

ELEMENTOS FINITOS

A Base da Tecnologia CAE

Muitos profissionais que iniciam suas aplicações na área de Elementos Finitos encontram dificuldades, pois o aprendizado de uso dos softwares é feito sem base conceitual, confundindo o aprendizado de manuseio de programas com o conhecimento do Método dos Elementos Finitos.

Esta obra abrange os Conceitos Fundamentais Obrigatórios na Utilização dos Elementos Finitos, complementados por exercícios de aplicação e exemplos práticos de Modelagem Estrutural.

São formulados os principais elementos finitos utilizados nos softwares de análise.

Esta abordagem tem se revelado uma visão equilibrada entre o conhecimento teórico necessário e a aplicação prática, sendo o ponto de partida para aqueles que pretendem se desenvolver nesta área.

Uma Base Conceitual adequada com visão física é o melhor caminho para obter bons resultados nas aplicações práticas do dia-a-dia com os softwares de Elementos Finitos.

Esta é a proposta do livro.

PUBLICAÇÕES ÉRICA, CLAREZA E OBJETIVIDADE.



EDITORIA
ÉRICA

Rua Jaraguá, 594 • Tatuapé • São Paulo • SP
CEP: 03306-000 • Caixa Postal: 14.577
Fone: (11) 295-3066 • Fax: (11) 217-4060
Home Page: www.erica.com.br

Invista em você.
Visite uma livraria.

ISBN: 85-7194-741-4

9788571947412



EDITORIA
ÉRICA

9788571947412

ELEMENTOS FINITOS
A Base da Tecnologia CAE

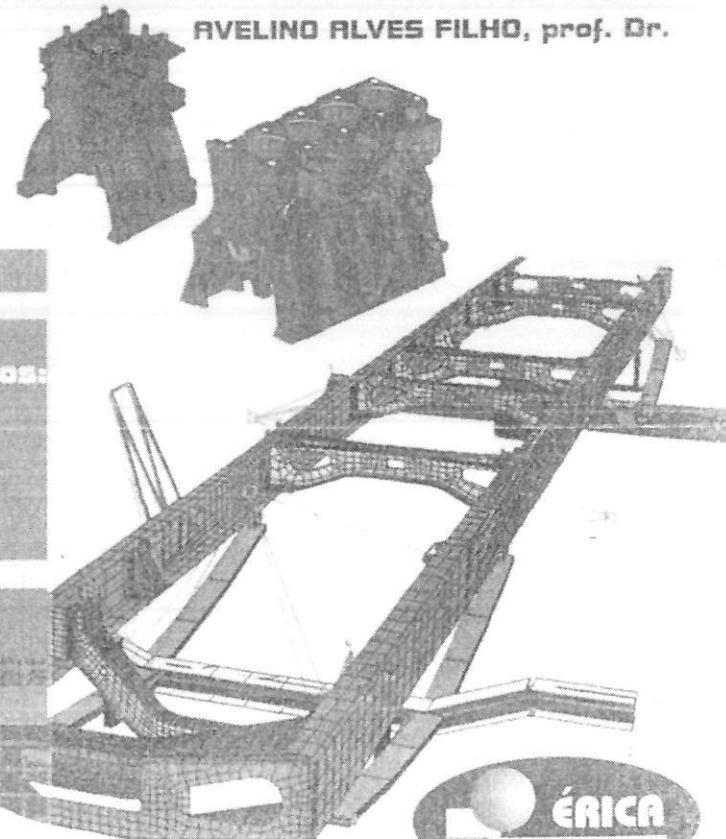
VELINO ALVES FILHO, prof. Dr.

ELEMENTOS FINITOS

A Base da Tecnologia CAE

VELINO ALVES FILHO, prof. Dr.

NCE



Análise Matricial

Formulação dos Principais Elementos:
Molas, Treliças,
Vigas, Placas,
Cascas, Sólidos,
Formulação Isoparamétrica

Exemplos de Casos Práticos

Exercícios



www.erica.com.br

Fpolis, 2001

Quem Somos?

A Érica é uma editora especializada em publicações técnicas e pedagógicas voltadas para leitores ávidos de informações atualizadas, completas e de fácil compreensão.

Nossa linha pedagógica atende, hoje, ao ensino Fundamental, Médio e Reciclagem Profissional, tendo como foco principal a Informática na Educação.

Nossa linha técnica está voltada aos segmentos de Administração, Computação Gráfica, Eletrônica, Eletrotécnica, Informática, Linguagens de Programação, Internet, Rede e Telecomunicações.

Por que se Cadastrar na Editora Érica?

Ao preencher e remeter a ficha de cadastro do cartão resposta constante no final deste livro, cuja postagem será paga pela Editora Érica, nossos leitores passarão a receber, além dos lançamentos voltados para sua área de atuação, informações sobre outros lançamentos, promoções, etc. por meio das malas diretas que realizamos.

Mas, as novidades não se restringem às malas diretas e cartões postais dos nossos lançamentos. O leitor, cujo e-mail faz parte do nosso cadastro, irá receber, pela Internet, informações sobre os lançamentos do mês.

Seja Nosso Parceiro na Proteção dos Direitos Autorais

A cópia pirata é muito mais do que um crime; é um verdadeiro atentado contra os direitos de propriedade intelectual. Ao efetuar uma cópia ilegal, o infrator estará cometendo um grave erro, que é o de inibir a produção de obras literárias. Num país em que a leitura, infelizmente, é ainda um privilégio de poucos, reduzir o número de possíveis obras de caráter técnico-profissionalizante é, antes de tudo, um verdadeiro retrocesso tecnológico e cultural.

Junte-se a nós nesta corrente contra a pirataria. Diga não à cópia ilegal.



VISITE EM NOSSO SITE O GRUPO ÉRICA NEWS

Visite nossa Home-Page e conheça as nossas publicações.

Em nosso site, você poderá fazer compras on-line, localizar facilmente os livros com o módulo de pesquisa, retirar arquivos disponíveis dos livros adquiridos, verificar erratas, manter-se informado dos títulos lançados semanalmente e das promoções, enviar suas dúvidas e sugestões e cadastrar-se.



Fale Conosco!

Eventuais dúvidas referentes ao conteúdo deste livro serão encaminhadas ao(s) respectivo(s) autor(es) para esclarecimento, excetuando-se as dúvidas que dizem respeito a pacotes de softwares, as quais sugerimos que sejam encaminhadas aos distribuidores e revendedores destes produtos, que estão habilitados a prestar todos os esclarecimentos.

As dúvidas só poderão ser enviadas por:

1. e-mail: producao@erica.com.br
2. Fax: (11) 217.4060
3. Carta: Rua Jarinu, 594 - Tatuapé - CEP: 03306-000 - São Paulo - SP

Joaquim Neto

Avelino Alves Filho



Ano: 2002 2001 2000

Edição: 7 6 5 4 3 2 1

Editora Érica Ltda.

Conselho Editorial:

- Diretor Editorial:
Diretor Comercial:
Diretor de Publicidade:
Editoração:
Revisão Interna:
Finalização de Capa:
Revisão Gramatical:
Coordenação:

Antonio Marco Vicari Cipelli
Paulo Roberto Alves
Waldir João Sandrini
Rosana Ap. Alves dos Santos
Graziela M. L. Gonçalves
Mauricio S. de França
Marlene Teresa Santim Alves
Rosana Arruda da Silva

Alves Filho, Avelino. 1957-

Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE / Avelino Alves Filho. -- São Paulo: Érica, 2000.

Bibliografia.

ISBN: 85-7194-7414

1. Engenharia auxiliada por computador 2. Método dos Elementos Finitos I. Título.

00-3711

CDD-620.00151535

Índices para catálogo sistemático:

1. Elementos Finitos : Método : Engenharia 620.00151535
2. Método dos Elementos Finitos: Engenharia 620.00151535

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial, por qualquer meio ou processo, especialmente por sistemas gráficos, microfilmicos, fotográficos, reprográficos, fonográficos, videográficos. Vedada a armazenamento e/ou recuperação total ou parcial em qualquer sistema de processamento de dados e a inclusão de talquer parte da obra em qualquer programa juscibernético. Essas proibições aplicam-se também às características técnicas da obra e à sua editoração. A violação dos direitos autorais é punível como crime (art. 184 e parágrafos, do Código Penal, cf. Lei nº 6.895, de 17.12.80) com pena de prisão e multa, conjuntamente com busca e apreensão e penalizações diversas (artigos 102, 103 parágrafo único, 104, 105, 106 e 107 itens 1, 2 e 3 da Lei nº 9.610, de 19/06/98, sobre Direitos Autorais).

Autor e a Editora acreditam que todas as informações aqui apresentadas estão corretas e podem ser utilizadas para qualquer fim legal. Entretanto, não existe qualquer garantia, explícita ou implícita, de que o uso de tais informações produzirá sempre o resultado desejado.

Algumas imagens utilizadas nesse livro foram obtidas a partir do CorelDRAW 7 e da Coleção do MaterClips/MasterPhotos© da IMSI, 1985 Francisco Blvd. East, San Rafael, CA 94901-5506, USA.".



Editora Érica Ltda.

Rua Jarinu, 594 - Tatuapé

CEP: 03306-000 - São Paulo - SP - Caixa Postal: 14.577

Fone: (11) 295.3066 - Fax: (11) 217.4060

Home Page: www.erica.com.br

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos e a minha mulher.

Aos meus pais e a minha irmã.

Pois aquele que pretender salvar a sua vida, há de perdê-la; e que perde a sua vida por amor a mim, há de encontrá-la.

Mateus 16-25

AGRADECIMENTOS

Gostaria de fazer alguns agradecimentos:

Ao Professor Nikolaj Lebedev, que desempenhou papel fundamental na minha formação profissional, esteja onde estiver.

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Nunes Dias, da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pelo apoio amigo e orientação de sempre.

Aos professores Dr. Miguel Angel Buelta Martinez e Dr. Oscar Brito Augusto da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Aos engenheiros Dr. Ademar de Azevedo Cardoso, prof. Antônio Carlos Müller, Claudio Mitsuo Banba, Sidnei Kameoka e Sussumu Nuhara, do NCE- Núcleo de Cálculos Especiais, que estiveram mais diretamente ligados a mim durante o desenvolvimento deste trabalho, dividindo o dia-a-dia das aplicações práticas do Método em diversos projetos que tivemos a oportunidade de desenvolver juntos. E muito além das relações profissionais, são grandes amigos, incentivadores e companheiros na busca de vencer novos desafios.

Ao engenheiro Marcos Benjamin Xavier da SDRC - Structural Dynamics Research Corporation, pelo apoio à realização deste trabalho, e pelo permanente incentivo aos trabalhos realizados pelo NCE – Núcleo de Cálculos especiais, nas áreas de Treinamento e Serviços de Engenharia, que constituíram o laboratório para obtenção dos resultados materializados neste livro.

Ao engenheiro Evandro Bertoni da Gama, da revista CADWARE, pelo apoio e entusiasmo na realização deste trabalho.

E finalmente, aos profissionais da Editora Érica, pela dedicação, compreensão, boa vontade e respeito ao autor, à realização dos trabalhos deste livro.

SOBRE O AUTOR

VELINO ALVES FILHO é engenheiro, mestre e doutor em engenharia pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. É professor dos cursos de pós-graduação do PECE - Programa de Educação Continuada em Engenharia da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, na área de Elementos Finitos. Já publicou 12 livros na área de Ciências Físicas.

É diretor técnico do NCE – Núcleo de Cálculos Especiais, empresa de Serviços e Implantação de Tecnologia CAE. Utiliza há 26 anos os recursos do Método dos Elementos Finitos nas atividades práticas de projeto estrutural e Desenvolvimento de Produtos, e tem grande experiência em programas de treinamento de CAE para empresas como Mercedes-Benz, Volkswagen, Grupo Maxion, Tupy, Pirelli, Cofap, Ford, Embraer, Villares, OPP, etc.

Avelino Alves Filho

Faynet

NCE

Computer Aided Engineering

Treinamento, Transferência de Tecnologia e Serviços em Engenharia

Rua Caputira, 84 - conj. 01 – São Paulo-SP

CEP: 04052-070 - Fone/Fax: 55 11 5071-5786

Fones: 55 11 9609-6827 / 9609-6830

CAE: O NCE-Núcleo de Cálculos Especiais, a mais experiente empresa brasileira em Treinamento e Implantação de Tecnologia CAE, tem oferecido às empresas que estão em busca de aprimoramento tecnológico uma abordagem superior no conhecimento da Tecnologia CAE.

Experiência do NCE:

O NCE possui grande vivência em Transferência de Conceitos do Método dos Elementos Finitos, em função de sua experiência prática durante 26 anos em Projetos de Engenharia utilizando os recursos do Método, aliada a uma eficiente estrutura didática, introduzida pelo seu diretor técnico, prof. Dr. Avelino Alves Filho do PECE-Programa de Educação Continuada em Engenharia da Escola Politécnica da USP, no Ensino da Análise Estrutural e Ciências Físicas, (12 livros publicados).

Metodologia de treinamento:

A implantação de uma Metodologia de aplicação do MEF para Análise Estrutural consta de três Módulos Fundamentais que possibilitam a Formação da Base Tecnológica para o desenvolvimento dos Trabalhos Práticos do âmbito da empresa, com visão crítica das duas tarefas-chave na execução das atividades: **PREPARAÇÃO DE MODELOS** e **INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS**.

Análises, estática, dinâmica e não linear:

Módulo Conceitual
Introdução da Base
Tecnológica



Filosofia de abordagem:

Se o engenheiro não sabe modelar o problema sem ter o computador, ele não deve fazê-lo tendo o computador.

Implantação:

Utilizando esta abordagem, o NCE implantou a Tecnologia CAE em diversas empresas no Brasil, com vistas à aplicação prática em problemas de engenharia:

Clientes: Ford Brasil

Maxion

Divisão de Máquinas Agrícolas (Canoas-RS)

Divisão de Rodas e Chassis (Cruzeiro -SP)

Divisão Ferroviária

Divisão de Autopeças

MERCEDES-BENZ - COFAP

OPP

MWM Motores Diesel

EMBRAER - Indústrias Villares

Volkswagen do Brasil

Pirelli Pneus

O NCE fornece treinamento a diversas empresas também na forma de **Cursos Abertos**.

Serviços de engenharia:

Além das atividades de Treinamento e Transferência de Tecnologia CAE, o **NCE** tem grande experiência em serviços de Análise Estrutural, aplicando os recursos do Método na Modelagem de navios, ônibus, vagões, carros de metrô, pontes metálicas, pontes flutuantes militares, suportes, elementos mecânicos, chassi de veículos, etc.

Entre os trabalhos na área de serviços, podem ser citados:

FORD BRASIL-Caminhões, Automóveis e Motores

MWM Motores - Componentes de Motores

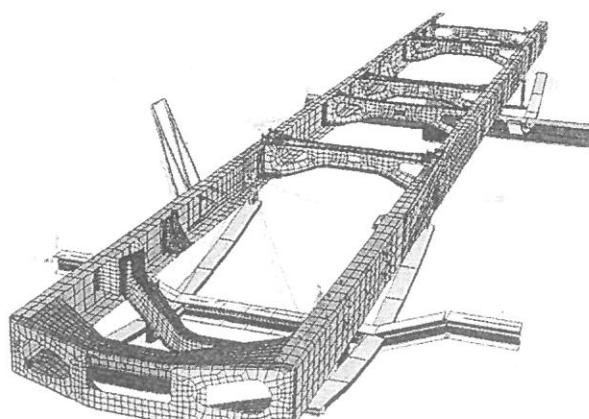
ZF do Brasil - Carcaças de Transmissão, Embreagem e Volante

VOLKSWAGEN CAMINHÕES- Caminhões e Ônibus

MAXION FUNDIÇÃO E EQUIPAMENTOS-Vagões, Engates e Fundidos

MERCEDES BENZ DO BRASIL-Caminhões e Ônibus

Exemplo:



PROPOSTA DE TRABALHO

Do ponto de vista didático podemos enxergar a divisão deste volume em duas partes:

Primeira Parte: Capítulos 1 a 4

O estudo do Método se inicia pelo Conceito de *Discretização de Sistemas Contínuos*, estabelecendo o *Procedimento Padrão para todas as Montagens de Elementos Finitos*. São estudados os Elementos Unidimensionais, tais como: Molas, Treliças e Vigas. Esses elementos são utilizados como “pano de fundo” para se entender o procedimento geral de obtenção da Matriz de Rígidez de uma estrutura a partir da matriz de rigidez de cada elemento. O desenvolvimento de uma série de interpretações físicas contidas na formulação dos elementos é explorado neste contexto.

Segunda Parte: Capítulos 5 e 6

São estudados os elementos bidimensionais e tridimensionais. No estudo destes elementos estão presentes as grandes questões que caracterizam o Método dos Elementos Finitos como uma técnica aproximada de representação de sistemas contínuos. São, portanto, questões mais sutis que aquelas presentes na definição dos “simples” elementos unidimensionais. Como os procedimentos de montagem são padrões para todos os elementos finitos, e este estudo já fora desenvolvido para os elementos unidimensionais, todo o estudo efetuado anteriormente é aproveitado neste estágio.

Concentra-se a atenção na formulação matemática de cada elemento, focalizando o conceito-chave de *Funções de Interpolação* e os resultados aproximados de *Deformações e Tensões*, e as implicações práticas da escolha de um dado elemento na representação de um problema físico. Os diversos elementos da biblioteca são abordados como exercícios resolvidos em riqueza de detalhes e interpretações. Vencida esta etapa, é introduzida a Formulação Isoparamétrica em Elementos Finitos e a Formulação Geral do Método.

Apêndice: Alguns Exemplos Práticos

No apêndice, a título de ilustração, são mostrados alguns modelos em Elementos Finitos de casos práticos, com o objetivo de motivar o leitor a enxergar nas aplicações apresentadas o uso da teoria.

APRESENTAÇÃO

Este livro foi desenvolvido procurando abordar o Método dos Elementos Finitos com uma visão equilibrada entre os fenômenos físicos e os recursos da Matemática Aplicada, aliando o rigor científico exigido a uma linguagem clara e precisa.

Como a assimilação dos conhecimentos do Método no âmbito da Análise Estrutural passa pela utilização de *'conceitos-Chave da Mecânica Estrutural'*, foram inseridos, no decorrer do texto, *Quadros Sinópticos* que permitissem ao leitor revisar os conceitos fundamentais necessários para a formulação de cada Elemento Finito. Assim, em uma primeira abordagem, o leitor não terá a necessidade de consultar uma extensa literatura sobre Resistência dos Materiais, Teoria da Elasticidade, Teoria de Placas e Cascas, etc., e buscar os pontos de interesse. Procuramos facilitar o trabalho neste sentido. E, ainda com o mesmo objetivo, foram intercalados itens básicos da Matemática, como, por exemplo, a Notação Matricial. Assim, o leitor não se sentirá limitado quanto ao entendimento do texto, decorrente da existência de pré-requisitos utilizados para o estudo do Método.

No desenvolvimento da matéria, procuramos enxergar as propriedades mais gerais do Método dos Elementos Finitos a partir de exemplos simples. Os Procedimentos Gerais do Método são muitas vezes explorados por intermédio da *resolução de exercícios*, que têm localização estratégica no decorrer da matéria. Por intermédio destes, são estabelecidas importantes conclusões para o uso prático dos softwares de análise. Por exemplo, a partir do entendimento do Procedimento Padrão de geração dos diversos elementos finitos, a geração da biblioteca de elementos pode ser efetuada como uma série de exercícios que seguem uma abordagem padrão. A formulação de todos os elementos foi introduzida desta forma, que permite desenvolver no leitor a confiança de utilizar esse procedimento na formulação dos elementos subsequentes.

Neste volume, foram consideradas as aplicações no âmbito da Análise Estrutural Estática Linear por Elementos Finitos. Estamos desenvolvendo em continuação a este texto, a abordagem e os conceitos da Análise Dinâmica Estrutural Linear e de Análise não Linear pelo Método dos Elementos Finitos, dentro da mesma proposta didática deste volume.

Esperando que este trabalho auxilie os engenheiros, estudantes e todos aqueles que têm interesse nas aplicações da Tecnologia CAE a atingirem seus objetivos, aguardamos as críticas e sugestões.

O Autor

PREFÁCIO

Quando iniciei minhas primeiras aplicações no Método dos Elementos Finitos, em 1974, ainda não estavam disponíveis os recursos da computação gráfica como auxílio à chamada Tecnologia "CAE – Computer Aided Engineering". Nesse período, os Modelos em Elementos Finitos eram gerados no papel para posterior digitação e preparação de dados de entrada em cartões para processamento em computadores de grande porte. Desde esse período até hoje, com a "evolução" dos atuais recursos da computação gráfica que tenho utilizado intensamente, tive a felicidade de trabalhar em aplicações práticas do Método que incluem Estruturas Oceânicas, Navios, Veículos Rodoviários e Ferroviários, Componentes Mecânicos, e diversas aplicações da Mecânica Estrutural. Entretanto, é notável que, apesar das facilidades gráficas introduzidas, a essência do Método continua a mesma.

Na década de 70, não existiam recursos visuais que pudessem vender a imagem da Tecnologia CAE como uma ferramenta mágica, e o engenheiro utilizava o Método dos Elementos Finitos ciente de que a sua utilização era apoiada em uma base conceitual. Devido a apelos de marketing, as facilidades gráficas disponíveis levaram muitas vezes à apologia de que a aprendizagem dos comandos do programa é suficiente para a solução da maior parte dos problemas de Engenharia, criando uma cultura mais voltada para a forma do que para a essência da solução dos problemas. Muitas decepções no uso dessa ferramenta de análise decorreram desse enfoque equivocado. As formas, os processos de "conversar" com os programas se modificam, mas a essência, os conceitos, permanecem.

É interessante comentar o caso fictício de um paciente que vai a um consultório e o médico sugere que não entende muito daquele assunto, mas tem um software de medicina que é só entrar com os sintomas que a resposta do seu mal e os remédios já são obtidos como "saída" do programa. O paciente, se tiver juízo, levanta e sai correndo do consultório. Não há motivo para supor que na área de engenharia de simulação seja diferente, embora haja "pacientes" que acreditam nessa falácia, e "médicos" que a vendam.

Um dos pontos mais importantes que contribui comprovadamente para o sucesso e progresso no uso dos recursos de CAE, e que tive a oportunidade de verificar nestes anos trabalhando nesta área, está relacionado aos CONCEITOS FUNDAMENTAIS OBRIGATÓRIOS NA UTILIZAÇÃO DA TECNOLOGIA CAE. Muitos profissionais que iniciam suas aplicações na área de Elementos Finitos encontram dificuldades, pois o *aprendizado de uso dos softwares é feito sem Base Conceitual, confundindo o aprendizado de manuseio de programas com o conhecimento do Método dos Elementos Finitos*. Justifica-se, portanto, a filosofia de abordagem:

- **SE O ENGENHEIRO NÃO SABE MODELAR O PROBLEMA SEM TER O COMPUTADOR, ELE NÃO DEVE FAZÊ-LO TENDO O COMPUTADOR**

Por outro lado, muitas vezes, o aprendizado é de tal profundidade em "técnicas matemáticas", que após um longo curso voltado para o entendimento das formulações gerais do método, visando um grande espectro de aplicações, surge a pergunta: *Como utilizar esse conhecimento na prática?* Em função desta abordagem surgem o temor e o desestímulo quanto à aplicação desse conhecimento, tornando o estudo e entendimento do método uma árida para iniciados.

Em uma área em que há mestres de saber inigualável e literaturas disponíveis já consagradas, surgiu a idéia de escrever um livro que apresente os conceitos do Método dos Elementos Finitos de forma mais didática, em que, a partir de exemplos simples, e em grau crescente de dificuldade, introduzimos o *embasamento conceitual fundamental*, visando a posterior utilização e entendimento dos softwares aplicativos, à luz dos Conceitos. Procurou-se, dentro dessa linha, sem fugir aos aspectos matemáticos que convêm a uma abordagem conceitual, valorizar o entendimento físico do método e dos conceitos; estes permanecem e são o alicerce para uma boa utilização dos softwares aplicativos. As formas, os processos dos quais o usuário dispõe para definir os modelos no computador surgem e morrem; podem ser mais rápidos a cada dia, em função das tecnologias gráficas cada vez mais poderosas. No entanto, é importante observar sempre que dispor de uma ferramenta gráfica poderosa, sem base conceitual, pode ser o caminho mais rápido para obter uma resposta errada.

Espero que este trabalho possa contribuir para a formação daqueles que iniciam seus estudos no Método dos Elementos Finitos, e para aqueles que, já sendo usuários do método, tenham o interesse de meditar um pouco sobre os seus conceitos fundamentais, os quais constituem o alicerce para a resolução das dúvidas que se colocam diante de nós ao abordarmos as grandes questões práticas da engenharia. Se para aqueles que iniciam seus estudos a importância dessa visão conceitual ficar clara, este trabalho já terá sido recompensado.

Avelino Alves Filho

ÍNDICE

Capítulo 1 – Introdução ao Método dos Elementos Finitos

1.1. Introdução.....	1
1.2. Idealização de Sistemas - Modelos Discretizados.....	6
1.2.1. Sistemas Contínuos	6
1.2.2. Sistemas Discretos	9
1.3. Método dos Elementos Finitos - Sistema Discreto Padrão.....	10
1.4. Tipos de Modelos Discretizados	12
1.4.1. Estruturas Reticuladas	12
1.4.2. Elementos Estruturais Conectados Continuamente.....	13
1.5. A Análise Matricial de Estruturas - Matriz de Rigidez de um Elemento	17
Análise Matricial de Estruturas Reticuladas	18
1.6. Leis Fundamentais - Matriz de Rigidez da Estrutura	21
1.6.1. Introdução	21
1.6.2. Leis Fundamentais	21
1.6.3. Matriz de Rigidez de uma Estrutura.....	24

Capítulo 2 – Elemento de Mola: Rigidez do Elemento e Rigidez da Estrutura

2.1. O Elemento mais Simples: A Mola	27
2.2. Matriz de Rigidez do Elemento de Mola	32
2.3. Significado Físico dos Termos da Matriz de Rigidez do Elemento-Generalizando.....	36
2.4. Generalização a partir da Mola do Significado Físico da Matriz de Rigidez de Qualquer Elemento Finito....	37
2.5. Matriz de Rigidez de Uma Estrutura - Utilização da Mola para Estabelecer a Montagem da Matriz de Rigidez de Uma Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez de seus Elementos	39
Lei De Equilíbrio de Forças	41
Relação Força – Deslocamento para um Elemento	41
Compatibilidade de Deslocamentos para os Elementos	41
Comentários em Relação às Matrizes de Rigidez dos Elementos e da Estrutura.....	45
2.6. Procedimento de Solução para a Determinação dos Deslocamentos da Estrutura Inteira, Reações de Apoio e Forças Internas nos Elementos	50

2.7. Aplicação da Seqüência Anterior - Exercício	56
2.7.1. Definição do Modelo Estrutural como uma Montagem de Elementos	56
2.7.2. Determine a Matriz de Rigidez de Cada Elemento e Represente - a No Sistema de Coordenadas da Estrutura	57
2.7.3. Monte a Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez dos seus Elementos do Sistema de Equações de Equilíbrio.....	57
2.7.4. Defina as Condições de Contorno de Deslocamentos - As Restrições - para Preparar a Solução do Sistema de Equações.....	58
2.7.5. Determine os Deslocamentos Nodais para a Estrutura Inteira, Resolvendo o Sistema de Equações e, Posteriormente, As Reações de Apoio	59
2.8. Determine As Forças Internas em Cada Elemento, a partir do Conhecimento dos Deslocamentos Nodais Associados ao Elemento.....	61
2.9. Aplicações Gerais a Partir do Estudo dos Elementos de Mola.....	62
2.10. Preparando o Estudo dos Elementos Finitos mais Gerais	66

Capítulo 3 – Elemento de Treliça Sistemas de Coordenadas Local e Global

3.1. Elemento de Barra Articulada nas Extremidades – Treliças Rigidez Axial.....	69
3.2. Matriz de Rigidez do Elemento de Barra.....	72
Relação entre Forças Nodais e Deslocamentos Nodais.....	74
3.3. Matriz de Rigidez do Elemento nos Sistemas Local e Global Matriz de Transformação	74
3.4. Exercício de Aplicação para Estrutura na Forma de Treliça	81
3.4.1. Definição Do Modelo Estrutural Como Uma Montagem De Elementos	82
3.4.2. Determine a Matriz de Rigidez de Cada Elemento e Represente - A no Sistema Global	82
3.4.3. Monte a Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez dos Seus Elementos - Sistema de Equações de Equilíbrio.....	87
3.4.4. Defina as Condições de Contorno de Deslocamentos-As Restrições-Para Preparar a Solução do Sistema de Equações.....	88
3.4.5. Determine os Deslocamentos Nodais para a Estrutura Inteira, Resolvendo o Sistema de Equações, e Posteriormente, as Reações de Apoio	89
3.4.6. Determine as Forças Internas em cada Elemento a partir do Conhecimento dos Deslocamentos Nodais Associados ao Elemento	92
3.5. Aspectos Gerais Importantes na Formulação de qualquer Elemento Finito	95

Capítulo 4 – Elemento de Viga Superposição de Comportamentos Independentes

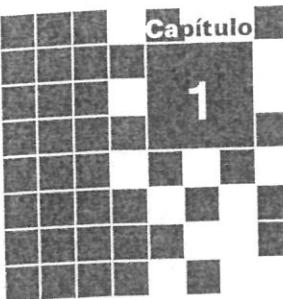
4.1. O Elemento de Viga.....	97
Flexão de Vigas - Tensões Normais.....	100
Flexão de Vigas - Tensões de Cisalhamento	103
4.2. Matriz de Rigidez do Elemento de Viga com apenas Rigidez à Flexão.....	104
4.3. Matriz de Rigidez do Elemento de Viga com Rigidez à Flexão e Rigidez Axial Pótico Plano	110
4.4. Matriz de Rigidez do Elemento nos Sistemas Local e Global Matriz de Transformação	113
4.5. Exemplo de Montagem da Matriz de Rigidez de Estrutura de Pótico Plano	116
4.5.1. Definição do Modelo Estrutural como uma Montagem de Elementos.....	117
4.5.2. Determine a Matriz de Rigidez de cada Elemento e Represente- a no Sistema Global.....	117
4.5.3. Monte a Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez dos seus Elementos - Sistema de Equações de Equilíbrio	118
4.5.4 Defina as Condições de Contorno de Deslocamentos - as Restrições - para Preparar a Solução do Sistema de Equações	120
4.6. Matriz de Rigidez do Elemento de Viga com Somente Rigidez à Torção.....	121
4.7. Matriz de Rigidez do Elemento de Viga no Espaço	123
4.8.Matriz de Rigidez do Elemento de Viga no Espaço - Formulação Completa Incluindo a Deformação por Cisalhamento.....	125

Capítulo 5 – Elementos Bidimensionais e Tridimensionais – Aplicações Gerais

5.1. Aspectos Importantes na Formulação dos Elementos Finitos Aplicações Gerais	131
5.2. Conceitos Importantes na Definição da Matriz de Rigidez de Elementos Finitos Bi e Tridimensionais.....	133
5.3. Método Geral para a Montagem da Matriz de Rigidez de Qualquer Elemento Finito	138
5.3.1. Formule a Função de Deslocamentos para o Elemento Finito - Escolha a Função de Interpolação Adequada para o Elemento	140
5.3.2. Calcule os Coeficientes Desconhecidos da Função de Interpolação, Relacionando os Deslocamentos dentro do Elemento com os Deslocamentos Nodais	141
5.3.3. Calcule as Deformações Internas no Elemento a Partir dos Deslocamentos Nodais	143
5.3.4. Calcule as Forças Internas no Elemento E, Como Consequência, as Tensões a partir dos Deslocamentos Nodais	144
5.3.5. Determine a Matriz de Rigidez do Elemento [K] ^e Estabelecendo a Relação Entre Forças Nodais e Deslocamentos Nodais para o Elemento Finito	144
Trabalho Virtual Externo	145

Trabalho Virtual Interno	146
Condição de Equivalência	146
Comentários e Generalizações	147
5.4. Preparando o Caminho para a Formulação dos Elementos Finitos Bi e Tridimensionais	150
Estado Plano de Tensões	153
Barra de Treliça	154
Chapa sob Estado Plano de Tensões	155
Interpretação das Expressões (A) E (B)	155
Distorções	156
Relações Elásticas Tensão-Deformação – Estado Plano de Tensões	157
Estado Triaxial de Tensões – Generalizando	159
Equações Constitutivas	160
5.5. Formulando os Elementos Finitos Bidimensionais e Tridimensionais	162
5.5.1. Introdução	162
5.5.2. Formular o Elemento de Estado Plano de Tensões Triangular Linear	163
Complemento – Determinação da Matriz de Rígidez do Elemento	171
Representação das Funções de Interpolação na Forma Matricial e Cálculo dos Coeficientes Desconhecidos	172
Deformações	173
Tensões	173
Equivalência entre Trabalho Externo e Trabalho Interno, e Obtenção da Matriz de Rígidez do Elemento Triangular de Estado Plano de Tensões	173
Trabalho Virtual Interno	174
5.5.3. Formular o Elemento Sólido Tetraédrico Linear	175
5.5.4. Formular o Elemento de Estado Plano de Tensões Retangular Linear	182
Complemento – Determinação da Matriz de Rígidez do Elemento	188
Relacione os Deslocamentos Gerais dentro do Elemento aos Deslocamentos Nodais	189
Exprimir Deformação Interna em Termos de Deslocamentos Nodais	190
Exprimir as Forças Internas (Tensões) em Termos de Deslocamentos Nodais, Usando a Lei de Comportamento Elástico do Elemento	190
Obter a Matriz de Rígidez do Elemento $[K]^e$ Relacionando Forças Nodais e Deslocamentos Nodais	191
5.5.5. Formular o Elemento Sólido Hexaédrico Linear	192
Determinação da Matriz de Rígidez do Elemento	198
5.5.6. Formular o Elemento de Estado Plano de Tensões Triangular Parabólico	198
5.5.7. Formular o Elemento Sólido Tetraédrico Parabólico	202
5.5.8. Formular os Elementos	206
5.5.9. Formular o Elemento de Placa Retangular Linear	208
5.5.9.1. Introdução	208
5.5.9.2. Formulação do Elemento	216
5.5.10. Formular o Elemento de Casca Retangular Linear	220
5.5.10.1. Introdução	220
5.5.11. Convergência de Resultados	224
5.5.11.1 Critérios	224
5.5.11.2 Grau de Continuidade C^m	228
5.5.11.3. A Família Tetraédrica	230
5.5.12. Elementos com Modos de Deslocamentos Incompatíveis	231
5.5.12.1. Introdução	231
5.5.12.2. Elemento Retangular de Tensão de Cisalhamento Constante – Estado Plano de Tensões "Csr – Constant Shear Stress Rectangle Element"	231
Relacione os Deslocamentos Gerais dentro do Elemento aos Deslocamentos Nodais	235
5.5.12.3. Testes Comparativos entre Elementos com Modos Incompatíveis e Modos Compatíveis	237
5.6. Complemento do Elemento de Estado Plano de Deformações e o Elemento Sólido Axisimétrico	239
Capítulo 6 – Formulação Isoparamétrica e Complementos	
6.1. Introdução	245
6.2. Sistema de Coordenadas Naturais - Formulação Isoparamétrica em Elementos Finitos	246
Elemento de Treliça	247
Formulação Isoparamétrica em Elementos Finitos	250
6.3. Generalizando os Conceitos Anteriores	252
Interpolação da Geometria do Elemento	253
Interpolação do Campo de Deslocamentos	253
6.4. Integração para Obtenção da Matriz de Rígidez de um Elemento	259

Integração Numérica.....	261
Ordem de Integração	261
6.5. Forças Nodais Equivalentes - Expressão para as Aplicações Gerais do Método dos Elementos Finitos no Âmbito da Análise Estrutural Linear	262
6.6. Generalização do Método dos Elementos Finitos.....	272
6.6.1. Introdução.....	272
6.6.2. Aplicação	272
6.6.3. Observações Finais	274
Apêndice A – Alguns Exemplos Práticos	277



Introdução ao Método dos Elementos Finitos

Estabelecendo a base para as aplicações gerais a partir de exemplos simples.

Por que utilizar o método dos elementos finitos?

1.1. Introdução

No dia-a-dia das atividades de engenharia, os engenheiros e os projetistas são colocados diante de problemas técnicos, alguns mais simples e outros mais complexos, tendo que resolvê-los de forma satisfatória. Para isso utilizam um verdadeiro arsenal de fórmulas, tabelas, que aprenderam nos cursos de engenharia.

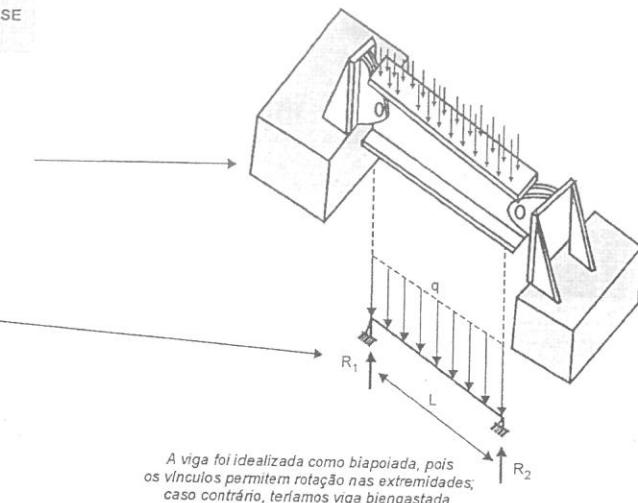
Em particular, na área de Cálculo Estrutural, o engenheiro deve garantir que a estrutura objeto de análise não estará sujeita a falhas sob as diversas condições de operação. Os subsídios para essa missão são normalmente obtidos a partir da Resistência dos Materiais, que trata da resistência e da rigidez dos elementos das estruturas, apoiando-se nos Teoremas da Mecânica Geral e em particular no estudo da Estática.

No desenvolvimento dos cálculos de uma estrutura, o sucesso dessa tarefa não está apenas condicionado ao conhecimento de um aparato matemático muitas vezes complicado, mas à capacidade que o engenheiro apresenta de entender a natureza física do fenômeno que se propõe a resolver. A identificação dos pontos relevantes do problema em estudo permite tecer hipóteses sobre o comportamento do sistema estrutural a ser analisado, que constituirão a base para um bom desenvolvimento do projeto em curso.

Enfim, ao iniciar um processo de cálculo da estrutura objeto de análise, o engenheiro deve formular um *Esquema de Cálculo* para essa estrutura ou, em outras palavras, um *Modelo de Cálculo*, em que a *Estrutura é Idealizada de sorte que se possa analisá-la*. A figura 1.1 representa de forma esquemática os passos principais envolvidos na Análise de um Sistema Estrutural. Por intermédio de um exemplo bastante simples de flexão de vigas, pretendemos introduzir a filosofia de abordagem anteriormente discutida e posteriormente, utilizando a mesma seqüência, partiremos para o estudo de sistemas mais complexos.

A importância do exemplo discutido em seguida, não reside nas expressões matemáticas obtidas a partir da Resistência dos Materiais, que foram *aqui introduzidas apenas para ilustrar* um ferramental de cálculo que acompanha a estratégia de abordagem do problema. Para as mais diversas classes de problemas que serão objeto de análise neste livro, inclusive a flexão de vigas, teremos a oportunidade de aprofundar os recursos matemáticos a serem utilizados.

PROBLEMA REAL
Estrutura a ser analisada



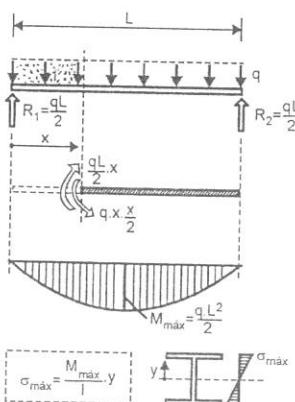
MODELO PARA ANÁLISE
Representação da Estrutura de sorte que se possa analisá-la

EQUAÇÕES DE EQUILÍBrio APLICÁVEIS AO MODELO
Relações Matemáticas conhecidas do Estudo da Mecânica que traduzem um dado comportamento físico

$$\text{Equilíbrio de Forças: } \sum \text{Forças} = 0 = \sum F_y = 0 \\ R_1 + R_2 - q \cdot L = 0$$

$$\text{Equilíbrio de Momentos: } \sum \text{Momentos} = 0 \\ R_1 \cdot L = q \cdot L \cdot (L/2)$$

$$\text{Reações: } R_1 = qL/2; R_2 = qL/2 \\ \text{Momento Flétrico Interno: } M_x = (qL/2)x - q \cdot x \cdot (x/2) \\ \text{Força Cortante ao longo da viga: } Q_x = q \cdot L/2 - q \cdot x \\ \text{Deslocamentos: } \Delta_x = q \cdot x / 24EI (L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$



SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBrio
Manipulação matemática das Equações para determinação das incógnitas e Estudo de Resistência Interna da Estrutura - Deslocamentos, Deformações e Tensões

INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS
Análise dos Resultados em função das expectativas do Modelo Proposto e Verificação da Coerência do Modelo com o Problema Real

A "solução pronta" do problema de flexão de vigas, que os engenheiros utilizam a partir das tabelas e soluções analíticas encontradas nos livros de *Resistência dos Materiais*, como ilustrado anteriormente na figura 1.1, é o produto do tratamento matemático clássico baseado no estudo das *Equações Diferenciais*, que descrevem o Equilíbrio da Estrutura. Embora a utilização dessas expressões finais seja até certo ponto "cômoda" no dia-a-dia dos trabalhos de engenharia, o desenvolvimento dessas soluções é bastante trabalhoso e necessita de um conhecimento matemático aprofundado não muito agradável à maioria dos engenheiros.

