RESUMEN ALGEBRA 1

FINAL

CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES

Capítulo 1

Conjuntos, Relaciones y Funciones.

1.1 Conjuntos.

1.1.1 Conjuntos y subconjuntos, pertenencia e inclusión.

Definición 1.1.1. (informal de conjunto y elementos.)

Un conjunto es una colección de objetos, llamados *elementos*, que tiene la propiedad que dado un objeto cualquiera, se puede decidir si ese objeto es un elemento del conjunto o no.

Observación 1.1.2. El orden de los elementos no importa en un conjunto, y en un conjunto no se tiene en cuenta repeticiones de elementos.

Se dice que cada elemento a de un conjunto A *pertenece* al conjunto A, y se nota $a \in A$. Si un objeto b no pertenece al conjunto A, se nota $b \notin A$.

Definición 1.1.3. (Subconjuntos e Inclusión.)

Sea A un conjunto. Se dice que un conjunto B *está contenido en* A, y se nota $B \subseteq A$ (o también $B \subset A$), si todo elemento de B es un elemento

de A. En ese caso decimos también que B *está incluído en* A, o que B es un *subconjunto* de A. Si B no es un subconjunto de A se nota $B \nsubseteq A$ (o $B \not\subset A$).

Observación 1.1.4. (Igualdad de conjuntos.)

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Definición 1.1.5. (Conjunto de partes.)

Sea A un conjunto. El *conjunto de partes* de A, que se nota $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, o sea el conjunto cuyos *elementos* son los subconjuntos de A. Es decir

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} \quad \text{o también} \quad B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A.$$

1.1.2 Operaciones entre conjuntos.

Complemento ^{c}**:** Sea A subconjunto de un conjunto referencial U. El *complemento* de A (en U) es el conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A, que se suele notar con A' o A^c (aquí usaremos la notación

Unión $\cup$**:** Sean A, B subconjuntos de un conjunto referencial U. La *unión* de A y B es el conjunto $A \cup B$ de los elementos de U que pertenecen a A o a B. Es decir

Intersección $\cap$**.** Sean A, B subconjuntos de un conjunto referencial U. La *intersección* de A y B es el conjunto $A \cap B$ de los elementos de U que pertenecen tanto a A como a B. Es decir

Proposición 1.1.6. (Leyes de De Morgan y distributivas.)

Sean A, B, C conjuntos dentro de un conjunto referencial U. Entonces

- **Leyes de De Morgan**, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *y* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- **Leyes distributivas***:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad y \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Diferencia $-$**:** $A - B := A \cap B^c$.

Diferencia simétrica $\triangle$**:** $A \triangle B$ es el conjunto de los elementos de U que pertenecen a A o a B pero no a los dos a la vez. Es decir

Vale

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

1.1.3 Tablas de verdad de la lógica proposicional.

Se vio que las operaciones básicas de conjuntos están definidas por medio del *no* (para el complemento), del *o no excluyente* para la unión, del *y* para la intersección, y del *o excluyente* para la diferencia simétrica. Estos se llaman conectores lógicos: $\neg$ ("no", o "NOT"), $\vee$ ("o" no excluyente, u "OR"), $\wedge$ ("y", o "AND"), $\veebar$ ("o excluyente", u "XOR"), y se les puede agregar $\Rightarrow$ (implica, o si ...entonces) y $\Leftrightarrow$ (si y solo si).

Tablas de verdad de los conectores lógicos:

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

.

Tablas de verdad de las operaciones de conjuntos:

- *Complemento:* El complemento A^c de A en U se corresponde con $\neg p$.
- *Unión:* La unión $A \cup B$ se corresponde con $p \vee q$.
- *Intersección:* La intersección $A \cap B$ se corresponde con $p \wedge q$.
- *Diferencia simétrica:* La diferencia simétrica $P \triangle Q$ se corresponde con $p \veebar q$.
- *Inclusión:* La inclusión $A \subseteq B$ se corresponde con $p \Rightarrow q$.
- *Igualdad:* La igualdad $A = B$ se corresponde con $p \Leftrightarrow q$.

A	A^c
V	F
F	V

A	B	$A \cup B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \cap B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \triangle B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \subseteq B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A = B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

.

1.1.4 Producto cartesiano.

Definición 1.1.7. (Producto cartesiano.)

Sean A, B conjuntos. El producto cartesiano de A con B, que se nota $A \times B$, es el conjunto de *pares ordenados*

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

1.2 Relaciones.

Definición 1.2.1. (Relación.)

Sean A y B conjuntos. Una *relación* $\mathcal{R}$ *de* A *en* B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ es una relación de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

Dados $x \in A$, $y \in B$ y una relación $\mathcal{R}$ de A en B, se dice que x *está relacionado con* y (por la relación $\mathcal{R}$) si $(x, y) \in \mathcal{R}$. En ese caso se escribe $x \mathcal{R} y$. Si x no está relacionado con y, es decir $(x, y) \notin \mathcal{R}$, se escribe $x \not\mathcal{R} y$.

1.2.1 Relaciones en un conjunto.

Definición 1.2.2. (Relación en un conjunto.)

Sea A un conjunto. Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación en A cuando $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Definición 1.2.3. (Relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.)

Sean A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A.

