RESUMEN ALGEBRA 1

FINAL

NUMEROS NATURALES E INDUCCIÓN

Capítulo 2

Números Naturales e Inducción.

2.1 La suma de Gauss y la serie geométrica.

2.1.1 La suma de Gauss.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1+2+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notar que este número siempre es un número natural (como debe ser) ya que $n(n+1)$ siempre es un número par!

2.1.2 La serie geométrica.

Ahora, sea un número q cualquiera, y queremos sumar las $n+1$ primeras potencias de q,

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1+q+\cdots+q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q=1, \\ \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1. \end{cases}$$

2.2 Sumatoria y Productoria.

2.2.1 Sumatoria.

Sea $n \in \mathbb{N}$. La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$, que se lee la *sumatoria* para i de 1 a n de a_i, representa la suma de los n primeros términos de la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n,$$

La sumatoria satisface las dos propiedades siguientes para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo par de sucesiones $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en A y para todo $c \in A$:

- $\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$.
- $c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i$.

2.2.2 Productoria.

Sea $n \in \mathbb{N}$. La notación $\prod_{i=1}^{n} a_i$, que se lee la *productoria* para i de 1 a n de a_i, representa el producto de los n primeros términos de la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdots a_n,$$

La productoria satisface la propiedad siguiente para todo $n \in \mathbb{N}$ y sucesiones $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en A:

- $\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) \cdot \Big(\prod_{i=1}^{n} b_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i)$.

2.3 El conjunto inductivo $\mathbb{N}$ y el principio de inducción.

Definición 2.3.1. (Conjunto inductivo.)

Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que H es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- $1 \in H$,
- $\forall x,\ x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$.

Ejemplos:

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_{\geq -13}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $[1, +\infty)$ son conjuntos inductivos.
- $\mathbb{N} \cup \{1/2\}$, $\mathbb{Z} - \{0\}$, $[1, 2]$ no son conjuntos inductivos.

Teorema 2.3.2. (Principio de inducción.)

Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

- (Caso base) *$p(1)$ es Verdadera,*
- (Paso inductivo) $\forall h \in \mathbb{N}$, *$p(h)$ Verdadera* $\Rightarrow$ *$p(h+1)$ Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aquí la hipótesis “$p(h)$ Verdadero” para un h dado se denomina la *hipótesis inductiva* (HI).

Ejemplos:

2. $\dfrac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$p(n): \quad \frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!.$$

- Caso base: ¿$p(1)$ V? Sí, pues $\dfrac{(2\cdot 1)!}{1!^2} = 2 \leq (1+1)!$.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: $\dfrac{(2h)!}{h!^2} \leq (h+1)!$.
  - Qpq (Quiero probar que) $\dfrac{(2(h+1))!}{(h+1)!^2} \leq ((h+1)+1)!$, es decir $\dfrac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \leq (h+2)!$.

Pero

$$\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} = \frac{(2h+2)(2h+1)(2h)!}{((h+1)h)!^2} = \frac{2(h+1)(2h+1)(2h)!}{(h+1)^2h!^2}$$
$$= \frac{2(2h+1)}{h+1}\,\frac{(2h)!}{h!^2} \underset{HI}{\leq} \frac{2(2h+1)}{h+1}(h+1)!$$

ya que $\dfrac{2(2h+1)}{h+1} > 0$.

Por lo tanto para probar que $\dfrac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \leq (h+2)!$, alcanza con probar que $\dfrac{2(2h+1)}{h+1} \leq h+2$ porque así se tendrá la cadena de desigualdades:

$$\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \underset{HI}{\leq} \frac{2(2h+1)}{h+1}(h+1)! \leq (h+2)(h+1)! = (h+2)!$$

Mostremos entonces que $\dfrac{2(2h+1)}{h+1} \leq h+2$. Se tiene

$$\frac{2(2h+1)}{h+1} \leq h+2 \underset{h+1>0}{\iff} 2(2h+1) \leq (h+1)(h+2)$$
$$\iff 4h+2 \leq h^2+3h+2 \iff h \leq h^2 \underset{h>0}{\iff} 1 \leq h$$

(donde siempre verificamos que no cambia el sentido de la desigualdad pues se multiplica/divide por cantidades >0). La última desigualdad es cierta pues $h \in \mathbb{N}$, por lo tanto hemos logrado probar que $\dfrac{2(2h+1)}{h+1} \leq h+2$, como queríamos.
Concluimos que $p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2.3.1 Inducción "corrida".