À semelhança do estudo desenvolvido para a *Teoria de Vigas*, uma ampla classe de problemas pode ser resolvida utilizando essas técnicas clássicas. As chapas que são amplamente utilizadas em engenharia estrutural, aviação, construção naval, mecânica automobilística, etc. são estudadas pela *Teoria Geral de Placas e Cascas* que utiliza intensamente o recurso matemático das Equações Diferenciais. Com base nelas, são desenvolvidas soluções para diversas configurações geométricas de chapas, tais como: chapas retangulares, quadradas, circulares, etc., e incluindo diversas condições de fixação nas bordas (apoios simples, engastamentos), e para diversas condições de carregamento (pressão uniforme, carga concentrada, etc.).

Da mesma forma, a *Teoria Matemática da Elasticidade* estuda o comportamento dos Sólidos Deformáveis, utilizando o aparato matemático complicado das Equações Diferenciais, efetuando uma quantidade volumosa de cálculos. A despeito de todo o trabalho matemático necessário para desenvolver as "expressões analíticas fechadas" citadas anteriormente, ainda assim as limitações são grandes. Apenas para sistemas de geometria simples, com condições de carregamento e apoio muito "bem comportados", são obtidas soluções exatas para os problemas alvo de análise.

Porém, a maioria das estruturas de importância prática são muito complexas para serem analisadas pelas técnicas clássicas. Para estruturas de forma arbitrária, a solução analítica freqüentemente torna-se impossível, e o problema requer grandes e excessivas simplificações, se quisermos aplicar as talas expressões analíticas fechadas, resultando em cálculos pouco acurados.

Estamos então diante da *questão central* que motiva o estudo que ora se inicia:

- Os **Métodos Analíticos Clássicos** permitem o **Cálculo da Resposta Exata dos Deslocamentos, Deformações e Tensões** na Estrutura em todos os seus pontos, isto é, **nos seus infinitos pontos**, porém estas soluções são somente conhecidas para alguns casos, que fogem da maioria das aplicações práticas que encontramos no dia-a-dia.
- Seria interessante desenvolver **procedimentos aproximados**, que pudessem ser aplicados **em caráter geral**, independente da forma da estrutura e da condição de carregamento, dentro da precisão aceitável do problema de engenharia. Esse caminho alternativo aos procedimentos analíticos clássicos constitui o **foco central** do nosso estudo a partir de agora, e que dará origem ao **Método dos Elementos Finitos**.

Assim, esquematicamente, podemos representar na figura 1.2 os dois grandes caminhos que podem ser percorridos na solução dos problemas anteriormente levantados:

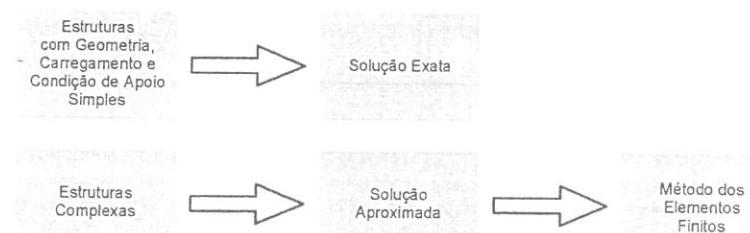


Figura 1.1 – Passos Principais na Análise de uma Estrutura.

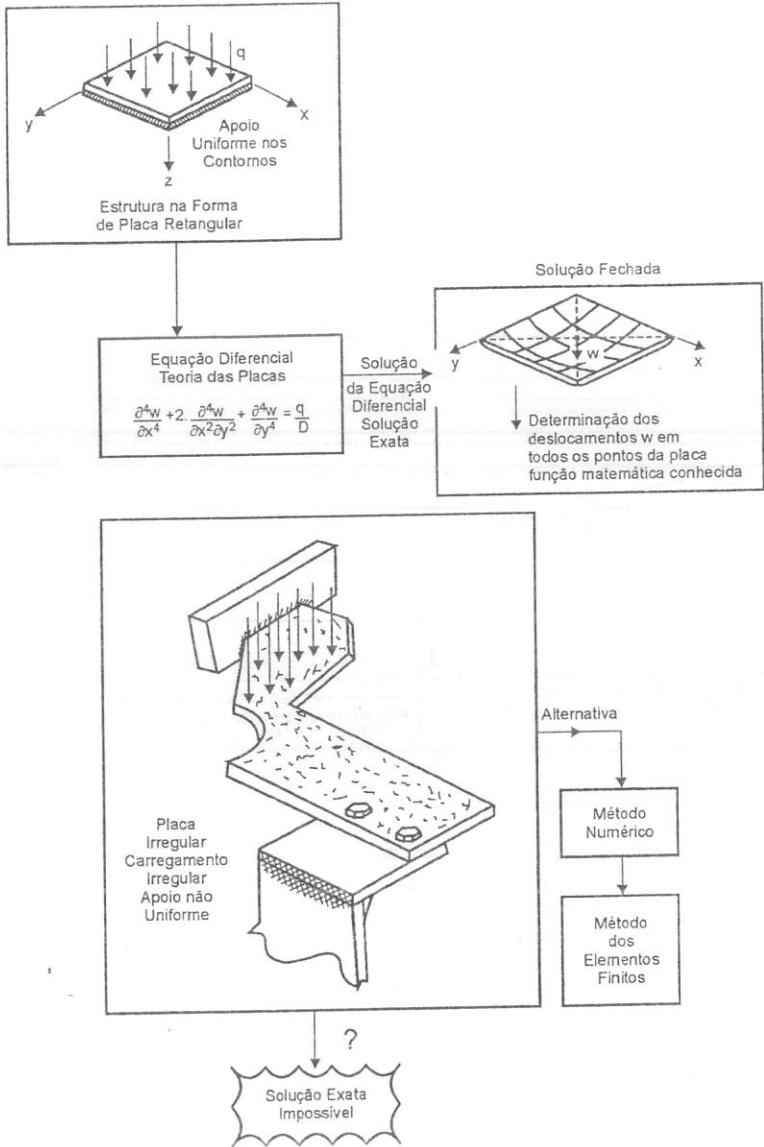


Figura 1.2 – Alternativas para solução de problemas estruturais.

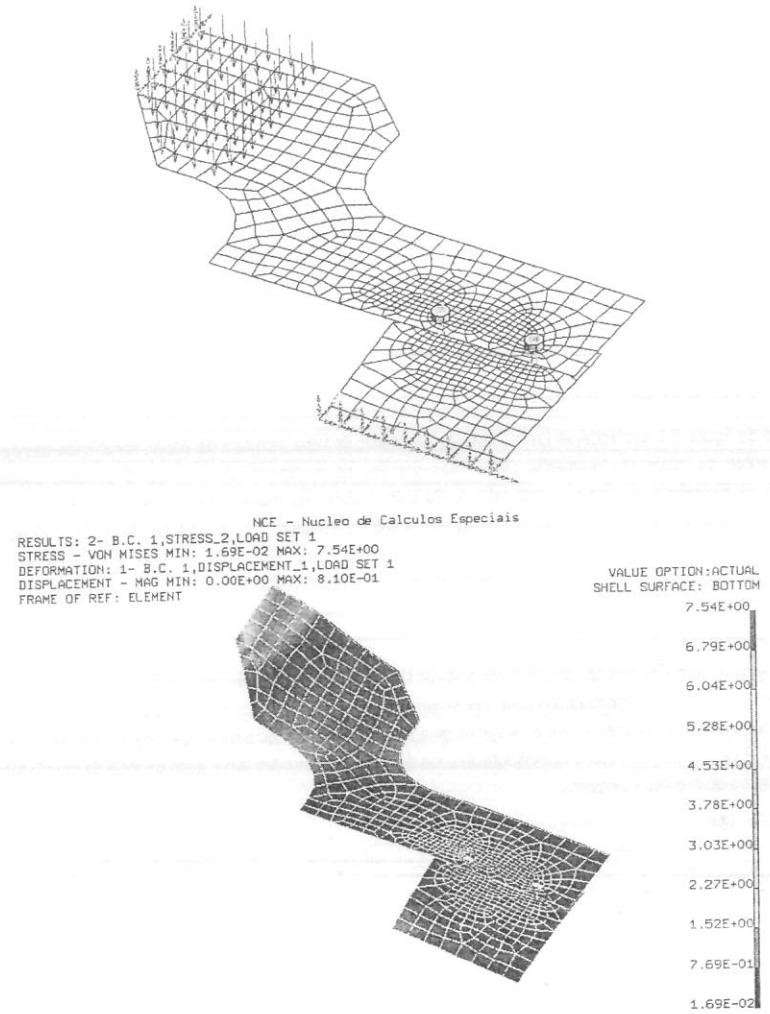


Figura 1.2 – Continuação – Uma visão do exemplo anterior no computador. Veja esta figura no Apêndice A . Por intermédio de Técnicas Numéricas, como o Método dos Elementos Finitos, pode-se determinar o comportamento estrutural de componentes com formas complexas, utilizando-se os "softwares" de análise disponíveis. Os programas de computador requerem o conhecimento das propriedades dos componentes, tais como espessuras, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, densidade de massa, etc. Conhecendo-se o carregamento atuante na forma de forças, pressão, cargas gravitacionais, e as condições de fixação da estrutura, pode-se determinar as regiões mais solicitadas do componente, estabelecendo-se previsões a respeito do seu comportamento. Dessa forma, as devidas correções serão efetuadas já no âmbito do desenvolvimento do projeto, evitando-se gastos excessivos em ferramental, inerentes à execução de projetos desenvolvidos pelo processo de Tentativa e Erros. O uso do Método dos Elementos Finitos, revela-se como um grande diferencial, reduzindo os prazos e enxugando os custos, desenvolvendo assim o poder competitivo das empresas.

1.2. IDEALIZAÇÃO DE SISTEMAS - MODELOS DISCRETIZADOS

As limitações da mente humana são tais que ela não consegue compreender o comportamento dos sistemas ao seu redor e os fenômenos em uma só operação. É próprio da mente humana querer *subdividir os sistemas em seus componentes individuais*, ou em seus *elementos*. Assim, surge a idéia de que, a partir do entendimento do comportamento de cada elemento, é possível entender o comportamento do conjunto, por mais complexo que possa parecer, ou seja, compreender o todo entendidas as partes. Para um engenheiro, um técnico em geral, um cientista, este é um caminho natural para a abordagem dos problemas. Esse raciocínio tem implicações também nos métodos matemáticos utilizados para a descrição do comportamento dos sistemas. Surge então, naturalmente, uma questão fundamental: Como identificar os Elementos de um Sistema?

Vamos responder a essa pergunta por intermédio de um exemplo prático, identificando nele duas possibilidades de abordagem, como já citado anteriormente. Este exemplo particular visa apenas introduzir os Conceitos de Modelagem, e a partir dele, vamos focalizar nossa atenção nas aplicações mais gerais.

1.2.1. SISTEMAS CONTÍNUOS

No exemplo da figura 1.3, pretende-se fazer a Análise Preliminar de uma estrutura de ponte, constituída basicamente de apoios flutuantes, sobre os quais são montadas plataformas em que se movimenta um veículo. O primeiro passo corresponde à *Idealização da Estrutura*, definindo um *Modelo de Cálculo*. A definição desse Modelo passa pelo entendimento do problema físico a ser simulado. À medida que o veículo se movimenta sobre a estrutura, os apoios flutuantes sofrem afundamento, e quanto maior esse afundamento, maior a força de empuxo decorrente da água deslocada pelo bote. Resumidamente, em termos de comportamento global da plataforma, os botes comportam-se como apoios elásticos, isto é, como "molas" que servem de apoio para a estrutura da ponte.

A figura 1.3 representa o Problema Real, em que é mostrado um trecho de ponte sendo montado, e a figura 1.4 o Esquema ou Modelo de Cálculo, com algumas observações conceituais. Uma das técnicas de abordagem deste problema clássico baseia-se na hipótese de que haja um *suporte elástico contínuo sobre a plataforma*. Esta hipótese é considerada adequada do ponto de vista de engenharia, desde que a distância entre os apoios seja pequena quando comparada ao comprimento de onda da linha elástica que se forma. Este tipo de problema é semelhante ao caso da flexão de um trilho sob a ação da roda de uma locomotiva, em que a distância entre os dormentes é pequena.

A Teoria da Flexão de uma Viga Apoiada sobre Base Elástica foi desenvolvida por E. Winkler (Praga-1867), e a *Solução Analítica* permite determinar o *deslocamento vertical y para todos os valores de x*, isto é, a solução é obtida para os infinitos pontos da viga, por intermédio de uma função matemática. Dessa forma a viga objeto de Análise é tratada como um *Sistema Contínuo*, pois a solução é obtida para todos os pontos que constituem o Corpo Contínuo.

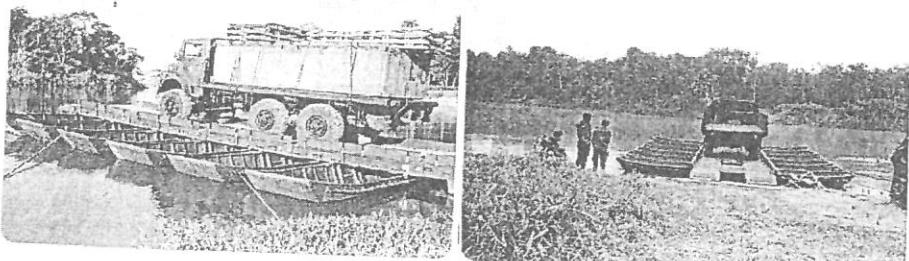
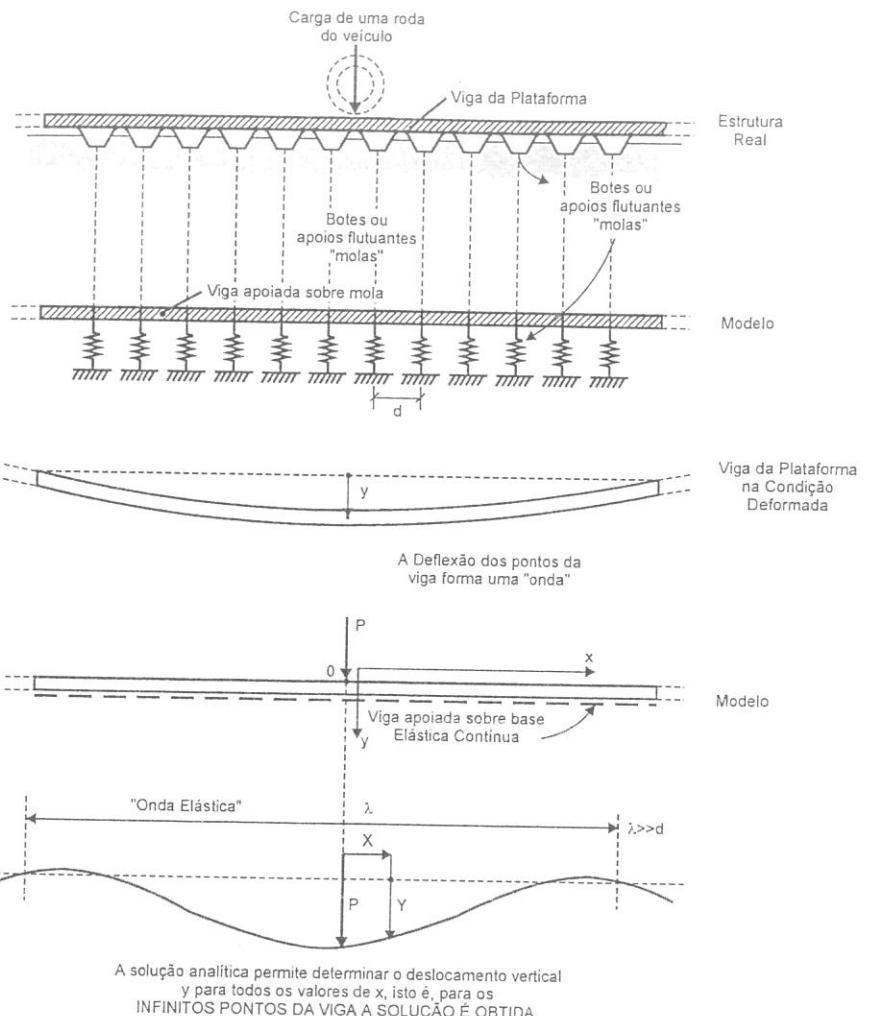


Figura 1.3 – Plataforma apoiada sobre flutuantes que trabalham como apoios elásticos. Visão de um trecho de ponte que une as duas margens do rio.



A solução analítica permite determinar o deslocamento vertical y para todos os valores de x , isto é, para os INFINITOS PONTOS DA VIGA A SOLUÇÃO É OBTIDA.

Figura 1.4 – Modelo para análise preliminar da ponte flutuante.

Embora não seja o nosso objetivo discutir a formulação analítica do problema anterior, é importante tecer algumas considerações a respeito do desenvolvimento das soluções propostas para os Sistemas Contínuos, e que justifiquem a busca de uma outra alternativa de cálculo, como o Método dos Elementos Finitos, que estudaremos em seguida. Duas idéias são importantes:

a) O diagrama de Corpo Livre

O conceito de diagrama de corpo livre, intensamente utilizado por nós nos problemas de mecânica, constituirá um poderoso aliado no entendimento do equilíbrio da estrutura e dos seus elementos. A figura 1.5 ilustra esse conceito. Ao analisarmos o equilíbrio estático ou dinâmico do bloco, nós o isolamos do resto do sistema, substituindo a ação dos demais componentes sobre o bloco pelas forças que esses componentes exercem nele. Assim, focalizamos a nossa atenção apenas no "elemento" alvo de interesse, e justificamos a sua condição de equilíbrio.

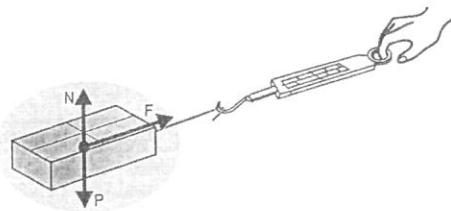


Figura 1.5 – Diagrama de Corpo Livre do Bloco. Ao isolá-lo, aplicamos as equações de equilíbrio no elemento objeto de análise.

b) Equilíbrio de um Elemento da Estrutura

A viga da figura 1.6 está em equilíbrio, portanto cada trecho dela também está em equilíbrio. Podemos justificar o equilíbrio de um **elemento diferencial** de comprimento dx , representando o carregamento externo nesse trecho e as forças e momentos que são trocados com o resto da viga, fazendo também um *diagrama de corpo livre do elemento diferencial*. Como esse diagrama envolve termos diferenciais, como um aumento "muito pequeno" (*diferencial*) de momento dM e Força Cortante dQ de uma seção para outra da viga, as Equações de Equilíbrio e as relações que envolvem momento e curvatura conterão esses termos diferenciais. Essas **equações envolvem derivadas** e não relações diretas entre as grandezas, e são, portanto, **equações diferenciais**, e para resolvê-las, teremos de submetê-las a um processo de integração.

Neste exemplo, bem como no exemplo anterior da ponte flutuante, a solução da equação diferencial, embora trabalhosa, é possível por procedimento analítico exato, que em última análise contabiliza o efeito dos *infinitos elementos diferenciais*. Em resumo, a partir do entendimento do comportamento de um elemento diferencial, é possível entender o comportamento da viga inteira. Esse tipo de solução analítica, como já mencionado anteriormente, infelizmente não está disponível para a maioria dos problemas práticos, o que nos levará à busca de outra estratégia para resolvê-los. Essa nova estratégia passa pelo tratamento dos problemas de engenharia, considerando-os como *Sistemas Discretos*, e que será o alvo de nossa discussão neste livro a partir deste ponto.

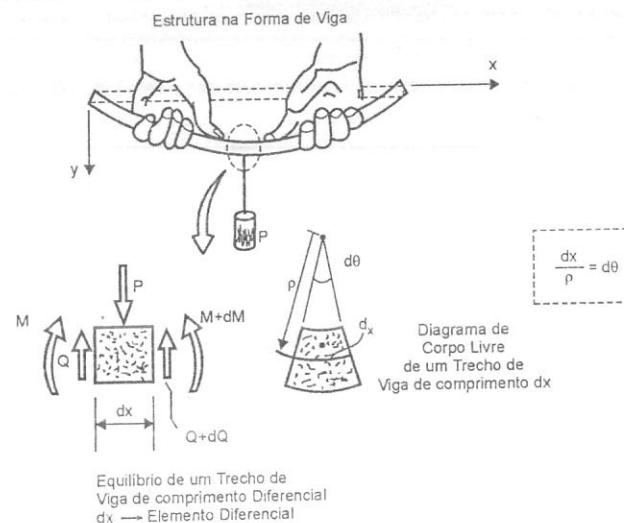


Figura 1.6 – A partir do entendimento do equilíbrio de um elemento (diferencial) da viga, pode-se entender o comportamento da viga inteira, em seus infinitos pontos. Para cada ponto de coordenada x, pode-se determinar o correspondente deslocamento.

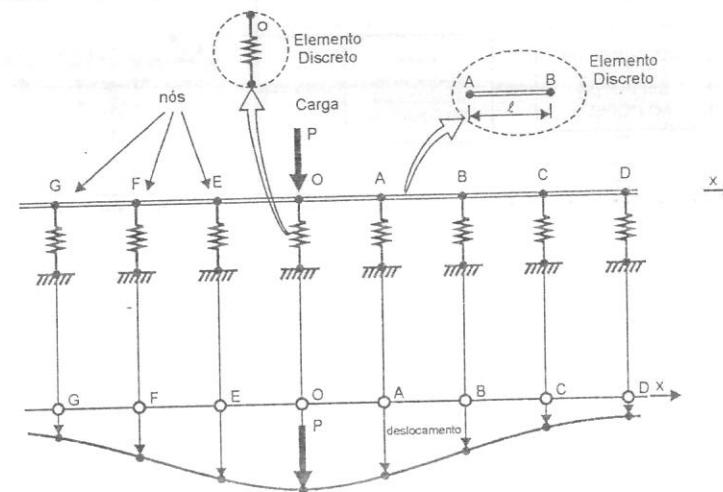
1.2.2. SISTEMAS DISCRETOS

A abordagem do equilíbrio da estrutura pode ser efetuada considerando-a um *Sistema Discreto*. A idéia da Discretização de um Sistema Contínuo considera a divisão da estrutura em partes separadas distintas, conectadas entre si nos *pontos discretos* O, A, B, C,...etc., como mostra a figura 1.7.

Neste caso, a **solução aproximada** simula a estrutura como uma *montagem de elementos* que têm um **comprimento finito** (e não diferencial). Assim, o sistema é subdividido em um número finito de partes ou elementos, de sorte que a estrutura inteira é modelada por um agregado de estruturas "simples". Os pontos de conexão entre os Elementos são chamados de *Nós* do Modelo.

Estamos diante da questão central do Método dos Elementos Finitos. Embora ainda não tenhamos aprofundado o recurso matemático para desenvolvê-lo, em uma primeira abordagem podemos observar que:

- No sistema discretizado no exemplo da figura 1.7, não se pretende calcular os deslocamentos dos infinitos pontos da viga, como no caso contínuo. Em uma primeira instância são calculados somente os deslocamentos de alguns pontos, que são os *nós do modelo*. Porém, julgamos que o número de pontos discretos escolhidos é suficiente para representar o deslocamento do conjunto inteiro de forma aproximada. A escolha desse número adequado será objeto de discussões nos próximos capítulos e constitui um ponto muito importante no Método dos Elementos Finitos.
- O modo pelo qual a estrutura se comporta entre os nós do modelo dependerá das propriedades atribuídas ao elemento escolhido, que representará aquele trecho da estrutura entre os nós. Assim, a partir do conhecimento dos deslocamentos dos nós, poderemos calcular o comportamento interno de cada elemento. Quanto mais bem especificado for esse comportamento interno, mais a resposta do modelo irá se aproximar do comportamento real da estrutura. Ou seja, o *elemento discreto* que representa um dado trecho da estrutura entre os nós deve ser muito bem definido. Esta é a questão mais importante na definição dos Elementos Finitos. O recurso matemático necessário para implementar esta idéia será discutido posteriormente. A rigor, estaremos nos socorrendo da velha idéia matemática da interpolação, tanto utilizada pelos engenheiros nas suas aplicações.



São calculados somente os deslocamentos dos pontos O, A, B, C, ... etc.
e não dos infinitos pontos da viga.
De posse desses deslocamentos, podemos avaliar a configuração deformada da viga inteira.

Figura 1.7 – Estrutura Discretizada como uma montagem de Elementos.

- Urn dos motivos pelo qual o Método dos Elementos Finitos obteve sucesso desde o início de sua formulação até os dias de hoje é que o seu conceito básico, a **Discretização**, produz muitas **equações algébricas simultâneas**, como demonstraremos adiante, que são geradas e resolvidas com o auxílio de **computadores digitais**. Assim, podem-se utilizar **procedimentos padrões**, aplicáveis aos sistemas discretos, que não envolvem decisões de engenharia durante o procedimento computacional. Todas as decisões são tomadas pelo analista na etapa de elaboração do modelo, antes de "disparar" a análise, escolhendo o elemento adequado que represente uma dada situação física. Daí a idéia de o elemento ser muito bem definido, isto é, a sua formulação matemática representar adequadamente o comportamento físico que se pretende simular.

1.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - SISTEMA DISCRETO PADRÃO

Na figura 1.1 foram mostrados os passos principais envolvidos na Análise de um Sistema Estrutural. Essa mesma seqüência aplica-se à Análise de Sistemas Discretos, levando-se em conta as particularidades da montagem dos elementos. A idéia do diagrama de corpo livre também continua válida. Se a estrutura inteira encontra-se em um estado de equilíbrio, cada elemento também está em equilíbrio. Porém, o elemento em equilíbrio não é mais um elemento diferencial como em um sistema contínuo, mas sim um elemento finito, pois o sistema foi tratado como discreto. A figura 1.7 ilustra o Método Geral para Análise de Sistemas Discretos.

MÉTODO GERAL PARA ANÁLISE DE SISTEMAS DISCRETOS - SISTEMA DISCRETO PADRÃO

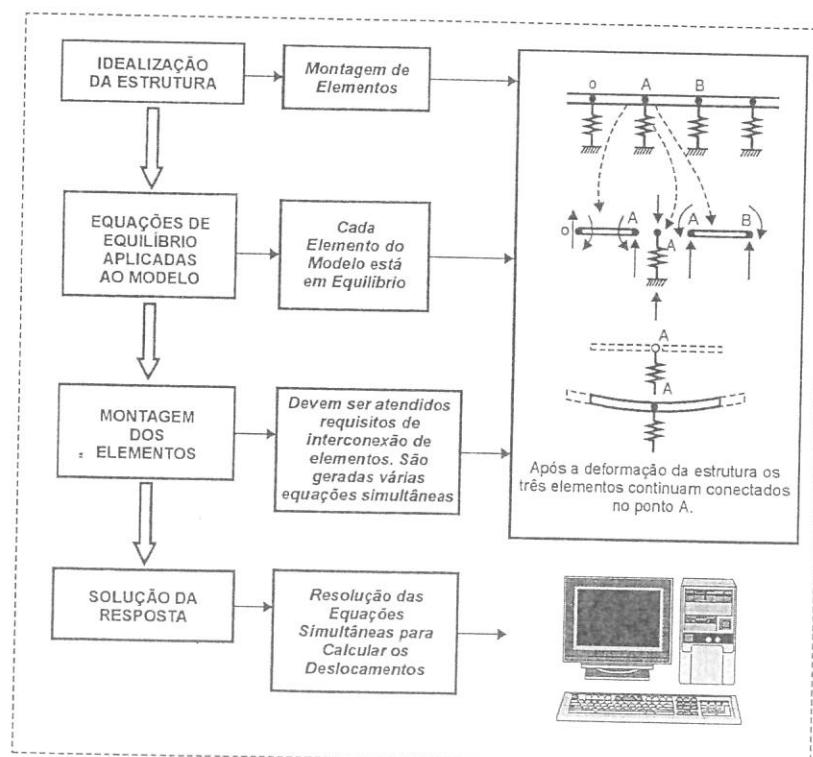


Figura 1.8 – Método Geral para Análise de Sistemas Discretos - Sistema Discreto Padrão.

As inúmeras **Equações Algébricas** geradas a partir da Condição de Equilíbrio de cada elemento são resolvidas com o auxílio de **Computadores Eletrônicos**. O meio mais eficiente de armazenar essas informações e processá-las é por intermédio de **Matrizes**, que são bastante utilizadas nos procedimentos do MEF. Deve-se notar, porém, que o problema de equilíbrio não nasceu matricial. Assim, o uso da **Notação Matricial** deve ser entendido como uma "questão administrativa" que será detalhada posteriormente. Somente na Forma Matricial é que a solução das equações simultâneas pode ser efetuada de forma compacta e elegante.

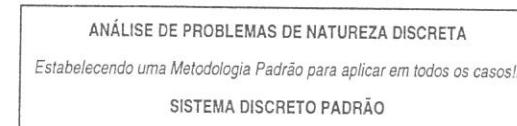
A idéia da Discretização de um Sistema Contínuo foi aqui inicialmente introduzida para uma aplicação de Cálculo Estrutural, até porque as aplicações iniciais do Método foram desenvolvidas historicamente para essa área da Engenharia. A configuração deformada da estrutura é determinada por intermédio dos **deslocamentos dos nós**, qualquer que seja a forma da estrutura e o tipo de carregamento. Assim, nesse caso, os **Parâmetros** que descrevem o comportamento do sistema são os **deslocamentos nodais**. A partir destes, poder-se-ão determinar os esforços internos- as **tensões** – e avaliar a resistência da estrutura objeto de análise. Em uma linguagem mais geral, esses parâmetros são chamados também de **Variáveis de Estado**, pois governam e descrevem o estado de equilíbrio da estrutura.

Embora o MEF tenha sido inicialmente mais associado a aplicações estruturais, como análise linear de estruturas, vibrações livres e forçadas, análise não linear envolvendo grandes deflexões e grandes deformações, plasticidade, instabilidade estrutural, etc., as técnicas de discretização de sistemas contínuos que têm obtido comprovado sucesso no âmbito da análise estrutural são mais gerais, e podem ser aplicadas a outras áreas de engenharia e análise. Elas acabam sendo poderosas ferramentas em física e matemática, tais como: *Transferência de Calor, Escoamento de Fluidos, Ondas Eletromagnéticas, Hidrodinâmica, etc.*

As variáveis de estado, nestes casos, são as **temperaturas, velocidades, etc.**, enfim, as grandezas associadas aos fenômenos físicos objeto de análise. Porém, a questão central do Método continua a mesma: qualquer que seja a natureza do problema físico que pretendemos modelar, por intermédio de suas variáveis de estado, não estaremos calculando a resposta nos infinitos pontos do contínuo em primeira instância, mas apenas em alguns, que são os nós do modelo eleitos pelo processo de discretização.

Por uma questão apenas de interesse didático, desenvolveremos o nosso estudo tendo como "pano de fundo" as aplicações da Análise Estrutural, estabelecendo adiante as generalizações para outras áreas de aplicação, e formulando, quando de interesse, princípios mais gerais.

Dessa forma, podemos introduzir agora, a partir do conceito geral de **Discretização**, a definição do **Método dos Elementos Finitos**.



O Método dos Elementos Finitos é um Método Aproximado de Cálculo de Sistemas Contínuos, de sorte que:

- A estrutura, o componente mecânico ou, de forma geral, o **corpo contínuo** é subdividido em um número finito de partes (**os Elementos**), conectados entre si por intermédio de pontos discretos, que são chamados de **Nós**. A montagem de Elementos, que constitui o **Modelo Matemático**, tem o seu comportamento especificado por um número finito de **parâmetros**. Em particular, nos problemas de Análise Estrutural, os parâmetros são os **Deslocamentos Nodais**, que são as incógnitas do problema.
- A estratégia de solução do sistema, ou seja, da Montagem dos Elementos, é a mesma estratégia do Método Geral para Análise de Sistemas Discretos anteriormente discutida.

1.4. TIPOS DE MODELOS DISCRETIZADOS

1.4.1. ESTRUTURAS RETICULADAS

Em muitas situações, a identificação dos componentes de um sistema ou, mais particularmente, de uma estrutura parece uma tarefa quase que óbvia. Por exemplo, para uma estrutura espacial metálica constituída apenas por vigas, é natural identificar os componentes individuais de vigas ou elementos que, *conectados entre si somente nas juntas ou nós estruturais*, constituirão o conjunto estrutural. Assim, ao tentarmos dar o passo mais importante do processo de idealização da estrutura, ou seja, a formulação do modelo matemático discreto equivalente à estrutura contínua, a concepção do modelo de cálculo surge quase que naturalmente.

A figura 1.9 representa um exemplo desses tipos de estrutura, chamadas de *estruturas reticuladas*, e o seu correspondente modelo discretizado. Deve-se notar que para estes tipos de estrutura a interação entre os elementos ocorre somente nas juntas ou nós; eles trocam forças entre si somente nesses pontos. Assim, como veremos adiante, a aplicação das *equações de equilíbrio* nesses pontos nodais, juntamente com a condição de que os elementos continuem interconectados nesses pontos após a deformação da estrutura, ou seja, as *Condições de Compatibilidade de Deslocamentos*, serão suficientes para conceber matematicamente o modelo de cálculo.

Nessa classe de estruturas encontram-se as *vigas contínuas*, *pórticos planos*, *pórticos espaciais*, *grelhas*, *treliças planas* e *treliças espaciais*.

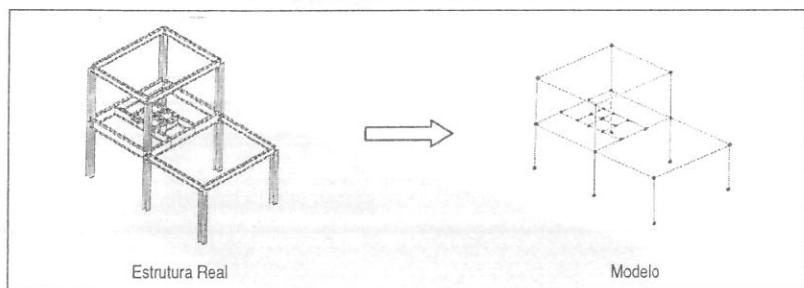


Figura 1.9 – Estrutura Reticulada de Vigas e o Correspondente Modelo Estrutural. A conexão dos elementos de viga ocorre nas juntas estruturais, que no modelo discretizado são os nós.

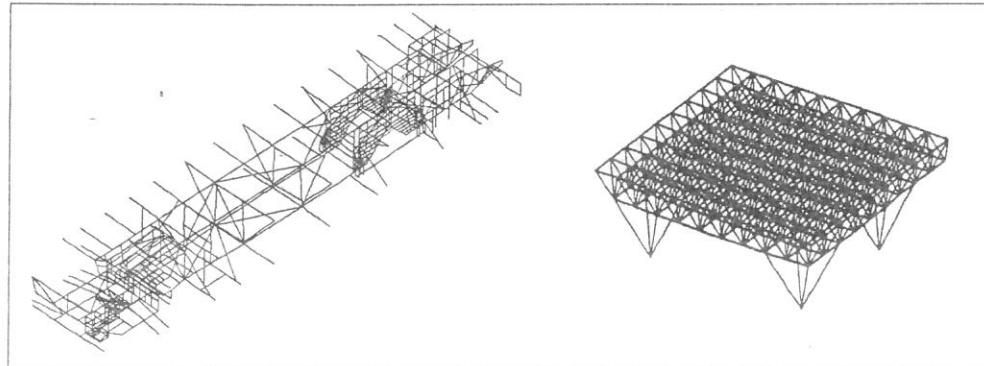


Figura 1.10 – Modelos Discretizados de Estrutura Reticulada de Plataforma de ônibus e de Estrutura Metálica Espacial. As ações trocadas entre os elementos ocorrem somente nos seus pontos de encontro, os nós do modelo. Os pontos internos dos elementos não trocam ações diretas com os pontos internos dos elementos vizinhos.

1.4.2. ELEMENTOS ESTRUTURAIS CONECTADOS CONTINUAMENTE

No dia-a-dia das aplicações mecânicas e da engenharia em geral, existem diversos componentes que apresentam características bastante diferentes das estruturas constituídas apenas por vigas. Por exemplo, a caixa estrutural completa de um veículo, os componentes de um chassi, eixos, componentes de máquinas, carcaças, lajes, barragens, etc. Nesses casos, o *corpo contínuo* é *subdividido artificialmente em um certo número finito de elementos*, também *conectados apenas nos nós*. Ou seja, estamos fazendo a *representação aproximada de um corpo contínuo*, pois na realidade os diversos trechos do contínuo não estão conectados apenas em alguns pontos, como no caso de uma estrutura reticulada.

Para que essa representação não se torne grosseira, deveremos considerar algumas condições adicionais além da mera imposição do equilíbrio e compatibilidade apenas nos nós do modelo. Essa questão é a mais fundamental no Método dos Elementos Finitos, e será objeto de estudo detalhado adiante. As figuras 1.11, 1.12 e 1.13 representam modelos em elementos finitos de diversos componentes mecânicos, em que podemos observar a subdivisão da estrutura em elementos. Dois aspectos iniciais chamam atenção e são as características básicas do Método dos Elementos Finitos:

- A subdivisão da estrutura em elementos, isto é, a *malha de elementos finitos*;
- A escolha do elemento apropriado para modelar uma dada situação física.

A escolha do tamanho adequado da malha não parece óbvia em uma estrutura contínua. E realmente não é. Seria um pouco de "exagero" afirmarmos que ao olharmos para as estruturas das figuras 1.11 a 1.13, a malha ali representada seria tão óbvia como em uma estrutura reticulada. Com muito mais exagero, o analista poderia dizer que ao olhar um chassi de caminhão na rua, a malha representada na figura 1.12 surgiria tão naturalmente em sua mente, que ele até a visualizaria na estrutura real, com o tamanho dos elementos, etc. Essa escolha depende do conhecimento das propriedades do elemento escolhido para a representação do problema, que é a característica fundamental do método, e essa idéia é ilustrada na figura 1.14.

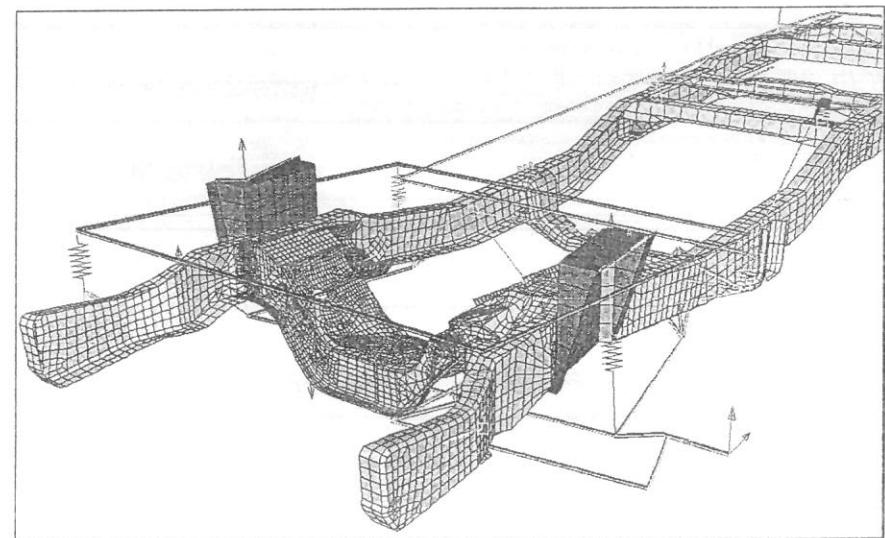


Figura 1.11 – Malha de Elementos Finitos de Estruturas Veiculares (contínua).

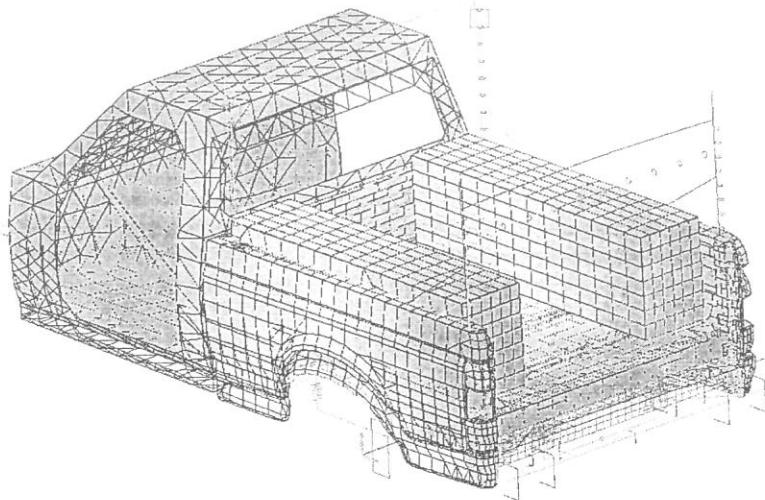


Figura 1.11 – Malha de Elementos Finitos de Estruturas Veiculares (continuação).

Do ponto de vista prático, os “softwares” de Elementos Finitos oferecem uma *Biblioteca de Elementos do Programa*, contendo diversos *elementos*, cada qual tentando representar um *diferente comportamento físico* conhecido da Mecânica Estrutural (estado plano de tensões, placas, cascas, membranas, sólidos, etc.). Esse comportamento é descrito por intermédio de Funções Matemáticas que representam o comportamento interno do elemento. Embora o estudo dessas funções seja objeto de capítulos posteriores, seria conveniente introduzir neste estágio, ainda que apenas qualitativamente, algumas questões sutis que acompanham a definição e utilização dos elementos conectados continuamente.

