RESUMEN ALGEBRA 1

FINAL

COMBINATORIA DE CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES

Capítulo 3

Combinatoria de conjuntos, relaciones y funciones.

3.1 Cardinal de conjuntos y cantidad de relaciones.

Definición 3.1.1. (Cardinal de un conjunto.)

Sea A un conjunto, se llama *cardinal de* A a la cantidad de elementos *distintos* que tiene A, y se nota $\#A$. Cuando el conjunto no tiene un

- Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

- En general $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

- Si U es un conjunto finito, entonces $\#(A^c) = \#U - \#A$.

$\#(A - B) = \#A - \#(A \cap B)$ y $\#(A \triangle B) = \#A + \#B - 2\#(A \cap B)$.

Proposición 3.1.4. (Cardinal del producto cartesiano y del conjunto de partes.)

1. Sean A y B conjuntos finitos. Entonces $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$.

2. Sean $A_1, \dots, A_n, A$ conjuntos finitos. Entonces

$$\#(A_1 \times \cdots \times A_n) = \#A_1 \cdots \#A_n = \prod_{i=1}^{n} \#A_i,$$

$$\#(A^n) = (\#A)^n.$$

3. Sea A un conjunto finito, entonces $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#A}$.

Proposición 3.1.5. (Cantidad de relaciones.)

Sean A_m *y* B_n *conjuntos finitos, con* m *y* n *elementos respectivamente. Entonces la cantidad de relaciones que hay de* A_m *en* B_n *es igual a* $2^{m\cdot n}$.

Proposición 3.1.6. (Cantidad de funciones.)

Sean A_m *y* B_n *conjuntos finitos, con* m *y* n *elementos respectivamente. Entonces la cantidad de funciones* f *que hay de* A_m *en* B_n *es igual a* n^m.

3.2 El factorial.

Definición 3.2.1. (El factorial, o la cantidad de funciones biyectivas.)

Sea $n \in \mathbb{N}$. El *factorial* de n, que se nota $n!$, es el número natural definido como

$$n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i,$$

que coincide con la cantidad de funciones biyectivas que hay entre dos conjuntos con n elementos, o con la cantidad de permutaciones de elementos en un conjunto de n elementos.

Proposición 3.2.2. (Cantidad de funciones inyectivas.)

Sean A_m *y* B_n *conjuntos finitos, con* m *y* n *elementos respectivamente, donde* $m \leq n$. *Entonces la cantidad de funciones inyectivas* $f : A_m \to B_n$ *que hay es*

$$n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

3.3 El número combinatorio.

Notación 3.3.1. (El número combinatorio $\binom{n}{k}$.)

Sea $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto con n elementos. Para $0 \leq k \leq n$, se nota con el símbolo $\binom{n}{k}$, que se llama el *número combinatorio* $\binom{n}{k}$, la cantidad de subconjuntos con k elementos que tiene A_n (o lo que es lo mismo, la cantidad de formas que tenemos de elegir k elementos en un conjunto A_n con n elementos).

3.3.1 El triángulo de Pascal: una fórmula recursiva para $\binom{n}{k}$.

Proposición 3.3.3. (Una fórmula recursiva para el número combinatorio.)

Se tiene

$$\binom{0}{0} = 1, \ \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \qquad y$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \ \text{para } 1 \leq k \leq n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 3.3.4. (Número combinatorio.)

Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y sea A_n un conjunto con n elementos. Para $0 \le k \le n$, la cantidad de subconjuntos con k elementos del conjunto A_n (o equivalentemente, la cantidad de maneras que hay de elegir k elementos en el conjunto A_n) es igual a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Teorema 3.3.5. (El binomio de Newton).

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, ya que los números combinatorios son simétricos ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Observación 3.3.6.

- Con la fórmula del Binomio de Newton, se recupera fácilmente la expresión

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},$$

que habíamos notado al definir el número combinatorio.

<u>EJERCICIOS DE FINAL: (hay ejercicios que se pueden resolver solo con lo visto en la unidad 1)</u>

13/9/22

2. ¿Cuántos anagramas de la palabra ELECTROCARDIOGRAMA pueden formarse con la condición de que las letras A no estén todas juntas?

3/8/22

1) Calcular la cant. de funciones inyectivas $f: \{1, 2, \ldots 20\} \to \{1, 2, \ldots 50\}$ que verifican simultáneamente:
- $f(1) < f(3)$
- $f(2) < f(3)$.

20/7/22

1. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ y $B = \{a,b,c,d,e\}$. Calcular cuántas funciones $f : A \to B$ verifican simultáneamente:
   - hay exactamente 3 elementos $m \in A$ tales que $f(m) = a$,
   - hay exactamente 2 elementos $n \in A$ tales que $f(n) = b$.

27/8/22

1. Calcule cuantas funciones sobreyectivas f hay, de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$ en $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, tales que $\#f^{-1}(\{1,2\})=7$.

29/4/22

1. Calcule cuantas funciones sobreyectivas f hay, de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ en $\{a,b,c,d,e,f,g\}$, tales que $f(i)\in\{a,b\}$ para $1\leq i\leq 5$.

4/3/22

1. Sea $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una función inyectiva. Se define la relación $\Re$ siguiente en $\mathbb{N}$:

$$m\,\Re\, n \iff f(m)\mid f(n).$$

   (a) Probar que $\Re$ es una relación de orden.
   (b) Para la función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definida como $f(n)=12n+20$, caracterizar todos los $n\in\mathbb{N}$ tales que $1\,\Re\, n$.

18/2/22

1. **Sea $\Re$ la relación en $A:=\{2,3,4,5,\dots,9999,10000\}$ definida por**

$$n\,\Re\, m \iff (n:m)\neq 1.$$

   (a) Estudiar si $\Re$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.
   (b) Determinar la cantidad de $m\in A$ que satisfacen que $12\,\Re\, m$.

22/12/21

Ejercicio 1

Sea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones f de A en A. Se define la relación siguiente en $\mathcal{F}$:

$$f\,\mathcal{R}\,g \iff f(2)\leq g(2).$$

(a) Estudiar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

(b) Sea $f\in\mathcal{F}$ la función definida por $f(m)=r_8(7m)$ para $m\in A$. Calcular la cantidad de funciones $g\in\mathcal{F}$ que satisfacen que $f\,\mathcal{R}\,g$, y también la cantidad de funciones **inyectivas** $h\in\mathcal{F}$ que satisfacen que $f\,\mathcal{R}\,h$.

10/12/21

1. Sea $V=\{1,2,\dots,499,500\}$. Se define en $\mathcal{P}(V)\setminus\emptyset$ la relación $\mathcal{R}$:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff \min(A)=\min(B)\ \text{y}\ \max(A)=\max(B),$$

(donde si X es un subconjunto no vacío de V, $\min(X)$ denota el menor elemento de X y $\max(X)$ denota el mayor elemento de X. Por ejemplo para $X=\{2,5,8\}$, $\min(X)=2$ y $\max(X)=8$ mientras que para $X=\{5\}$, $\min(X)=\max(X)=5$).

   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(V)\setminus\emptyset$ y calcular el cardinal de las clases de $X=\{1,100\}$ y de $Y=\{50\}$.
   (b) ¿Cuántas clases de equivalencia tiene la relación $\mathcal{R}$?