Teorema 2.3.3. (Principio de inducción "corrido".)

Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ *y sea* $p(n), n \geq n_0$*, una afirmación sobre* $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$*. Si* p *satisface*

- (Caso base) $p(n_0)$ *es Verdadera,*
- (Paso inductivo) $\forall\, h \geq n_0$, $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow$ $p(h+1)$ *Verdadera,*

entonces $p(n)$ *es Verdadero,* $\forall\, n \geq n_0$.

Ejemplos:

1. Probar que para todo $n \geq 5$ se tiene $2^n > n^2$.

   Vamos a probarlo por medio del principio de inducción corrido.

$$p(n): \quad 2^n > n^2$$

- Caso base: ¿$p(5)$ V? Sí, pues $32 = 2^5 > 5^2 = 25$.
- Paso inductivo: Dado $h \geq 5$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: $2^h > h^2$ (recordando $h \geq 5$).
  - Qpq $2^{h+1} > (h+1)^2$, es decir $2 \cdot 2^h > h^2 + 2h + 1$.

  Pero por HI, $2 \cdot 2^h > 2\,h^2$. Por lo tanto para probar que $2 \cdot 2^h > h^2 + 2h + 1$, alcanza con probar que $2\,h^2 \geq h^2 + 2h + 1$, pues en ese caso se tendría la cadena de desigualdades

$$2 \cdot 2^h > 2\,h^2 \geq h^2 + 2h + 1,$$

  y al haber en la cadena una desigualdad estricta $>$, la desigualdad que vale entre el miembro más a la izquierda y el más a la derecha es $>$ también. Se tiene:

$$2\,h^2 \geq h^2 + 2h + 1 \iff h^2 \geq 2h + 1 \iff h^2 - 2h - 1 \geq 0.$$

  Pero al ser $h \geq 5$, se tiene

$$h^2 - 2h - 1 = h \cdot h - 2h - 1 \geq 5h - 2h - 1 = 3h - 1 \geq 3 \cdot 5 - 1 \geq 14 \geq 0.$$

  (Notemos que la desigualdad $h^2 - 2h - 1 \geq 0$ no se cumple para $h = 1$ ni para $h = 2$, sólo se cumple de hecho a partir de $h = 3$.)

  Concluimos que para $h \geq 5$, $p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, para todo $n \geq 5$.

2. *(El distribuidor automático.)*

   Un distribuidor automático sólo tiene billetes de \$ 2 y \$ 5. Mostrar que puede dar cualquier suma n entera de \$, con $n \geq 4$.

$$p(n): \quad \exists\, i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ t.q. } n = i \cdot 2 + j \cdot 5.$$

- Caso base: ¿$p(4)$ V? Sí, pues $4 = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5$.
- Paso inductivo: Dado $h \geq 4$, ¿$p(h)$ V $\Rightarrow$ $p(h+1)$ V?
  - HI: $\exists\, i, j \in \mathbb{N}_0$ tales que $h = i \cdot 2 + j \cdot 5$ (recordando $h \geq 4$).
  - Qpq $\exists\, i', j' \in \mathbb{N}_0$ tales que $h + 1 = i' \cdot 2 + j' \cdot 5$.

  Por HI, $\exists\, i, j \in \mathbb{N}_0$ tales que $h = i \cdot 2 + j \cdot 5$.