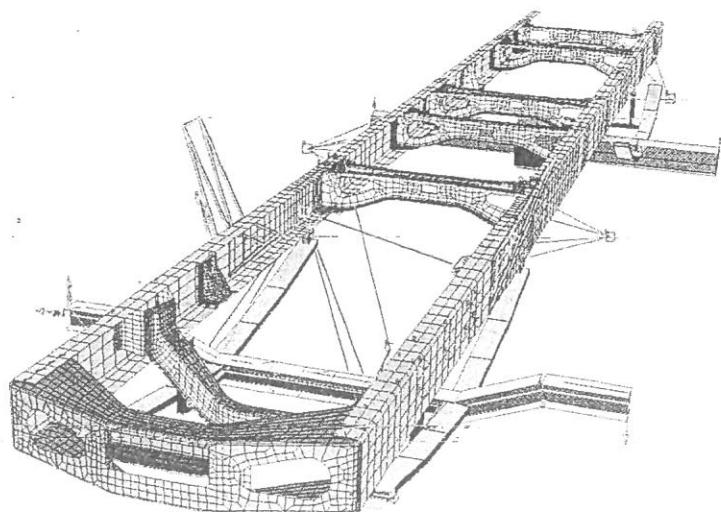
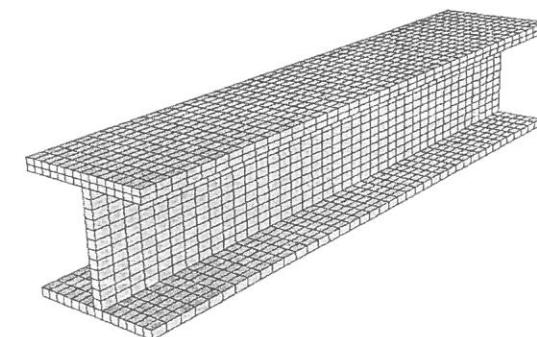
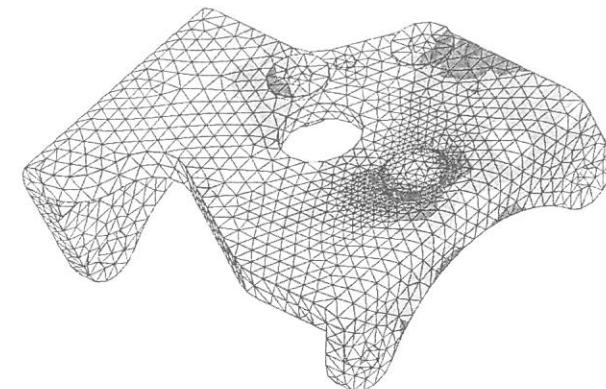


Figura 1.12- Malha de Elementos Finitos de Estrutura de Chassi de Caminhão.

Ao representar um determinado comportamento físico por intermédio de um modelo de análise, o modelo proposto deve representar trecho a trecho o que ocorre na estrutura real. Veremos adiante que a equivalência trecho a trecho entre a estrutura real e o modelo poderá ser obtida, ainda que em caráter aproximado, por intermédio da igualdade de energias dos sistemas contínuos e discreto para os elementos. Essa idéia fundamental envolverá o conceito de *energia de deformação*, armazenada pela estrutura deformada sob a ação do carregamento, tal qual uma mola deformada absorve energia potencial elástica decorrente da ação da força externa que a deforma e realiza um trabalho externo.



Subdivisão das
Peças em
Elementos



Compreender o
Todo Entendida
as Partes

Figura 1.13 – Malha de Elementos Finitos de Componentes Mecânicos Sólidos. Os “pequenos” elementos finitos sólidos são conectados nos nós. A montagem de elementos representa a estrutura do corpo contínuo inteiro. No primeiro caso o sólido é “montado” a partir de elementos sólidos tetraédricos. No segundo caso a montagem do sólido é feita a partir de elementos sólidos hexaédricos, semelhantes a um paralelepípedo.

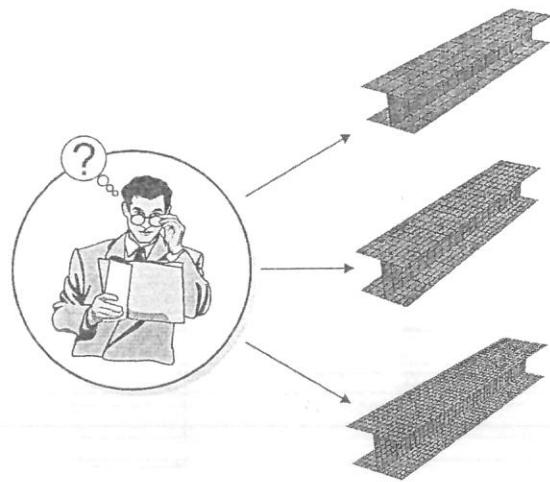


Figura 1.14 – Malhas de Elementos Finitos de um mesmo componente, com diferentes tamanhos de Elementos. A escolha do tipo e tamanho dos Elementos nessas subdivisões artificiais constitui ponto importante, e depende das propriedades do elemento escolhido.

Observações Adicionais em relação aos Elementos Estruturais Conectados Continuamente

No exemplo da figura 1.15, uma chapa é representada como uma montagem de elementos individuais, triangulares e retangulares. A chapa contínua foi dividida artificialmente em um certo número finito de elementos conectados nos seus nós, constituindo um modelo discreto. Nesse caso não existe uma subdivisão natural como em uma estrutura reticulada. Com a finalidade de introduzirmos os aspectos sutis que estão presentes nesse tipo de modelo, vamos imaginar uma situação hipotética. Vamos desenhar na estrutura real uma “malha” de “elementos” e observar o seu comportamento físico. Na estrutura real, contínua, existe uma completa continuidade de deslocamentos não somente nos “nós” que interligam os “elementos”, mas também ao longo dos contornos comuns dos “elementos” desenhados na chapa.

Poderíamos pensar hipoteticamente que a montagem de um modelo discreto seria reproduzida experimentalmente se cortássemos a chapa em diversos trechos triangulares e retangulares, como os “elementos” desenhados na chapa. Em seguida uniríamos os tais elementos apenas nos “nós”, soldando-os de alguma forma, e teríamos a representação prática do modelo discretizado. É evidente que se construíssemos um “modelo” com essas hipóteses, ele seria muito mais flexível do que a estrutura real, pois poderíamos ter “buracos” nas regiões dos contornos comuns fora dos nós, enquanto a estrutura real satisfaz a condição de compatibilidade em todos os seus pontos, pela sua própria natureza. Esta idéia é representada na figura 1.16.

Voltando então ao Modelo Matemático, não seria suficiente construí-lo pensando na condição de compatibilidade apenas nos nós. Poderíamos até argumentar que ele poderia ser melhorado se utilizássemos um número enorme de elementos. Se continuássemos indefinidamente essa subdivisão, chegaríamos aos elementos diferenciais, e seriam geradas equações diferenciais, que são de difícil solução para os casos gerais, como já sabemos.

Porém, se pudéssemos garantir que o comportamento interno de dois elementos adjacentes fosse de tal sorte que a configuração deformada do contorno de um elemento fosse compatível com a configuração do contorno do elemento vizinho, pelo menos em um grau razoável para a aproximação requerida, poderíamos representar a estrutura por intermédio de um modelo discreto, sem a necessidade de utilizar elementos extremamente pequenos. E como conseguir esse objetivo? Por intermédio da especificação das propriedades do elemento. Tais propriedades serão definidas para cada elemento adiante, por intermédio de relações matemáticas adequadas. Esta constitui a principal diferença entre o estudo dos elementos de uma estrutura reticulada e dos elementos

conectados continuamente. A obtenção dessas relações matemáticas não é tão simples como nos casos das trilhas e vigas, em que os elementos trocam ações apenas nos nós.

Esta é a característica-chave do Método dos Elementos Finitos. Embora o Modelo Discreto não forneça a resposta exata da Representação da Estrutura Contínua(até porque não estamos resolvendo os seus infinitos pontos!!), poderemos obter uma boa aproximação para a solução do problema de engenharia sem a necessidade de utilizar elementos extremamente pequenos.

A idéia deste capítulo é introduzir os aspectos-chave do Método, dando ênfase aos Conceitos Fundamentais. Entendida a filosofia de abordagem e tendo claros esses objetivos, nos próximos capítulos apenas transformaremos tais conceitos em linguagem matemática, sofisticando-a quando necessário.

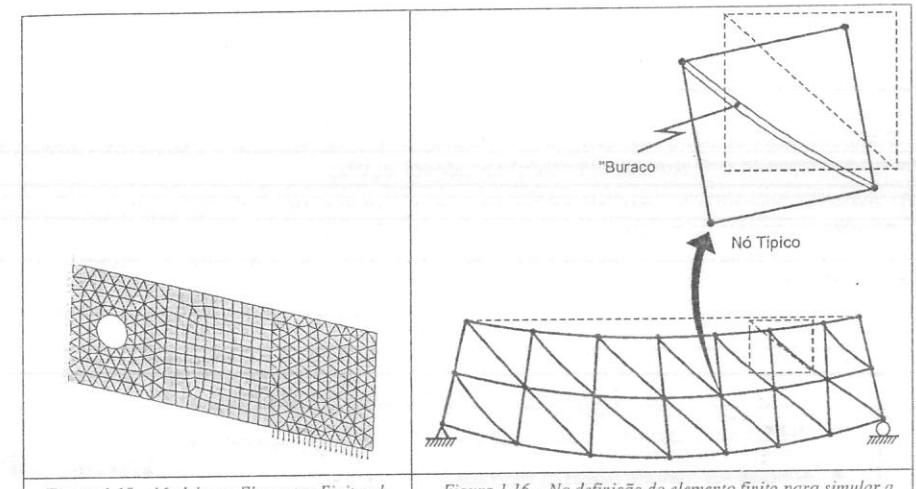


Figura 1.15 – Modelo em Elementos Finitos de uma chapa plana com orifício, engastada em uma extremidade, com carga distribuída, utilizando elementos retangulares e triangulares.

Figura 1.16 – Na definição do elemento finito para simular a estrutura de uma chapa, a imposição da condição de compatibilidade de deslocamentos apenas nos nós ocasionaria a formação de “buracos” no modelo, tal qual se soldássemos várias chapas apenas nos vértices dos triângulos.

1.5. A ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS - MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO

As estruturas constituídas por elementos cujas conexões já são discretas na própria estrutura real, tais como as trilhas – cujas conexões são articuladas, e os pórticos – cujas conexões são rígidas, apresentam menor dificuldade no procedimento de montagem das equações que governam o comportamento do sistema do que as estruturas cuja subdivisão dos elementos é artificial no modelo, tais como as estruturas de chapas e sólidos. Embora o entendimento desse processo de montagem das equações seja objeto do próximo capítulo, no qual daremos início ao tratamento matemático do método, convém ressaltar alguns aspectos estratégicos que serão importantes, e poderão ser úteis no encaminhamento dos procedimentos adotados pelo Método dos Elementos Finitos.

As estruturas constituídas por Elementos Estruturais “Conectados Continuamente” estarão sujeitas além dos mesmos procedimentos de montagem utilizados pelas estruturas reticuladas, a outros procedimentos adicionais decorrentes da subdivisão artificial dos elementos. Esses procedimentos adicionais referem-se à questão dos contornos comuns, e algumas dificuldades que surgem ao tentar estabelecer as condições de compatibilidade de deslocamentos ao longo desses contornos comuns.

As *forças de interação entre os vários elementos de uma estrutura reticulada* são representadas por *esforços discretos nas juntas ou nós, tanto no modelo como na estrutura real*. Por exemplo, em um pórtico essas ações trocadas envolvem forças axiais, forças cortantes, momentos fletores e momentos torções nas vigas, que são transferidas para o elemento vizinho pelos nós. As *relações de equilíbrio e compatibilidade nos nós* são suficientes para assegurar que elas serão satisfeitas em todas as partes da estrutura, pois os *elementos são conectados apenas nos nós*.

A análise de um sistema discreto constituído de *elementos estruturais “conectados continuamente”* apresenta algumas dificuldades. As forças de interação entre os elementos agindo nos nós do modelo não apresentam uma correspondência direta com aquelas que atuam nos mesmos pontos da estrutura real. O motivo é evidente, pois *na estrutura real os contornos estão “colados” entre si, e no modelo não*. Assim, o analista deve ter um cuidado bastante grande na interpretação dos resultados.

De alguma forma, o campo de forças que age internamente no elemento (*incluindo o seu contorno, que faz parte do elemento!*) deve ser representado para propósitos de equilíbrio, por um conjunto de forças discretas equivalentes agindo nos nós. Assim, para os elementos com extensão bi ou tridimensional – como chapas, sólidos, etc. – é necessário definir a relação entre os deslocamentos nodais e deformações internas, de sorte que as condições de equilíbrio e compatibilidade sejam atendidas não somente nos nós, mas também nos contornos comuns, pelo menos com suficiente precisão. Esta é a chave da Análise pelo Método dos Elementos Finitos e constitui a maior diferença entre a Análise de Estruturas Reticuladas e o Método dos Elementos Finitos. Estas questões mais sutis serão abordadas com detalhes nos capítulos seguintes.

Assim, apenas por uma questão de conveniência didática, começaremos o estudo do Método dos Elementos Finitos estabelecendo as leis pertinentes ao processo de montagem dos elementos, focalizando o caso das Estruturas Reticuladas. Vencida esta etapa, adicionaremos ao conhecimento obtido as questões mais delicadas que extrapolam o âmbito das estruturas reticuladas, e que aplicam-se a estruturas constituídas por chapas, sólidos, etc. Não seria conveniente tentarmos resolver as duas questões simultaneamente, até porque elas se complementam. Vale ressaltar então, os aspectos-chave que estarão presentes na Análise de Estruturas Reticuladas, em que utilizaremos por uma “*questão administrativa*” a Notação Matricial, como já mencionado anteriormente:

ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS

- Os Elementos Unidimensionais são Conectados nos Nós, isto é, nas suas extremidades.
- As Conexões podem ser Rígidas ou Articuladas.
- As Forças Externas são Aplicadas somente nos Nós e os Deslocamentos da Estrutura são Expressos em termos de Deslocamentos Nodais: *

* Observação:

O cálculo dos deslocamentos de uma estrutura por intermédio de um modelo discretizado considera apenas os deslocamentos dos nós do modelo, para a representação da configuração deformada da estrutura inteira. Na montagem do sistema de equações de equilíbrio, utilizando a linguagem matricial, veremos adiante que as cargas devem atuar também somente nos nós do modelo, ou seja, também de forma discreta. Porém, nas estruturas reais, o carregamento age não somente nos nós, mas na maioria dos casos, no vão das vigas, isto é, entre os nós. Esta aparente dificuldade é resolvida por intermédio do conceito de Cargas Nodais Equivalentes, que ... as Cargas que, atuando somente nos nós do modelo, produziriam o mesmo efeito global na estrutura que as cargas distribuídas nos vãos dos elementos.

A técnica para efetuar essa transformação será estudada posteriormente, e não é fundamental para o entendimento dos conceitos que ... estamos aplicando. Se fôssemos dar importância a esse detalhe no atual estágio do nosso estudo, estariamos desviando a nossa atenção do foco central, que é a montagem das Equações Algébricas que traduzem o equilíbrio dos elementos do modelo discretizado. Assim, daqui por diante, sempre que falarmos em carregamento que atua no modelo, este sempre estará atuando nos nós. A título de curiosidade, quando o usuário de um “software” de Elementos Finitos fornece ao programa o carregamento que atua na estrutura, este pode ser distribuído no vão da viga, ou em geral entre os nós do elemento. Porém, internamente, o programa transforma esse carregamento em Cargas Nodais Equivalentes de acordo com a idéia introduzida anteriormente, e poderá gerar então as equações algébricas que permitirão o Cálculo dos Deslocamentos Nodais.

A Análise Matricial de Estruturas e, em consequência, o Método dos Elementos Finitos têm como ponto de partida a *Relação entre Forças Nodais e Deslocamentos Nodais para cada Elemento Individual*. Essa idéia fundamental está relacionada ao *Conceito de Rígidez*. Todos nós temos a idéia de rigidez desde as primeiras aplicações com os elementos elásticos (ou Molas) da Física Básica. A constante elástica da mola, que é a medida quantitativa da *Rigidez da Mola*, é expressa por intermédio da *relação entre a força aplicada e o deslocamento medido na extremidade da mola*, como indica a figura 1.17. A constante elástica da mola pode ser entendida como um *Coeficiente de Rígidez*, pois é o coeficiente que relaciona Força e Deslocamento na *relação $F = k \cdot d$* .

A situação mais simples e de grande interesse prático corresponde ao caso em que essa relação é linear, cujo estudo focalizaremos neste livro.

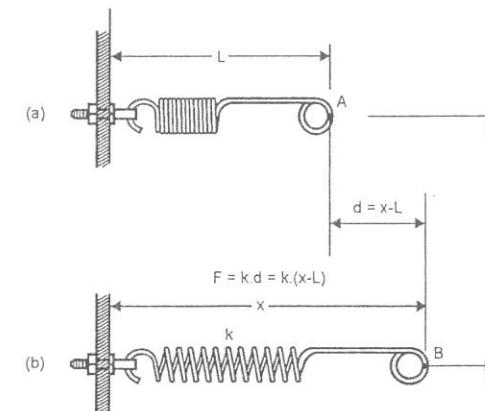


Figura 1.17 – A rigidez da mola pode ser representada por intermédio de sua constante elástica, ou seu coeficiente de rigidez k .

Assim como a *rigidez de uma mola* é contabilizada por intermédio da *relação força-deslocamento para a mola*, medindo no ponto de aplicação da força, em um elemento finito a idéia é a mesma, porém em caráter mais amplo. Na mola está presente o conceito de rigidez axial, pois ela transfere apenas forças axiais. Em uma viga, por exemplo, estão presentes diversos componentes de rigidez simultaneamente, como rigidez axial, rigidez à flexão, rigidez à torção, ao cisalhamento. Dessa forma, os *diversos componentes de rigidez de um elemento estão relacionados aos diversos componentes de forças e deslocamentos presentes*, e que, à semelhança da mola, podem ser contabilizados por intermédio de relações matemáticas que descrevem o comportamento físico associado a cada rigidez presente.

Interessa-nos, inicialmente, também o caso em que essas relações são lineares. A forma mais adequada de representar essas características dos elementos no computador é por intermédio da álgebra matricial. No exemplo da mola fixada em uma extremidade, temos um componente de rigidez. No segundo caso, da viga, temos diversos componentes de rigidez presentes. Podemos representar os diversos componentes de força atuantes no elemento na forma de uma matriz coluna. Analogamente, podemos representar os diversos componentes de deslocamentos. Daí decorre o conceito de *Matriz de Rigidez de um Elemento Finito*. A representação matemática da relação completa entre todas as Forças Nodais e Deslocamentos Nodais em um Elemento será feita por intermédio de um sistema de equações algébricas lineares, que serão estudadas a partir do capítulo 2. Os coeficientes dessas equações, que são os coeficientes de rigidez do elemento, fazem parte da matriz de rigidez do elemento.

A figura 1.18 ilustra essa idéia geral, em que é representado um elemento de viga, e *as forças que justificam o equilíbrio do elemento em um diagrama de corpo livre*. O aprofundamento matemático dessa idéia será objeto do nosso estudo a partir do próximo capítulo. O fato de empregar a notação matricial não deve constituir preocupação por parte do leitor, já que os conceitos necessários para utilizar essa notação serão relembrados no momento adequado.

Assim, esquematicamente, temos:

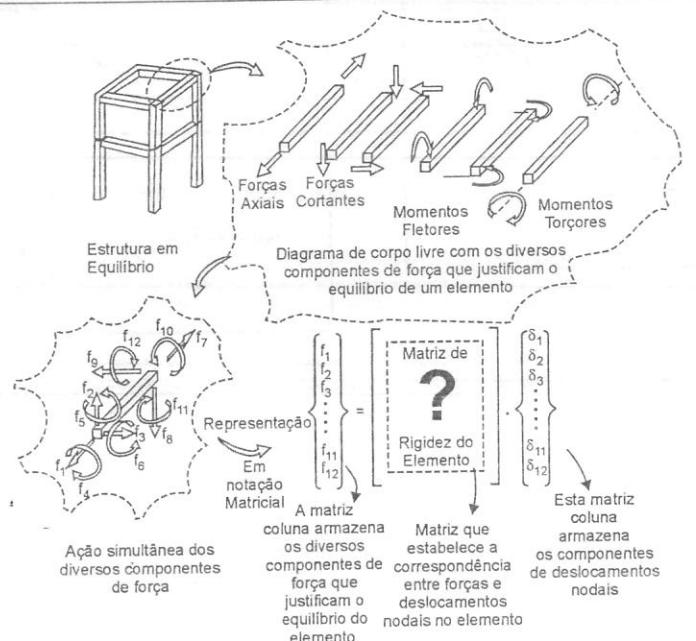
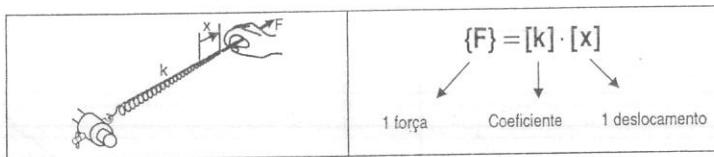
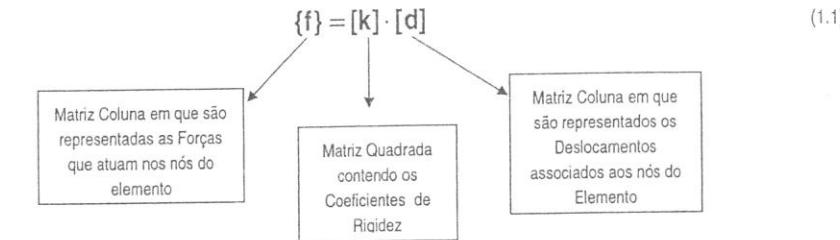


Figura 1.18 – Na mola, a relação entre UM Componente de Força e UM Componente de Deslocamento é expressa por UM Coeficiente de Rigidizez k , a constante elástica da mola. A relação entre todos os componentes de força e deslocamento, presentes em um elemento qualquer, é expressa por intermédio da Matriz de Rigidizez do Elemento, que contabiliza os diversos componentes de rigidez do elemento.

1.6. LEIS FUNDAMENTAIS - MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

1.6.1. INTRODUÇÃO

Vimos que no Método dos Elementos Finitos, no âmbito das aplicações estruturais, o interesse da análise está voltado para a determinação da Configuração Deformada da Estrutura, a partir do Cálculo dos Deslocamentos Nodais. Vimos também que as forças que atuam em um dado elemento e os correspondentes deslocamentos estão relacionados entre si por intermédio das diversas rigidezes associadas ao elemento, o que constitui uma ampliação do exemplo simples da mola.

O conceito de Mola Equivalente – ou Rigidizez Equivalente – a um dado conjunto de molas, é outro importante conceito aplicado na Física Básica. A partir deste, podemos determinar a configuração deformada de um conjunto de molas sob a ação de uma Força Externa.

Assim ocorre também ao abordarmos a Análise Estrutural. *A Rigidizez da Estrutura Inteira depende da Rigidizez de cada um de seus elementos.* Veremos no capítulo 2 que poderemos contabilizar a *Rigidizez da Estrutura a partir da rigidez de cada um de seus elementos*.

Nos Sistemas Discretos Padrão, esse procedimento é válido para qualquer tipo de estrutura, sob quaisquer condições de carregamento. O tratamento matemático mais formal e de aplicação geral será estudado no próximo capítulo, porém a base para esse desenvolvimento podemos iniciar neste estágio. As diversas classes de problemas discretizados, que envolvem a montagem de elementos finitos, e como consequência a obtenção das relações matemáticas que permitem a resolução do problema, estão assentadas em algumas **Leis Fundamentais**. A partir do conhecimento destas, teremos a ferramenta para tratar de forma geral os problemas anteriormente mencionados, de sorte que todas as montagens de elementos finitos recairão nestes conceitos iniciais. É importante identificar, em cada caso de montagem de elementos finitos, além do comportamento físico que o elemento em estudo se propõe a resolver, uma **Técnica Geral** que permite a abordagem do problema da montagem dos elementos. Iniciaremos essa base a partir de agora, e poderemos montar a *Matriz de Rigidizez da Estrutura a partir da Matriz de Rigidizez de cada um de seus elementos*, contabilizando em última análise a Rigidez da Estrutura inteira.

1.6.2. LEIS FUNDAMENTAIS

A concepção do modelo matemático que representa de forma discreta a estrutura pode ser estabelecida a partir da aplicação de algumas leis importantes da Mecânica Estrutural. Embora a aplicação dessas equações seja feita inicialmente no âmbito das estruturas reticuladas, esses conceitos serão aplicados também para os elementos com extensão bi e tridimensional. A estrutura em equilíbrio deve satisfazer **três "Leis" ou Relações Fundamentais**, a saber:

a) Equilíbrio de Forças

Considerando a condição de equilíbrio da estrutura, podemos aplicar as **Equações de Equilíbrio** conhecidas do estudo da Mecânica **a cada um dos elementos isoladamente**. Da mesma forma a condição de equilíbrio pode ser aplicada internamente a cada elemento. Se o elemento está em equilíbrio, uma parte dele também se encontra em equilíbrio. A figura 1.19 representa, para uma montagem de elementos simples, os conceitos anteriormente abordados.

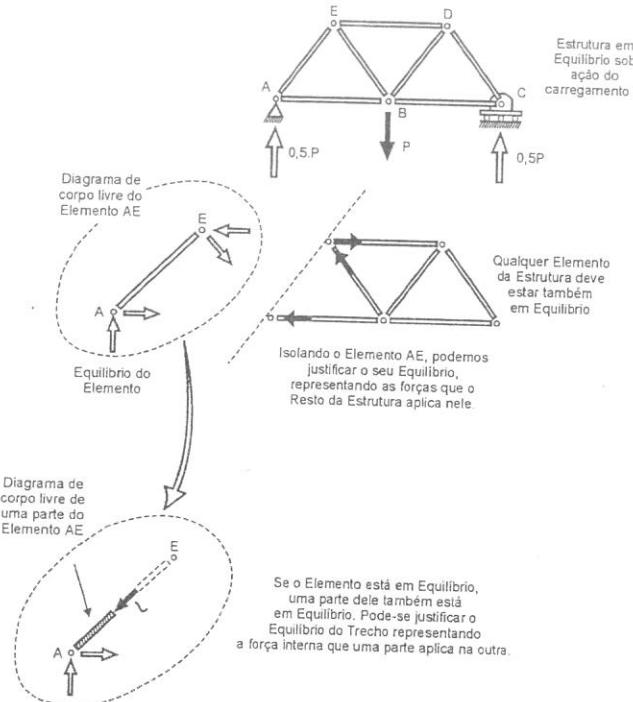


Figura 1.19 – Representação da Condição de Equilíbrio em uma montagem de elementos. Cada elemento encontra-se em equilíbrio, e uma parte do elemento também encontra-se em equilíbrio.

b) Compatibilidade de Deslocamentos

A figura 1.20 representa a ideia geral da **Condição de Compatibilidade dos Deslocamentos** ao longo da estrutura. Os elementos (1), (2) e (3), conectados no nó E, mantêm-se conectados no mesmo nó na condição deformada, na posição E'. O deslocamento de E para E' pode ser representado pelos componentes de deslocamento u e v , nas direções x e y respectivamente. As extremidades dos três elementos conectados em E estão sujeitas aos mesmos componentes de deslocamentos. Caso contrário, a estrutura estaria “abrindo” no ponto E. Esta condição pode ser imposta para todos os nós do modelo e constitui a Condição de Compatibilidade de Deslocamentos.

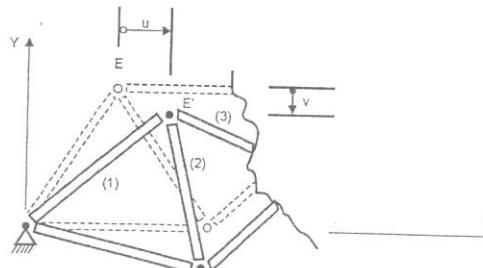


Figura 1.20 – Os elementos (1), (2) e (3) estão conectados no nó E. Após a deformação da estrutura, eles continuam conectados no mesmo ponto. Esta condição, que é válida analogamente para todos os outros nós, constitui a Condição de Compatibilidade de Deslocamentos.

Pelos mesmos motivos, essa condição deve ser imposta para os pontos internos de todos os elementos, pois a estrutura não está abrindo entre os nós. A representação matemática destas condições será introduzida no próximo capítulo.

c) Lei de Comportamento do Material

Ao transmitir os esforços ao longo da estrutura, os corpos ou, mais especificamente, os “elementos” se deformam. Os esforços são transmitidos pelos elementos por intermédio de esforços internos. Em grande parte das aplicações práticas, quando o nível dos esforços não for muito elevado, as **Força Internas crescem proporcionalmente às deformações**. Essa relação Linear, já nossa familiar da Resistência dos Materiais, constitui a **Lei de Hooke**. O desenvolvimento do estudo do Método dos Elementos Finitos e das Estruturas Reticuladas será efetuado inicialmente para Estruturas que atendam a essa condição.

Observações em relação às forças internas

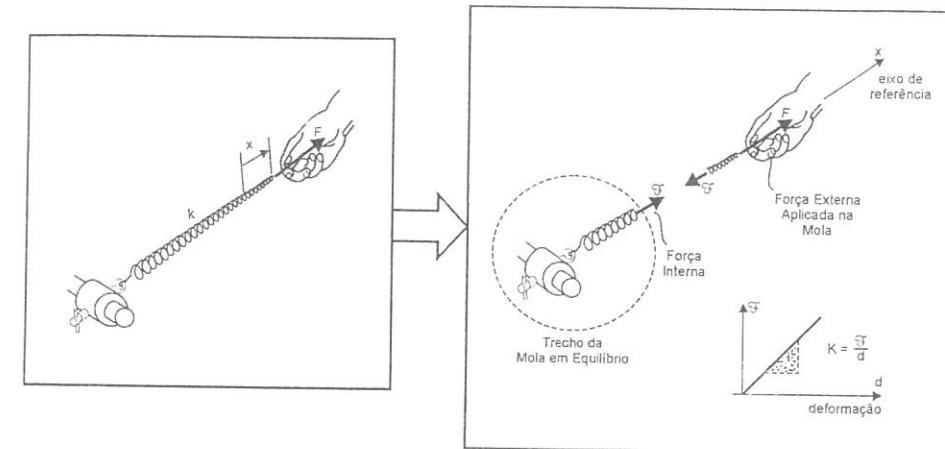


Figura 1.21 – Força Externa Aplicada na Mola. A força é transmitida internamente. Podemos justificar o equilíbrio de um trecho da mola por intermédio de um diagrama de corpo livre, representando a ação de um trecho em outro pela Força Interna Transmitida.

A figura 1.21 representa uma mola sob a ação da **Força Externa** F . A mola se deforma e transmite o esforço aplicado por intermédio da ação da **Força Interna**. Na Análise do Equilíbrio desse elemento de mola é interessante identificar a participação tanto da Força Externa como da Força Interna. Podemos justificar o Equilíbrio de um trecho da mola por intermédio do diagrama de corpo livre, identificando a ação de um trecho da mola no outro, substituindo essa ação pela **força interna T** . Embora estejamos focalizando a nossa atenção em um simples **elemento de mola**, que transmite apenas **Forças Axiais** e experimenta **deslocamentos axiais**, é interessante observar algumas idéias que serão fundamentais ao tratar dos diversos elementos finitos por intermédio de um Procedimento Padrão. A representação matemática da situação de equilíbrio deve respeitar algumas “regras” ou convenções já adotadas no estudo da Mecânica e da Resistência dos Materiais.

A representação algébrica da **Força Externa** atuante no elemento, portanto a **Força Nodal**, segue a **convenção adotada na Mecânica para o Estudo do Equilíbrio dos Corpos**. Assim, quando o sentido da força externa concorda com o sentido do eixo adotado como referência para análise do equilíbrio, esta tem sinal positivo; caso contrário, negativo. Como todo sinal em uma grandeza física deve ser interpretado, o sinal associado a uma força externa aplicada ao elemento indica apenas se o sentido da força aplicada “concorda” ou não com o sistema de referência adotado para o estudo de equilíbrio.

Por outro lado, a **Força Interna**, que em última Análise irá nos remeter ao conceito de **Tensão**, que aplicaremos na maioria dos Elementos Finitos, segue a **Convenção da Resistência dos Materiais**, ou seja, **Esforços de Tração são Positivos e os de Compressão, Negativos**.

Evidentemente, os Esforços Internos e Externos estão relacionados entre si. Neste caso da Mola, é óbvio que as intensidades tanto da Força Interna como Externa são iguais. Porém, as representações matemáticas são diferentes, e não deve-se confundir o significado físico do sinal atribuído a cada uma delas. A passagem da Força Externa no Elemento para a Força Interna deverá obedecer a estas convenções para todos os casos a serem estudados adiante. Estamos aproveitando este exemplo mais simples para introduzir um conceito que é geral no método dos Elementos Finitos, e servirá de base para montar o sistema de equações que traduz o equilíbrio da montagem de elementos finitos. A figura 1.22 ilustra essa importante idéia. Em particular, a mola exibe comportamento interno linear. Assim:

$$\text{f} = k \cdot d \quad (1.2)$$

sendo k a constante elástica da mola ou seu coeficiente de rigidez, e d é positiva, pois é de tração.

$$f_2 = \text{F} \quad (1.3)$$

Exprime a relação matemática entre a Força Interna e a Força Externa, sendo f_2 positiva, pois é força externa no mesmo sentido do eixo de referência x , e F é positiva, pois é Força Interna de Tração.

$$f_1 = -\text{F} \quad (1.4)$$

e f_1 é negativa, pois é força externa em sentido contrário ao eixo x . As forças externa e interna são iguais em intensidade, porém seus sinais são opostos, já que F é positiva. Assim, para que a expressão matemática traduza adequadamente a relação entre força externa e interna algebricamente, introduz-se o sinal negativo nesta última relação.

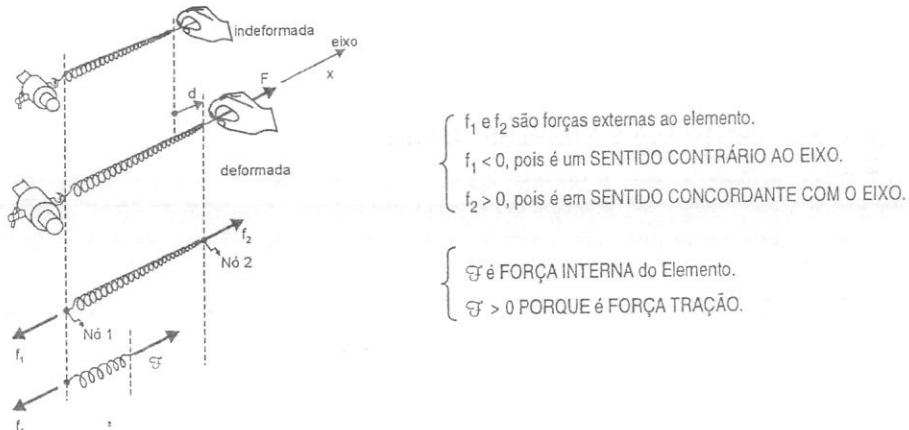


Figura 1.22 – Visualização das Forças externas ao Elemento aplicadas nos nós, e da Força Interna.

1.6.3. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UMA ESTRUTURA

A grande tarefa da Análise Estrutural é **DETERMINAR A RELAÇÃO ENTRE AS CARGAS QUE ATUAM NOS NÓS DA ESTRUTURA INTEIRA E OS DESLOCAMENTOS DA ESTRUTURA INTEIRA**. Nessa tarefa, o conceito de Rigidez está presente, ou seja:

Elemento	A relação FORÇA x DESLOCAMENTO no âmbito de um elemento é expressa pela Matriz de Rigidez do Elemento : $[k]^e$
Estrutura	A relação FORÇA x DESLOCAMENTO no âmbito da Estrutura é expressa pela Matriz de Rigidez da Estrutura : $[K]$

Tomemos um exemplo simples, em que a Estrutura é constituída por apenas um elemento, como representado na figura 1.23. Nesse caso a estrutura está fixada em um nó e a **FORÇA EXTERNA F** causa na Estrutura **UM DESLOCAMENTO U** que é linearmente proporcional a F . Como a estrutura é idêntica ao elemento, a Rigidez da Estrutura é igual à Rigidez do Elemento. Assim:

$$F = K \cdot U$$

em que $K = k$, sendo k a Constante Elástica da Mola, que contabiliza a **RIGIDEZ DA ESTRUTURA**.

Deve-se notar que, neste caso particular, apenas um Componente de Força está presente na Estrutura. Conhecendo a Rigidez da Estrutura e conhecendo a Carga, a resposta será um Componente de Deslocamento. Assim:

$$U = \frac{F}{K} \quad (1.5)$$

em que U é obtido a partir da inversão de K .

É importante observar um aspecto conceitual que estará sempre presente no Cálculo dos Deslocamentos da Estrutura. A determinação de K , ou o conhecimento da rigidez da estrutura, constitui a Tarefa Fundamental da Análise. Se considerarmos que no caso particular da mola a sua rigidez é expressa pela constante elástica k , essa idéia torna-se clara. Por exemplo, se a constante elástica da mola vale 100 Kgf / mm, o seu significado físico é que deve-se aplicar uma Força de 100 Kgf para obter um deslocamento de 1mm. Ou seja, a rigidez da mola fornece a Força para se obter um Deslocamento Unitário.

Assim, ao conhecer a rigidez da estrutura, a Relação Força x Deslocamento já está previamente definida. Se soubermos o valor de Força para proporcionar um Deslocamento Unitário, saberemos para qualquer valor de Deslocamento, dentro do âmbito linear. Assim, a partir do conhecimento de K , o Deslocamento U decorre imediatamente.

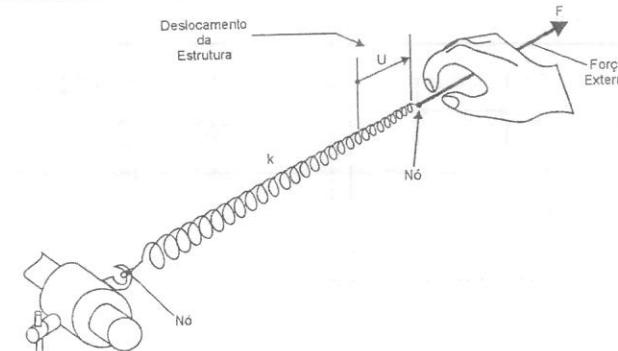


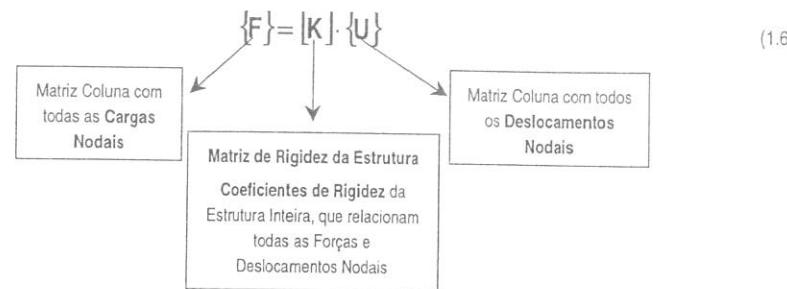
Figura 1.23 – Na mola fixada em uma de suas extremidades, há apenas um componente de deslocamento U a ser determinado.

Ao pensarmos na montagem de um modelo discretizado em Elementos Finitos, o primeiro passo consiste em subdividir a estrutura em uma montagem de elementos, de sorte que a Rigidez do Conjunto possa ser adequadamente contabilizada. Terminada essa tarefa, podemos dizer que o “problema já foi resolvido no âmbito dos deslocamentos unitários” à semelhança do raciocínio da mola. Se a rigidez foi bem representada, o Cálculo dos Deslocamentos, que decorre imediatamente, será representativo do problema físico; caso contrário, não.

A única diferença entre o exemplo isolado da mola e das **estruturas reais**, que são objeto de interesse do analista estrutural na prática, é que o modelo representativo destas últimas é constituído de **muitos elementos**, e como consequência, de **muitos componentes de deslocamentos a se determinar**. A partir destes, são obtidas as deformações nos elementos, e finalmente as Forças Internas ou as Tensões.

Na mola estava presente apenas um componente de deslocamento possível, associado a apenas um componente de rigidez, a rigidez axial da mola.

Nas estruturas reais temos muitos componentes de deslocamento e muitos componentes de rigidez. A relação geral linear entre todas as Forças Externas e todos os Deslocamentos Nodais é melhor expressa em Notação Matricial. Assim:



A montagem da Matriz de Rígidez da Estrutura, que será efetuada a partir do próximo capítulo, deverá considerar o modo pelo qual os elementos são arranjados na estrutura e como são conectados entre si, contabilizando a partir da rigidez de cada elemento a Rigidez do Conjunto. A figura 1.24 mostra de forma esquemática a comparação entre a aplicação da mola e um caso mais geral.

De modo geral, os diversos componentes de deslocamento presentes nas estruturas reais são chamados de **GRAUS DE LIBERDADE** da Estrutura, que são as **Variáveis de Estado do Problema**. Esse conceito será aprofundado adiante ao estudarmos os diversos elementos finitos presentes na Biblioteca de Elementos dos Programas de Análise.

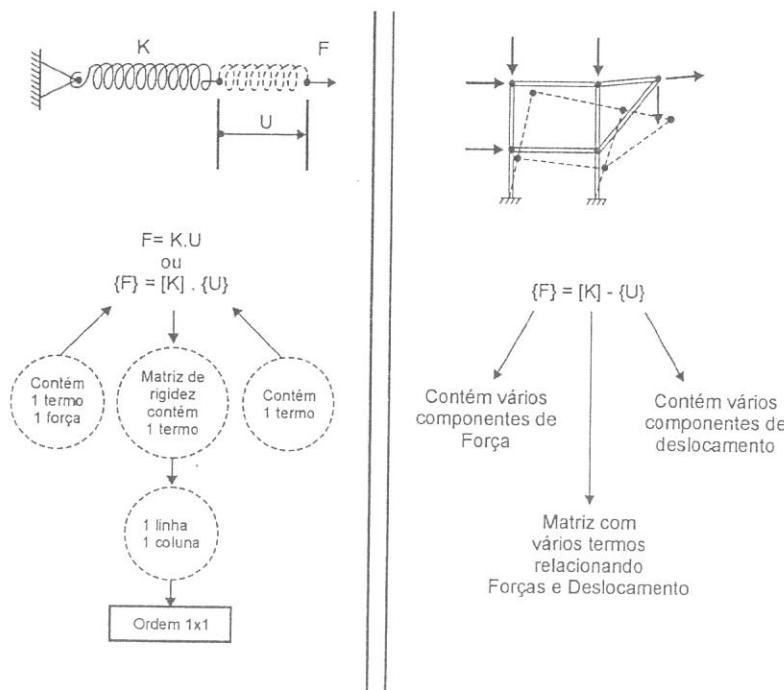
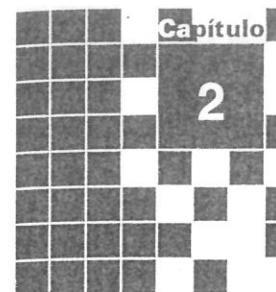


Figura 1.24 – A Matriz de Rígidez da Estrutura representa a relação entre Forças e Deslocamentos Nodais para a Estrutura Inteira. Para a mola, com apenas um deslocamento, a matriz contém um termo. Para uma estrutura real, com vários deslocamentos, a matriz contém vários termos.



