega) - 2k\pi < 2\pi.$$

Corolario 6.3.3. **(Expresión trigonométrica de una potencia.)**

Sean $z = r\,(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta) = r\,e^{\theta i}$ *y* $\omega = s(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi) = s\,e^{\varphi i}$ *con* $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ *y* $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. *Entonces*

- $\dfrac{z}{\omega} = \dfrac{r}{s}\big(\cos(\theta-\varphi) + i\,\operatorname{sen}(\theta-\varphi)\big) = \dfrac{r}{s}\,e^{(\theta-\varphi)i}$.
- $z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\,\operatorname{sen}(n\theta)\big) = r^n\,e^{n\theta i}$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

6.4 Raíces n-ésimas de números complejos.

Sea $z \in \mathbb{C}^\times$. Hallar las raíces n-ésimas de z consiste en determinar todos los $\omega \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\omega^n = z$. Hagamos primero un ejemplo.

Teorema 6.4.1. **(Las raíces n-ésimas de $z \in \mathbb{C}^\times$.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $z = s\,e^{\varphi i} \in \mathbb{C}^\times$, *con* $s \in \mathbb{R}_{>0}$ *y* $0 \leq \varphi < 2\pi$. *Entonces* z *tiene* n *raíces* n*-ésimas* $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1} \in \mathbb{C}$, *donde*

$$\omega_k = s^{1/n}\,e^{\theta_k i} \quad \text{donde} \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{para } 0 \leq k \leq n-1.$$

6.4.1 El grupo G_n de raíces n-ésimas de la unidad.

Cuando $z = 1$, buscamos las raíces n-é simas de 1, es decir los $\omega \in \mathbb{C}$ tales que $\omega^n = 1$. Según el Teorema 6.4.1, como $1 = e^0$, se tiene que las soluciones son $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ donde

$$\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \quad 0 \le k \le n-1.$$

Éstas se llaman las *raíces n-ésimas de la unidad.*

Definición 6.4.2. **(El conjunto G_n.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto G_n es el conjunto de raíces n-ésimas de la unidad, es decir

$$G_n := \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^n = 1\} = \{\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, 0 \le k \le n-1\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Proposición 6.4.3. **($(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$.

1. $\forall\, \omega, z \in G_n$ *se tiene que* $\omega \cdot z \in G_n$.
2. $1 \in G_n$.
3. $\forall\, \omega \in G_n$, *existe* $\omega^{-1} \in G_n$.

$-1 \in G_n \Leftrightarrow n$ es par, pues $(-1)^n = 1 \Leftrightarrow n$ es par.

Proposición 6.4.4. (Más propiedades de G_n.)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in G^n$. Entonces

1. $|\omega| = 1$.
2. *Sea* $m \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \mid m$. *Entonces* $\omega^m = 1$.
3. *Sean* $m, m' \in \mathbb{Z}$ *tales que* $m \equiv m' \pmod{n}$, *entonces* $\omega^m = \omega^{m'}$. *En particular* $\omega^m = \omega^{r_n(m)}$.
4. $\omega^{-1} = \overline{\omega} = \omega^{n-1}$.

Proposición 6.4.5. **($G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$).**

Sean $n, m \in \mathbb{N}$.

1. $n \mid m \Rightarrow G_n \subset G_m$.
2. $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$.
3. $G_n \subset G_m \Leftrightarrow n \mid m$.

Proposición 6.4.6. **(G_n es un grupo cíclico.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$. Existe $\omega \in G_n$ tal que

$$G_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, , \omega^{n-1}\} = \{\omega^k,\ 0 \le k \le n-1\}.$$

Definición 6.4.7. **(Raíz n-ésima primitiva de la unidad.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\omega \in \mathbb{C}$ es una raíz n*-ésima primitiva* de la unidad si

$$G_n = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\} = \{\omega^k,\ 0 \le k \le n-1\}.$$

Proposición 6.4.9. **(Caracterización de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea $\omega \in \mathbb{C}$. Entonces ω es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solo si

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \omega^m = 1 \iff n \mid m.$$

Corolario 6.4.10. **(Raíces primitivas y potencias.)**

Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Entonces ω^k es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solamente si $(n : k) = 1$.

Corolario 6.4.11. **(Las raíces primitivas en G_n.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, $0 \le k \le n-1$. Entonces ω_k es raíz n-ésima primitiva de la unidad si y solamente si $(n : k) = 1$.

Corolario 6.4.12. **(Las raíces primitivas en G_p.)**

Sea p un primo. Entonces cualquiera sea k, $1 \le k \le p-1$, se tiene que $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{p}i}$ es ráiz p-ésima primitiva de la unidad. Es decir $\forall\, \omega \in G_p$, $\omega \neq 1$, se tiene que ω es una raíz p-ésima primitiva de la unidad.

Proposición 6.4.13. **(Suma y producto de los elementos de G_n.)**

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Entonces

$$\sum_{\omega \in G_n} \omega = 0 \qquad y \qquad \prod_{\omega \in G_n} \omega = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

EJERCICIOS DE FINALES

3/8/22

3) Sea $\omega \in G_{15}$ tal que $\omega \notin G_3$ y $\omega \notin G_5$. Hallar el argumento del número complejo

$$(2 + \omega^3 + \bar{\omega}^3 + \omega^6 + \bar{\omega}^6 + i(2 + \omega^5 + \omega^{-5}))^{31}$$

27/7/22

3. En G_{12} se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$w \mathcal{R} z \quad \text{si y sólo si} \quad wz \in G_6.$$

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) Hallar el cardinal de la clase de equivalencia del número complejo i.

17/6/22

3. Sea $n \in \mathbb{N}$ par y sean w y z dos raíces n-ésimas de la unidad. Pruebe que $(z+w)^{n/2}$ es real o imaginario puro.

29/4/22

3. Pruebe que si $w \in \mathbb{C}$ es distinto de 1 y satisface $w^7 = 1$, entonces $w + \overline{w}$ es raíz del polinomio $X^3 + X^2 - 2X - 1$.

25/2/22

1. Sea $\Re$ la relación en G_{32} definida por

$$z \Re \omega \iff z\overline{\omega} \in G_{24}.$$

(a) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.

(b) Determinar la cantidad de elementos $z \in G_{32}$ relacionados con i.

22/12/21

Ejercicio 3

Sea $\omega = e^{\frac{\pi}{3}i}$, y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = \omega - 1 \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{z_n}^{3n+8}, \ \forall n \geq 1.$$

Calcular z_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

4/8/21

3. (a) Probar que si $\omega = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces

$$X^2 + X - 1 = (X - (\omega + \omega^{-1}))(X - (\omega^2 + \omega^{-2})).$$

(b) Calcular, justificando cudadosamente, el valor exacto de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

11/6/21

4. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. En el conjunto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ de los números complejos no nulos definimos una relación $\sim$ de manera que

$$z \sim w \iff \text{existe } \alpha \in G_n \text{ tal que } z = \alpha w.$$

(a) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia.

(b) Encuentre explícitamente la clase de equivalencia del complejo $z = 3 + 5i$ respecto a la relación $\sim$ cuando $n = 4$.