  - Si se usó algún billete de 5 para obtener h, es decir si $j \geq 1$, reemplazar ese billete de 5 por 3 billetes de 2 (lo que da 6), o sea reemplazar j por $j' = j - 1$ (que satisface $j' \geq 0$ pues $j \geq 1$) y reemplazar i por $i' = i + 3$:

$$i' \cdot 2 + j' \cdot 5 = (i+3) \cdot 2 + (j-1) \cdot 5 = i \cdot 2 + j \cdot 5 + 6 - 5 = n + 1.$$

– Si no se usó ningún billete de 5 para obtener h, es decir si $j=0$, se tiene $h=i\cdot 2$. Pero como $h\geq 4$, entonces $i\geq 2$ y podemos reemplazar dos billetes de 2 por un billete de 5, o sea reemplazar i por $i'=i-2$ (que satisface $i'\geq 0$ pues $i\geq 2$) y reemplazar $j=0$ por $j'=1$:

$$i'\cdot 2+j'\cdot 5=(i-2)\cdot 2+5=i\cdot 2+5-4=h+1.$$

Concluimos que en todos los casos logramos mostrar que existen $i',j'\in\mathbb{N}_0$ tales que $h+1=i'\cdot 2+j'\cdot 5$. Así probamos el paso inductivo.

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadera, $\forall n\geq 4$.

2.5 Inducción completa.

2.5.1 Inducción completa – Un caso particular.

Observación 2.5.1. Cuando una sucesión está definida por recurrencia usando los dos términos anteriores, y se dan los valores de los dos términos iniciales a_1 y a_2, entonces a_n está definido para cualquier $n\in\mathbb{N}$: si

Teorema 2.5.2. (Principio de inducción - II)

Sea $p(n)$, $n\in\mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

- (Casos base) *$p(1)$ y $p(2)$ son Verdaderas,*
- (Paso inductivo) $\forall h\in\mathbb{N}$, *$p(h)$ y $p(h+1)$ Verdaderas $\Rightarrow$ $p(h+2)$ Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Teorema 2.5.4. (Principio de inducción - II "corrido")

Sea $n_0\in\mathbb{Z}$ y sea $p(n), n\geq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface

- (Casos base) *$p(n_0)$ y $p(n_0+1)$ son Verdaderas,*
- (Paso inductivo) $\forall h\geq n_0$, *$p(h)$ y $p(h+1)$ Verdaderas $\Rightarrow$ $p(h+2)$ Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall n\geq n_0$.

2.5.2 La sucesión de Fibonacci.

Estas condiciones definen una única sucesión, que se llama la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$F_0=0,\ F_1=1,\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\ \forall n\in\mathbb{N}_0,$$

cuyos primeros términos son

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233$$

Proposición 2.5.5. (Término general de la Sucesión de Fibonacci.)

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n-\overline{\Phi}^n),\quad \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Proposición 2.5.6. (Identidad de Cassini.)

$$F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

2.5.3 Sucesiones de Lucas.

Una *sucesión de Lucas* es una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$a_0 = a,\ a_1 = b,\quad a_{n+2} = c\,a_{n+1} + d\,a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son números dados.

Consideremos la ecuación $X^2 - cX - d = 0$ asociada a la sucesión de Lucas (que se obtiene de la expresión $a_2 - c\,a_1 - d\,a_0 = 0$ y luego reemplazando a_2 por X^2, a_1 por X y a_0 por 1).

Supongamos que estamos en el caso en que $X^2 - cX - d$ tiene dos raíces distintas r y $\overline{r}$. Observemos que estas dos raíces r y $\overline{r}$ satisfacen las relaciones

$$r^2 = c\,r + d \quad \text{y} \quad \overline{r}^2 = c\,\overline{r} + d. \tag{2.3}$$

<u>*Afirmación 1:*</u> Las sucesiones $(r^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, y más aún cualquier combinación lineal de ellas

$$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha\, r^n + \beta\, \overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

satisfacen la misma recurrencia

$$\gamma_{n+2} = c\,\gamma_{n+1} + d\,\gamma_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

que la sucesión de Lucas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ original, de la cuál queremos determinar el término general.

Esto es cierto pues

$$\begin{aligned}\gamma_{n+2} &\underset{def}{=} \alpha\, r^{n+2} + \beta\, \overline{r}^{n+2} = \alpha\, r^2\, r^n + \beta\, \overline{r}^2\, \overline{r}^n \\ &= \alpha(cr + d)r^n + \beta(c\overline{r} + d)\overline{r}^n = c(\alpha r^{n+1} + \beta \overline{r}^{n+1}) + d\,(\alpha r^n + \beta \overline{r}^n) \\ &= c\gamma_{n+1} + d\gamma_n.\end{aligned}$$

<u>*Afirmación 2:*</u> Existe una única sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha\, r^n + \beta\, \overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que satisface las condiciones iniciales $\gamma_0 = a$, $\gamma_1 = b$.