Elemento de Mola: Rígidez do Elemento e Rígidez da Estrutura

Iniciando a montagem de uma biblioteca de elementos para modelar os problemas reais por intermédio da discretização. Visualizando os problemas mais complexos por intermédio de exemplos simples.

2.1. O ELEMENTO MAIS SIMPLES: A MOLA

Neste capítulo, iniciaremos o estudo da formulação dos diversos elementos finitos, tirando proveito da Metodologia Padrão anteriormente proposta. Embora essa abordagem seja introduzida utilizando como "pano de fundo" o Elemento de Mola, ela é, como veremos, absolutamente geral. Assim, a partir do exemplo simples da mola, poderemos estabelecer as generalizações cabíveis. A diferença essencial, do ponto de vista do procedimento de montagem, é que o **Elemento de Mola transmite apenas forças axiais** e sofre deslocamentos axiais. Portanto, o número de componentes de deslocamento envolvidos na montagem da Matriz de Rígidez do Elemento é bem menor que em outros Elementos Finitos que transmitem simultaneamente ações axiais, flexões, cisalhamentos, torções, etc. Devemos, então, olhar o procedimento que ora será introduzido, no âmbito mais geral possível. O seu entendimento irá nos permitir propor algumas rotinas que constituirão a base para a implementação computacional do método.

A figura 2.1 representa uma montagem em elementos finitos. Nela identificamos o Elemento de Mola, que constitui parte de uma estrutura grande. Cada um dos nós da mola está conectado a outros elementos da estrutura. O estudo do comportamento físico do Elemento pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, isto é, por intermédio do **Diagrama de Corpo Livre para o Elemento de Mola**. Se a estrutura está em equilíbrio, o Elemento isolado também está, e podemos representá-lo nessa condição indicando as forças que esse elemento troca com o resto da estrutura, isto é, o efeito do resto da estrutura no elemento. Note que este procedimento é válido para todos os elementos representados no modelo. Na mola, identificamos dois componentes de força e dois de deslocamento. Nos outros elementos, esses componentes são em maior número, e são chamados genericamente de **Graus de Liberdade**.

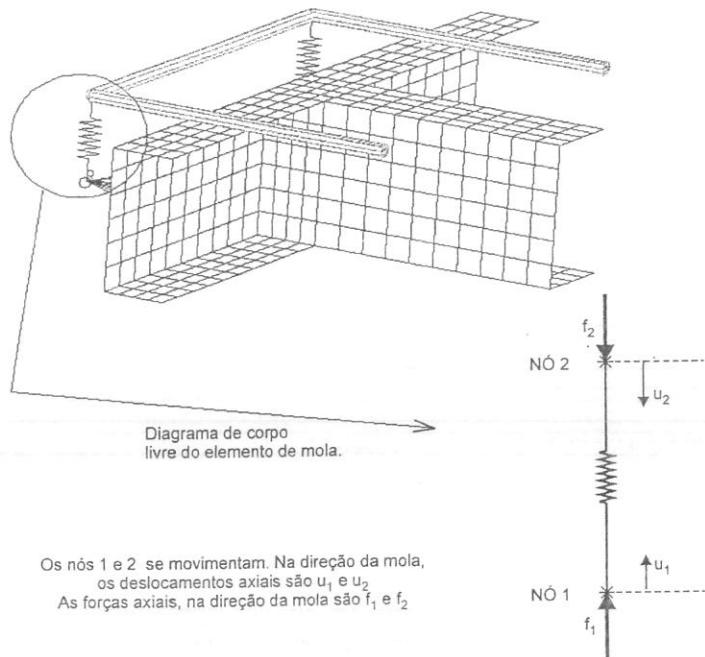


Figura 2.1 – Um trecho do modelo de uma estrutura é representado. Identificamos nele, o Elemento de Mola. Para este elemento, como para qualquer outro do modelo, o equilíbrio pode ser justificado por intermédio do Diagrama de Corpo Livre, indicando as Forças aplicadas pelo resto da estrutura no elemento. Em particular, para o Elemento de Mola, temos dois componentes de força e dois deslocamentos presentes.

Observações

Dois aspectos merecem ser citados ao iniciarmos o estudo do Elemento de Mola, e que serão importantes em caráter geral no estudo do Método dos Elementos Finitos.

- O primeiro refere-se a uma “questão administrativa” da definição do Elemento Finito. A formulação de um elemento para representar uma determinada situação física “não nasceu matricial”. O conjunto de forças e deslocamentos considerados para o elemento na condição de equilíbrio pode ser representado na forma matricial, apenas por interesse de armazenamento no computador, e permitir a operação simultânea de um conjunto de equações com diversos variáveis, algumas das quais independentes entre si. O fato de adotarmos essa linguagem para facilitar a operação computacional obriga-nos a seguir um certo formalismo quanto à execução das operações matemáticas, que vem do estudo de matrizes. Tais operações envolvem principalmente os conceitos de Produto e Inversão de Matrizes. Estes conceitos serão abordados quando necessários em cada caso, mas não devem ser considerados mais importantes que a própria definição do elemento, em termos do comportamento físico que ele se propõe a simular. O Quadro I ilustra o procedimento matemático utilizado na execução do Produto de Matrizes, apenas para relembrarmos esse conceito que será útil nas operações matemáticas referentes aos Elementos.

- O segundo refere-se à importância do Elemento de Mola no estudo geral do Método. A figura 2.2 representa uma viga, sendo que no seu ponto extremo é aplicada uma força que provoca nesse ponto um deslocamento. Para pequenas deflexões a relação força-deslocamento é linear, ou seja, $f = k \cdot u$, sendo k a constante que contabiliza a rigidez da viga na direção da força aplicada, nesse ponto. A figura 2.3 ilustra a mesma situação, porém com as possibilidades de aplicação de todos os tipos de esforços. As forças provocam deslocamentos, e os momentos provocam ângulos. Ou seja, do ponto de vista físico, temos para um ponto da estrutura diversos componentes de rigidez, que são representados como molas translacionais e rotacionais. Dessa forma, o estudo do elemento de mola é muito mais geral e extrapola o âmbito de uma mola isolada em um modelo de elementos finitos.

Ao estudá-lo, estaremos montando a base matemática para contabilizar a rigidez de todos os pontos da estrutura, por intermédio da rigidez atribuída aos pontos nodais. Poderíamos dizer, de forma simplificada, que o modelo discretizado da estrutura é um “imenso mar de molas” que contabiliza ponto a ponto nodal a rigidez da estrutura. A chapa representada na figura 2.3 permite-nos aplicar a mesma idéia, representada a rigidez no ponto de aplicação da força, por intermédio do conceito de mola. Essa idéia será aperfeiçoada matematicamente para os diversos elementos a serem estudados adiante, porém é conveniente desde já estabelecermos os significados físicos envolvidos na definição da maioria dos elementos finitos.

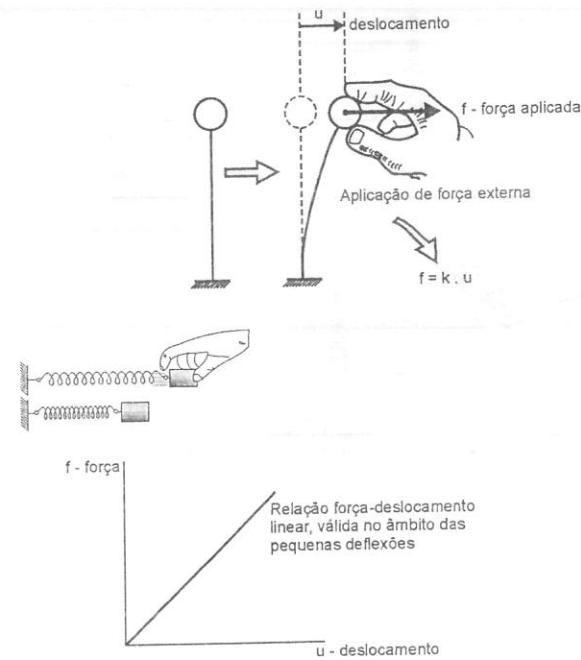


Figura 2.2 – O deslocamento u no ponto de aplicação da força é proporcional à intensidade dela. A constante de proporcionalidade k contabiliza a rigidez nesse ponto da viga, nessa direção. O problema nessa direção é semelhante ao comportamento de uma mola.

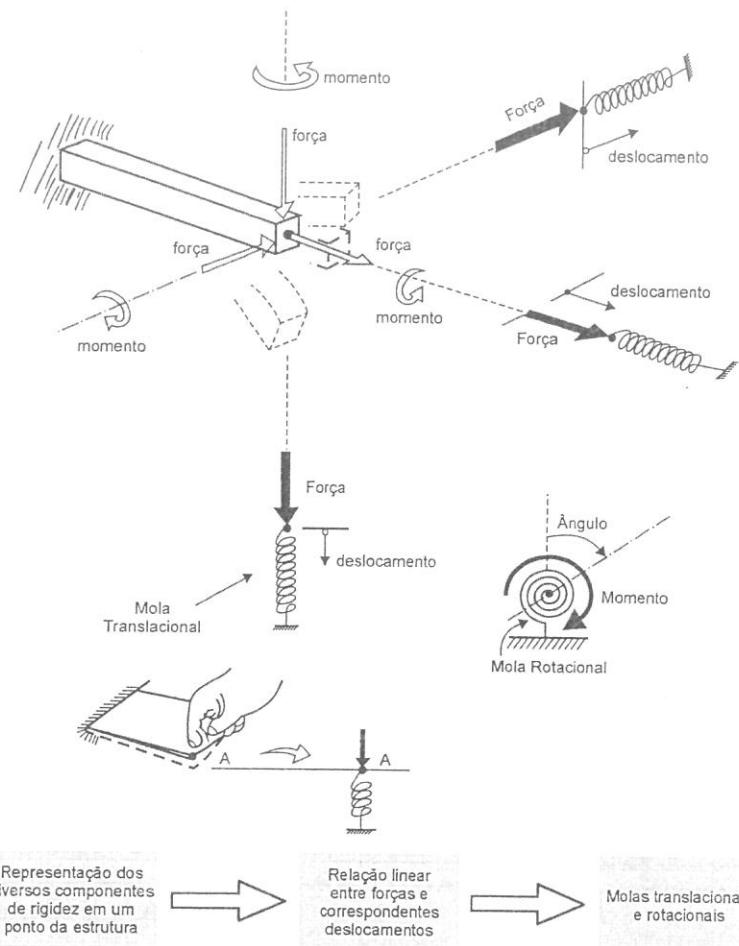


Figura 2.3 – Em um mesmo ponto da estrutura, temos diversos componentes de rigidez. Cada um desses componentes pode ser representado pela relação entre a força e o correspondente componente de deslocamento, tal como em uma mola. Então, a partir da formulação matemática do elemento de mola, estaremos construindo a base para a montagem de todos os outros elementos.

QUADRO I – CONCEITOS DE ÁLGEBRA MATRICIAL USADOS NO MEF

Utilizando a **Álgebra Matricial**, as relações entre um grande conjunto de números podem ser estabelecidas de forma clara e compacta. Por exemplo, **Sistemas de Equações Simultâneas**, com incógnitas especificadas, podem ser resolvidos com procedimentos adequados para computadores digitais.

Definição de Matriz. Chama-se **Matriz do tipo $m \times n$** (chamada m por n) a tabela formada por m linhas e n colunas, isto é, $m \cdot n$ elementos, e sujeita a certas regras de operação.

Representação de uma Matriz. Genericamente representamos uma matriz indicando cada um de seus elementos por uma letra minúscula com dois índices:

- Primeiro índice indica em que linha está o elemento;
- Segundo índice indica em que coluna está o elemento.

Em particular:

- Quando a Matriz possui o mesmo número de linhas e colunas ($m = n$), diz-se que ela é **Matriz Quadrada de Ordem n** .
- Quando a Matriz possui apenas uma coluna, é chamada **Matriz-Coluna**.
- Quando a Matriz possui apenas uma linha, é chamada **Matriz-Linha**.

Dessa forma, a Matriz K do tipo 3×3 pode ser representada por:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{--- 1ª linha} \\ \text{--- 2ª linha} \\ \vdots \end{array}$$

1ª coluna 2ª coluna

em que:

k_{11} é o elemento localizado na 1ª linha e 1ª coluna.

k_{23} é o elemento localizado na 2ª linha e 3ª coluna.

e de modo geral k_{ij} é o elemento localizado na i-ésima linha e j-ésima coluna

De forma compacta, podemos escrever:

$$[K] = [K_{ij}]_{3 \times 3}$$

Multiplicação de Matrizes. Uma das Manipulações com Matrizes mais utilizadas no Método dos Elementos Finitos é a Multiplicação de Matrizes.

- a) **Multiplicação de uma Matriz por uma constante.** Basta multiplicar cada um dos elementos da matriz por este número. Assim, por exemplo:

$$c \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot k_{11} & c \cdot k_{12} \\ c \cdot k_{21} & c \cdot k_{22} \end{bmatrix}$$

QUADRO I – CONCEITOS DE ÁLGEBRA MATRICIAL - CONTINUAÇÃO

- b) **Multiplicação de uma Matriz por outra Matriz.** É possível somente se o número de colunas da primeira Matriz ($m \times r$) for igual ao número de linhas da segunda Matriz ($r \times n$). O resultado será uma Matriz ($m \times n$). A Matriz Produto $[C] = [A][B]$ é obtida da seguinte forma: cada linha da Matriz $[A]$ é multiplicada uma vez e somente uma vez por cada coluna da Matriz $[B]$. O Elemento c_{ij} da Matriz $[C]$ é então o Produto da i -ésima linha de $[A]$ e da j -ésima coluna de $[B]$, somando os produtos dos termos correspondentes, como indica o exemplo abaixo. Nele, a Matriz $[A]$ de ordem (2×3) é multiplicada pela Matriz $[B]$ de ordem (3×2) , dando origem à Matriz $[C]$ de ordem (2×2) .

Um caso particular, porém de muita importância nas aplicações do Método dos Elementos Finitos, é a Multiplicação de uma Matriz Quadrada por uma Matriz Coluna. O exemplo abaixo ilustra este caso.

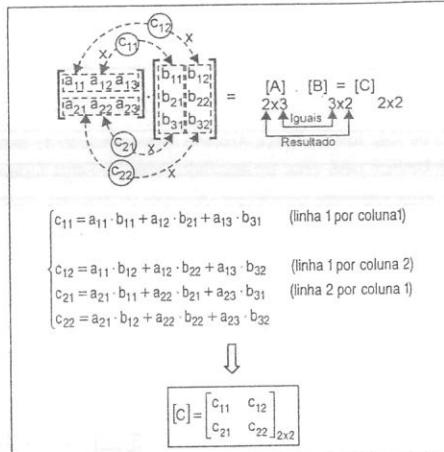
$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

Segundo a regra da Multiplicação de Matrizes e fazendo o produto das linhas pela única coluna, teremos:

$$[K] \cdot \{u\} = \{f\}$$

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot u_2 + k_{13} \cdot u_3 + k_{14} \cdot u_4 &= f_1 \\ k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot u_2 + k_{23} \cdot u_3 + k_{24} \cdot u_4 &= f_2 \\ k_{31} \cdot u_1 + k_{32} \cdot u_2 + k_{33} \cdot u_3 + k_{34} \cdot u_4 &= f_3 \\ k_{41} \cdot u_1 + k_{42} \cdot u_2 + k_{43} \cdot u_3 + k_{44} \cdot u_4 &= f_4 \end{aligned}$$

- c) **Matriz Simétrica.** Uma Matriz quadrada é dita Simétrica se $k_{ij} = k_{ji}$.



É interessante observar que a **Multiplicação da Matriz K pela Matriz Coluna u** corresponde a um **Sistema de Equações Algébricas**, ao lado representado. Inversamente, uma maneira compacta e elegante de **representar o Sistema de Equações é por intermédio da Notação Matricial**, separando a Matriz dos Coeficientes da Matriz Coluna que contém as incógnitas a se determinar.

2.2. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE MOLA

Aplicando a idéia do Diagrama de Corpo Livre, representamos isoladamente um Elemento de Mola na figura 2.4. São mostrados no caso A as forças e os deslocamentos para a Condição de Equilíbrio. As duas Forças e os dois Deslocamentos aplicáveis ao caso da mola foram representados no sentido positivo do eixo de referência, de sorte que, ao montar as equações de equilíbrio, os sinais obtidos para essas forças, respeitando as convenções já discutidas no capítulo 1, indicarão o sentido real da força em qualquer caso, tornando o tratamento o mais geral possível. Assim, teremos, adotando a notação matricial:

- **Forças Nodais:** $\{f\}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ Representação como **Matriz Coluna 2×1**

- **Deslocamentos Nodais:** $\{u\}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ **Matriz Coluna 2×1**

A relação entre todas as forças e deslocamentos referidos a um elemento finito é expressa pela Matriz de Rigidez do Elemento $[k]^e$. Assim:

$$\{f\}_{2 \times 1} = [k]_{2 \times 2}^e \cdot \{u\}_{2 \times 1} \quad (2.1)$$

Levando-se em conta as condições para que seja possível a Multiplicação de duas Matrizes, revisadas no Quadro I, a Matriz de Rigidez do Elemento de Mola deve ter um número de colunas igual ao número de linhas da Matriz $\{u\}$, portanto igual a 2. Como o resultado da Multiplicação tem de ter dimensão 2×1 na representação matricial, pois são as forças nodais, a matriz de rigidez do elemento deve ter também duas linhas. Portanto, a Matriz de Rigidez do Elemento de Mola deve ter dimensão 2×2 . Assim:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad (2.2)$$

A partir das considerações anteriores, levando-se ainda em conta as propriedades da Álgebra Matricial, podemos estabelecer algumas conclusões importantes:

- **Elemento de Mola tem dois componentes de deslocamento possíveis, e como consequência a sua Matriz de Rigidez tem dimensão 2×2 .**
- **Para um Elemento Finito Qualquer com n componentes de deslocamentos possíveis, a sua Matriz de Rigidez terá dimensão $n \times n$.**

Embora as conclusões acima sejam importantes para a representação matricial dos diversos elementos finitos, interessa-nos, no caso particular da mola e nos demais elementos, responder a duas questões fundamentais:

- **Quais são os valores dos coeficientes presentes nas diversas posições da Matriz de Rigidez identificada pela linha i e pela coluna j , isto é, k_{ij} ?**
- **Qual é o significado físico desse coeficiente, isto é, o que o coeficiente k_{ij} da matriz de rigidez representa em termos do comportamento físico que o elemento finito se propõe a simular?**

Estas questões, embora devam ser respondidas no presente estágio para o elemento de mola, são para todos os elementos finitos, e revestem-se de importância fundamental para o entendimento das aplicações mais amplas do método, e permitirão, portanto, generalizações.

Vimos no capítulo 1 que a rigidez da mola, contabilizada pela sua constante elástica k , indica a força necessária para obter um deslocamento unitário. Essa idéia é fundamental na determinação e entendimento dos coeficientes de rigidez da Matriz de Rigidez de qualquer elemento finito. Assim, se pudermos aplicar um deslocamento unitário em um dos nós da mola e "medirmos" as forças associadas a esse deslocamento unitário, poderemos determinar os coeficientes de rigidez da matriz. Para tornar essa tarefa mais simples, poderemos determinar os termos individuais k_{ij} da Matriz de Rigidez do Elemento, considerando cada deslocamento nodal separadamente, mantendo nulo o outro deslocamento, e utilizando a Lei do Material para determinar como a ação imposta a um nó é transferida pelo elemento em seu interior até o outro nó. Vejamos:

A figura 2.4.A representa o Diagrama de Corpo Livre de um Elemento de Mola. No Caso B, a mola é submetida a um deslocamento u_1 , mantendo $u_2 = 0$. No Caso C, a mola é submetida a um deslocamento u_2 , mantendo $u_1 = 0$. Vamos aplicar em cada um dos casos as Leis de Equilíbrio de Forças e de Comportamento do Material. Por intermédio delas responderemos às questões anteriormente levantadas.

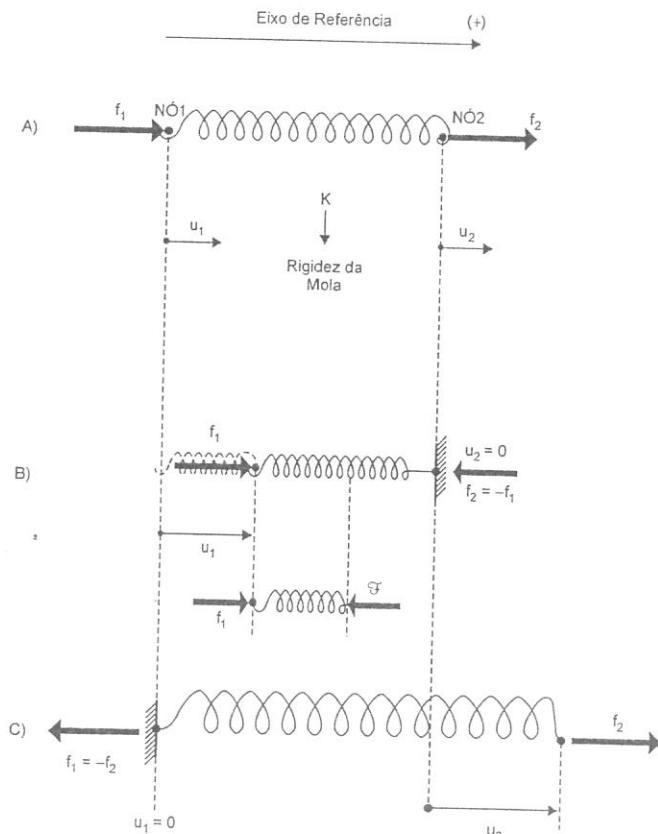


Figura 2.4 – Diagrama de Corpo Livre de um Elemento de Mola. No Caso B, o nó 1 do elemento é submetido a um deslocamento u_1 , mantendo o nó 2 bloqueado. No caso C, temos a situação oposta.

CASO B

Condição de Equilíbrio: $f_2 = -f_1$ (as forças nodais agem em sentidos opostos!)

Força Interna: Da equação (1.2) temos que $\mathcal{F} = \text{Força Interna} = k \cdot d$, em que d representa a **deformação da mola**. Pensando nos casos mais gerais, vamos definir a deformação da mola, considerando os deslocamentos u_1 e u_2 . Isto se faz necessário, pois nos casos em que ambos os nós do elemento possam se movimentar, a mola só estará sujeita à deformação se os deslocamentos forem diferentes. Por exemplo, se $u_1 = u_2$, algebricamente, embora a mola se movimente, ela não se deforma. Assim:

$$d = u_2 - u_1 \quad (2.3)$$

Sendo no Caso B, $u_2 = 0$, teremos $d = -u_1$.

Assim: $\mathcal{F} = \text{Força Interna} = k \cdot d = -k \cdot u_1$. Como u_1 é positivo, pois tem a mesma orientação do eixo de referência, a **FORÇA INTERNA É NEGATIVA**, o que corresponde à situação de **COMPRESSÃO NA MOLA** ($\mathcal{F} < 0$).

Do ponto de vista físico, a Força Aplicada na extremidade do elemento (nó 1) é transferida internamente à mola. Um trecho de elemento também deve estar em equilíbrio. Assim, a Força f_1 deve ser equilibrada pela força interna \mathcal{F} , porém seus sinais são opostos, pelas diferentes convenções de sinais já definidas anteriormente para Forças Interna e Externa. Matematicamente, a passagem da Força Externa para a Força Interna deve respeitar essas convenções. Assim:

$f_1 = -\mathcal{F}$ e como $\mathcal{F} = -k \cdot u_1$ teremos:

$$f_1 = k \cdot u_1 \quad \text{e como } f_2 = -f_1 \text{ resultará:}$$

$$f_2 = -k \cdot u_1$$

$$\begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} u_1 \\ u_2 = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

efetuando o produto de acordo com os procedimentos do Quadro I, e substituindo f_1 e f_2 :

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot 0 \\ f_2 &= k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} k \cdot u_1 &= k_{11} \cdot u_1 \\ -k \cdot u_1 &= k_{21} \cdot u_1 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} k_{11} &= k \\ k_{21} &= -k \end{aligned} \quad (2.5)$$

Portanto, dois dos coeficientes da Matriz de Rigidez do Elemento de Mola já estão determinados. Utilizando o mesmo procedimento, vamos determinar os outros dois coeficientes e em seguida discutir o seu significado físico.

CASO C

Condição de Equilíbrio: $f_1 = -f_2$ (as forças nodais agem em sentidos opostos!).

Força Interna: Neste caso temos $u_1 = 0$. Assim, $d = u_2 - u_1 = u_2$ e $\mathcal{F} = \text{Força Interna} = k \cdot d = k \cdot u_2$. Assim:

Assim: $\mathcal{F} = \text{Força Interna} = k \cdot d = k \cdot u_2$. Como u_2 é positivo, pois tem a mesma orientação do eixo de referência, a **FORÇA INTERNA É POSITIVA**, o que corresponde à situação de **TRAÇÃO NA MOLA** ($\mathcal{F} > 0$).

Do ponto de vista físico, a Força Aplicada na extremidade do elemento (nó 2) é transferida internamente à mola. Um trecho de elemento também deve estar em equilíbrio. Assim a Força f_2 deve ser equilibrada pela força interna \mathcal{F} , e neste caso seus sinais são iguais, pelas convenções de sinais já definidas anteriormente para Forças Interna e Externa. Matematicamente, a passagem da Força Externa para a Força Interna deve respeitar essas convenções. Assim:

$f_2 = \mathbf{f}$ e como $\mathbf{f} = k \cdot u_2$, teremos:

$f_1 = -k \cdot u_2$ e como $f_1 = -f_2$, resultará:

$$f_2 = k \cdot u_2$$

$$\begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

efetuando o produto de acordo com os procedimentos do Quadro I, e substituindo f_1 e f_2 :

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{11} \cdot 0 + k_{12} \cdot u_2 & \rightarrow & -k \cdot u_2 = k_{12} \cdot u_2 & \rightarrow & k_{12} = -k \\ f_2 &= k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot u_2 & & k \cdot u_2 = k_{22} \cdot u_2 & & k_{22} = k \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim, a relação entre as Forças Nodais e os Deslocamentos Nodais para o Elemento de Mola está determinada e é expressa por intermédio da Matriz de Rígidez do Elemento.

$$\text{Matriz de Rígidez do Elemento de Mola} \rightarrow [k]^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.3. SIGNIFICADO FÍSICO DOS TERMOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO-GENERALIZANDO

Tão importante quanto termos determinado a matriz de rigidez do elemento de mola, que está disponível para nós na Biblioteca de Elementos do Programa de Elementos Finitos, é interpretarmos o *significado físico dos termos que estão contidos nessa matriz*. A partir desse entendimento, poderemos generalizar o significado da matriz de rigidez de qualquer elemento finito. Retomando as equações (2.5), temos:

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot 0 & \rightarrow & f_1 = k_{11} \cdot u_1 \\ f_2 &= k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot 0 & & f_2 = k_{21} \cdot u_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Fazendo $u_1 = 1$, isto é, considerando um *Deslocamento Unitário Imposto*, teremos:

$$f_1 = k_{11} \quad \text{e} \quad f_2 = k_{21}$$

Note que os coeficientes k da matriz de rigidez do elemento finito representam forças, associadas a um deslocamento unitário imposto em um nó, mantendo o outro nó fixado, ou seja, bloqueado (deslocamento nulo).

Assim:

k_{21} - É a Força no nó 2, devido ao *deslocamento unitário no nó 1* ($u_1 = 1$), mantendo o deslocamento $u_2 = 0$ (Bloqueado).

k_{11} - É a Força no nó 1, devido ao *deslocamento unitário no nó 1* ($u_1 = 1$), mantendo o deslocamento $u_2 = 0$ (Bloqueado).

Analogamente, a partir das equações (2.7), utilizando o procedimento anterior:

k_{12} - É a Força no nó 1, devido ao *deslocamento unitário no nó 2* ($u_2 = 1$), mantendo o deslocamento $u_1 = 0$ (Bloqueado).

k_{22} - É a Força no nó 2, devido ao *deslocamento unitário no nó 2* ($u_2 = 1$), mantendo o deslocamento $u_1 = 0$ (Bloqueado).

Assim, os termos da matriz de rigidez do elemento finito representam *relações de Causa e Efeito*. A Causa é um Deslocamento Unitário Imposto em um nó, e os Efeitos são as Forças que surgem nos nós do Elemento devido a esse deslocamento. A Notação Matemática de representação dos índices dos termos da Matriz, além de significar uma linha e coluna da matriz, representa também a *Localização da Causa e do Efeito*. Exemplificando, temos:



2.4. GENERALIZAÇÃO A PARTIR DA MOLA DO SIGNIFICADO FÍSICO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE QUALQUER ELEMENTO FINITO

Como os termos da Matriz de Rígidez do Elemento representam Forças associadas a deslocamentos unitários, ao conhecer a Matriz de Rígidez do Elemento, a Relação Força x Deslocamento já está previamente definida para o elemento inteiro, em termos de deslocamentos unitários. Se soubermos o valor de Força associada a um Deslocamento Unitário, saberemos para qualquer valor de Deslocamento, dentro do âmbito linear. Além disso, se os deslocamentos atuarem simultaneamente, os efeitos de cada um dos deslocamentos aplicados isoladamente serão superpostos, e teremos a *força atuante em cada nó, decorrente da ação conjunta de todos os deslocamentos* no elemento.

Essa idéia, estabelecida a partir do elemento de mola, pode ser generalizada para os diversos elementos finitos.

Vale ressaltar que o elemento de mola é definido por dois nós, neste caso o *nó 1* e o *nó 2*.

Em particular, esse elemento apresenta apenas *Um Componente de Deslocamento por Nó*. Nos elementos mais gerais essa relação pode ser mais ampla. Por exemplo, *uma viga no espaço* admite em um mesmo nó, seis componentes de deslocamentos nodais, *três translações e três rotações*. O conceito de deslocamento nodal nesse caso é mais amplo. É mais adequado identificar os diversos componentes de deslocamento associados ao nó, como o componente de *deslocamento na direção x, na direção y, na direção z*, etc. Esses componentes são chamados de *Graus de Liberdade do Elemento*. A figura 2.5 representa um Elemento de viga no espaço e os possíveis *Graus de Liberdade*. O conceito de coeficiente de rigidez continua o mesmo, porém relacionando agora as Forças nos diversos graus de liberdade. Assim, generalizando, temos:

O Coeficiente k_{ij} da Matriz de Rígidez de um Elemento Finito representa a *Força no Grau de Liberdade i devido ao Deslocamento Unitário imposto ao Grau de liberdade j*, mantendo os outros graus de liberdade bloqueados.

Na figura 2.5, é representado para o Elemento de Viga o *significado de $k_{3,3}$ e $k_{9,9}$* : O termo localizado na *linha 3 e coluna 9* da Matriz de Rígidez do Elemento de Viga representa a *Força no Grau de Liberdade 3*, devido ao *Deslocamento Unitário no Grau de Liberdade 9*. Note que o único que se movimenta é o Grau de Liberdade 9, e os outros mantêm-se bloqueados. Essas relações são conhecidas a partir da Resistência dos Materiais Elementar, tornando até certo ponto "simples" a determinação da Matriz de Rígidez do Elemento. Assim, a Força no Grau de liberdade 3, devido ao efeito simultâneo de todos os deslocamentos, seria obtida levando-se em conta o efeito de cada componente de deslocamento na Força obtida na direção 3. Como cada coeficiente de rigidez contabiliza a força devido ao deslocamento unitário, devemos multiplicar cada coeficiente k pelo deslocamento real, e somando todos os termos, teremos a força em 3 devido a todos os deslocamentos atuando simultaneamente. Matematicamente teremos:

$$f_3 = k_{3,1} \cdot \delta_1 + k_{3,2} \cdot \delta_2 + k_{3,3} \cdot \delta_3 + k_{3,4} \cdot \delta_4 + k_{3,5} \cdot \delta_5 + k_{3,6} \cdot \delta_6 + \dots + k_{3,11} \cdot \delta_{11} + k_{3,12} \cdot \delta_{12}$$

Os valores de k representam as **Forças que surgem no Grau de Liberdade 3** devido aos **deslocamentos unitários** $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \text{ etc.}$. Multiplicando os coeficientes pelos correspondentes δ e somando os termos, teremos o valor da **Força em 3**, devido aos efeitos simultâneos dos deslocamentos.



Assim, a **Força em 3** é obtida por intermédio de **UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA**. Repetindo o mesmo procedimento, teremos a **Força nos outros Graus de Liberdade**. Ou seja, o processo de discretização gera **UM SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS**, como vimos no capítulo 1.

Nos elementos unidimensionais, tais como a Mola, as Barras de Treliça e as Vigas, esse conceito é exato, e permitem a aplicação do **Método Direto** para a determinação da sua Matriz de Rígidez, que consiste, a partir da Resistência dos Materiais Elementar, estabelecer relações diretas entre as Forças Nodais aplicadas no Elemento e os correspondentes Deslocamentos Nodais. Dessa forma, é possível estabelecer o **significado físico** de um termo k_{ij} da Matriz de Rígidez de um Elemento Finito. O fato de conseguirmos definir de modo "simples" a rigidez dos elementos finitos unidimensionais decorre de duas condições:

- Primeiro, a lei de deformação interna do elemento é simples (como o caso da Mola). O entendimento de como a Força aplicada em um nó é transmitida internamente pelo elemento até ser equilibrada no outro nó, é imediato. A rigidez do elemento, que em última análise representa como o elemento se deforma sob a ação de um dado conjunto de forças nele aplicado, decorre imediatamente.
- Segundo, os elementos unidimensionais só são conectados nos elementos adjacentes nos pontos nodais. Não ocorrem interações entre elementos vizinhos fora desses pontos.

Em se tratando de elementos bi e tridimensionais, utilizados para representar o comportamento de chapas e corpos sólidos, a questão merece cuidados especiais. A determinação da Matriz de Rígidez do Elemento torna-se impraticável pelo Método Direto. Poderíamos dizer que se aplicássemos um deslocamento unitário em um grau de liberdade, para em seguida tentar contabilizar as Forças nos demais graus de liberdade do elemento, "não teríamos futuro em nossa empreitada". Essa dificuldade decorre das seguintes situações:

- A Resistência dos Materiais Elementar não quantifica essas relações diretas entre as forças nodais atuantes no elemento e os correspondentes deslocamentos nodais, como ilustrados para a chapa da figura 2.5.
- Independentemente da dificuldade anterior, o tratamento isolado do equilíbrio de um elemento pelo método direto deveria considerar que na estrutura real o elemento troca ações também no contorno. Essas situações que ocorrem nas interfaces dos elementos podem ser inúmeras, dependendo dos elementos vizinhos, tornando maiores ainda as dificuldades antes levantadas.

É certo que na formulação do problema matricial, a Matriz de Rígidez do Elemento representa a relação entre todas as forças nodais e os deslocamentos nodais. A chapa da figura 2.5 apresenta oito componentes de forças nodais e oito componentes de deslocamentos nodais. Nesse caso, como já sabemos, a Matriz de Rígidez terá dimensão 8x8. As equações algébricas representativas do equilíbrio do elemento têm formato semelhante àquelas dos elementos unidimensionais. As Forças Nodais

representadas na configuração de equilíbrio devem ser interpretadas como as Forças que aplicadas aos nós estão em equilíbrio com todas as forças internas, inclusive às ações do contorno, e são, portanto, estaticamente equivalentes às forças internas.

Da própria montagem e manipulação do sistema de equações pode-se identificar que um termo k_{ij} da matriz pode ser interpretado também como uma força associada a um deslocamento unitário, mas que de alguma forma deveria contabilizar a situação do contorno com o elemento adjacente. Esse conceito será aperfeiçoado nos capítulos seguintes.

Embora seja útil neste caso também pensar nos termos da Matriz de Rígidez do Elemento Finito do ponto de vista físico, o modo utilizado para a determinação dos coeficientes de rigidez será diferente daquele aplicado aos elementos unidimensionais: Aplicar um deslocamento unitário e contabilizar forças atuantes nos nós não será utilizado pelos motivos anteriormente mencionados. Os conceitos de Rígidez do Elemento e Rígidez da Estrutura continuam presentes; a questão está em como determiná-los. Nos elementos unidimensionais essa determinação é feita de forma exata; para os elementos bi e tridimensionais, ela será feita de forma aproximada.

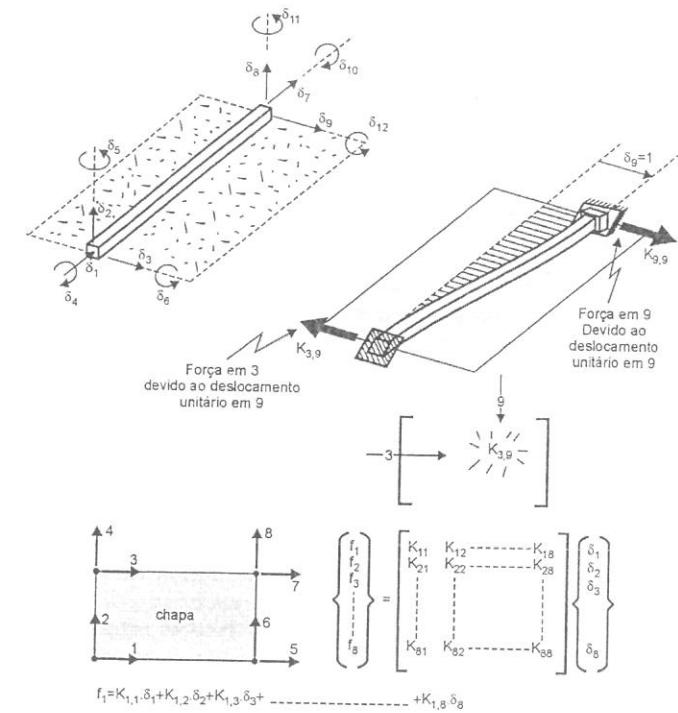


Figura 2.5 – Significado de um termo k_{ij} da Matriz de Rígidez de um elemento: $k_{3,9}$ na viga, é a força no grau de liberdade 3, devido ao deslocamento unitário no grau de liberdade 9, mantendo-se os outros deslocamentos iguais a zero.

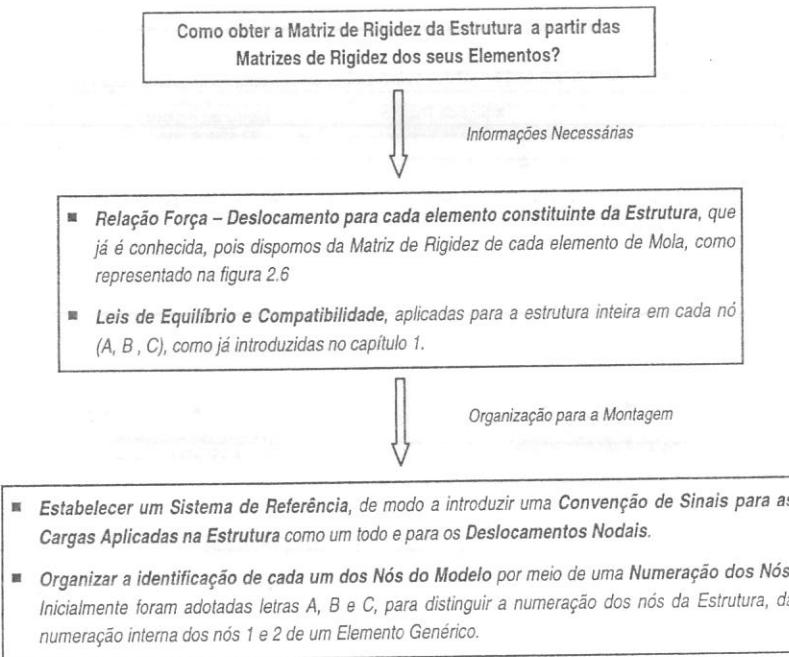
2.5. Matriz de Rígidez de uma Estrutura - Utilização da Mola para Estabelecer a Montagem da Matriz de Rígidez de uma Estrutura a partir das Matrizes de Rígidez de seus Elementos

Vimos no capítulo 1, que o conceito de Mola Equivalente – ou Rígidez Equivalente – a um dado conjunto de molas, permite determinar a configuração deformada do conjunto sob a ação de uma Força Externa. De modo semelhante, a **Rígidez da Estrutura**

Inteira depende da Rigidez de cada um de seus elementos. Veremos agora como determiná-la e, como consequência, obter a configuração deformada da estrutura como um todo.

O tratamento matemático mais formal e de aplicação geral será estudado a partir de um exemplo simples, tomando como base as *Leis Fundamentais* apresentadas no capítulo 1, e poderemos montar a *Matriz de Rigidez da Estrutura a partir da Matriz de Rigidez de cada um de seus elementos*, contabilizando em última análise a Rigidez da Estrutura Inteira.