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *reflexiva* si $(x,x) \in \mathcal{R}, \forall x \in A$ (dicho de otra manera, $x\,\mathcal{R}\,x, \forall x \in A$). En términos del grafo de la relación, $\mathcal{R}$ es

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *simétrica* si cada vez que un par $(x,y) \in \mathcal{R}$, entonces el par "simétrico" $(y,x) \in \mathcal{R}$ también (dicho de otra manera, $\forall x,y \in A$, $x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow y\,\mathcal{R}\,x$). En términos del grafo de la relación, $\mathcal{R}$

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *antisimétrica* si cada vez que un par $(x,y) \in \mathcal{R}$ con $x \neq y$, entonces el par $(y,x) \notin \mathcal{R}$ (dicho de otra manera, $\forall x,y \in A$, $x\,\mathcal{R}\,y$ e $y\,\mathcal{R}\,x \Rightarrow x = y$). En términos del grafo de la relación, $\mathcal{R}$

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *transitiva* si para toda terna de elementos $x,y,z \in A$ tales que $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,z) \in \mathcal{R}$, se tiene que $(x,z) \in \mathcal{R}$ también (dicho de otra manera, $\forall x,y,z \in A$, $x\,\mathcal{R}\,y$ e $y\,\mathcal{R}\,z \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,z$). En

Definición 1.2.4. (Relación de equivalencia y relación de orden.)

Sean A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A.

- Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una *relación de equivalencia* cuando es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

- Se dice que una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una *relación de orden* cuando es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 1.2.5. (Clases de equivalencia.)

Sean A un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Para cada $x \in A$, la *clase de equivalencia de* x es el conjunto

$$\overline{x} = \{y \in A : y \sim x\} \subseteq A.$$

Observemos que debido a la simetría, podríamos haber definido $\overline{x} = \{y \in A : x \sim y\}$ y daría el mismo subconjunto de A. También, debido a la reflexividad, siempre tenemos $x \in \overline{x}$ (pues $x \sim x$). Finalmente la simetría y transitividad muestran que si $y \in \overline{x}$ y $z \in \overline{x}$, entonces $y \sim z$ (pues $y \sim x$ y $x \sim z$ implica $y \sim z$), es decir todos los elementos de una clase de equivalencia están relacionados entre sí.

Proposición 1.2.6. (Propiedad fundamental de las clases de equivalencia.)

Sean A un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en A. Sean $x,y \in A$. Entonces, o bien $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$, o bien $\overline{x} = \overline{y}$.

Proposición 1.2.8. (Relaciones de equivalencia y particiones.)

Sea A un conjunto. Hay una manera natural de asociarle a una relación de equivalencia en A una partición de A. Recíprocamente, a toda partición se le puede asociar una relación de equivalencia, y estas asociaciones son inversas una de la otra.

1.3 Funciones.

Definición 1.3.1. (Función.)

Sean A y B conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ una relación de A en B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *función* cuando todo elemento $x \in A$ está relacionado con algún $y \in B$, y este elemento y es único. Es decir:

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : x \mathcal{R} y.$$

Aquí el símbolo "$\exists!$" significa "existe un único", es decir:

$$\forall x \in A, \exists y \in B \text{ tal que } x \mathcal{R} y,$$
$$\text{y si } y, z \in B \text{ son tales que } x \mathcal{R} y \text{ y } x \mathcal{R} z, \text{ entonces } y = z.$$

Como a cada $x \in A$ le corresponde un $y \in B$ y este y es único, se le puede dar un nombre que hace notar que y depende de x: se dice que y es la *imagen* de x por f, y se suele notar "$y = f(x)$", que es la forma usual en la que conocemos a las funciones; se nota "$f : A \to B$" a una función del conjunto A en el conjunto B.

Definición 1.3.2. (Igualdad de funciones.)

Sean $f, g : A \to B$ funciones. Se tiene

$$f = g \iff f(x) = g(x), \forall x \in A.$$

Definición 1.3.3. (Imagen de una función.)

Sea $f : A \to B$ es una función. La *imagen* de f, que se nota $\operatorname{Im}(f)$, es el subconjunto de elementos de B que están relacionados con algún elemento de A. Es decir

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

En términos del diagrama, la imagen es el conjunto de elementos de B a los que les llega al menos una flecha. En términos del gráfico, es el conjunto de

Definición 1.3.4. (Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.)

- f es *inyectiva* si *para todo* elemento $y \in B$ existe *a lo sumo un* elemento $x \in A$ para el cual $f(x) = y$. Dicho de otra manera, f es

- f es *sobreyectiva* si *para todo* elemento $y \in B$ existe *al menos un* elemento $x \in A$ para el cual $f(x) = y$. Dicho de otra manera, f es sobreyectiva si $\operatorname{Im}(f) = B$.

- f es *biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva, es decir *para todo* elemento $y \in B$ existe *exactamente un* elemento $x \in A$ para el cual $f(x) = y$.

Definición 1.3.5. (Composición de funciones.)

Sean A, B, C conjuntos, y $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones. Entonces la *composición* de f con g, que se nota $g \circ f$, definida por

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in A$$

1.3.1 Funciones biyectivas y función inversa.

Cuando $f : A \to B$ es una función biyectiva, recordemos que se tiene que *para todo* elemento $y \in B$ existe *exactamente un* elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto el conjunto $\mathcal{R}' = \{(y,x) : f(x) = y\} \subseteq B \times A$ es una relación de B en A que también satisface las propiedades de función! Pues todos los $y \in B$ están relacionados con algún $x \in A$, y ese x es único. Esta función $\mathcal{R}'$ se nota f^{-1} y se llama la *función inversa* de f. Está definida

únicamente cuando la función f es biyectiva. Se tiene que $f^{-1} : B \to A$ es la función que satisface para todo $y \in B$:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Proposición 1.3.6. (Biyectividad y función inversa.)

Sea $f : A \to B$ una función.

- *Si f es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "f^{-1}"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f\circ f^{-1} = \mathrm{id}_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

- *Si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$, entonces f es biyectiva y $f^{-1} = g$.*