Esto es cierto pues para ello hay que resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\, r + \beta\, \overline{r} = b \end{cases}$$

que tiene solución y es única pues $r \neq \overline{r}$ por hipótesis: se obtiene

$$\alpha = \frac{b - a\,\overline{r}}{r - \overline{r}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{a\,r - b}{r - \overline{r}}.$$

Se concluye que esta sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\alpha\, r^n + \beta\, \overline{r}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ coincide con la sucesión de Lucas original $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ya que satisface las mismas condiciones iniciales y la misma recurrencia. Por lo tanto el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es

$$a_n = \alpha\, r^n + \beta\, \overline{r}^n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

2.5.4 Inducción completa – Formulación general.

Teorema 2.5.7. (Principio de inducción completa.)

Sea $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

- (Caso base) *$p(1)$ es Verdadera,*
- (Paso inductivo) $\forall\, h \in \mathbb{N}$, *$p(1), \dots, p(h)$ Verdaderas* $\Rightarrow$ *$p(h+1)$ Verdadera,*

entonces $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n + a_k}{n + k + 1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n \le n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Aplicaremos aquí (por necesidad) el principio de inducción completa enunciado en el Teorema 2.5.7.

$$p(n): \quad a_n \le n.$$

- Caso base: ¿$p(1)$ V? Sí, pues efectivamente $a_1 \underset{def}{=} 1 \le 1$.
- Paso inductivo: Dado $h \in \mathbb{N}$, ¿$p(1), \dots, p(h)$ Verdaderas $\Rightarrow$ $p(h+1)$ Verdadera?
  - HI: $a_1 \le 1, \dots, a_h \le h$, o sea $a_k \le k$ para $1 \le k \le h$.
  - Qpq $a_{h+1} \le h+1$.

Pero para $h \ge 1$ se tiene

$$a_{h+1} \underset{def}{=} 1 + \sum_{k=1}^{h} \frac{h + a_k}{h + k + 1} \underset{HI}{\le} 1 + \sum_{k=1}^{h} \frac{h + k}{h + k + 1}$$

pues por HI, $a_k \le k$ implica $h + a_k \le h + k$ y por lo tanto, dado que $h + k + 1 > 0$, $\frac{h+a_k}{h+k+1} \le \frac{h+k}{h+k+1}$ pues no cambia el sentido de la desigualdad.
Así, para concluir que $a_{h+1} \le h+1$, alcanza con probar que

$$1 + \sum_{k=1}^{h} \frac{h + k}{h + k + 1} \le h + 1, \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=1}^{h} \frac{h + k}{h + k + 1} \le h.$$

Pero notemos que cada uno de los h términos $\frac{h+k}{h+k+1}$ tiene el numerador $h+k$ positivo y menor que el denominador $h+k+1$, o sea

$$1 \le h + k < h + k + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{h + k}{h + k + 1} < 1$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{h} \frac{h + k}{h + k + 1} < \sum_{k=1}^{h} 1 = h,$$

como se quería probar. (Notar que probamos algo más fuerte que lo que necesitamos: que $\sum_{k=1}^{h} \frac{h+k}{h+k+1} < h$, pero esto claramente implica que $\sum_{k=1}^{h} \frac{h+k}{h+k+1} \le h$ como nos alcanza. En realidad la proposición dice $\le$ por el término $a_1 = 1$ pero a partir de a_2 vale la desigualdad estricta.)

Es decir hemos probado tanto el caso base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejemplo: Probar que si se tienen estampillas de 4 y 5 \$, se pueden mandar cartas de cualquier precio n entero, con $n \geq 12$.

Demostración.

$$p(n): \quad \text{existen } j, k \in \mathbb{N} \; tq \; n = j \cdot 4 + k \cdot 5.$$

- Caso base: ¿$p(12)$ V? Sí, pues $12 = 3 \cdot 4$: se necesitan 3 estampillas de 4 \$.
- Paso inductivo: Dado $h \geq 12$, ¿$p(k)$ V para $12 \leq k \leq h \Rightarrow p(h+1)$ V?