A figura 2.6 representa uma estrutura constituída por dois elementos de mola. Sob ação das forças nodais representadas nos nós A, B e C, o conjunto inteiro será deformado. Veremos que o fato de a estrutura ser constituída por muitos elementos ou por dois elementos apenas como o presente exemplo considera, não altera o conceito físico de "rigidez equivalente", mas apenas envolve um trabalho maior de manipulação das equações. Portanto, o exemplo agora mostrado é suficiente para introdução do conceito que nos interessa. Em seguida faremos as generalizações cabíveis. Assim, esquematicamente:



Exemplificando, temos:

- Elemento de Mola (a) Localiza-se entre os nós A e B da Estrutura. No âmbito isolado do Elemento, podemos relacionar os nós 1 e 2 associados a uma numeração interna do elemento. É interessante observar que essa numeração interna tem um motivo de existir. Quando formulamos o Elemento de Mola isoladamente e, como consequência, contabilizamos a sua rigidez, não sabíamos em uma aplicação geral onde esse elemento seria introduzido em uma montagem de elementos de uma Estrutura qualquer. É claro que essas numerações estão relacionadas entre si, mas ao formular um elemento de uma Estrutura qualquer, é claro que essas numerações estão relacionadas entre si, mas ao formular um elemento de uma Estrutura qualquer.
- No exemplo da figura 2.6, em função das Cargas Aplicadas, teremos $F_A > 0$, $F_B > 0$ e $F_C > 0$, pois estas são concordantes com o sentido positivo adotado para as Forças Nodais Aplicadas nos Nós da Estrutura.

Aplicaremos então as Leis Fundamentais:

LEI DE EQUILÍBRIO DE FORÇAS

A estrutura está em equilíbrio. Cada nó deve estar também em equilíbrio. Assim, pensando no Nó como uma entidade isolada, podemos aplicar o Diagrama de corpo Livre a ele. Assim, a *Força externa aplicada ao Nô e as Forças Aplicadas pelos Elementos nos nós devem se equilibrar*. As equações abaixo representam matematicamente tais condições:

$$\begin{aligned} \bullet A: F_A &= f_{a1} \\ \bullet B: F_B &= f_{a2} + f_{b1} \\ \bullet C: F_C &= f_{b2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Note que se tivéssemos uma estrutura constituída por milhares de nós, o conceito seria o mesmo. Deveríamos isolar cada nó, e aplicar a condição de equilíbrio de forma semelhante. Se o elemento transmite mais que um componente de Força por nó, tal como a viga da figura 2.5, o número de equações seria muito maior, porém o raciocínio não seria alterado. O trabalho de manipulação das equações de equilíbrio consideraria os componentes de forças nas diversas direções, associadas aos componentes de força que o elemento admite. Neste caso da mola, só há a ação de forças axiais, pois a mola apenas representa esse tipo de comportamento físico.

RELAÇÃO FORÇA – DESLOCAMENTO PARA UM ELEMENTO

As relações Força – Deslocamento para um Elemento de Mola expressas pela equação (2.2), e aplicadas à estrutura constituída pelos elementos (a) e (b), são mostradas na figura 2.6. Considerando as equações de equilíbrio 2.10 e substituindo os valores de f_{a1} , f_{a2} , f_{b1} e f_{b2} , teremos:

$$\begin{aligned} F_A = f_{a1} &\longrightarrow F_A = k_a \cdot u_{a1} - k_a \cdot u_{a2} \\ F_B = f_{a2} + f_{b1} &\longrightarrow F_B = -k_a \cdot u_{a1} + k_a \cdot u_{a2} + k_b \cdot u_{b1} - k_b \cdot u_{b2} \\ F_C = f_{b2} &\longrightarrow F_C = -k_b \cdot u_{b1} - k_b \cdot u_{b2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS PARA OS ELEMENTOS

Os elementos constituintes da estrutura mantêm-se conectados na condição deformada. As extremidades dos elementos conectados em um mesmo nó estão sujeitas aos mesmos componentes de deslocamento. Considerando a figura 2.6, podemos relacionar os Deslocamentos Nodais, medidos em relação ao sistema de referência da estrutura, isto é, U_A , U_B e U_C , aos deslocamentos dos mesmos nós contabilizados em relação ao sistema de referência interno em que o elemento foi originalmente formulado, isto é, na "linguagem" dos Nós 1 e 2 do elemento, como já discutido anteriormente. Dessa forma, como a estrutura não está "aberta" nesses nós, podemos escrever:

$$u_{a1} = U_A ; u_{a2} = u_{b1} = U_B ; u_{b2} = U_C$$

e substituindo essas relações nas equações (2.11) anteriores e organizando os termos, teremos:

Equações relacionando as Forças Nodais nos nós da Estrutura A, B e C e os correspondentes Deslocamentos Nodais, para a Estrutura Inteira.	\longrightarrow $\begin{aligned} F_A &= k_a \cdot U_A - k_a \cdot U_B + 0 \cdot U_C \\ F_B &= -k_a \cdot U_A + (k_a + k_b) \cdot U_B - k_b \cdot U_C \\ F_C &= 0 \cdot U_A - k_b \cdot U_B + k_b \cdot U_C \end{aligned} \quad (2.12)$
---	--

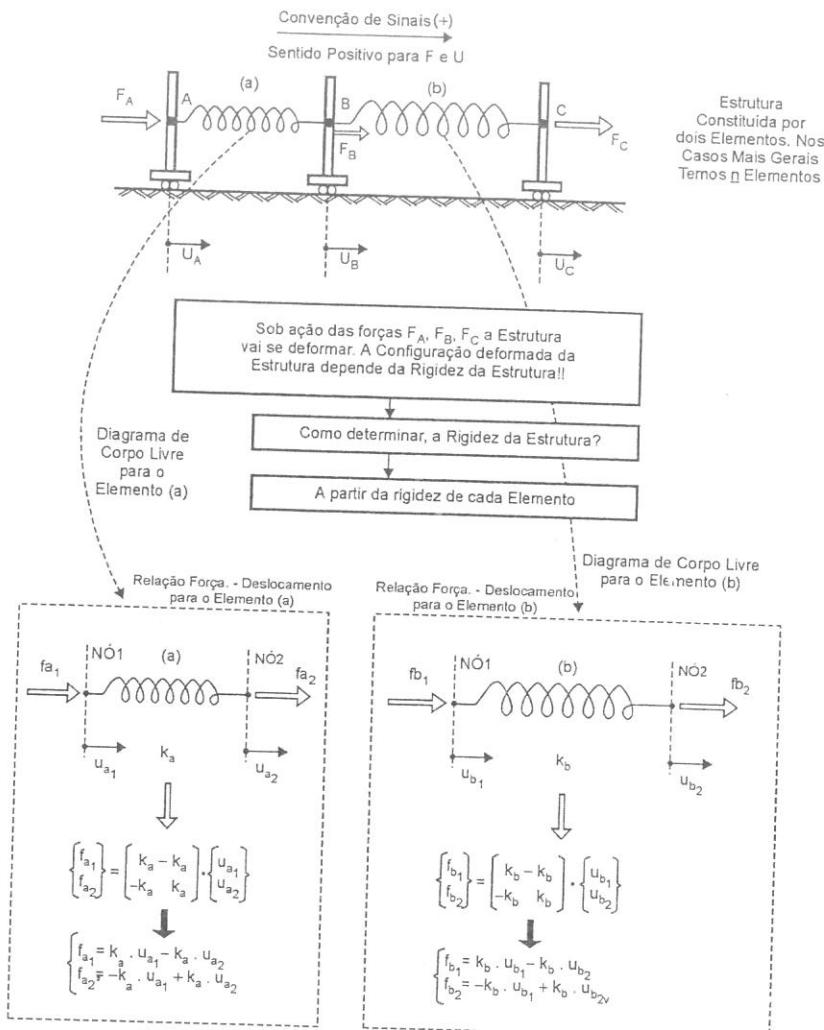


Figura 2.6 – A partir do conhecimento da Matriz de Rígidez de cada elemento, que expõe a relação entre forças e deslocamentos nodais no âmbito do elemento, pode-se determinar a Matriz de Rígidez da Estrutura, que expõe a relação entre Forças e Deslocamentos Nodais para toda a estrutura. No exemplo ilustrado, somente são possíveis movimentos de translação do conjunto.

Já vimos que a relação **FORÇA x DESLOCAMENTO** no âmbito da **Estrutura Inteira** pode ser expressa na Notação Matricial pela **MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA**.

Mais uma vez estamos diante de uma "questão administrativa" do Método. As relações anteriormente deduzidas não nasceram matriciais. Por uma questão de conveniência, é cômodo para propósitos computacionais representar as equações anteriores na **Notação Matricial**. De acordo com os procedimentos da álgebra matricial revisados no Quadro I deste capítulo, podemos escrever as equações (2.12) na forma de um produto de matrizes:

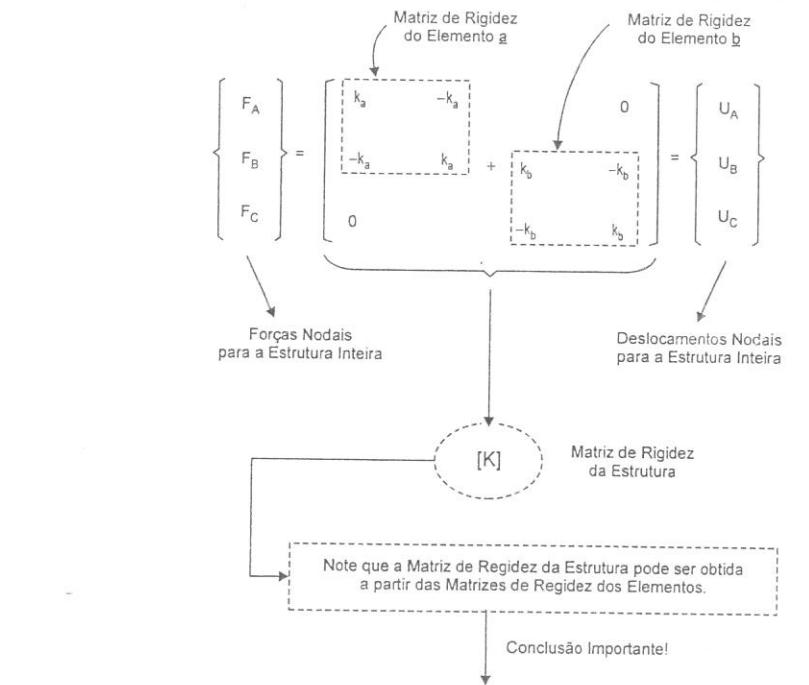
$$\begin{cases} F_A \\ F_B \\ F_C \end{cases} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} U_A \\ U_B \\ U_C \end{cases} \quad (2.13)$$

ou representando de forma compacta, termos:

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\} \quad (2.14)$$

em que **{F}** é a **Matriz Coluna que contém as Forças Nodais** aplicadas no Modelo da Estrutura, **[K]** é a **Matriz de Rígidez da Estrutura** e **{U}** é a **Matriz Coluna que contém os Deslocamentos Nodais** a serem determinados.

A equação matricial 2.13 exprime a **RELAÇÃO LINEAR ENTRE TODAS AS FORÇAS E DESLOCAMENTOS NODAIS PARA A ESTRUTURA INTEIRA**. Dessa forma, a Matriz Coeficiente, como definido, é a própria **MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA**. É interessante observar quais são os termos que estão contidos nessa matriz, como mostra o esquema seguinte:



A Montagem da Matriz de Rígidez da Estrutura decorreu da Aplicação das Leis de Equilíbrio e Compatibilidade. Estamos concluindo em termos práticos que a aplicação dessas leis equivale a um **PROCEDIMENTO DE MONTAGEM**, de sorte que os termos das Matrizes de Rígidez dos Elementos $[k]^a$ e $[k]^b$ são montados para gerar a Matriz de Rígidez da Estrutura $[K]$. Assim, não será necessário aplicar as leis de Equilíbrio e Compatibilidade sempre que quisermos montar a Matriz de Rígidez da Estrutura. Se pudermos especificar o procedimento de montagem de forma prática, por exemplo, definindo uma regra para essa montagem, este procedimento poderá ser reproduzido em todos os casos. Para propósitos computacionais é extremamente conveniente essa conclusão, pois a obtenção da Matriz de Rígidez da Estrutura no computador não necessitará de nenhum "raciocínio" por parte da "máquina". No esquema acima, podemos notar que na **Montagem da Matriz de Rígidez da Estrutura** ocorre um processo de "Superposição das Matrizes" de Rígidez dos Elementos. O modo como essas matrizes são superpostas dependerá de como os elementos são arranjados na estrutura, e isto será feito por intermédio da localização deles de modo organizado, como veremos em seguida.

Vimos que o elemento de mola é definido por dois nós, e no âmbito isolado do Elemento, associamos uma numeração interna a ele, que são os Nós 1 e 2. A Notação Matemática de representação dos índices dos termos da Matriz de Rígidez, além de significar uma linha e coluna dela, representa também uma Localização, ou seja, a Mola Trabalha entre os Nós 1 e 2. Podemos definir essa Localização em relação ao Sistema de Referência da Estrutura, definindo a posição do elemento não mais em relação aos nós 1 e 2, mas em relação aos Nós A, B e C. Assim, o elemento (a) localiza-se entre os Nós A e B, e o elemento (b) localiza-se entre os Nós B e C. A Montagem completa de Elementos Finitos trabalha entre os Nós A, B e C, isto é, todos os Nós do Modelo Estrutural.

A figura 2.7 representa um *procedimento prático*, sendo que a partir da *definição do posicionamento de cada elemento* na Montagem completa de Elementos do Modelo, pode-se obter a Matriz de Rígidez da Estrutura. Ele deve ser entendido como uma *Regra de Montagem*, mas que foi concebida a partir da Aplicação das Leis de Equilíbrio e Compatibilidade. Estamos apenas estabelecendo um "Algoritmo" que torna a Aplicação das Leis um procedimento repetitivo. Essa Regra de Montagem envolve basicamente as seguintes tarefas:

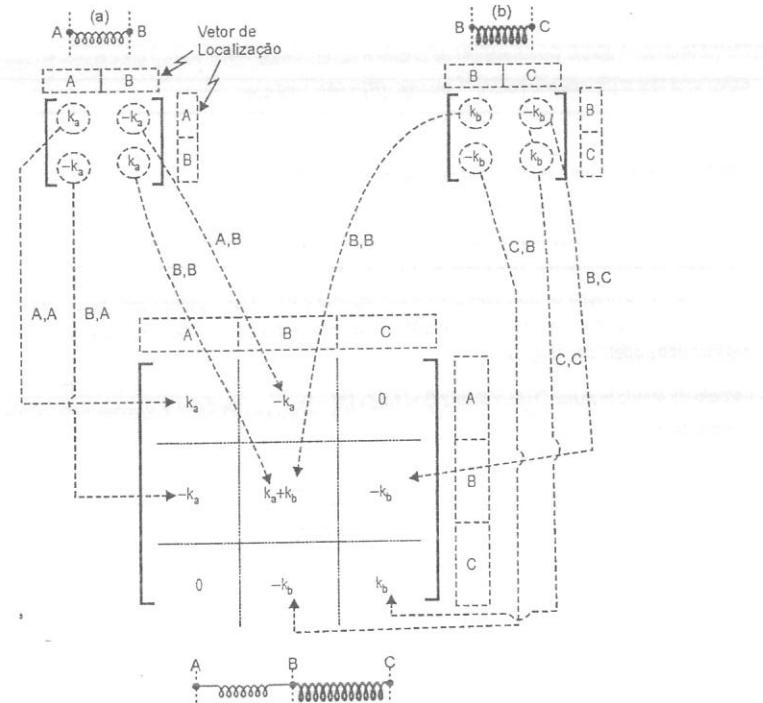


Figura 2.7. Procedimento para Montagem da Matriz de Rígidez da Estrutura.

- Representação da Matriz de Rígidez de cada elemento do modelo, identificando por intermédio de um VETOR DE LOCALIZAÇÃO DO ELEMENTO, a posição de cada elemento na Montagem, isto é, entre que Nós o elemento considerado trabalha. Essa ideia será generalizada adiante para os elementos como vigas, placas, sólidos, etc. Apenas que nas aplicações mais gerais, teremos que identificar "entre que graus de liberdade o elemento considerado trabalha".
- Representação da Matriz de Rígidez da Estrutura, identificando também por intermédio de um VETOR DE LOCALIZAÇÃO DA ESTRUTURA, os Nós com os quais a estrutura trabalha, ou seja, todos os nós do modelo. Nos casos mais gerais mencionaremos também os Graus de liberdade da Estrutura.

- Os termos I, J da Matriz de Rígidez de Cada Elemento são adicionados aos correspondentes locais I, J da Matriz de Rígidez da Estrutura, pois ambos são referidos ao mesmo sistema de Referência. Por esse Procedimento de Montagem, geramos a Matriz de Rígidez da estrutura, anteriormente determinada analiticamente.

COMENTÁRIOS EM RELAÇÃO ÀS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS E DA ESTRUTURA

Tendo montado a Matriz de Rígidez da Estrutura, e de posse da Matriz Coluna das Cargas Aplicadas, poderemos determinar os Deslocamentos de todos os Nós do Modelo. A rigor, à semelhança do problema da determinação de um simples deslocamento por intermédio da Equação $F = K \cdot U$, deveremos determinar o deslocamento U por intermédio da "divisão" de F por K . Em se tratando de matrizes, essas operações que efetuamos normalmente com números requerem algumas formalidades, e estão associadas às operações de *Inversão de Matrizes*. As operações que constituem interesse para este estudo são revisadas no Quadro II.

É interessante estabelecer algumas analogias que nos serão úteis nas operações com as Matrizes envolvidas no Cálculo dos Deslocamentos Nodais. Sabemos da Matemática Elementar que a divisão de F por K só é possível se K for diferente de zero. Este é um caso importante ao tratar-se de operações com Matrizes, e apresenta Significado Físico quanto ao comportamento do modelo da estrutura, que veremos no item seguinte.

QUADRO II – UM POUCO MAIS SOBRE ÁLGEBRA MATRICIAL

Sistemas de Equações Algébricas, como, por exemplo, aqueles que relacionam Forças, Deslocamentos e Coeficientes de Rígidez, podem ser representados e resolvidos de forma compacta e elegante com auxílio da *Notação Matricial*. Na equação $\{F\} = [K] \cdot \{U\}$, a determinação dos Deslocamentos contidos em $\{U\}$ é efetuada por intermédio do conceito de *Inversão de Matrizes*, que envolve alguns outros conceitos da Álgebra Matricial, tais como: *Determinante de uma Matriz, Cofator ou Complemento Algébrico, Matriz Transposta e Matriz Identidade*.

- a) **Determinante de uma Matriz Quadrada.** Dada uma *Matriz Quadrada* $[K] = [k_{ij}]$ de ordem $n \geq 1$, podemos associar à Matriz $[K]$ um único número denominado Determinante de $[K]$, indicado por:

$$\det K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

Os procedimentos para efetuar o Cálculo dos Determinantes, que também são representados por $|K|$, são governados por certas regras. Somente os determinantes de ordem 2 ou 3 são possíveis de calcular de modo simples. Por exemplo, para as Matrizes de ordem 2x2 e 3x3 abaixo representadas, é mostrado a título de ilustração o Cálculo de seus determinantes.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det K = k_{11} \cdot k_{22} - k_{21} \cdot k_{12}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det K = (k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} + k_{12} \cdot k_{23} \cdot k_{31} + k_{13} \cdot k_{21} \cdot k_{32}) - (k_{11} \cdot k_{23} \cdot k_{32} + k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{33} + k_{13} \cdot k_{22} \cdot k_{31})$$

Deve-se observar que o Determinante é simplesmente um Número, ao passo que a Matriz correspondente é uma Tabela.

QUADRO II – UM POUCO MAIS SOBRE ÁLGEBRA MATRICIAL - CONTINUAÇÃO

- b) *Cofator ou Complemento Algébrico de um elemento k_{ij} de uma Matriz.* Seja uma Matriz Quadrada $[K] = [k_{ij}]$ de ordem $n \geq 2$. Eliminando sua linha i e sua coluna j , obtém-se outra matriz de ordem $(n-1)$, cujo determinante multiplicado por $(-1)^{i+j}$ é chamado de COFATOR OU COMPLEMENTO ALGÉBRICO de k_{ij} . A título de ilustração, é mostrado o Cálculo do Cofator de dois Elementos de uma Matriz.

Exemplo:

$$[K] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{cof}(k_{11}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 9 \cdot 7 - 4 \cdot 8 = 63 - 32 = 31$$

$$[K] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{cof}(k_{32}) = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - 3 \cdot 5) = -4 + 15 = 11$$

- c) *Matriz Transposta.* Dada uma Matriz $[A]$, pode-se obter uma Matriz $[B]$, chamada Matriz Transposta de $[A]$, e representada por $[B] = [A]^T$, trocando as linhas pelas colunas da Matriz $[A]$, isto é:

- Elemento que ocupa a posição i,j da Matriz $[A]$, é igual ao Elemento que ocupa a posição j,i da Matriz $[B]$.
- Se $[A]$ tem dimensão $m \times n$, a sua transposta tem dimensão $n \times m$.
- $[A^T]^T = [A]$

Exemplo:

$$\begin{array}{l} [A] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{a_{11}=2; a_{12}=5; a_{13}=3} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{a_{21}=0; a_{22}=1; a_{23}=6} \\ [B] = [A]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{b_{11}=2; b_{12}=5; b_{13}=3} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{b_{21}=0; b_{22}=1; b_{23}=6} \end{array}$$

\downarrow

a_{ij} de $[A] = b_{ji}$ de $[B]$

- d) *Matriz Identidade e Matriz Inversa*

- d.1) *Matriz Identidade.* Dada uma Matriz Quadrada $[A]$ de ordem n , os elementos a_{ij} com $i=j$ formam a *Diagonal Principal*, isto é, os termos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Chama-se *Matriz Identidade de ordem n* (ou *Matriz Unidade*), a Matriz Quadrada em que *todos os elementos da Diagonal Principal são iguais a 1*, e os elementos não pertencentes à diagonal principal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 1$ se $i=j$, e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

QUADRO II – UM POUCO MAIS SOBRE ÁLGEBRA MATRICIAL - CONTINUAÇÃO

Assim, temos:

$$[I]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; [I]_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \dots$$

A Matriz Identidade desempenha na Álgebra Matricial, por analogia, a mesma função do número 1 nas operações algébricas, isto é, ela constitui o *Elemento Neutro na Multiplicação de Matrizes*. Assim, por exemplo, tal como temos $n \times 1 = n$, na álgebra matricial teremos:

Se $[A]_{m \times n}$ então $[A] \cdot [I]_n = [I]_m \cdot [A] = [A]$

- d.2) *Matriz Inversa.* A Matriz Quadrada $[A]$ de ordem n diz *Invertível*, isto é, possui *uma Matriz Inversa*, se, e somente se, existir uma Matriz $[B]$ indicada por $[A]^{-1}$, ou seja, $[B] = [A]^{-1}$, tal que:

$$[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = [I]_n$$

A Matriz Inversa de uma Matriz é definida somente para Matrizes Quadradas não Singulares. Matrizes Quadradas não Singulares são aquelas cujos determinantes são diferentes de zero.

A Matriz Inversa desempenha na Álgebra Matricial, por analogia, a mesma função do Inverso de um Número nas operações algébricas. Assim, por exemplo, tal como temos $n \times n^{-1} = 1$ nas operações com números, na álgebra matricial a *Multiplicação de uma Matriz pela sua inversa gera a Matriz Identidade*. Assim como para existir o Inverso de um número, este não pode ser nulo, *uma Matriz só terá inversa se seu Determinante for diferente de zero, isto é, a Matriz não poderá ser singular*.

- d.3) *Cálculo da Matriz Inversa.* Dada a Matriz Quadrada $[A] = [a_{ij}]_{n \times n}$, se $\det A \neq 0$, então existe a Matriz Inversa de $[A]$, e esta é dada por:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det [A]} \cdot [\text{cof } A]^T$$

$[\text{cof } A]^T$ é a Matriz Transposta da Matriz que contém os Cofatores da Matriz A . Por exemplo, para uma Matriz 3×3 , teríamos que calcular primeiramente os Nove Cofatores, cada um associado a um elemento da Matriz $[A]$, e substituir os elementos de $[A]$ pelos correspondentes cofatores. Essa matriz de cofatores obtida teria então de ser transposta, ou seja, trocando linhas por colunas.

É interessante observar que o Cálculo Formal da Matriz Inversa, tal como apresentado acima, é utilizado apenas para matrizes de pequena ordem, como 2×2 ou 3×3 . Para Matrizes de maior ordem, como aquelas encontradas em grandes sistemas de equações lineares simultâneas utilizadas nas Aplicações do Método dos Elementos Finitos, e que constituem importante tarefa das Análises Numéricas, outros procedimentos diferentes daquele acima apresentado são utilizados. O procedimento acima, normalmente utilizado em aplicações manuais, foi apresentado como ilustração, até para observarmos que o processo de inversão de matrizes constitui a tarefa mais trabalhosa na resolução do Sistema de Equações. As regras para o Cálculo dos determinantes de alta ordem são mais complicadas e torna-se necessária a utilização de computadores digitais.

QUADRO II – UM POUCO MAIS SOBRE ÁLGEBRA MATRICIAL - CONTINUAÇÃO

e) Aplicação dos Conceitos anteriores na Resolução das Equações Algébricas do Método dos Elementos Finitos.

Resolução da Equação Matricial $\{F\} = [K] \cdot \{U\}$

A determinação dos **Deslocamentos Nodais** requer o **Cálculo da Matriz Coluna** $\{U\}$, que contém todos os componentes de deslocamento objeto de interesse. Deve-se, portanto, “dividir” $\{F\}$ por $[K]$. Assim, deveremos isolar nesta equação matricial a matriz coluna $\{U\}$. Essa operação é normalmente efetuada com a utilização das Regras estabelecidas nos itens anteriores. A sequência abaixo estabelece esse procedimento:

- Calcula-se a Matriz Inversa de $[K]$, isto é, $[K]^{-1}$.
- Se na equação $\{F\} = [K] \cdot \{U\}$ multiplicarmos ambos os membros por uma mesma quantidade, a equação não sofrerá alteração. Assim, vamos “pré-multiplicar” a equação acima por $[K]^{-1}$ em ambos os membros, isto é:

$$[K]^{-1} \cdot \{F\} = [K]^{-1} \cdot [K] \cdot \{U\}. \text{ A Multiplicação de uma Matriz pela sua Inversa gera a Matriz}$$

Identidade, como vimos anteriormente. Assim, a equação anterior ficará: $[K]^{-1} \cdot \{F\} = [I] \cdot \{U\}$.

Como vimos anteriormente $[I] \cdot \{U\} = \{U\}$, portanto poderemos escrever: $\{U\} = [K]^{-1} \cdot \{F\}$

Então, para determinar os Deslocamentos Nodais, deve-se primeiramente Inverter a Matriz de Rígidez da Estrutura, multiplicando-a em seguida pela Matriz Coluna que contém as Cargas Aplicadas nos Nós.

f) Discussão de Sistemas Lineares por intermédio da Regra de Cramer

No estudo de **Sistemas Lineares** por intermédio de Matrizes, são discutidas as condições de Resolução de um Sistema de n equações a n incógnitas. Se um **Sistema Linear** tiver pelo menos uma Solução, dizemos que ele é Possível ou Compatível; se o Sistema não tiver solução, dizemos que o Sistema é **Impossível ou Incompatível**. Quando S é Compatível e tiver uma única Solução, dizemos que o Sistema é Determinado; se tiver *mais que uma solução*, o Sistema será Indeterminado.

Vejamos dois exemplos de sistemas Lineares:

$$\begin{cases} 1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = 10 \\ -1 \cdot u_1 + 4 \cdot u_2 - 3 \cdot u_3 = 20 \\ 0 \cdot u_1 - 3 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 = 30 \end{cases} \quad (\text{A})$$

$$\begin{cases} 4 \cdot u_2 - 3 \cdot u_3 = 20 \\ -3 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 = 30 \end{cases} \quad (\text{B})$$

Podemos representar os Sistemas acima na Forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} \quad (\text{A}) \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} \quad (\text{B})$$

Identificamos então a **MATRIZ DOS COEFICIENTES DAS INCÓGNITAS**. O determinante dessa matriz é denominado **D** e pode ser calculado como exposto no item a deste quadro.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 = \text{ZERO} \quad \text{e} \quad D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 \neq \text{ZERO}$$

QUADRO II – UM POUCO MAIS SOBRE ÁLGEBRA MATRICIAL - CONTINUAÇÃO

Chamamos de $D(u_j)$ o Determinante que se obtém a partir de D, substituindo a coluna j pelos ELEMENTOS CONHECIDOS DO SISTEMA. Vamos representá-los para os casos (A) e (B) e calculá-los:

$$D(u_1) = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 20 & 4 & -3 \\ 30 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 180 \neq \text{ZERO}$$

$$D(u_2) = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ -1 & 20 & -3 \\ 0 & 30 & 3 \end{vmatrix} = 180 \neq \text{ZERO}$$

$$D(u_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ -1 & 4 & 20 \\ 0 & -3 & 30 \end{vmatrix} = 180 \neq \text{ZERO}$$

$$D(u_2) = \begin{vmatrix} 20 & -3 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} = 150 \neq \text{ZERO}$$

$$D(u_3) = \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ -3 & 30 \end{vmatrix} = 180 \neq \text{ZERO}$$

Segundo o TEOREMA DE CRAMER, um sistema Quadrado de n equações Lineares a n incógnitas é equivalente ao Sistema:

$$u_1 \cdot D = D(u_1) \text{ ou } u_1 = \frac{D(u_1)}{D} \text{ e genericamente.....} \quad u_n = \frac{D(u_n)}{D}$$

No estudo dos sistemas lineares, são obtidas as seguintes conclusões:

- Se $D \neq 0$ (Determinante da Matriz dos Coeficientes) - então:

↓

O Sistema tem
SOLUÇÃO ÚNICA

⇒ SISTEMA POSSÍVEL E DETERMINADO

$$u_1 = \frac{D(u_1)}{D}; u_2 = \frac{D(u_2)}{D}; \dots; u_n = \frac{D(u_n)}{D}$$

- Se $D=0 \Rightarrow$ A Solução depende de $D(u_n)$

Se $D(u_n)=0 \Rightarrow$ SISTEMA POSSÍVEL E INDETERMINADO

Como $u_n \cdot D = D(u_n) \Rightarrow u_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ Ou seja, qualquer valor de u satisfaz a equação, então, embora possível, o Sistema é INDETERMINADO.

Se $D(u_n) \neq 0 \Rightarrow$ SISTEMA IMPOSSÍVEL

Como $u_n \cdot D = D(u_1) \Rightarrow u_n \cdot 0 = D(u_n)$

Sendo $u_n \cdot 0 = 0$ e se algum $D(u_n) \neq 0$ temos absurdo.

Assim, o sistema NÃO TEM SOLUÇÃO.

QUADRO II – UM POUCO MAIS SOBRE ÁLGEBRA MATRICIAL - CONTINUAÇÃO

Portanto, nos Exemplos (A) e (B), temos:

1) O SISTEMA (A) é IMPOSSÍVEL, pois $D=0$ e $D(u_n) \neq 0$.

2) O SISTEMA (B) é POSSÍVEL E DETERMINADO, pois $D \neq 0$ e a sua solução é:

$$u_1 = \frac{D(u_2)}{D} = \frac{150}{3} = 50 \quad \text{e} \quad u_3 = \frac{D(u_3)}{D} = \frac{180}{3} = 60$$

2.6. PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO PARA A DETERMINAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS DA ESTRUTURA INTEIRA, REAÇÕES DE APOIO E FORÇAS INTERNAS NOS ELEMENTOS

a) Deslocamentos Nodais da Estrutura e Reações de Apoio

A partir do exemplo da estrutura constituída por elementos de mola, poderemos estabelecer um *Procedimento Geral de Resolução* do problema da montagem de elementos finitos. É interessante tecer algumas observações a partir dos conceitos estabelecidos anteriormente, e que serão de fundamental importância em todas as aplicações do Método. Vale lembrar que o exemplo de uma estrutura constituída por apenas dois elementos de mola foi utilizado como “pano de fundo” para estabelecer um conceito mais geral.

O procedimento geral de montagem da *Matriz de Rígidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rígidez dos seus elementos* aplicar-se-á aos casos mais gerais. Nas aplicações mais complexas, que envolvem modelos discretizados de estruturas com elementos de vigas, aplicações constituídas por elementos estruturais de chapas, sólidos, etc, a idéia será ampliada por intermédio do conceito de Graus de Liberdade, como já comentado anteriormente. O número de equações será muito maior, o que torna a resolução manual impraticável. O trabalho braçal seria imenso, mas para essa tarefa dispomos dos recursos computacionais. Os “softwares” de elementos finitos utilizados pelos engenheiros no seu dia-a-dia se encarregam de dar conta dessas tarefas, por intermédio das rotinas de Inversão de Matrizes e operações efetuadas com auxílio da Notação Matricial. Porém, deve-se ter em mente que os conceitos básicos envolvidos são semelhantes, e o entendimento do exemplo simples da mola torna-se fundamental para o entendimento dos casos mais gerais.

Iniciar o estudo do Método dos Elementos Finitos por intermédio de aplicações extremamente gerais, tentando formular o problema para o mais amplo espectro de aplicações possíveis, para em seguida discutir os casos particulares, normalmente introduz algumas dificuldades para aqueles que iniciam suas aplicações no Método. O formalismo matemático envolvido torna-se tão árido que normalmente os conceitos físicos que estão por trás da Notação Matemática são colocados em segundo plano. Daí a dificuldade enfrentada, tornando muitas vezes a “solução mais difícil que o problema”. Portanto, vamos tentar tirar proveito das aplicações mais simples para enxergar os casos mais gerais, em visão oposta à anterior. À medida que se justifique, conceitos adicionais serão introduzidos, tornando a abordagem mais completa.

Dentro dessa linha podemos citar as aplicações e rotinas para o *Cálculo da Matriz Inversa*, que é tarefa fundamental para a determinação dos deslocamentos, como vimos no Quadro II. Dentro do estudo da Matemática, o tópico “*Solução de Equações Algéricas Lineares*”, que constitui aspecto vital no Cálculo dos Deslocamentos no Método dos Elementos Finitos, merece um estudo aprofundado. No *Cálculo Numérico*, são estabelecidas diversas rotinas para implementar do ponto de vista computacional a solução dessa questão.

Os “softwares” de Elementos Finitos tiram proveito desses conhecimentos desenvolvidos pelos matemáticos. Ao apresentarmos aqui os fundamentos do Método, essas considerações numéricas não estão sendo abordadas, pois não fazem parte do objetivo deste texto. O leitor poderá encontrar na literatura matemática excelentes trabalhos para se aprofundar nessa área. Alguns aspectos relevantes e considerados fundamentais na seqüência do presente desenvolvimento serão mencionados, sempre dentro dos objetivos propostos anteriormente. Assim, guardadas essas observações, passemos a abordar o Procedimento Geral, tirando proveito do exemplo simples de uma estrutura constituída por dois elementos de mola.

A partir do exemplo até aqui estudado, vale observar que:

A matriz de rigidez, de cada elemento é simétrica. A matriz de rigidez da estrutura é sempre simétrica.

Desde que temos $k_{ij} = k_{ji}$, uma matriz simétrica é completamente especificada por todos os termos acima da diagonal principal, ou seja, só é necessário montar meia matriz.

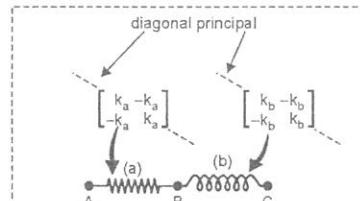
Do Quadro ao lado, observamos que $\det K = 0$, portanto a matriz de rigidez da estrutura é singular, isto é, não possui inversa.

Do Quadro II, como $[U] = [K]^{-1} \cdot [F]$, a equação para o cálculo dos deslocamentos não pode ser resolvida. No estudo da matemática, em sistemas lineares, como tratada no Quadro II, poderemos concluir que o sistema não tem solução.

O significado físico de impossibilidade do cálculo dos deslocamentos, é que a estrutura está “solta” sem qualquer fixação, podendo mover-se como um corpo rígido. Daí a impossibilidade do cálculo dos deslocamentos.

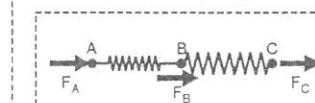
Na prática, as estruturas estão fixadas, então é necessário prover um número suficiente de restrições para impedir ou “descontar” o movimento de corpo rígido da estrutura, de sorte a se contabilizar a condição deformada de cada elemento da estrutura.

Esse requisito é estabelecido pelas condições de apoio da estrutura.



$$[K] = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix}$$

diagonal principal



A estrutura não está vinculada e pode movimentar-se como um corpo rígido.

Cálculo dos determinantes

$$\begin{aligned} \det[k]^a &= k_a \cdot k_b - (-k_a) \cdot (-k_b) = 0 = \text{Zero} \\ \det[k]^b &= k_b \cdot k_a - (-k_b) \cdot (-k_a) = 0 = \text{Zero} \\ \det[K] &= k_a (k_a + k_b) \cdot k_b + 0 \cdot (-k_a)(-k_b) \\ &\quad + 0 \cdot (k_a)(-k_b) - (k_a + k_b) \cdot 0 \\ &= -(-k_a)(-k_b) \cdot k_b - k_a \cdot (-k_b) \cdot (-k_b) \\ \det[K] &= k_a^2 \cdot k_b + k_b^2 \cdot k_a - k_a^2 \cdot k_b - k_b^2 \cdot k_a \\ \det[K] &= 0 = \text{Zero} \end{aligned}$$

As Condições de Apoio são especificadas, analisando na estrutura real como ela está fixada, ou seja, como os vínculos restringem o movimento da estrutura. Por exemplo, em um apoio fixo de uma estrutura, os deslocamentos são nulos. Esta condição deverá ser especificada matematicamente nas equações, como veremos adiante.

Para o exemplo simples da estrutura constituída por apenas dois elementos de mola, os deslocamentos só ocorrem em uma direção, isto é, só existe a possibilidade de ocorrência de um tipo de movimento de corpo rígido. Assim, com a imposição de uma restrição apenas, o movimento de corpo rígido poderá ser eliminado. Deve-se notar, porém, que o objetivo da resolução do problema não se trata apenas de garantir que seja possível resolver o sistema de equações, mas também que a solução matemática possível represente o problema físico real. Por exemplo, para a estrutura constituída pelos elementos de mola

(a) e (b), se o Nô A for fixado, o problema poderá ser resolvido matematicamente. Se os nós (A) e (B) forem fixados, a estrutura também terá uma solução matemática.

Essas duas soluções possíveis correspondem a duas situações físicas totalmente diferentes. Essa decisão não é tomada pelo "software" de análise, mas sim pelo engenheiro. É uma decisão de engenharia. Se essa interpretação, que é uma decisão tomada pelo analista antes da resolução do sistema de equações, não estiver retratando o problema físico real, a solução matemática, embora existente, não apresentará nenhum significado físico e, como consequência, não terá utilidade prática alguma.

A partir do exemplo das molas, poderemos visualizar aplicações mais gerais. As *estruturas na prática se estendem no espaço*, e podem, se não restritas, apresentar mais de uma possibilidade de movimento de corpo rígido, como, por exemplo, a "caixa" da figura 2.8. Neste caso é possível identificar *três translações de corpo rígido e três movimentos de rotação de corpo rígido* da caixa como um todo. Esses movimentos ocorrem sem deformação da caixa. Os movimentos de corpo rígido deverão ser eliminados.

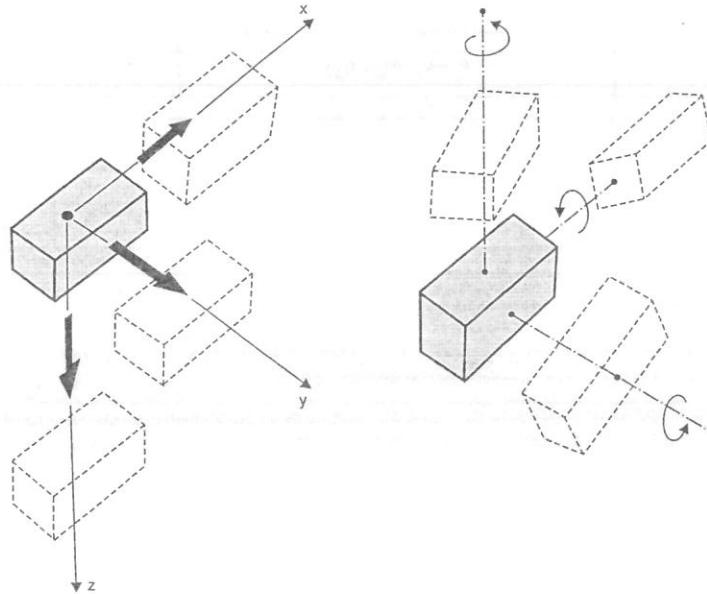


Figura 2.8 – Movimentos de Corpo Rígido de Caixa no espaço: três translações e três rotações.

Tendo interpretado a condição de singularidade da Matriz de Rigidez [K], voltemos ao exemplo da estrutura constituída por duas molas para estabelecer um Procedimento Geral. Vamos admitir que a estrutura está fixada no Nô A. Para esta condição não teremos mais Movimento de corpo rígido da estrutura, e poderemos determinar a sua condição deformada, por intermédio do Cálculo dos Deslocamentos Nodais. A partir destes, teremos o movimento relativo entre dois nós de cada elemento e, como consequência, a sua condição deformada. A figura 2.9 representa esta condição.

A equação matricial (2.13), que relaciona as Forças e Deslocamentos nodais para a estrutura inteira, deve ser interpretada sob as Condições de Apoio ou Restrições admitidas. As Forças realmente atuantes na Estrutura são F_B e F_C . Sob ação dessas Forças Externas conhecidas a Estrutura se Deforma. *Essa condição deformada é contabilizada pelo Campo de Deslocamentos*, neste caso expresso por U_B e U_C . Esses deslocamentos são as *Incógnitas do problema*. A partir das Forças conhecidas e da Rigidez da Estrutura já definida por intermédio da sua Matriz de Rigidez, os Deslocamentos serão determinados.

Deve-se notar que a *Força F_A* , não representa nesta equação uma Força Aplicada. É a força que surge em A decorrente da restrição imposta, e será, portanto, uma *Reação de Apoio* a ser determinada, e constitui outra *incógnita do problema*. Por outro lado, o deslocamento U_A , define a condição de restrição, isto é, é um valor conhecido imposto, e nesse caso como a estrutura está fixada em A, o deslocamento U_A é igual a zero. Em um problema mais geral com muitos graus de liberdade a idéia seria a mesma, porém com muito mais trabalho de computação.

Esses conceitos físicos anteriormente expostos têm uma consequência "administrativa" ao serem operadas as equações matriciais. A manipulação da equação matricial pode ser efetuada visualizando nela os termos de interesse, fazendo a *Partição das Sub-Matrizes*. Por meio desta partição, como indica a equação (2.15), identificamos na Matriz Coluna das Forças Nodais, duas *Sub-Matrizes*: Uma que relaciona as Forças realmente aplicadas na Estrutura, e outra que corresponde às Reações de Apoio. Da mesma forma, a Matriz Coluna dos Deslocamentos é constituída por duas submatrizes: uma em que estão presentes os deslocamentos nodais a serem calculados, e outra em que são relacionados os deslocamentos impostos, que neste caso são nulos, pois o apoio é fixo. A Matriz de Rigidez, em correspondência, também é particionada, de modo a se estabelecer o produto matricial, como se essas submatrizes fossem os elementos de uma matriz qualquer.

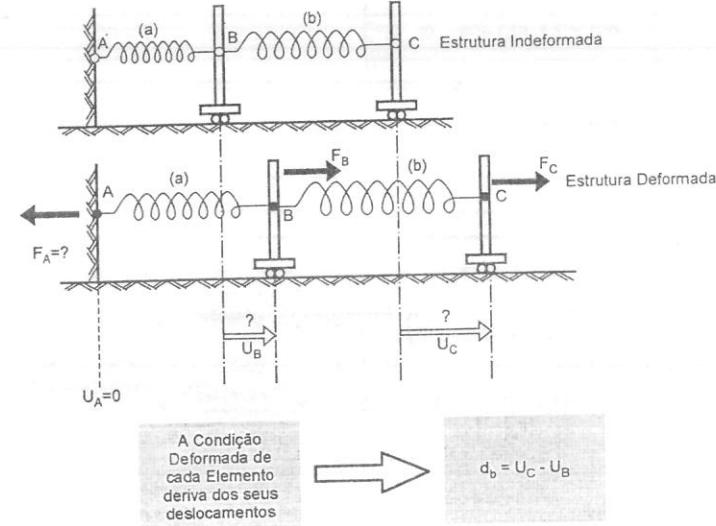


Figura 2.9 – A partir da determinação dos Deslocamentos Nodais da Estrutura, é estabelecida a sua condição deformada.

Uma outra forma de estabelecer essa partição é por intermédio dos vetores de localização: as forças em B e C se relacionam com os deslocamentos em B e C, e a parte da matriz de rigidez que traduz essa correspondência é aquela definida pelo Vetor de Localização BC como será apresentado na página seguinte.

Note que a condição $U_A = 0$ constitui um caso particular no qual o apoio é fixo. Poderíamos avaliar os deslocamentos U_B e U_C para a condição em que, além das forças externas aplicadas, um deslocamento inicial imposto conhecido fosse considerado. Nesse caso a equação completa com $U_A \neq 0$ deveria ser resolvida, o que não acarretaria nenhuma dificuldade adicional.

$$\begin{array}{c} \text{Reação Desconhecida} \\ \left(\begin{array}{c} F_A \\ F_B \\ F_C \end{array} \right) = \left[\begin{array}{ccc|c} A & | & B & | & C \\ \hline k_a & & -k_a & & 0 \\ k_a & & k_a+k_b & -k_b & \\ 0 & & k_b & -k_b & \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} U_A \\ U_B \\ U_C \end{array} \right] \end{array}$$

Deslocamento Imposto Conhecido

Deslocamento a Determinar (?)

Pedaço da Matriz que Relaciona Forças Aplicadas e Deslocamentos Ingórnitas

Forças Nodais Aplicadas Conhecidas

Efetuando a multiplicação das Matrizes termos:

$$\{F_A\} = [k_a] \cdot \{U_A\} + [-k_a \ 0] \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} F_B \\ F_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_a \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \{U_A\} + \begin{bmatrix} k_a+k_b & -k_b \\ k_b & -k_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \end{bmatrix}$$

$U_A=0$

A seguir calcula-se a Reação

$\{F_A\} = [-k_a \ 0] \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} F_B \\ F_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a+k_b & -k_b \\ k_b & -k_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \end{bmatrix}$$

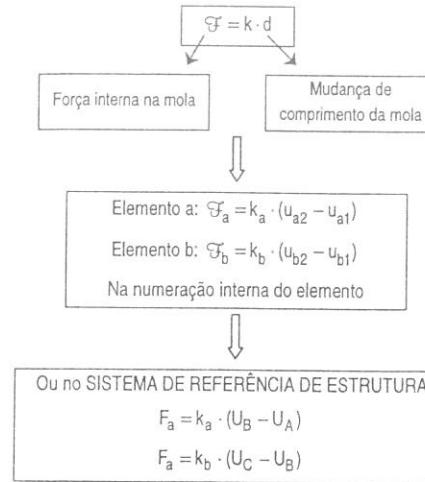
2 Equações 2 Incógnitas

Determinar-se U_B e U_C inicialmente

b) Forças Internas nos Elementos

A partir do Cálculo dos Deslocamentos Nodais, teremos o movimento relativo entre dois nós de cada elemento e, como consequência, a sua condição deformada. A Força Interna em cada elemento poderá ser contabilizada, pois conhecemos para o elemento de mola a Lei de Comportamento do Material, ou seja, a relação entre Força Interna e Deformação Interna ao Elemento, que é dada por $F = k \cdot d$, em que d representa a deformação da mola.

É importante observar que a Força Interna é Calculada Elemento por Elemento separadamente, a partir dos deslocamentos conhecidos para o contorno do elemento. Ou seja, a Força interna é calculada a partir do conhecimento dos deslocamentos nodais. Nos casos práticos, os modelos em elementos finitos contêm milhares de elementos, e esse trabalho é efetuado pelos computadores eletrônicos, identificando a localização de cada elemento na Malha de Elementos Finitos, e os correspondentes deslocamentos nodais associados ao elemento. Para os elementos mais gerais, poder-se-ão calcular as Forças Internas e, como consequência, as tensões. Porém, a Lei que permite passar dos deslocamentos nodais para a deformação interna é mais complexa que a relação estabelecida para um simples elemento de mola. Embora o procedimento geral siga o mesmo roteiro básico, o tratamento matemático necessitará de recursos mais sofisticados. Assim:



Observação

- Em relação ao Processo de Montagem da figura 2.7, observamos que $k_{A,C} = 0$. Como o coeficiente de rigidez da matriz é uma força associada a um deslocamento unitário, o significado físico é que $k_{A,C}$ é a Força no nó A devido a um deslocamento unitário no nó C, mantendo-se os nós A e B bloqueados. Assim, estando A e B bloqueados, não será transferida força ao nó A, como mostra a figura 2.10.
- É interessante observar que o coeficiente $k_{B,B} = k_a + k_b$ apresenta também significado físico. Se somente o Nô B estiver livre para se movimentar, uma força lá aplicada resultará em um deslocamento calculado pela relação $F_B = (k_a + k_b) \cdot U_B$. Ou seja, temos um problema com apenas um componente de força e um componente de deslocamento, sendo que a constante elástica da mola equivalente é a soma das constantes das molas participantes da montagem. Esse resultado já era nosso conhecido da Física Básica, porém esta conclusão não era obtida por intermédio do Método Matricial.

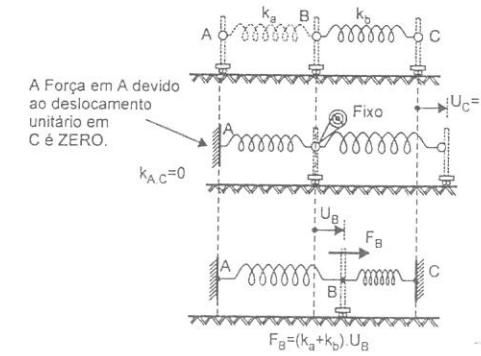


Figura 2.10 – Significado Físico dos termos da matriz de rigidez da Estrutura.

2.7. APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA ANTERIOR - EXERCÍCIO

Neste caso de Aplicação será resolvido um Modelo Estrutural constituído por uma *montagem de Elementos de Mola*, como indica a figura 2.11. Embora seja um exemplo simples, em que os deslocamentos ocorrem somente em uma direção, vamos desenvolvê-lo de modo sistemático, aplicando numericamente todas as etapas tratadas anteriormente, e a partir deste exemplo poderemos estabelecer algumas generalizações importantes para as aplicações práticas de elementos finitos utilizadas no dia-a-dia com a utilização dos "softwares" de Análise.

São conhecidas as Forças atuantes na Estrutura e representadas na figura. Objetiva-se Calcular os Deslocamentos Nodais, em seguida as Reações nos vínculos ou Apoios da Estrutura, e finalmente as Forças Internas em cada um dos Elementos.

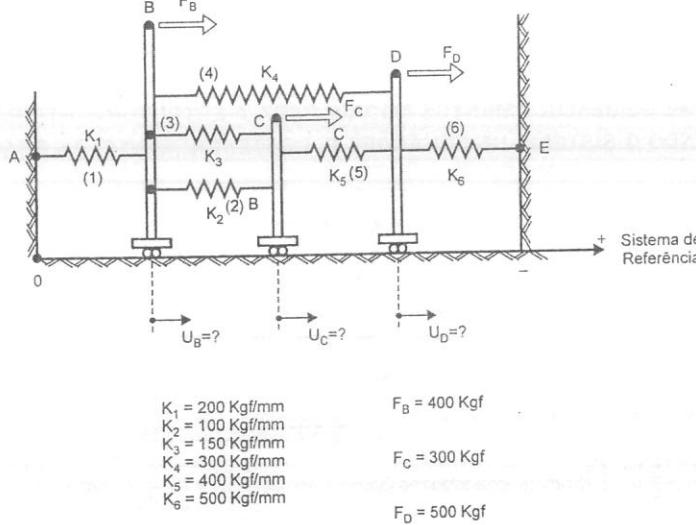


Figura 2.11 – Modelo para Cálculo dos Deslocamentos.

Passemos então para a resolução do Modelo, estabelecendo cada uma das etapas desta tarefa:

2.7.1. DEFINIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL COMO UMA MONTAGEM DE ELEMENTOS

Deve-se dividir a Estrutura Real em uma Montagem de Elementos, que sejam adequados para simular o problema físico objeto de investigação. No modelo são identificados os Nós, entre os quais os elementos são definidos, isto é, entre os quais os elementos "trabalham".

Neste exemplo, o Modelo da Estrutura já foi fornecido e corresponde à montagem constituída por elementos de mola. Nos problemas mais gerais, deve-se, a partir da observação da Estrutura e do entendimento do seu funcionamento, propor um modelo discretizado que a represente adequadamente. Esses aspectos mais gerais serão melhor detalhados quando do estudo dos diversos tipos de elementos finitos.

O movimento dos carros é apenas de translação, e essa hipótese define uma importante característica do modelo a ser estudado. Por exemplo, todas as molas vinculadas ao carro B têm o mesmo deslocamento. Isso significa que para propósitos de análise é como se todas elas estivessem presas a um mesmo ponto B. Considerações semelhantes aplicam-se às outras molas do modelo que é representado na figura 2.11.

2.7.2. DETERMINE A MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO E REPRESENTE-A NO SISTEMA DE COORDENADAS DA ESTRUTURA

Vimos anteriormente que o elemento de mola é definido por dois nós, e no âmbito isolado do elemento associamos a ele uma numeração interna, que são os nós 1 e 2. A partir da formulação de um elemento finito, este estará disponível na "Biblioteca de Elementos" por intermédio de sua Matriz de Rigidez. Assim, qualquer que seja o elemento de mola, e independentemente de onde for ser utilizado, a sua Matriz de Rigidez é dada por:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ao representar a montagem de elementos no modelo, cada elemento deverá referir-se a um Sistema que vale para a estrutura como um todo. A Matriz de Rigidez de cada elemento será então preparada para utilização na estrutura objeto de análise, levando-se em conta a sua localização. Assim, cada elemento de mola poderá ser determinado para esta aplicação específica. Então, representaremos a Matriz de Rigidez de cada elemento em letra maiúscula, apenas para denotar que esta é referida ao Sistema da Estrutura. Então:

$$\text{Elemento (1)} : [K]^1 = \begin{bmatrix} A & B \\ 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & B \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento (2)} : [K]^2 = \begin{bmatrix} B & C \\ 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ C & C \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento (3)} : [K]^3 = \begin{bmatrix} B & C \\ 150 & -150 \\ -150 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ B & C \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento (4)} : [K]^4 = \begin{bmatrix} B & D \\ 300 & -300 \\ -300 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & D \\ D & D \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento (5)} : [K]^5 = \begin{bmatrix} C & D \\ 400 & -400 \\ -400 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento (6)} : [K]^6 = \begin{bmatrix} D & E \\ 500 & -500 \\ -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ D & E \end{bmatrix}$$

Dessa forma, cada elemento do modelo está definido por intermédio de sua matriz de rigidez.

2.7.3. MONTE A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA A PARTIR DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS SEUS ELEMENTOS DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Utilizando o Procedimento de Montagem definido anteriormente, podemos obter a Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez de cada um dos seus elementos.

Devemos identificar em cada Matriz de Rigidez de Elemento a sua contribuição nessa montagem. Por exemplo, os coeficientes I,J (linha, coluna) da matriz de um elemento serão adicionados na mesma localização I,J da Matriz da estrutura. Assim, por intermédio desse procedimento, serão obtidas as *Equações de Equilíbrio da Estrutura*. É obtida a Matriz Coeficiente que relaciona as Forças Nodais e os Deslocamentos Nodais para toda a Estrutura.

$$[K] = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 200+100 & -100 & -300 & 0 \\ 0 & -100 & 100+100 & -400 & 0 \\ -100 & -150 & -400 & 400+500 & -500 \\ 0 & -300 & -400 & 500 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{l} \text{Reação} \\ \text{Forças Aplicadas} \\ \text{Reação} \end{array} \begin{bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \\ F_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 750 & -250 & -300 & 0 \\ 0 & -250 & 650 & -400 & 0 \\ 0 & -300 & -400 & 1200 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Incógnitas} \\ \{U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_E \} \end{array}$$

↓

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\}$$

Esta última equação matricial representa as Equações de Equilíbrio da Estrutura. Se fizéssemos o produto matricial, poderíamos representar as equações constituintes desse sistema. Na forma matricial, essas equações poderão ser resolvidas de forma compacta, utilizando os procedimentos revisados no Quadro II. A título de ilustração, representemos o sistema de equações:

$$F_A = 200 \cdot U_A - 200 \cdot U_B + 0 \cdot U_C + 0 \cdot U_D + 0 \cdot U_E \quad (a)$$

$$F_B = -200 \cdot U_A + 750 \cdot U_B - 250 \cdot U_C - 300 \cdot U_D + 0 \cdot U_E \quad (b)$$

$$F_C = 0 \cdot U_A - 250 \cdot U_B + 650 \cdot U_C - 400 \cdot U_D + 0 \cdot U_E \quad (c)$$

$$F_D = 0 \cdot U_A - 300 \cdot U_B - 400 \cdot U_C + 1200 \cdot U_D - 500 \cdot U_E \quad (d)$$

$$F_E = 0 \cdot U_A + 0 \cdot U_B + 0 \cdot U_C - 500 \cdot U_D + 500 \cdot U_E \quad (e)$$

2.7.4. DEFINA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DESLOCAMENTOS - AS RESTRIÇÕES - PARA PREPARAR A SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A Matriz de Rigidez da Estrutura completamente montada é *Simétrica e Singular*. Já sabemos da impossibilidade de resolver esse sistema devido ao movimento de corpo rígido, pois o sistema completo representa a estrutura sem qualquer vínculo. Para as *condições de Restrição*, isto é, a estrutura restrita em A e E, as Forças Externas aplicadas na estrutura são F_B , F_C e F_D . As forças F_A e F_E não são aplicadas, mas sim Reações de Apoio e são incógnitas do Problema. Dessa forma, como vimos anteriormente, podemos estabelecer a relação entre as forças nodais aplicadas e os correspondentes deslocamentos nodais. Assim, a relação entre as forças que agem em B,C e D, e os correspondentes deslocamentos em B,C e D, é expressa pelos coeficientes representados nas localizações B,C e D da matriz de Rigidez. Portanto, uma parte da Matriz de Rigidez é invertida para obter os deslocamentos nodais. Assim:

$$\begin{bmatrix} F_B \\ F_C \\ F_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 & -250 & -300 \\ -250 & 650 & -400 \\ -300 & -400 & 1200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \\ U_D \end{bmatrix}$$

Note que a obtenção desse sistema poderia ser feito "operacionalmente" da seguinte forma: ELIMINAM-SE AS LINHAS E COLUNAS CORRESPONDENTES AOS DESLOCAMENTOS NULOS, ISTO É, AS RESTRIÇÕES. Esquematicamente, temos:

$$\begin{bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \\ F_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 750 & -250 & -300 & 0 \\ 0 & -250 & 650 & -400 & 0 \\ 0 & -300 & -400 & 1200 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_E \end{bmatrix}$$

2.7.5. DETERMINE OS DESLOCAMENTOS NODAIS PARA A ESTRUTURA INTEIRA, RESOLVENDO O SISTEMA DE EQUAÇÕES E, POSTERIORMENTE, AS REAÇÕES DE APOIO

$$\begin{bmatrix} B & C & D \end{bmatrix}$$

$$\text{Sendo } \begin{bmatrix} F_B \\ F_C \\ F_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 & -250 & -300 \\ -250 & 650 & -400 \\ -300 & -400 & 1200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \\ U_D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

Chamando de $[k]_{\Delta}$ a parte da matriz de Rigidez correspondente aos deslocamentos a serem calculados, teremos:

$$\{F\} = [K]_{\Delta} \cdot \{U\} \rightarrow \{\{U\} = [K]_{\Delta}^{-1} \cdot \{F\}\} \text{ como já apresentado no Quadro II, em que } [K]_{\Delta}^{-1} = \frac{1}{\det [k]_{\Delta}} \cdot [\text{cof } K]_{\Delta}^t$$

Portanto, a matriz inversa poderá ser calculada conhecendo o seu determinante e a matriz dos Cofatores transposta. Se fizermos esses cálculos de acordo com os procedimentos revisados no Quadro II, teremos:

$$\det [K]_{\Delta} = [750 \times 650 \times 1200 + (-250) \cdot (-400) \cdot (-300) + (-250) \cdot (-400) \cdot (-300)] - [(-300) \cdot (650) \cdot (-300) + (750) \cdot (-400) \cdot (-400) + (-250) \cdot (-250) \cdot (1200)]$$

$$\det [K]_{\Delta} = 271.500.000$$

Calculemos os Cofatores de cada um dos Elementos da Matriz $[k]_{\Delta}$:

$$(\text{cof } K_{BB}) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 650 & -400 \\ -400 & 1200 \end{vmatrix} = 650 \times 1200 - 400 \times 400 = 620000$$

$$(\text{cof } K_{BC}) = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -250 & -400 \\ -300 & 1200 \end{vmatrix} = (-1) [-250 \times 1200 - 300 \times 400] = 420.000$$

$$(\text{cof } K_{BD}) = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -250 & 650 \\ -300 & -400 \end{vmatrix} = [400 \times 250 - (-300) \times (650)] = 295.000$$

$$(\text{cof } K_{CB}) = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -250 & -300 \\ -400 & 1200 \end{vmatrix} = (-1) [(-250) \times 1200 - 400 \times 300] = 420.000$$

$$(\text{cof } K_{cc}) = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 750 & -300 \\ -300 & 1200 \end{vmatrix} = [750 \times 1200 - 300 \times 300] = 810.000$$

$$(\text{cof } K_{CD}) = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 750 & -250 \\ -300 & -400 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [750 \times (-400) - 300 \times 250] = 375.000$$

$$(\text{cof } K_{DB}) = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -250 & -300 \\ 650 & -400 \end{vmatrix} = [400 \times 250 - (650) \times (-300)] = 295000$$

$$(\text{cof } K_{DC}) = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 750 & -300 \\ -250 & -400 \end{vmatrix} = (-1) [750 \times (-400) - 250 \times 300] = 375.000$$

$$(\text{cof } K_{DD}) = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 750 & -250 \\ -250 & 650 \end{vmatrix} = [750 \times 650 - 250 \times 250] = 425000$$

Montando a MATRIZ DOS COFATORES e trocando linhas por colunas:

$$[K]_{\Delta}^{-1} = \frac{1}{271.500.000} \begin{bmatrix} 620000 & 420000 & 295000 \\ 420000 & 810000 & 375000 \\ 295000 & 375000 & 425000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0022836 & 0,0015470 & 0,0010866 \\ 0,0015470 & 0,0029834 & 0,0013812 \\ 0,0010866 & 0,0013812 & 0,0015653 \end{bmatrix}$$

De acordo com o sentido positivo do SISTEMA DE REFERÊNCIA temos:

$$F_B = +400 \text{ kgf} ; F_C = +300 \text{ kgf} ; F_D = +500 \text{ kgf}$$

Então, podemos montar a equação matricial $[U] = [K]_{\Delta}^{-1} \cdot [F]$, e substituindo os valores das Forças Aplicadas, temos:

$$\begin{bmatrix} U_B \\ U_C \\ U_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0022836 & 0,0015470 & 0,0010866 \\ 0,0015470 & 0,0029834 & 0,0013812 \\ 0,0010866 & 0,0013812 & 0,0015653 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix}$$

de onde serão calculados os DESLOCAMENTOS NODAIS por intermédio do Produto das Matrizes:

$$U_B = 0,0022836 \times 400 + 0,0015470 \times 300 + 0,0010866 \times 500 \Rightarrow U_B = 1,92084 \text{ mm}$$

$$U_C = 0,0015470 \times 400 + 0,0029834 \times 300 + 0,0013812 \times 500 \Rightarrow U_C = 2,20442 \text{ mm}$$

$$U_D = 0,0010866 \times 400 + 0,0013812 \times 300 + 0,0015653 \times 500 \Rightarrow U_D = 1,63165 \text{ mm}$$

As equações (2.17) a e e permitirão o cálculo das Reações de Apoio na Estrutura, com $U_A = U_E = 0$

$$F_A = 200 \times 0 - 200 \times 1,92084 + 0 \times 2,20442 + 0 \times 1,63165 + 0$$

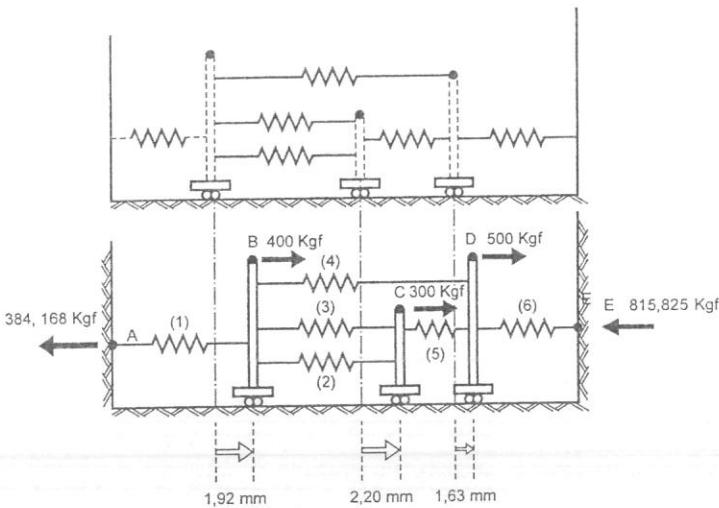
$$F_E = 0 + 0 \times 1,92084 + 0 \times 2,20442 - 500 \times 1,63165 + 500 \times 0$$

resultando em $F_A = -384,168 \text{ kgf}$ Reação em A

$F_E = -815,825 \text{ kgf}$ Reação em E

A convenção de Sinais para Forças indica que elas apresentam sentidos opostos às Forças Aplicadas. Note que se somarmos todas as Forças atuantes na estrutura, Forças Aplicadas externas e Reações, o resultado será igual a ZERO, pois a Estrutura encontra-se em Equilíbrio.

Na figura 2.12 é representada a ESTRUTURA DEFORMADA, em que podemos ter uma idéia inicial do trabalho dos Elementos, isto é, quais estão comprimidos e quais estão tracionados, embora no próximo item este cálculo seja efetuado detalhadamente.



$$F_A + F_B + F_C + F_D + F_E = -384,168 + 400 + 300 + 500 - 815,825 = 0,007 \sim \text{Zero}$$

Figura 2.12 - Estrutura Deformada.

Em função dos deslocamentos obtidos podemos observar que:

- A mola (1) está TRACIONADA.
- Como B e C têm AFASTAMENTO RELATIVO, as molas (2) e (3) estão TRACIONADAS.
- Como B e D têm APROXIMAÇÃO RELATIVA, a mola (4) está comprimida.
- A mola (6) está COMPRIMIDA.

2.8. DETERMINE AS FORÇAS INTERNAS EM CADA ELEMENTO, A PARTIR DO CONHECIMENTO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS ASSOCIADOS AO ELEMENTO

Após obter o Campo de Deslocamentos para a Estrutura inteira, podemos identificar *para cada elemento isolado, quais são os deslocamentos nodais associados a ele*. Dessa forma poderá ser definida a sua configuração deformada. Esse procedimento é efetuado *elemento por elemento*, pois conhecemos a Lei que exprime a Força Interna nele em função dos deslocamentos nodais. Essa ideia é geral para todas as montagens de elementos finitos. A deformação obtida nos diversos elementos de uma estrutura decorre do campo de deslocamentos a que esta está submetida. No caso da mola esta relação é bastante simples. A deformação é obtida pela diferença dos deslocamentos dos nós que definem o elemento.

Em aplicações mais gerais, essas relações são mais sofisticadas, e envolvem as derivadas dos deslocamentos, como estudaremos nos elementos de viga, placas, sólidos, etc. Essas relações que são incorporadas à formulação do elemento são “importadas” do estudo da Resistência dos Materiais, Teoria da Elasticidade, Teoria de Placas e Cascas, etc., utilizando a Notação Matricial para estabelecer uma representação compacta e elegante do problema físico estrutural que o elemento formulado se propõe a representar.”

Em particular, para os elementos de mola da presente aplicação, podemos utilizar as equações (2.16) para o Cálculo das Forças Internas nos Elementos de nosso Modelo Estrutural. Assim, substituindo nessas equações os valores obtidos para os deslocamentos, e considerando os valores das Propriedades Físicas dos Elementos, isto é, as constantes elásticas das molas, teremos:

$$F_1 = k_1(U_B - U_A) = 200 \times (1,92084 - 0) = +384,17 \text{ kgf}$$

$$F_2 = k_2(U_C - U_B) = 100 \times (2,20442 - 1,92084) = +28,36 \text{ kgf}$$

$$F_3 = k_3(U_C - U_B) = 150 \times (2,20442 - 1,92084) = +42,54 \text{ kgf}$$

$$F_4 = k_4(U_D - U_B) = 300 \times (1,63165 - 1,92084) = -86,76 \text{ kgf}$$

$$F_5 = k_5(U_D - U_C) = 400 \times (1,63165 - 2,20442) = -229,11 \text{ kgf}$$

$$F_6 = k_6(U_E - U_D) = 500 \times (0 - 1,63165) = -815,83 \text{ kgf}$$

O SINAL POSITIVO para o valor numérico da FORÇA INTERNA significa que esta é de TRAÇÃO, de acordo com a Convenção estabelecida anteriormente. O SINAL NEGATIVO, COMPRESSÃO.

Assim, as molas (1), (2) e (3) estão TRACIONADAS, enquanto as molas (4), (5) e (6) estão COMPRIMIDAS.

Observações

Note que a reação de apoio em A é aplicada na extremidade A do Elemento (1), e é transferida inteiramente ao elemento (1) como uma Força Interna de Tração. Esse resultado está coerente com os valores numéricos da Força Interna em (1) e a Reação de Apoio, cujos valores são em intensidade 384,168 Kgf. Os sinais dessas grandezas são diferentes, pois atendem a diferentes convenções de sinais, como já estabelecid anteriormente. Uma refere-se à Força Nodal, cujo sinal está associado ao sentido da Força em relação ao eixo de referência adotado, e outra é Força Interna, cujo sinal está associado ao trabalho de compressão ou tração do elemento, como já definido anteriormente; embora as intensidades dessas forças sejam iguais, seus significados físicos são diferentes.

2.9. APLICAÇÕES GERAIS A PARTIR DO ESTUDO DOS ELEMENTOS DE MOLA

O estudo do Elemento de Mola permitiu-nos estabelecer algumas conclusões que são gerais em termos do Procedimento de Montagem de um Modelo em Elementos Finitos. O exercício anterior foi desenvolvido estabelecendo os Passos Principais dessa tarefa, e pode ser extremamente útil para enxergarmos essa mesma seqüência nas Aplicações Gerais de Análises Estruturais, e até outras aplicações mais gerais do Método, como comentado no capítulo 1. Nessas casos, o engenheiro reproduz a mesma seqüência de passos do exercício anterior, porém com o auxílio do computador, que se encarrega de todas as tarefas repetitivas de execução de cálculos numéricos. O uso da ferramenta computacional merece algumas observações:

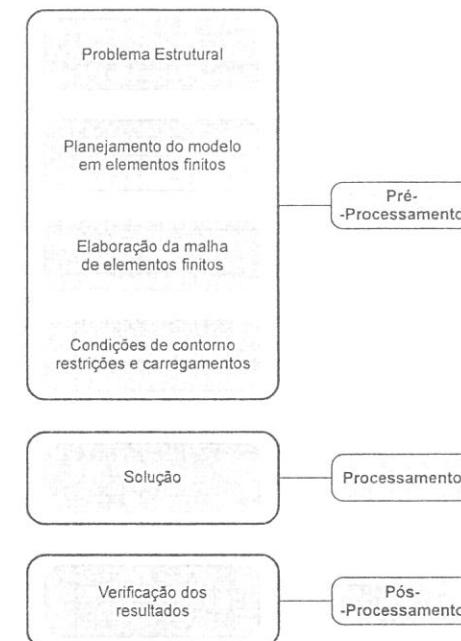
- Ao utilizar um "software" de Análise Estrutural pelo Método dos Elementos Finitos, estamos resolvendo um problema de engenharia com apoio de uma ferramenta computacional. Antes de sentarmos à frente da estação de trabalho, devemos lembrar que o principal passo a ser dado constitui o entendimento claro do problema físico que se propõe a resolver por intermédio de um modelo discretizado.
- Com base nos conceitos teóricos do Método dos Elementos Finitos e na Análise de Engenharia do problema prático que queremos resolver, poderemos iniciar o Planejamento do Trabalho. Lembre-se que os recursos computacionais disponíveis ("CAE - Computer Aided Engineering" - Engenharia auxiliada por Computador!!!!) só poderão auxiliá-lo a partir da definição clara do problema a resolver. Assim, deve-se estabelecer uma SEQUÊNCIA BÁSICA DE ETAPAS PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS, como indica o esquema seguinte:

Neste esquema é importante identificar três grandes tarefas envolvidas em qualquer Análise:

- Pré-Processamento, em que, antes de qualquer Cálculo a ser efetuado pelo Computador, deve-se montar o Modelo Discretizado da Estrutura, e neste aplicar as Condições de Contorno.

- Processamento, em que são efetuados os Cálculos Matriciais, para determinação de deslocamentos, reações de apoio e forças internas nos elementos. No exercício anterior, essa tarefa foi executada manualmente.
- Pós-Processamento, em que são interpretados os resultados numéricos dos Cálculos efetuados, e a sua coerência com o problema físico estudado.

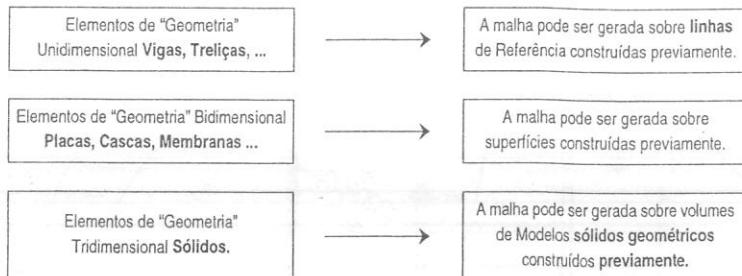
Seqüência básica de etapas para aplicação do método dos elementos finitos



Em relação às tarefas anteriormente mencionadas, é interessante destacar a evolução ao longo do tempo, do uso das ferramentas gráficas que acompanham os recursos de cálculo disponíveis, isto é, a importância destas no sentido de facilitar o trabalho de execução da Malha em Elementos Finitos.

- Antes da existência das chamadas "interfaces gráficas", a geração da malha em elementos finitos era um processo bastante trabalhoso. O engenheiro preparava no papel o desenho do modelo estrutural. Após todos os Nós e Elementos serem desenhados e numerados manualmente, as Forças aplicadas serem definidas com as respectivas regiões de aplicação, e os pontos de vinculação representados no modelo, preparava-se um "Deck" de Cartões de Computador que constituía a entrada de dados no Programa. Os nós eram definidos por intermédio da entrada direta das suas coordenadas x,y,z. A entrada dos elementos também era manual, e assim por diante. Para geometrias complicadas era um processo extremamente exaustivo.
- Entretanto, conceitualmente, os requisitos para preparar a malha de Elementos Finitos não mudaram. Deve-se entender o PROBLEMA FÍSICO QUE SE PRETENDE SIMULAR. Em seguida, de posse da biblioteca de Elementos do Programa em Elementos Finitos, deve-se escolher trecho a trecho do Modelo, os melhores elementos que traduzem o comportamento real naquela região. Assim, será estabelecida a correspondência entre o fato real e o modelo de Análise, região por região.

■ Hoje as ferramentas de Análise vêm acompanhadas de poderosas **ferramentas gráficas** que permitem diminuir muito os trabalhos de geração do modelo. Aproveitando a **geometria preparada anteriormente**, ela é usada como referência para a **construção da malha** em elementos finitos. Assim, Nós, Elementos, Condições de Contorno podem ser gerados "Automaticamente". Porém, pode-se dizer que esse processo automático depende sempre do Engenheiro de Análise (Não há mágica!!!!). Hipóteses mal formuladas pelo analista ao gerar uma malha "automaticamente" gerarão um erro muito mais rápido que o erro manual. Portanto, o recurso gráfico disponível reduziu enormemente o trabalho de "Transpiração" do Engenheiro, mas não a **"Inspiração"**, que depende do embasamento conceitual no qual devem se apoiar os trabalhos com a **ferramenta de simulação**. Como ilustração, algumas idéias gerais das gerações de malha são mostradas abaixo.



A figura 2.13 ilustra o Procedimento Geral do Método dos Elementos Finitos, identificando os mesmos passos do exemplo dos elementos de mola. Embora a maioria dos elementos envolvidos seja objeto de estudo posterior, a Metodologia Geral pode ser visualizada.

Relembrando o passado...

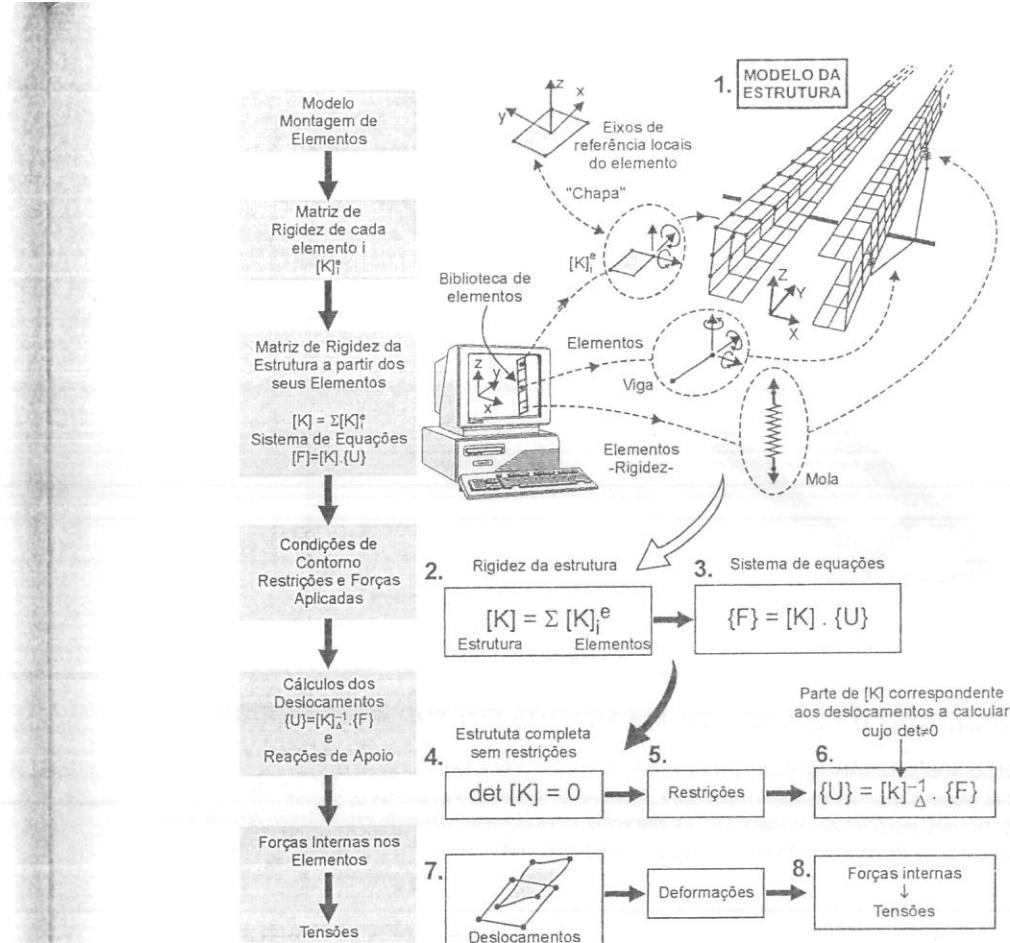
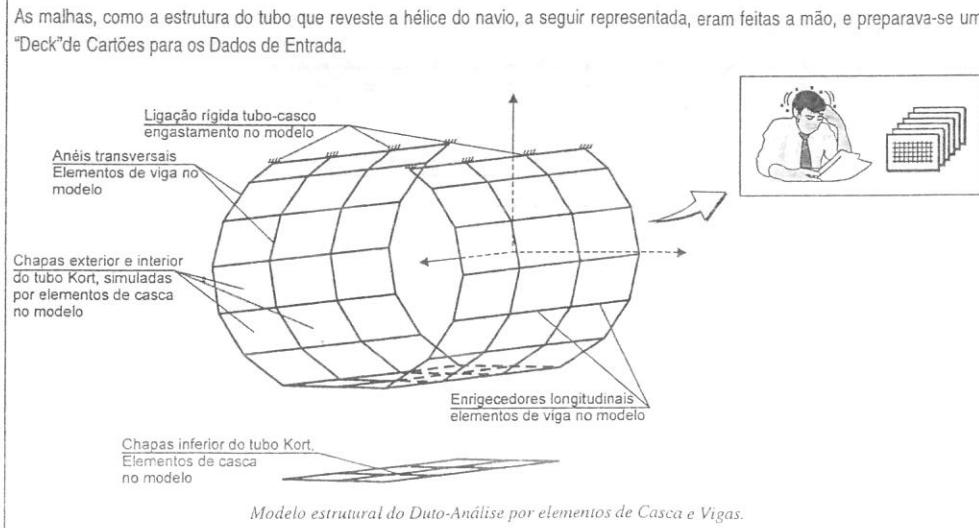


Figura 2.13 – Montagem dos Elementos Finitos em Modelo Discretizado.

Os cálculos referentes à tarefa de **Processamento**, que nos casos práticos envolvem milhares de equações, são desenvolvidos por intermédio das rotinas de cálculo dentro do computador.

As tarefas de **Pós-Processamento** podem ser facilitadas pelo uso dos recursos de computação gráfica, visualizando as variações de tensão no componente objeto de estudo, associando uma escala de cores às intensidades das tensões obtidas, como representa a figura 2.14, identificando as regiões críticas.

RESULTS: 56-STRESS BODY TWIST +1GZ_NEG
STRESS - MAX PRIN MIN:-14.39 MAX: 40.77
DEFORMATION: 42-DISPL BODY TWIST +1GZ_NEG
DISPLACEMENT - MAG MIN: 1.54 MAG: 92.00
FRAME OF REF: LOCAL 0

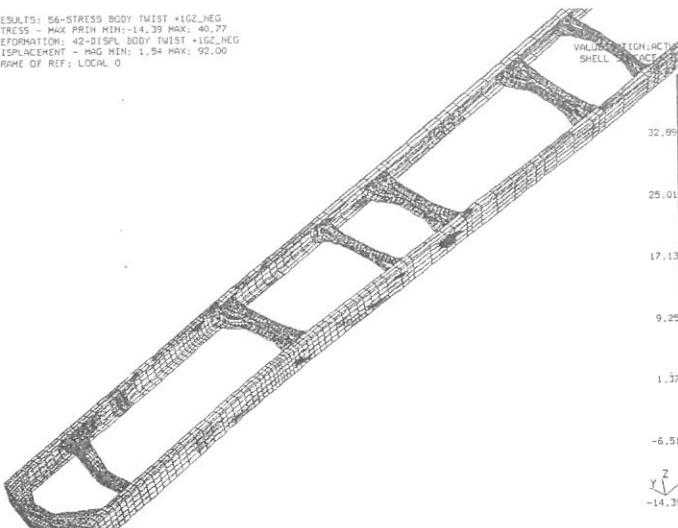


Figura 2.14 – Exemplo de resultado dos níveis de tensão em Modelo Estrutural de Chassi de caminhão, identificando por intermédio dos recursos gráficos de pós-processamento as regiões críticas da estrutura.