  Inmediatamente se ve que para obtener $h+1$ con estampillas de 4 y 5 \$, conviene obtener $h-3$ con estampillas de 4 y 5 \$, y luego agregarle una estampilla de 4 \$, ya que $h+1 = (h-3)+4$. O sea necesitamos aplicar la hipótesis inductiva para $h-3$, y de ella podremos deducir que $p(h+1)$ es Verdadero.

  La hipótesis inductiva permite suponer que $p(k)$ es V para $12 \leq k \leq h$. Entonces debemos verificar que $h-3$ está en las condiciones de la HI.

  Está claro que $h-3 \leq h$. Pero $h-3 \geq 12 \Leftrightarrow h+1 \geq 16$. O sea la HI nos permite probar que $p(h+1)$ es V a partir de $h+1 = 16$. Por lo tanto tenemos que verificar los casos $h = 13$, $h = 14$ y $h = 15$

  aparte (porque para ellos la HI requerida sería $p(10)$ V, $p(11)$ y $p(12)$ V, que no se cumple.

  - ¿$p(13)$ V? Sí, pues $13 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5$: se necesitan 2 estampillas de 4 \$ y una de 5.
  - ¿$p(14)$ V? Sí, pues $14 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5$: se necesitan 1 estampilla de 4 \$ y 2 de 5.
  - ¿$p(15)$ V? Sí, pues $15 = 3 \cdot 5$: se necesitan 3 estampillas de 5 \$.

  Así terminamos de probar el paso inductivo.

Es decir hemos probado tanto los casos base como el paso inductivo. Se concluye que $p(n)$ es Verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

<u>EJERCICIOS DE FINAL</u>:

13/9/22

1. Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que vale la desigualdad

$$7^n + 8^n \leq 2^n + 10^n.$$

03/08/22

2) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$a_1 = 42$, $a_2 = 90$, $a_n = 3a_{n-1} + (29^n - 11^n)a_{n-2}$ si $n \geq 3$

probar que $(6^n : a_n) = 2 \cdot 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

27/7/22

1. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(7.3^n - 5^{n+1} : 3^{n+1} + 7.5^n)$$

es igual a 2 o 4.

20/7/22

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{aligned} a_1 &= 10, \\ a_2 &= 30, \\ a_n &= 2^n a_{n-1} + 5^n a_{n-2} \quad \text{si } n \geq 3. \end{aligned}$$

Probar que $(100 : a_n) = 10$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

17/16/22

1. Encuentre y pruebe un fórmula cerrada para la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, definida por

$$a_5 = 22 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = a_n + na_1 \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

27/05/22

3. Calcule $\sum_{k=0}^{29} \operatorname{sen}(\frac{2k\pi}{30})$.

4/3/22

3. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ definida por:

$$f_1 := X - 1\,,\ f_2 = 2X^2 - X - 2 \quad \text{y} \quad f_{n+2} = X\,f_{n+1} + 2X^2 f_n - 2X + 3,\ \forall\, n \geq 1.$$

Conjeturar y probar fórmulas para el coeficiente principal y el grado de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

25/2/22

2. Sea $a \in \mathbb{N}$ dado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de enteros definida por:

$$x_1 = 2a,\ x_2 = 9a^2 \quad \text{y} \quad x_{n+2} = a\,x_{n+1} - x_n^3,\ \forall n \geq 1.$$

(a) Probar que $a^n \,|\, x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que si $a \neq 1$, para ningún $n \geq 3$ vale que $a^{n+1} \,|\, x_n$.

18/2/22

3. Sea g un polinomio que satisface que $g(0) \neq 0$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por:

$$f_1 := X\,g \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X\,f_n')^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Determinar y probar una fórmula para la multiplicidad exacta de 0 como raíz de f_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

22/12/21

Ejercicio 3

Sea $\omega = e^{\frac{\pi}{3} i}$, y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = \omega - 1 \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{z_n}^{3n+8}\ ,\ \ \forall n \geq 1.$$

Calcular z_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

10/12/21

3. (a) Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales

$$X^2 + X + 1 \,|\, X^{2n} + X^n + 1.$$

(b) Calcular el resto de dividir a $X^{6n} + X^{3n} + 1$ por $X^2 + X + 1$.