2.10. PREPARANDO O ESTUDO DOS ELEMENTOS FINITOS MAIS GERAIS

O exemplo da montagem de um modelo constituído por elementos de mola ofereceu subsídios para estabelecer o Procedimento Geral para todas as Montagens de Elementos Finitos, a partir do conhecimento da Matriz de Rígidez de cada Elemento. Nas situações práticas, tal como representado na figura 2.13, os *elementos formulados previamente estão disponíveis em uma Biblioteca de Elementos do Programa de Análise*. A formulação dos diversos elementos, desde o mais simples, como a mola, até os mais gerais, constitui o objetivo deste texto. Ou seja, estamos tentando reproduzir o desenvolvimento de um programa de análise, por intermédio da geração de cada um dos elementos que fazem parte de sua biblioteca.

O passo seguinte seria desenvolver em linguagem computacional um “programa” que armazenasse essas informações no computador. Essa tarefa não faz parte do nosso objetivo, pois a maioria dos engenheiros de análise utiliza programas comerciais em que esses elementos estão disponíveis. Porém, ao utilizar esses programas de análise, *o analista deve conhecer como cada elemento é formulado*, quais as hipóteses adotadas por ele em sua formulação e, como consequência, *que tipo de fenômeno físico esse elemento simula*. Somente dessa forma, ao tentar representar o comportamento de um sistema, o analista poderá escolher o elemento mais adequado para simular o problema objeto de investigação, trecho a trecho. Ou seja, como já houvera sido definido anteriormente, conhecer o comportamento do conjunto a partir de cada uma de suas partes, isto é, no modelo discretizado, os seus elementos.

Na montagem da Matriz de Rígidez da Estrutura, os coeficientes de rigidez eram adicionados algebricamente nos locais adequados, em função da sua posição na montagem. Como os coeficientes $k_{i,j}$ da matriz de rigidez são Forças associadas a deslocamentos unitários, na montagem da figura 2.7 o termo $k_{B,B} = k_a + k_b$ representa uma soma de forças. Ao somar forças estamos diante de *grandezas vetoriais*, que apresentam direção e sentido, e essa adição deve ser efetuada com todos os cuidados que a operação com vetores requer.

No modelo constituído somente pelos elementos de mola, todos estavam alinhados e, como consequência, as Forças Aplicadas e as Forças Internas atuavam sempre na mesma direção. Assim, a *soma dos coeficientes k_a e k_b era efetuada algebricamente*, devido a essa condição particular. Ou seja, se um dos elementos de mola estivesse na condição da mola (c) da

figura 2.15, essa adição deveria ser feita com alguns cuidados adicionais, e não poderia ser efetuada pelo procedimento até aqui introduzido, pois as forças atuam segundo direções diferentes.

Esse problema pode ser resolvido, projetando as Forças Nodais no eixo horizontal em que são contabilizados os deslocamentos da estrutura, pois a Projeção de uma Grandeza Vetorial sobre um eixo é uma grandeza escalar, podendo, assim, ser dotada de sinais algébricos positivo e negativo.

Assim, a formulação dos Elementos Finitos deverá levar em conta para os casos mais gerais esse tipo de correção, pela introdução de dois sistemas de referência utilizados na formulação dos elementos finitos, e que começaremos a estudar a partir do próximo capítulo. A saber: Sistema de Referência Local e Sistema Global. O primeiro aplica-se ao âmbito do Elemento, e o segundo vale para a estrutura como um todo.

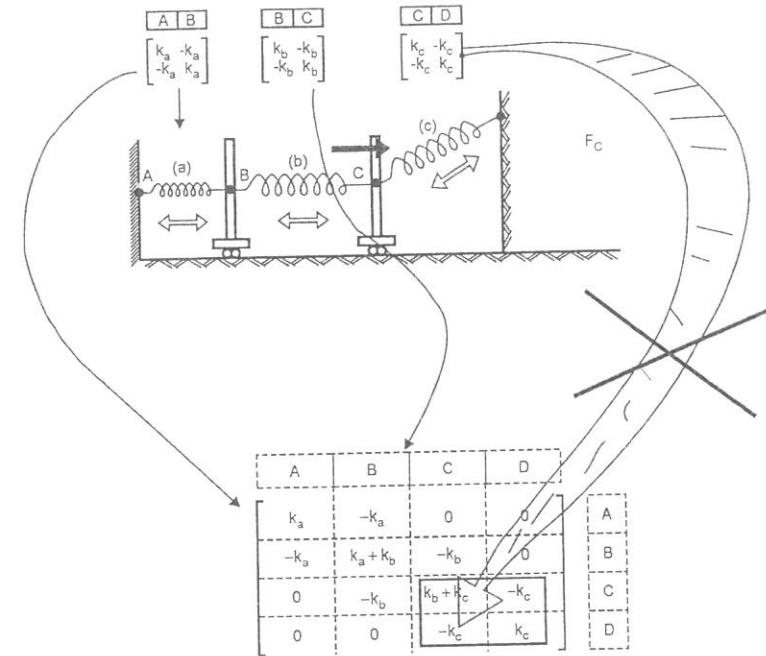
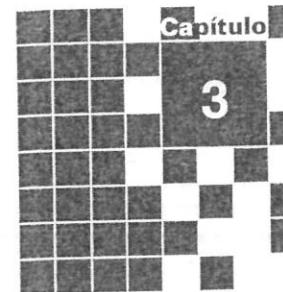


Figura 2.15 – A montagem das Matrizes de Rígidez de Elementos não alinhados requer a definição do componente de rigidez na direção dos deslocamentos.

Anotações



Elemento de Treliça Sistemas de Coordenadas Local e Global

Barras de Treliça – estudando os elementos unidimensionais e generalizando conceitos para as diversas aplicações do método dos elementos finitos.

3.1. ELEMENTO DE BARRA ARTICULADA NAS EXTREMIDADES – TRELIÇAS RIGIDEZ AXIAL

Neste capítulo iniciaremos o estudo do segundo elemento finito que fará parte da Biblioteca de Elementos que estamos construindo: o *Elemento de Treliça ou Barra articulada nas extremidades*. À semelhança do Elemento de Mola, desenvolvido no capítulo anterior, mas uma vez aproveitaremos o estudo de um elemento simples para identificarmos muitas propriedades que são válidas para todos os tipos de elementos.

Sabemos do estudo da Resistência dos Materiais Elementar, que uma Treliça consiste de uma série de elementos estruturais retos, de comprimento muito maior que as dimensões de sua seção transversal, e que conectados uns aos outros em suas extremidades compõem uma *Estrutura Reticulada*, como mostra a figura 3.1. A particularidade importante das treliças é que as *juntas estruturais*, ou seja, o encontro discreto de dois ou mais membros do conjunto, *são articuladas*. As *forças externas atuantes* em uma estrutura na forma de treliça são aplicadas nas juntas estruturais, ou como vimos no capítulo 1, *nos Nós*. Excepcionalmente, uma barra de treliça poderá estar sujeita a Cargas atuando no interior do membro, ou seja, entre os nós. Porém, para propósitos de análise, essas cargas poderão ser substituídas por cargas estaticamente equivalentes atuando nos nós, as Cargas Nodais Equivalentes, citadas no capítulo 1.

A figura 3.1 representa alguns exemplos de estruturas treliçadas. No caso (a), temos uma *Treliça Plana*, em que todas as barras estão em um mesmo plano, e as Forças Aplicadas atuam também no plano da estrutura. No caso (b), temos uma *Treliça Espacial*, em que as barras podem ter qualquer direção no espaço. Neste caso, as forças atuantes nos Nós podem ter também direções arbitrárias no espaço. Em função das hipóteses adotadas quanto à união dos elementos, e pelo fato de as Cargas atuarem somente nos nós, um aspecto básico é fundamental para o estudo desses tipos de elementos estruturais, e já conhecido da Resistência dos Materiais: As *Barras de Treliça transmitem apenas Forças Axiais de Tração ou Compressão*, isto é, na *direção da Barra*. Para este elemento não são contabilizados esforços decorrentes da ação de momentos fletores, torções e forças cortantes, que serão estudados posteriormente para as estruturas na forma de Pórticos. Assim, o Elemento de Treliça contabiliza apenas a *Rigidez Axial do Membro Estrutural*.

Para o estudo de uma estrutura completa na forma de treliça, utilizaremos a técnica geral estabelecida nos capítulos 1 e 2. Objetivava-se determinar a configuração deformada da estrutura inteira por intermédio dos deslocamentos nodais. Deve-se, portanto, conhecer a Rígidez da Estrutura inteira, que deverá ser contabilizada a partir do conhecimento da rigidez de cada elemento, isto é, o processo de montagem generalizado na figura 2.13 será repetido para a estrutura na forma de Treliça.

A base para resolver essa montagem está então na *formulação do Elemento de Treliça*, por intermédio de sua *Matriz de Rígidez*, seguindo o mesmo procedimento do capítulo anterior. Para isso, é fundamental o entendimento de como as Forças internas em uma barra de treliça se relacionam com as deformações. Como vimos no capítulo 2, as relações que traduzem o comportamento físico do elemento são “importadas” do estudo da Resistência dos Materiais. No *Quadro III* é feita uma breve revisão dos conceitos da Resistência dos Materiais necessários para formular o Elemento de Treliça.

Convém ressaltar que o estudo das Treliças Planas permite estabelecer propriedades gerais que serão aplicadas também para as Treliças Espaciais. O estudo destas últimas envolve um trabalho de manipulação matemática muito maior, porém os conceitos físicos de formulação do elemento são os mesmos. Assim, desenvolveremos o nosso estudo para as treliças planas.

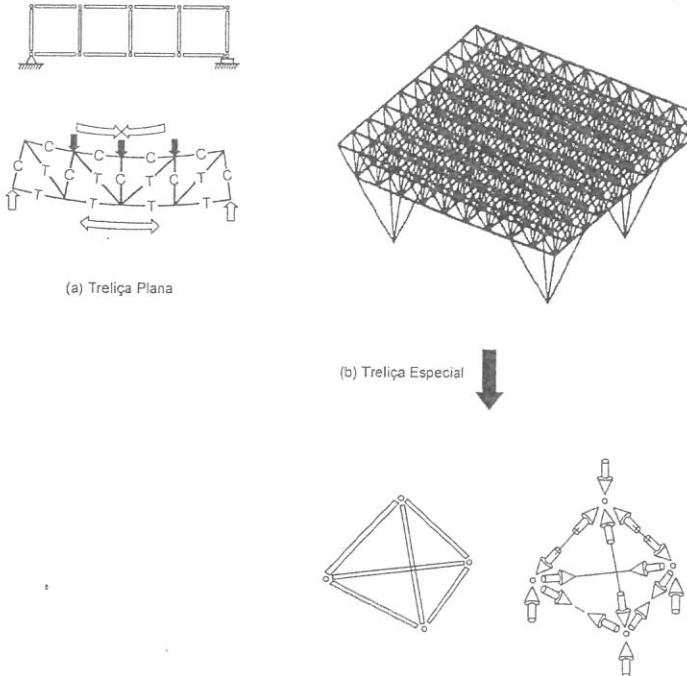


Figura 3.1 – As barras de treliça transmitem apenas forças axiais.

QUADRO III – REVISANDO A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS - TENSÕES AXIAIS EM BARRAS

A Barra de Treliça está em Equilíbrio. Fazendo o corte A-A, os trechos I e II estão também em Equilíbrio. Justificamos o equilíbrio de cada trecho, representando a FORÇA INTERNA, no Diagrama de Corpo Livre. A Força Interna tem intensidade igual a F .

A Força F é distribuída sobre a SEÇÃO INTEIRA DA BARRA.

A FORÇA AXIAL distribuída uniformemente na Seção Transversal da Barra dá origem ao conceito de TENSÃO AXIAL ou TENSÃO NORMAL atuante na seção, isto é, a FORÇA AXIAL POR UNIDADE DE ÁREA (σ). Assim:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

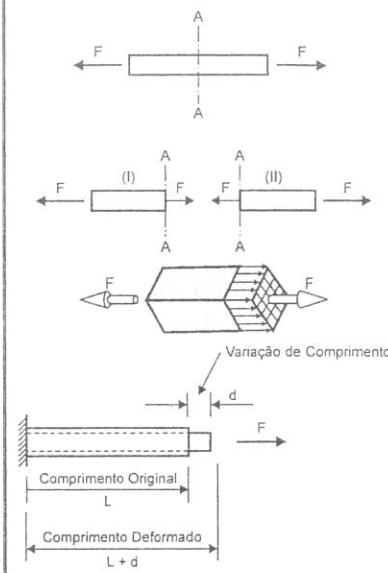
A DEFORMAÇÃO LINEAR MÉDIA (ϵ) é baseada na dimensão original da Barra e definida por:

$$\epsilon = \frac{\text{variação de comprimento}}{\text{comprimento original}} = \frac{d}{L}$$

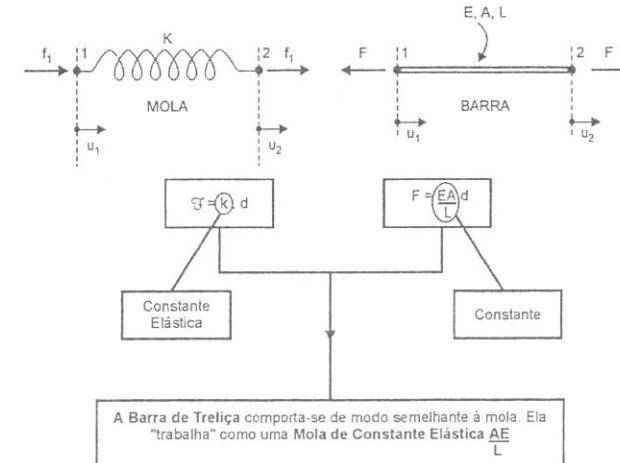
Para Material de Comportamento Linear a Tensão é Proporcional à Deformação. A constante de proporcionalidade é o Módulo de Elasticidade do Material (E) expresso pela Lei de Hooke. Assim:

$$\sigma = \epsilon \cdot E \quad \sigma = \frac{F}{A} = \epsilon \cdot E$$

$$\text{Como: } \epsilon = \frac{d}{L} \quad \frac{F}{A} = \frac{d}{L} \cdot E \quad F = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d$$



Comparando uma BARRA DE TRELIÇA com a MOLA estudada anteriormente, temos:



A Barra de Treliça comporta-se de modo semelhante à mola. Ela “trabalha” como uma Mola de Constante Elástica $\frac{AE}{L}$

Portanto, a Constante $\frac{AE}{L}$ define a RIGIDEZ AXIAL DA BARRA.

3.2. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA

A figura 3.2 representa uma Treliça Plana. Nela identificamos um dos seus elementos, conectado ao resto da estrutura pelos seus Nós, posicionados nas extremidades da barra. O estudo do comportamento físico do elemento pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, isto é, por intermédio do seu **Diagrama de corpo livre**. Se a estrutura está em equilíbrio, o Elemento isolado também está, e podemos representá-lo nessa condição, indicando as forças que esse elemento troca com o resto da estrutura, isto é, o efeito do resto da estrutura no elemento. Note que, este procedimento é válido para todos os elementos representados no modelo. Como sabemos, cada uma das barras da treliça transmite apenas forças axiais, e assim, no âmbito isolado do elemento, o seu equilíbrio poderá ser representado pela ação de dois componentes de força.

Vimos que a Barra de Treliça comporta-se como uma Mola de constante Elástica $A/E/L$. Portanto, a Matriz de Rigidez de um Elemento de Barra será formulada de modo idêntico ao Elemento de Mola, substituindo os valores de k da matriz da mola pelos coeficientes de rigidez que definem a rigidez axial da barra. Dessa forma, no âmbito local do elemento, está definida a Matriz de Rigidez do Elemento de Barra. Observe que estamos reproduzindo a abordagem já definida anteriormente para os **Sistemas Discretos Padrão**, considerando apropriadamente em cada caso os componentes de força e os componentes de deslocamento que traduzem o comportamento físico do elemento. A relação entre eles expressa na forma matricial conduz à Matriz de Rigidez do Elemento. A seguir, é feita de forma esquemática a comparação dos elementos de mola e barra, definindo a **Matriz de Rigidez do Elemento de Barra**.

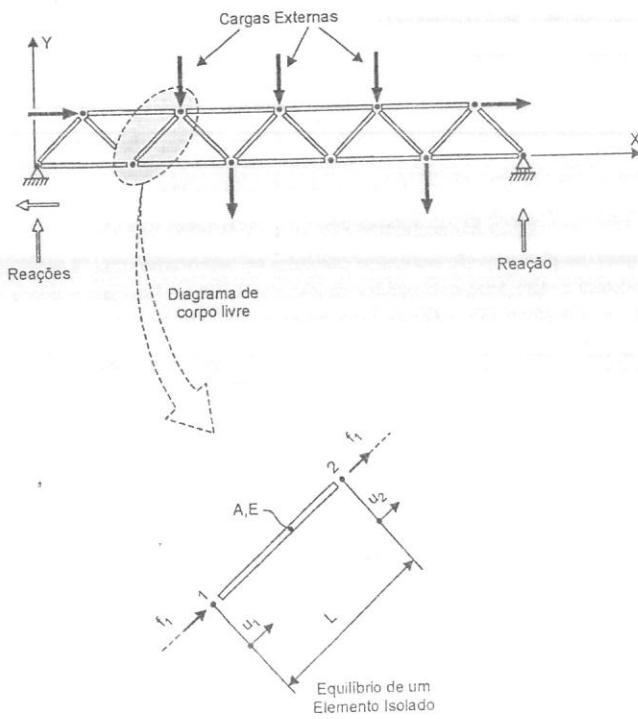


Figura 3.2 – No modelo da Estrutura, identificamos um elemento de Barra. Para este elemento, como para qualquer outro do modelo, o equilíbrio pode ser justificado por intermédio do Diagrama de Corpo Livre, indicando as Forças aplicadas pelo resto da estrutura no elemento. Em particular, para o Elemento de Barra de Treliça, temos dois componentes de força e dois deslocamentos presentes.

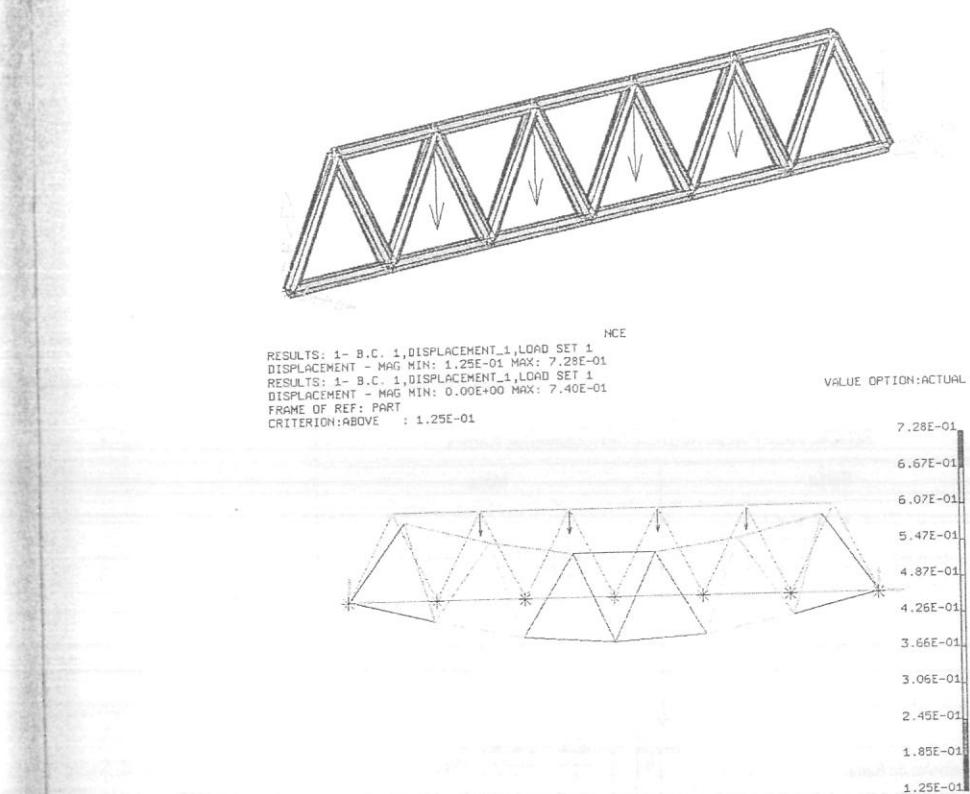
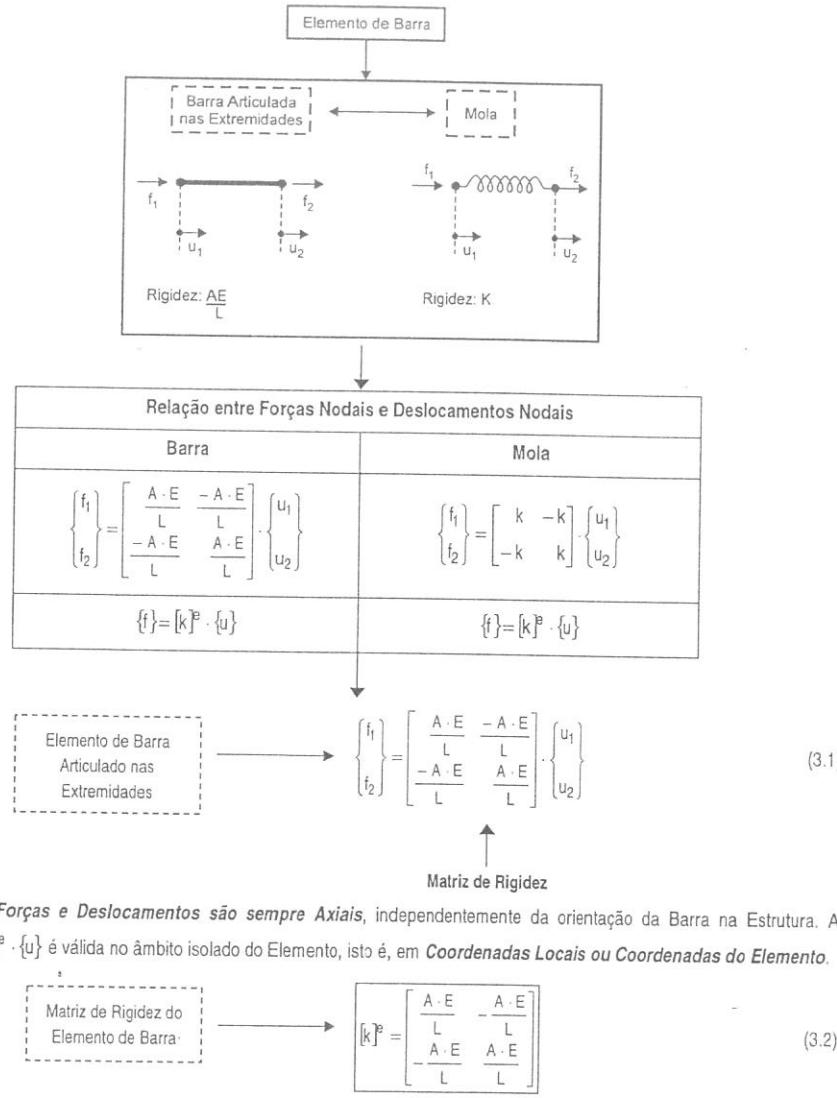


Figura 3.2 – Continuação – Uma visão no computador. Por intermédio de Técnicas Numéricas, como o Método dos Elementos Finitos, pode-se determinar o comportamento estrutural de uma treliça, utilizando-se os softwares de análise disponíveis. Os programas de computador requerem o conhecimento das propriedades dos elementos de treliça, tais como a área da seção transversal de cada barra, o módulo de elasticidade de cada um dos elementos, etc. Conhecendo-se o carregamento atuante na forma de Força nos Nós, pode-se determinar a configuração deformada da estrutura, bem como as forças em cada uma das barras, estabelecendo-se previsões a respeito do seu comportamento. No caso de estruturas treliçadas de grandes pavilhões, a análise pelo método dos elementos finitos, oferece subsídios para efetuar a simulação das mais variadas formas de estruturas, permitindo estabelecer comparações de diversas configurações no âmbito do desenvolvimento do projeto, buscando a solução mais adequada e econômica, com bastante rapidez.



3.3. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NOS SISTEMAS LOCAL E GLOBAL MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

No procedimento de montagem da **Matriz de Rrigidez de uma Estrutura**, estabelecido a partir das Equações de Equilíbrio e Compatibilidade, as Matrizes de Rrigidez dos Elementos são superpostas adequadamente, seguindo um plano de montagem. Nesse procedimento são adicionados coeficientes de rigidez de acordo com os vetores de localização. Vimos que esse procedimento envolve basicamente **Soma de Forças**, em particular, Forças associadas a Deslocamentos Unitários. Assim, para determinar as propriedades de rigidez da estrutura completa, a partir da rigidez de cada elemento, as forças e os deslocamentos associados a

cada elemento individual devem ser relacionados a um **Sistema de Referência Comum**. Na figura 3.3 são representadas três barras da estrutura na sua condição de equilíbrio. Em (b), as Forças que equilibram cada uma das barras são representadas nas direções delas, já que esse elemento transmite apenas forças axiais.

Em um procedimento de montagem, a soma dessas forças deveria ser tratada vetorialmente. Uma forma de evitar essa dificuldade é representar o equilíbrio dos mesmos elementos, por intermédio da projeção dessas forças nos eixos X e Y, como indica a figura (c). Os componentes de força nesses eixos poderão ser superpostos algebraicamente, tornando então o problema escalar. Assim, os componentes de força em X de uma barra poderão “conversar” ou se relacionar algebraicamente com os mesmos componentes de outra, e, portanto, serem adicionados. Analogamente, para os componentes de força em Y.

Essa questão pode ser “**administrada**” por intermédio da definição de **dois Sistemas de Coordenadas** para se representar a montagem de elementos:

- **SISTEMA DE COORDENADAS “LOCAL”, ou do ELEMENTO.** Na figura 3.3.d é o sistema (x,y) representado em letras minúsculas por convenção. O eixo local x é definido no sentido do nó 1 para o nó 2 do elemento. Os deslocamentos na direção x são u_1 e u_2 , também em letras minúsculas.
- **SISTEMA DE COORDENADAS “GLOBAL”, ou da ESTRUTURA.** É o Sistema de Referência Básico para Estrutura como um todo. Na figura 3.3.d é o Sistema (X,Y) representado em letras maiúsculas por convenção. A escolha desse Sistema é arbitrária. A posição do eixo x em relação ao eixo X é estabelecida por intermédio do ângulo α , medido de X para x , adotando como sentido positivo, o sentido anti-horário.

Deve-se lembrar que para um elemento em equilíbrio:

- A Matriz de Rigidez de um Elemento é inicialmente definida no Sistema Local.
- A matriz de Rigidez do Elemento representa a relação entre Forças e Deslocamentos no âmbito do elemento.
- Os componentes de Força e Deslocamento são diferentes nos Sistemas Local e Global.
- Portanto, a Matriz de Rigidez do Elemento será expressa de diferentes formas nesses sistemas.

Desde que as Matrizes de Rigidez dos Elementos são inicialmente calculadas em coordenadas locais, é necessário introduzir um procedimento de modo a transformar a representação do equilíbrio do elemento do sistema local para o sistema global. Ou seja, esse procedimento estabelece uma **Transformação de Forças de um Sistema para outro**. Ou seja:



Assim, ao formular o procedimento de montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura, deve-se primeiramente representar a Matriz de Rigidez de cada Elemento no Sistema Global, para fazer então a Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura.

Ao estabelecer a Transformação das Forças de um Sistema para outro e representá-la na Notação Matricial, temos um “**problema administrativo**” para resolver. A saber:

No **sistema local**, o equilíbrio é representado pelas **Forças f_1 e f_2** e os correspondentes **deslocamentos são u_1 e u_2** , como mostra a figura 3.3.d. Como temos dois componentes de forças e deslocamentos, a **Matriz de Rigidez tem dimensão 2×2** . Ao representar a mesma barra em equilíbrio no **Sistema Global**, por intermédio dos **Componentes de Força em X e Y**, temos **quatro componentes de força** que representam o equilíbrio do elemento, e quatro componentes de deslocamento também, pois um deslocamento u tem componentes também em X e Y, como mostra a figura 3.5. Assim, no Sistema Global a Matriz de Rigidez terá **dimensão 4×4** , e a equação matricial terá dimensões diferentes nos dois sistemas, e a correspondência entre elas ficará inconsistente.

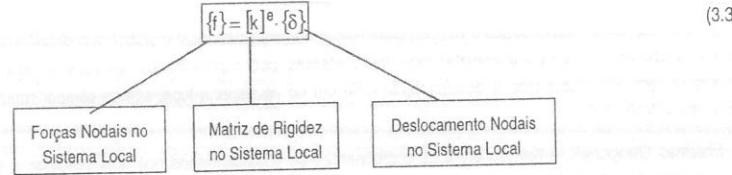
Para resolver essa "questão administrativa" introduziremos um artifício, de forma que a matriz no sistema local, de dimensão 2x2, não se sinta menos "importante" que a sua correspondente no sistema global de dimensão 4x4. Vamos representar o equilíbrio da barra no sistema local por intermédio também de quatro forças, como mostra a figura 3.4. O componente f_x no eixo local x, e o componente f_y no eixo local y, porém sabendo que $f_y = 0$, pois a barra só transmite forças axiais. Esse artifício não altera as equações de equilíbrio, mas torna a representação da Matriz de Rígidez no Sistema local com dimensão 4x4. Assim, "hierarquicamente" essas matrizes são de mesma dimensão e poderão corresponder-se entre si. A representação das equações de equilíbrio na forma matricial será efetuada introduzindo zeros nas posições adequadas na matriz de rigidez, como é feito em seguida:

$$\begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \end{Bmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

ou sendo

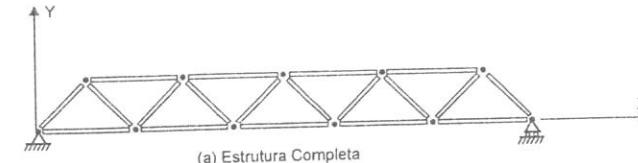
$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

teremos:

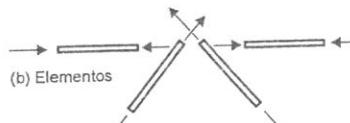


Note que na equação matricial acima, devido à colocação dos zeros na matriz, o desenvolvimento do produto resultará no mesmo resultado obtido para a matriz de rigidez de dimensão 2x2, na equação 3.1, e reproduzirá $f_{y1} = f_{y2} = 0$.

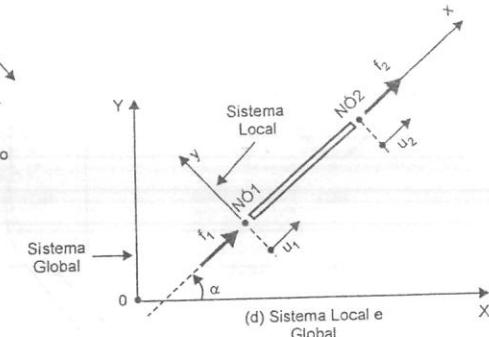
Na figura 3.4, podemos efetuar a correspondência entre as Forças no dois sistemas de referência, e que justificam o equilíbrio da barra. Projetando as Forças Globais nos eixos locais x e y, teremos a correspondência entre as Forças nos dois Sistemas. Assim:



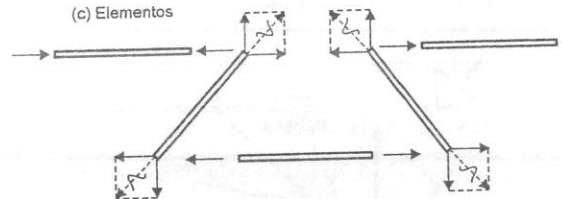
(a) Estrutura Completa



(b) Elementos
Forças que justificam o equilíbrio do Elemento no Sistema Local



(d) Sistema Local e Global



(c) Elementos
Equilíbrio dos Elementos no Sistema Global. As Forças Axiais são substituídas pelos seus componentes em X e Y.

Figura 3.3 – Equilíbrio dos Elementos de uma estrutura expresso nos Sistemas Local e Global .

Sistema Local de Coordenadas Definido no âmbito do elemento

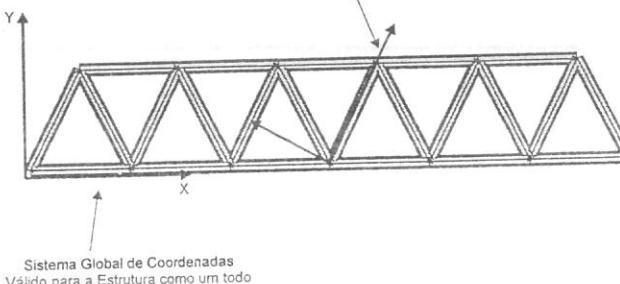


Figura 3.3 – Continuação – Representação do modelo de treliça no computador.

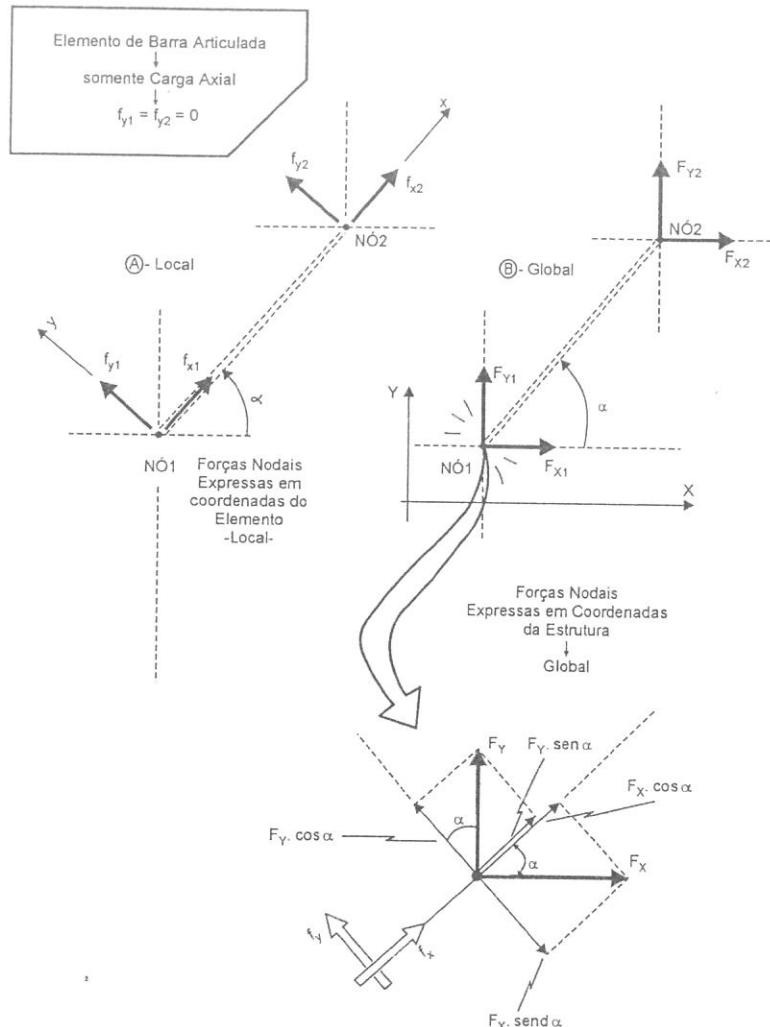


Figura 3.4 – O equilíbrio de um mesmo elemento é representado por intermédio de forças nodais nos sistemas local e global. Para cada nó, a Projeção das Forças Globais nos eixos locais x e y permite estabelecer a correspondência entre elas.

$$\begin{cases} f_{x_1} = F_{x_1} \cdot \cos \alpha + F_{y_1} \cdot \text{sen } \alpha \\ f_{y_1} = -F_{x_1} \cdot \text{sen } \alpha + F_{y_1} \cdot \cos \alpha \\ f_{x_2} = F_{x_2} \cdot \cos \alpha + F_{y_2} \cdot \text{sen } \alpha \\ f_{y_2} = -F_{x_2} \cdot \text{sen } \alpha + F_{y_2} \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad \text{e sendo} \quad \begin{cases} \lambda = \cos \alpha \\ \mu = \text{sen } \alpha \end{cases}$$

Note que as equações não “nasceram” matriciais. Representando por conveniência computacional na Forma Matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Matriz que contém Forças Nodais no Elemento, no Sistema Local

Matriz que Transforma Forças do Sistema Global em Local, chamada de Matriz de Transformação

Matriz que contém as Forças Nodais no Elemento, no Sistema Global

$\{f\} = [T] \cdot \{F\}$ (3.5)

A **Matriz de Transformação** apresenta uma propriedade muito útil e que será utilizada adiante. Utilizando os conceitos sobre Matrizes do Quadro II - capítulo 2, pode-se demonstrar que a **Matriz Inversa da Matriz de Transformação é igual à sua Matriz Transposta**. Na notação matricial, temos:

$$[T]^{-1} = [T]^T$$
(3.6)

Da mesma forma que foi estabelecida a relação entre forças nos sistemas local e global, é possível estabelecer também a **relação entre os componentes de deslocamentos nos dois sistemas**, pois à semelhança dos vetores força, teremos a relação entre os vetores deslocamento. Realmente, o deslocamento u de um nó no sistema local admite componentes U e V no Sistema Global, como ilustra a figura 3.5.

Para Sistemas Ortogonais, a relação entre os componentes de deslocamentos nos dois sistemas é semelhante à relação entre forças, da equação 3.5. Assim:

$$\{\delta\} = [T] \cdot \{\Delta\}$$
(3.7)

em que:

$$\{\Delta\} = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Componentes de Deslocamento de um nó, no Sistema Global.}$$

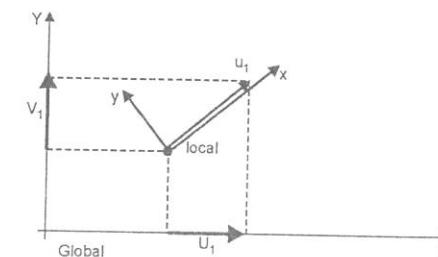


Figura 3.5 – O deslocamento u no Sistema Local apresenta componentes U e V no Sistema Global.

Já sabemos como transformar as Forças do Sistema Local no Sistema Global e vice-versa. Da mesma forma, conhecemos essas relações para os Deslocamentos. Vimos também que antes de efetuarmos a montagem da matriz de rigidez da estrutura, cada elemento deve ter sua matriz representada no sistema global, de modo que as forças que justificam o equilíbrio do elemento, expressas na forma unitária nas matrizes de rigidez, possam ser adicionadas algebraicamente. Portanto, resta-nos estabelecer a relação entre forças nodais e deslocamentos nodais no Sistema Global, isto é, a Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Global.

Partindo da relação $\{F\} = [k]^e \cdot \{\delta\}$, já conhecida para o *Sistema Local*, e utilizando as *relações de transformação entre forças nos dois sistemas*, poderemos estabelecer a relação entre *Forças e Deslocamentos Nodais no sistema global*, isto é, a *Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Global*. Assim:

$$\begin{array}{c} \{F\} = [k]^e \cdot \{\delta\} \\ \text{Equação 3.5} \\ \downarrow \\ [T] \cdot [F] = [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\} \\ \text{Equação 3.7} \end{array}$$

Nesta última equação estão presentes as **FORÇAS NO SISTEMA GLOBAL** $\{F\}$ e os **DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL** $\{\Delta\}$. Assim, poderemos através desta relação obter a **MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NO SISTEMA GLOBAL**. A equação anterior não será alterada multiplicando-se ambos os membros por uma mesma quantidade. Assim "pré-multiplicando" ambos os membros por $[T]^{-1}$ teremos:

$$\begin{array}{c} [T]^{-1} \cdot [T] \cdot \{F\} = [T]^{-1} \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\} \\ \text{MATRIZ IDENTIDADE} \\ \downarrow \\ [I] \cdot \{F\} = [T]^{-1} \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\} \end{array}$$

Como $[I] \cdot \{F\} = \{F\}$ teremos: $\{F\} = [T]^{-1} \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\}$

O cálculo da Matriz Inversa $[T]^{-1}$ não será necessário, pois de (3.6) $[T]^{-1} = [T]^T$

Assim:

$$\{F\} = [T]^{-1} \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\}$$

Forças Nodais do Elemento no Sistema Global

Coefficiente entre Forças Nodais e Deslocamentos Nodais no Sistema Global, isto é, Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Global

Deslocamentos Nodais do Elemento no Sistema Global

Assim o produto das matrizes acima permita obter a Matriz de Rigidez de um Elemento de Barra no sistema Global.

$$[K]^e = [T]^T \cdot [k]^e \cdot [T]$$

Global
Local

(3.8)

Se fizermos a Multiplicação das Matrizes, teremos a Matriz de Rigidez de um Elemento de Treliça Plana, em função das *Propriedades Geométricas do Elemento* (A, L) e da *Propriedade do Material*, representada pelo seu *Módulo de Elasticidade*.

E, levando-se em conta a posição da viga na estrutura, dada pelo ângulo α e contabilizada pelos valores do *seno* e *cosseno* desse ângulo. Como temos mais de um componente de deslocamento presente por nó, vamos utilizar a linguagem já introduzida dos **Graus de Liberdade do Elemento**. Dessa forma o Vtor de Localização continuará posicionando o elemento do nó 1 para o nó 2, porém destacando a contribuição de cada grau de liberdade na montagem da matriz. A identificação dos Graus de Liberdade do Elemento no Vtor de Localização segue uma ordem dentro do nó: primeiro é identificado o Grau de liberdade em X, e posteriormente em Y. Então, para o elemento da figura 3.6, teremos:

(3.9)

A aplicação numérica e a identificação da Numeração dos Graus de Liberdade dos Elementos em uma montagem com elementos de treliça serão feitas adiante por intermédio de um exercício. Ao efetuarmos a montagem de uma estrutura constituída por elementos de mola, os vetores de localização foram referidos à numeração dos nós no âmbito da estrutura inteira. Para a treliça, o mesmo ocorrerá com a identificação da numeração dos graus de liberdade para a estrutura inteira.

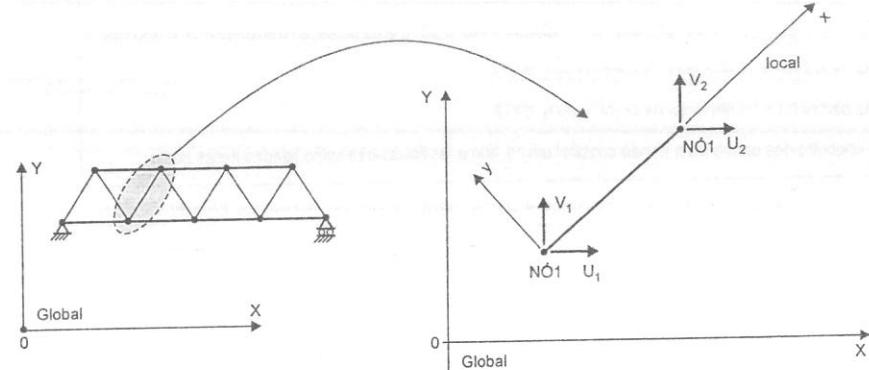


Figura 3.6 – Elemento de Barra de Treliça, considerando os Componentes de Deslocamentos no Sistema Global.

3.4. EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO PARA ESTRUTURA NA FORMA DE TRELIÇA

Neste caso de Aplicação será resolvido um Modelo Estrutural constituído por uma *montagem de Elementos de Barra de Treliça Plana*, como indica a figura 3.7. Embora seja uma Estrutura Simples, aproveitaremos este exemplo para desenvolver a montagem de um modelo estrutural, considerando de forma geral o *conceito de Graus de Liberdade*. Iremos desenvolvê-lo de modo sistemático, aplicando numericamente todas as etapas tratadas anteriormente, e a partir deste exemplo poderemos estabelecer algumas generalizações importantes para as aplicações práticas de elementos finitos utilizadas no dia-a-dia com a utilização dos "softwares" de Análise, ampliando as idéias desenvolvidas a partir do elemento de mola.

São conhecidas as Forças atuantes na Estrutura e representadas na figura 3.7. Objetiva-se Calcular os Deslocamentos Nodais, em seguida as Reações nos vínculos ou Apoios da Estrutura, e finalmente as Forças Internas em cada um dos Elementos.

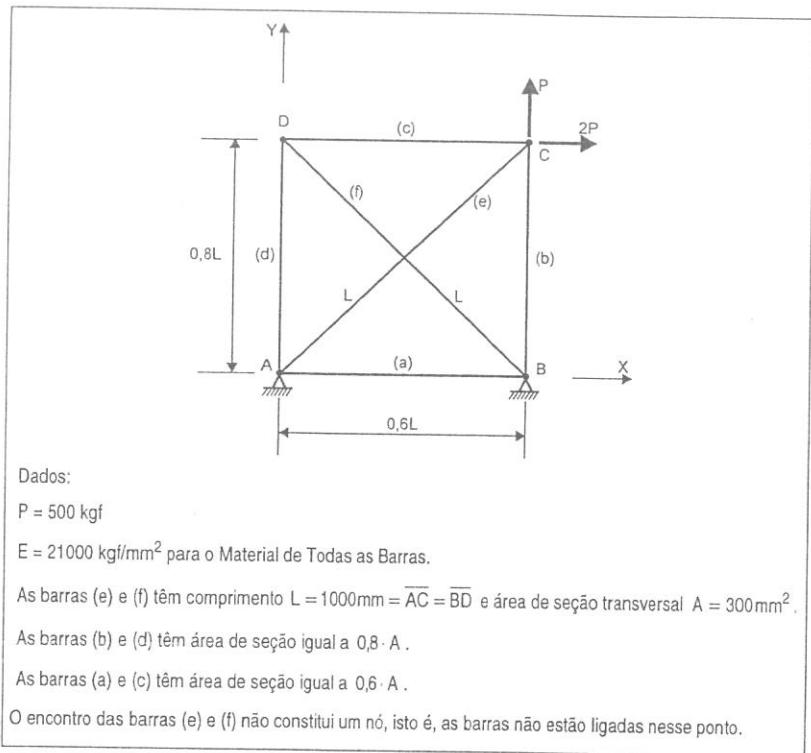


Figura 3.7 – Estrutura constituída por Barras de Treliça para Cálculo pelo Método dos Elementos Finitos.

3.4.1. DEFINIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL COMO UMA MONTAGEM DE ELEMENTOS

Deve-se dividir a Estrutura Real em uma Montagem de Elementos, que sejam adequados para simular o problema físico objeto de investigação. No modelo são identificados os Nós, entre os quais os elementos são definidos, isto é, entre os quais os elementos “trabalham”.

Neste exemplo, o Modelo da Estrutura Reticulada surge naturalmente e corresponde à própria figura 3.7.

3.4.2. DETERMINE A MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO E REPRESENTE-A NO SISTEMA GLOBAL

Vimos anteriormente que o elemento de treliça é definido por dois nós, e no âmbito isolado do elemento associamos uma numeração interna a ele, que são os nós 1 e 2. A partir da formulação de um elemento finito, ele estará disponível na “Biblioteca de Elementos” por intermédio de sua Matriz de Rigidez. Assim, qualquer que seja o elemento de treliça, e independentemente de onde for utilizado, a sua Matriz de Rigidez é dada por:

$$[\mathbf{k}]^g = \begin{bmatrix} A.E & -A.E \\ L & L \\ -A.E & A.E \\ L & L \end{bmatrix}$$

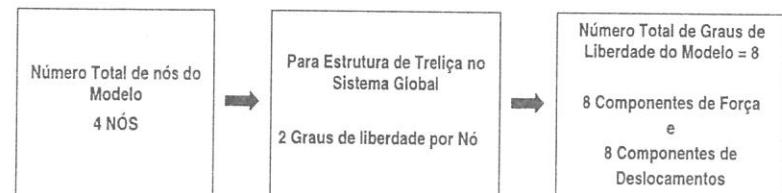
Ao representar a montagem de elementos no modelo, cada elemento deverá referir-se ao Sistema que vale para a estrutura como um todo, isto é, o **Sistema Global de Coordenadas**, para posteriormente montar-se a Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez de cada um de seus elementos. A expressão da Matriz de Rigidez de cada elemento no Sistema Global é dada por (3.9). É fundamental, ao definir os Vetores de Localização de cada elemento, **estabelecer os seus Nós 1 e 2, pois estes definirão a orientação do eixo local x do elemento**. Essa definição é arbitrária, porém escolhidos esses nós, esta orientação deverá permanecer inalterada, pois **definirá o ângulo α formado entre os eixos x local e X global**.

Outro aspecto fundamental refere-se aos vetores de localização. Estes devem, em um procedimento automatizado, referir-se à numeração em coordenadas da estrutura. Como cada nó tem mais que um grau de liberdade, **os graus de liberdade são identificados por intermédio de uma numeração**, seguindo uma orientação padronizada. Por exemplo, os Graus de Liberdade são numerados “dentro” de cada nó, seguindo uma seqüência inalterada. Assim, **numera-se o Grau de Liberdade X de um nó e depois o grau de liberdade Y, e assim sucessivamente em todos os nós**.

Vale observar que, na prática, os Programas de Análise por Elementos Finitos seguem internamente esse mesmo procedimento para “administrar” o sistema de equações, como veremos adiante. O usuário normalmente identifica um número de nó, mas “escondida” atrás dessa numeração está definida a **numeração interna dos graus de liberdade**. Neste exemplo, estamos fazendo o papel do “software” de análise, com o objetivo de entender os procedimentos do método, portanto adotaremos essa nomenclatura. Para que não haja confusão entre número de nó, e número de grau de liberdade, os nós foram identificados por intermédio de letras, apenas por motivo didático.

Assim, na figura 3.8, foram feitas as numerações dos graus de liberdade da estrutura, seguindo a orientação estabelecida, independentemente de qualquer condição de restrição.

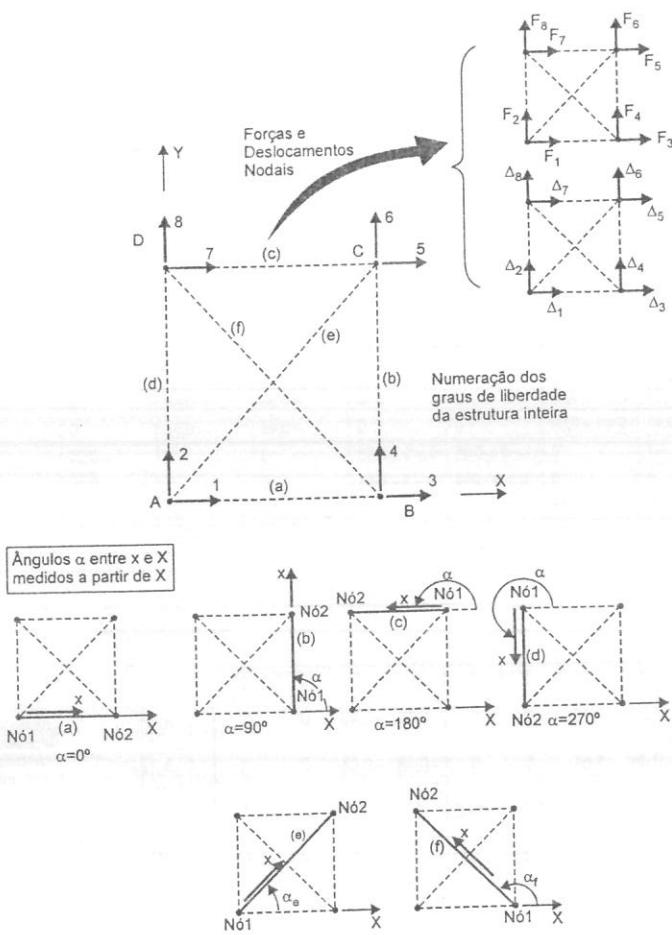
Nessa mesma figura foi identificada para cada elemento a definição do **eixo local x**, por intermédio da escolha arbitrária dos nós 1 e 2. A partir dessa definição, cada elemento foi identificado em uma visão “explodida”, de modo a definir em cada caso o valor do ângulo α . Assim, para a estrutura em estudo, temos:



Assim, as Matrizes que contêm as Forças Nodais de toda a Estrutura e os Deslocamentos Nodais serão:

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\Delta\} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix}$$

Elemento de Treliça Sistemas de Coordenadas Local e Global



A figura 3.9 representa cada elemento do modelo identificando os graus de liberdade associados aos nós 1 e 2 do elemento.

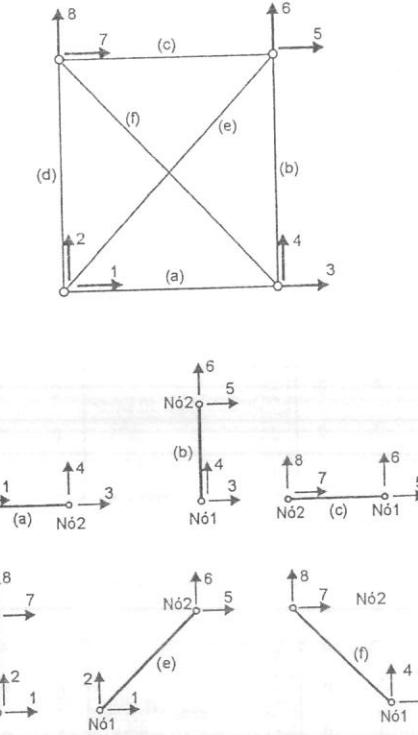


Figura 3.9 – Identificação de cada elemento do modelo e os correspondentes graus de liberdade, numerados ao longo da estrutura inteira.

A partir da figura anterior, utilizando a expressão da Matriz de Rígidez de um Elemento de Barra Articulada, vamos montar a Matriz de Rígidez de cada um dos elementos da estrutura. Na tabela seguinte são identificados todos os valores necessários para efetuar essa montagem e, em seguida, a expressão geral da matriz de rigidez de um elemento de trílica no sistema Global.

Tabela 3.1 – Ângulos α para as diversas barras do modelo da estrutura.

ELEMENTO	α	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda \cdot \mu$
a	0°	1	0	1	0	0
b	90°	0	1	0	1	0
c	180°	-1	0	1	0	0
d	270°	0	-1	0	1	0
e	α_e	0,6	0,8	0,36	0,64	0,48
f	α_f	-0,6	0,8	0,36	0,64	-0,48

$$[K]^g = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}$$

GL - Grau de Liberdade

Assim, substituindo os valores numéricos definidos na tabela anterior, teremos as Matrizes de Rígidez de todos os elementos da estrutura objeto de análise, dadas em seguida.

$$[K]^a = \frac{(0,6A)E}{0,6L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]^b = \frac{(0,8A)E}{0,8L} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^c = \frac{(0,6A)E}{0,6L} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]^d = \frac{(0,8A)E}{0,8L} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix}$$

$$[K]^f = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0,36 & -0,48 & -0,36 & 0,48 \\ -0,48 & 0,64 & 0,48 & -0,64 \\ -0,36 & 0,48 & 0,36 & -0,48 \\ 0,48 & -0,64 & -0,48 & 0,64 \end{bmatrix}$$

3.4.3. MONTE A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA A PARTIR DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS SEUS ELEMENTOS - SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Utilizando o Procedimento de Montagem definido anteriormente, podemos obter a Matriz de Rígidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rígidez de cada um dos seus elementos.

Devemos identificar em cada Matriz de Rígidez de Elemento, a sua contribuição nessa montagem. Por exemplo, os coeficientes I, J (linha, coluna) da matriz de um elemento serão adicionados na mesma localização I, J da Matriz da estrutura. Assim, por intermédio desse procedimento, serão obtidas as *Equações de Equilíbrio da Estrutura*. É obtida a Matriz Coeficiente que relaciona as Forças Nodais e os Deslocamentos Nodais para toda a Estrutura. A estrutura analisada tem 8 graus de liberdade, portanto a sua Matriz de Rígidez terá dimensão 8×8 . A Matriz de Rígidez da Estrutura contém todos os seus graus de liberdade identificados no vetor de localização. Inserindo os termos nas linhas e colunas correspondentes para montar $[K]$, teremos:

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1+0+0,36 & 0+0+0,48 & -1 & 0 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0+0+0,48 & 0+1+0,64 & 0 & 0 & -0,48 & -0,64 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1+0+0,36 & 0+0-0,48 & 0 & 0 & -0,36 & 0,48 \\ 0 & 0 & 0+0-0,48 & 0+1+0,64 & 0 & -1 & 0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0 & 0 & 0+1+0,36 & 0+0+0,48 & -1 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0 & -1 & 0+0+0,48 & 1+0+0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & 0,48 & -1 & 0 & 1+0+0,36 & 0+0-0,48 \\ 0 & -1 & 0,48 & -0,64 & 0 & 0 & 0+0-0,48 & 0+1+0,64 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Reações} \\ \left\{ F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8 \right\} \\ \xrightarrow{\quad \quad \quad} \\ = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1,36 & 0,48 & -1 & 0 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0,48 & 1,64 & 0 & 0 & -0,48 & -0,64 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1,36 & -0,48 & 0 & 0 & -0,36 & 0,48 \\ 0 & 0 & -0,48 & 1,64 & 0 & -1 & 0,48 & 0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0 & 0 & 1,36 & 0,48 & -1 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0 & -1 & 0,48 & 1,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & 0,48 & -1 & 0 & 1,36 & -0,48 \\ 0 & -1 & 0,48 & 0,64 & 0 & 0 & -0,48 & 1,64 \end{bmatrix} \\ \text{Forças Aplicadas} \\ \text{Deslocamentos a calcular - Incógnitas -} \\ \text{Pedaço da Matriz de Rígidez que relaciona forças aplicadas e deslocamentos Incógnitas} \end{array}$$

Esta última equação matricial representa as equações de Equilíbrio da Estrutura.

Se fizéssemos o produto matricial poderíamos representar as equações constituintes desse sistema. Na forma matricial essas equações poderiam ser resolvidas de forma compacta. A título de ilustração, representantes o sistema de equações:

REAÇÕES

$$\begin{cases} F_1 = (1,36 \cdot \Delta_1 + 0,48 \cdot \Delta_2 - 1 \cdot \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 - 0,36 \cdot \Delta_5 - 0,48 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8) \cdot AE \\ F_2 = (0,48 \cdot \Delta_1 + 1,64 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 - 0,48 \cdot \Delta_5 - 0,64 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 - 1 \cdot \Delta_8) \cdot AE \\ F_3 = (-1 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - 1,36 \cdot \Delta_3 - 0,48 \cdot \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 0,36 \cdot \Delta_7 + 0,48 \cdot \Delta_8) \cdot AE \\ F_4 = (0 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - 0,48 \cdot \Delta_3 + 1,64 \cdot \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 - 1 \cdot \Delta_6 + 0,48 \cdot \Delta_7 - 0,64 \cdot \Delta_8) \cdot AE \end{cases} \quad (3.10)$$

FORÇAS APLICADAS

$$\begin{cases} F_5 = (-0,36 \cdot \Delta_1 - 0,48 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 + 1,36 \cdot \Delta_5 + 0,48 \cdot \Delta_6 - 1 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8) \cdot AE \\ F_6 = (-0,48 \cdot \Delta_1 - 0,64 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 - 1 \cdot \Delta_4 + 0,48 \cdot \Delta_5 + 1,64 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8) \cdot AE \\ F_7 = (0 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - 0,36 \cdot \Delta_3 + 0,48 \cdot \Delta_4 - 1 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 1,36 \cdot \Delta_7 - 0,48 \cdot \Delta_8) \cdot AE \\ F_8 = (0 \cdot \Delta_1 - 1 \cdot \Delta_2 + 0,48 \cdot \Delta_3 - 0,64 \cdot \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 0,48 \cdot \Delta_7 + 1,64 \cdot \Delta_8) \cdot AE \end{cases}$$

3.4.4. DEFINA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DESLOCAMENTOS-AS RESTRIÇÕES- PARA PREPARAR A SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A Matriz de Rígidez da Estrutura completamente montada é *Simétrica e Singular*. Já sabemos da impossibilidade de resolver esse sistema devido ao movimento de corpo rígido, pois o sistema completo representa a estrutura sem qualquer vínculo. Para as condições de Restrição, isto é, a estrutura restrita em A e B, correspondente aos *graus de liberdade 1,2,3 e 4*, as Forças Externas “aplicadas” na estrutura são F_1, F_2 e F_3 e F_4 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são Externas “aplicadas” na estrutura são F_5, F_6, F_7 e F_8 .

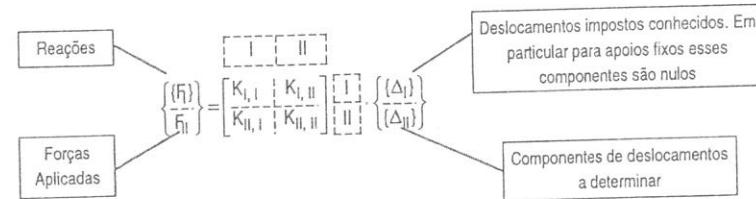
Assim com $F_5 = +2P = 1000\text{kgf}$; $F_6 = +P = 500\text{kgf}$ e $\frac{AE}{L} = \frac{300 \cdot 21000}{1000} = 6300$ temos:

$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2P \\ P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8568 & 3024 & -6300 & 0 \\ 3024 & 10332 & 0 & 0 \\ -6300 & 0 & 8568 & -3024 \\ 0 & 0 & -3024 & 10332 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Deve-se observar que este sistema de equações foi gerado a partir da condição de que os componentes de deslocamento nos apoios fixos são nulos. No caso geral, estes valores conhecidos poderiam ser não nulos, e a relação entre forças e deslocamentos incluiria estes termos. Deve-se notar também, que somente são aplicadas Forças associadas aos graus de liberdade 5 e 6. Porém, os componentes de força associados aos graus de liberdade 7 e 8 estão representados na Matriz coluna liberdade 5 e 6. Porém, os componentes de força associados aos graus de liberdade 7 e 8 estão representados na Matriz coluna liberdade 5 e 6. Porém, os componentes de força associados aos graus de liberdade 7 e 8 estão representados na Matriz coluna liberdade 5 e 6. Porém, os componentes de força associados aos graus de liberdade 7 e 8 estão representados na Matriz coluna liberdade 5 e 6. Porém, os componentes de força associados aos graus de liberdade 7 e 8 estão representados na Matriz coluna liberdade 5 e 6. Porém, os componentes de força associados aos graus de liberdade 7 e 8 estão representados na Matriz coluna liberdade 5 e 6.

QUADRO IV – GENERALIZANDO O PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS PARA QUALQUER TIPO DE MODELO ESTRUTURAL

Para uma montagem de Elementos Finitos, podemos identificar no caso mais geral:



As “MACROS” Matrizes podem ser multiplicadas, resultando:

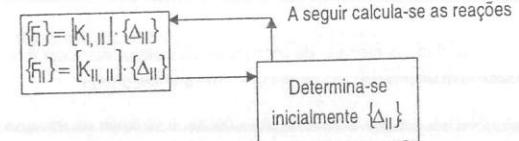
$$\{F\} = [K]_{I,I} \cdot \{\Delta_I\} + [K]_{I,II} \cdot \{\Delta_{II}\} \quad (1)$$

$$\{F_{II}\} = [K]_{II,I} \cdot \{\Delta_I\} + [K]_{II,II} \cdot \{\Delta_{II}\} \quad (2)$$

Resolve-se o Sistema ou Equação Matricial (2), pois $\{F_{II}\}$, $[K]_{II,I}$ e $[K]_{II,II}$ são conhecidas e determina-se $\{\Delta_{II}\}$

Retorna-se à equação (1) e com $\{\Delta_{II}\}$, determina-se $\{F_I\}$

Em particular, para apoios fixos tem-se $\{\Delta_I\} = \{0\}$ = ZERO, então



3.4.5. DETERMINE OS DESLOCAMENTOS NODAIS PARA A ESTRUTURA INTEIRA, RESOLVENDO O SISTEMA DE EQUAÇÕES, E POSTERIORMENTE, AS REAÇÕES DE APOIO

A equação 3.11 permite efetuar o Cálculo dos Deslocamentos para a Estrutura inteira, por intermédio da Inversão de parte da Matriz de Rígidez da Estrutura, como já discutido no Exercício do Elemento de mola do capítulo anterior. Naquela oportunidade o Cálculo da Matriz Inversa foi efetuado por Procedimento Formal, adequado para Cálculo Manual de Matrizes de pequena ordem, tal como 2x2 ou 3x3. Para Matrizes de maior ordem, como aquelas encontradas em grandes sistemas de equações lineares simultâneas utilizadas nas Aplicações do Método dos Elementos Finitos, e que constituem importante tarefa das Análise Numéricas, outros procedimentos diferentes daquele acima apresentado são utilizados. Um dos métodos mais conhecidos de solução de sistemas de equações lineares, é o *Método de Gauss*, da *Eliminação*. O *Método Básico de Gauss* reduz as equações à forma triangular. Para introduzir essa idéia, utilizaremos o Método de Gauss nas operações manuais de resolução do Sistema deste exercício, com apenas pretensões didáticas (ver Quadro V). A implementação de rotinas para grandes sistemas de equações, e que fogem aos objetivos deste texto, deveriam ser aprofundadas pelo leitor que pretende se envolver com a implantação dessas rotinas em computador, como por exemplo, nos trabalhos de desenvolvimento de “softwares” de análise.

QUADRO V – REVISANDO O MÉTODO DE GAUSS

O **Método de Gauss ou Método das Eliminações Sucessivas**, é um processo para resolução de Sistemas Lineares, que por intermédio de Transformações Elementares, **torna o Sistema dado em outro equivalente e de solução imediata**. Tais operações são basicamente:

- Permutar entre si duas equações do Sistema.** Isso permite, em termos práticos, agrupar as equações de forma organizada. Por exemplo, para as equações do Quadro IV, os termos correspondentes às Reações de Apoio (F_i), ficariam agrupadas na parte “superior” da Matriz de Carga, e assim sucessivamente para os outros elementos do sistema, sem alterar o Sistema.
- Multiplicar todos os termos de uma das equações do Sistema por um número diferente de zero**
- Multiplicar uma equação do Sistema por um número diferente de zero, e adicionar o resultado a outra equação do Sistema.**

Esses procedimentos têm o seguinte objetivo:

- **Eliminar a 1ª incógnita das equações, com exceção da primeira equação.** Isso pode ser feito tornando seu coeficiente igual a zero.
- **Eliminar a 2ª incógnita das equações, com exceção da segunda equação.** Isso pode ser feito tornando seu coeficiente igual a zero.
- **Eliminar a 3ª incógnita das equações, com exceção da terceira equação.** Isso pode ser feito tornando seu coeficiente igual a zero, e assim sucessivamente.

Por esse procedimento vai-se **reduzindo o número de incógnitas das equações seguintes sucessivamente**, até que na última equação teremos somente uma equação a uma incógnita- “**Forward Reduction**”

A partir desta última equação reduzida, determina-se a última incógnita, e voltando na equação anterior e substituindo-se essa última incógnita, determina-se a penúltima, e assim sucessivamente. “**Backsubstitution**”.

Esse procedimento é aplicado ao exemplo do presente exercício como ilustração.

Aplicando esse procedimento ao sistema de equações deste exercício, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 \\ 3024 \cdot \Delta_5 + 10332 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 500 \\ -6300 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 8568 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 0 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3024 \cdot \Delta_5 + 10332 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 500 \\ -6300 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 8568 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 0 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -6300 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 8568 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 0 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Passo 1: Subtrair um múltiplo da equação (1), das equações (2) e (3) para obter zeros na primeira coluna de [K]. Isto significa que

$\left(\begin{array}{c} -3024 \\ 8568 \end{array} \right)$ a primeira linha é adicionada à Segunda linha, e que $\left(\begin{array}{c} 6300 \\ 8568 \end{array} \right)$ vezes a primeira linha é adicionado à terceira linha.

$$\left\{ \begin{array}{l} 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 147,1 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 2223,5 \cdot \Delta_6 + 3935,6 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 735,3 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (1')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \Delta_5 + 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 147,1 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 2223,5 \cdot \Delta_6 + 3935,6 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 735,3 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (2')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \Delta_5 + 2223,5 \cdot \Delta_6 + 3935,6 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 735,3 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (3')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (4')$$

Passo 2: $\left(-\frac{2223,5}{9264,7} \right)$ vezes a equação (2') é adicionado à equação (3').

$$\left\{ \begin{array}{l} 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 147,1 \end{array} \right. \quad (1'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 3402 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 700 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (3'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 3402 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 700 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 \end{array} \right. \quad (4'')$$

Passo 3: $\left(\frac{3024}{3402} \right)$ vezes a equação (3'') é adicionado à equação (4'').

$$\left\{ \begin{array}{l} 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 147,1 \end{array} \right. \quad (1'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 3402 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 700 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 7644 \cdot \Delta_8 = 622,2 \end{array} \right. \quad (3'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 7644 \cdot \Delta_8 = 622,2 \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 7644 \cdot \Delta_8 = 622,2 \end{array} \right. \quad (4'')$$

↓

Começar resolvendo (4'') → em seguida substituir nas equações anteriores. Assim:

$$(4'') \Delta_8 = \frac{622,2}{7644} \rightarrow \boxed{\Delta_8 \approx 0,08140 \text{ mm}}$$

$$(3'') 3402 \cdot \Delta_7 - 3024 \times 0,08140 = 700 \rightarrow \boxed{\Delta_7 \approx 0,27812 \text{ mm}}$$

$$(2'') 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot 0,27812 = 147,1 \rightarrow \boxed{\Delta_6 \approx -0,05087 \text{ mm}}$$

$$(1'') 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot (-0,05087) - 6300 \cdot (0,27812) = 1000 \rightarrow \boxed{\Delta_5 = 0,33917 \text{ mm}}$$

Dessa forma, estão determinados os componentes de deslocamentos para toda a estrutura.

As equações (3.10) permitirão o Cálculo das Reações de Apoio na Estrutura.

Assim com $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$, e substituindo os valores dos deslocamentos anteriormente calculados, teremos os valores das Forças de Reação, com os respectivos sinais, que devem ser interpretados de acordo com a Convenção de sinais, referida aos eixos globais.

$F_1 = -615,41 \text{ Kgf}$ – Em sentido contrário ao eixo X.

$F_2 = -1333,36 \text{ Kgf}$ – Em sentido contrário ao eixo Y.

$F_3 = -384,62 \text{ Kgf}$ – Em sentido Contrário ao eixo X.

$F_4 = 833,31 \text{ Kgf}$ – No mesmo sentido do eixo Y.

Note que as Forças Externas aplicadas na estrutura e as reações de apoio estão em equilíbrio, como é representado na figura 3.10.

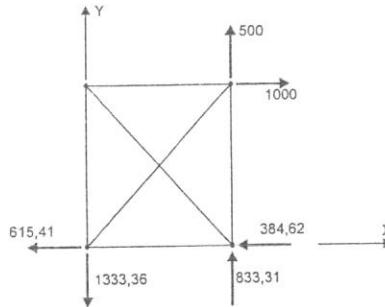


Figura 3.10 – Forças Aplicadas e Reações de Apoio para Estrutura em Equilíbrio.

3.4.6. DETERMINE AS FORÇAS INTERNAS EM CADA ELEMENTO A PARTIR DO CONHECIMENTO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS ASSOCIADOS AO ELEMENTO

Após obter o Campo de Deslocamentos para a Estrutura inteira, podemos identificar para cada elemento isolado, quais são os componentes de deslocamentos nodais associados ao elemento, isto é, em cada um dos graus de liberdade. Dessa forma poderá ser definida a configuração deformada do mesmo. Esse procedimento é efetuado elemento por elemento, pois conhecemos a Lei que exprime a Força Interna no mesmo em função dos deslocamentos nodais. Essa idéia, como vimos no exemplo da mola, é geral para todas as montagens de elementos finitos. A deformação obtida nos diversos elementos de uma estrutura, decorre do campo de deslocamentos a que esta está submetida. No caso da barra de treliça, à semelhança da Mola, a condição de deformação é obtida pela diferença dos deslocamentos dos Nós que definem o elemento. Deve-se notar que a Lei de Deformação Interna do

Elemento foi formulada no Sistema Local de Coordenadas, e no Quadro III vimos que Força Interna = $\frac{EA}{L} \cdot d$, onde d representa a

diferença dos deslocamentos u_1 e u_2 .

A expressão da Deformação é sempre definida no Sistema Local, até porque quando o elemento finito é formulado, não se conhece antecipadamente qual será a sua posição em uma montagem qualquer. Como a Estrutura completa foi resolvida no Sistema Global, devemos transformar esses valores calculados exprimindo-os agora no Sistema Local. Assim:

$$\mathcal{F}_e = \frac{AE}{L} \cdot (u_2 - u_1) = \text{Força Interna em Elemento de barra qualquer- Sistema Local}$$

A figura 3.11 representa para um Elemento qualquer de barra, os componentes de deslocamentos nos Sistema Local e Global. Utilizando a identificação dos nós 1 e 2 do elemento, podemos representar os componentes de deslocamento no sistema global. Representaremos genericamente por U e V os deslocamentos em X e Y , e depois faremos a correspondência com a numeração dos graus de liberdade da estrutura inteira. Da equação (3.7), temos:

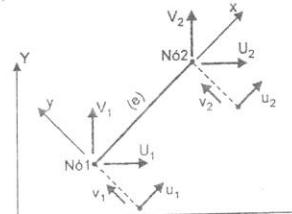


Figura 3.11 – Para cálculo da força Interna na Barra, os deslocamentos U_p , V_1 , U_2 , V_2 globais devem ser transformados para o sistema local, para calcular $\mathcal{F}_e = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1)$.

$$\{\delta\} = [\Gamma] \cdot \{\Delta\} \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Queremos calcular u_1 e u_2 , portanto:

$$u_1 = \lambda \cdot U_1 + \mu \cdot V_1$$

$$u_2 = \lambda \cdot U_2 + \mu \cdot V_2$$

Fazendo $u_2 - u_1 = \lambda \cdot U_2 + \mu \cdot V_2 - \lambda \cdot U_1 - \mu \cdot V_1 = \lambda(U_2 - U_1) + \mu(V_2 - V_1)$ representado na forma matricial:

$$\{u_2 - u_1\} = [\lambda \ \mu]_e \cdot \begin{pmatrix} U_2 - U_1 \\ V_2 - V_1 \end{pmatrix}$$

Assim:

$$\mathcal{F}_e = \left(\frac{AE}{L} \right)_e [\lambda \ \mu]_e \cdot \begin{pmatrix} U_2 - U_1 \\ V_2 - V_1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

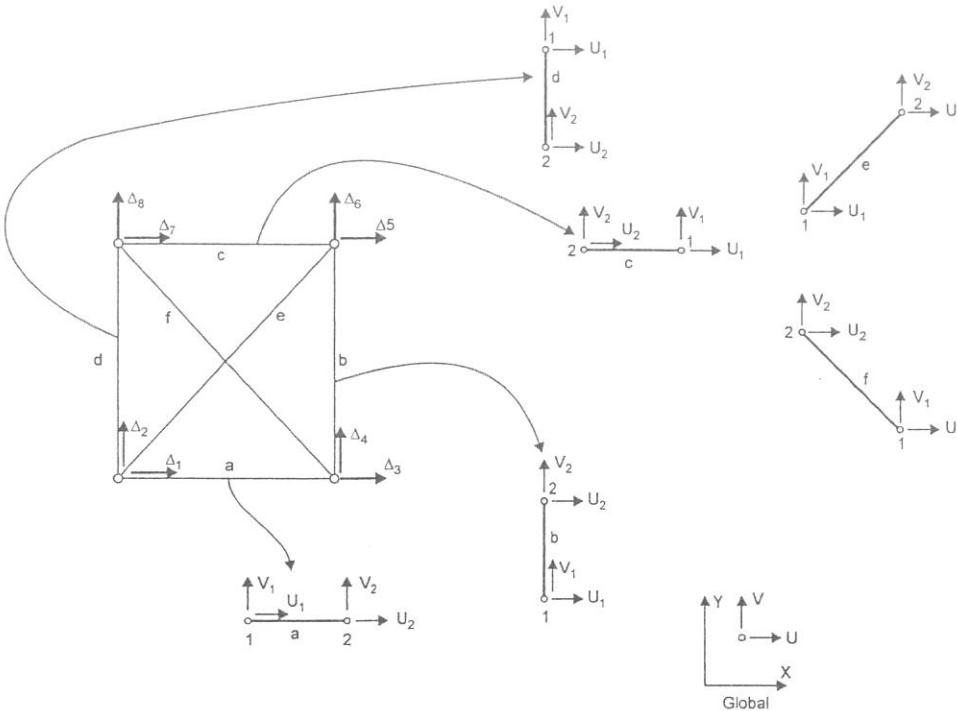
Como a expressão é calculada elemento por elemento, para cada elemento e , temos a sua área de seção e o material correspondente. Assim cada elemento pode ter geometria e material diferentes do outro.

Definimos a sua posição de cada elemento na montagem por intermédio do seno e cosseno do ângulo α e identificamos os Deslocamentos Globais associados a ele.

Assim, com a expressão 3.12 podemos calcular as Forças Internas em todos os elementos do Modelo da Estrutura. Como essa expressão relaciona os deslocamentos globais aos nós 1 e 2, deve-se apenas identificar na numeração geral dos graus de liberdade da estrutura quais são esses componentes. A figura 3.12 identifica essa correspondência e organiza essa relação em forma de tabela.

Na montagem da matriz de rigidez da Estrutura, foram consideradas inicialmente as Matrizes de Rigidez de cada Elemento. Para cada elemento, foram contabilizadas as características geométricas e as propriedades do material associado ao elemento. Desta forma, em princípio cada elemento poderia ser constituído de um material diferente.

Esta é uma característica geral dos modelos em elementos finitos. Após a resolução do sistema de equações para a estrutura inteira, o cálculo das forças internas em cada elemento considera as características de cada elemento separadamente em termos de propriedades geométricas e de material.



Elemento	Deslocamentos		Globais	
	U ₁	V ₁	U ₂	V ₂
(a)	Δ ₁	Δ ₂	Δ ₃	Δ ₄
(b)	Δ ₃	Δ ₄	Δ ₅	Δ ₆
(c)	Δ ₅	Δ ₆	Δ ₇	Δ ₈
(d)	Δ ₇	Δ ₈	Δ ₁	Δ ₂
(e)	Δ ₁	Δ ₂	Δ ₅	Δ ₆
(f)	Δ ₃	Δ ₄	Δ ₇	Δ ₈

Figura 3.12 – Correspondência entre os Deslocamentos Globais U,V e Δ.

Por exemplo, para a barra (b) teríamos:

$$\bar{F}_b = \left(\frac{AE}{L} \right)_b [\lambda \ \mu]_b \begin{Bmatrix} U_2 - U_1 \\ V_2 - V_1 \end{Bmatrix} = \left(\frac{0,8 \cdot A \times E}{0,8 \cdot L} \right) \begin{Bmatrix} 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_5 - \Delta_3 \\ \Delta_6 - \Delta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{F}_b = 6300 \cdot [0 \ 1] \begin{Bmatrix} 0,33917 - 0 \\ -0,05087 - 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{F}_b = -320,5 \text{ kgf}}$$

O sinal negativo da Força Interna indica que esta é de Compressão na barra.

$$\text{Utilizando o Quadro III poderíamos calcular: } \sigma = \frac{\bar{F}_b}{A} = -\frac{320,5 \text{ kgf}}{0,8 \cdot 300} = -1,34 \text{ kgf/mm}^2 \quad \text{Tensão Normal de Compressão na Barra.}$$

Utilizando a correspondência estabelecida entre U, V e Δ para os diversos graus de liberdade podemos calcular as Forças Internas para os demais elementos de forma análoga:

$$\bar{F}_a = 6.300 \cdot [1 \ 0] \begin{Bmatrix} \Delta_3 - \Delta_1 \\ \Delta_4 - \Delta_2 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [1 \ 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{F}_a = 0$$

$$\bar{F}_c = 6.300 \cdot [-1 \ 0] \begin{Bmatrix} \Delta_7 - \Delta_5 \\ \Delta_8 - \Delta_6 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [-1 \ 0] \begin{Bmatrix} 0,27812 - 0,33917 \\ 0,08140 - (-0,05087) \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{F}_c = +384,62 \text{ kgf} \quad (\text{Tração})$$

$$\bar{F}_d = 6.300 \cdot [0 \ -1] \begin{Bmatrix} \Delta_1 - \Delta_7 \\ \Delta_2 - \Delta_8 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [0 \ -1] \begin{Bmatrix} 0 - 0,27812 \\ 0 - 0,08140 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{F}_d = +512,82 \text{ kgf} \quad (\text{Tração})$$

$$\bar{F}_e = 6.300 \cdot [0,6 \ 0,8] \begin{Bmatrix} \Delta_5 - \Delta_1 \\ \Delta_6 - \Delta_2 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [0,6 \ 0,8] \begin{Bmatrix} 0,33917 - 0 \\ -0,05087 - 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{F}_e = +1025,68 \text{ kgf} \quad (\text{Tração})$$

$$\bar{F}_f = 6.300 \cdot [-0,6 \ 0,8] \begin{Bmatrix} \Delta_7 - \Delta_3 \\ \Delta_8 - \Delta_4 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [-0,6 \ 0,8] \begin{Bmatrix} 0,27812 - 0 \\ 0,08140 - 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{F}_f = -641,04 \text{ kgf} \quad (\text{Compressão})$$

3.5. ASPECTOS GERAIS IMPORTANTES NA FORMULAÇÃO DE QUALQUER ELEMENTO FINITO

O Elemento de Treliça foi utilizado como “pano de fundo” para se introduzir o conceito de transformação entre sistemas de coordenadas. Ao representarmos o equilíbrio de um elemento finito por intermédio do seu diagrama de corpo livre, as forças que justificam o equilíbrio do elemento podem estar referidas tanto ao sistema local como ao sistema global de coordenadas. O interesse de uma ou outra representação já foi discutido anteriormente. É importante, porém, observar que as transformações da representação do equilíbrio de forças de um sistema para outro é possível por intermédio da Matriz de Transformação. Esse conceito geral é válido para todos os elementos finitos. A particularidade associada a cada tipo de elemento, está no número de componentes de força que justificam o equilíbrio do elemento, e natureza dessas forças. Alguns elementos transferem apenas forças nodais, por exemplo o Elemento de Treliça, outros, como por exemplo o Elemento de Viga que estudaremos a seguir, transferem forças e momentos. Mas sempre será possível representar esses componentes em um sistema ou outro. Assim, todo elemento finito terá a sua matriz de transformação, e de forma análoga à treliça, a sua dimensão está associada ao número de componentes de força considerados no elemento. Da mesma forma, o elemento admitirá a representação da sua rigidez, por intermédio da sua Matriz de Rígidez, tanto no sistema local como no sistema global. A equação (3.8) que representa a transformação da Matriz de Rígidez de um Elemento do Sistema Local para o Sistema Global é de aplicação geral para todos os elementos finitos, desde que para cada Matriz de Rígidez do Elemento considerada no Sistema Local [k]^e, seja utilizada a Matriz de Transformação associada ao Elemento. A figura 3.13 ilustra essa idéia geral. Os exemplos representados do elemento de viga no espaço, elemento sólido na forma de um paralelepípedo e o elemento de casca serão estudados e formulados adiante, e foram colocados aqui apenas no sentido de enfatizar a idéia da Transformação da Matriz de Rígidez do Sistema Local para o Sistema Global no caráter mais amplo possível.

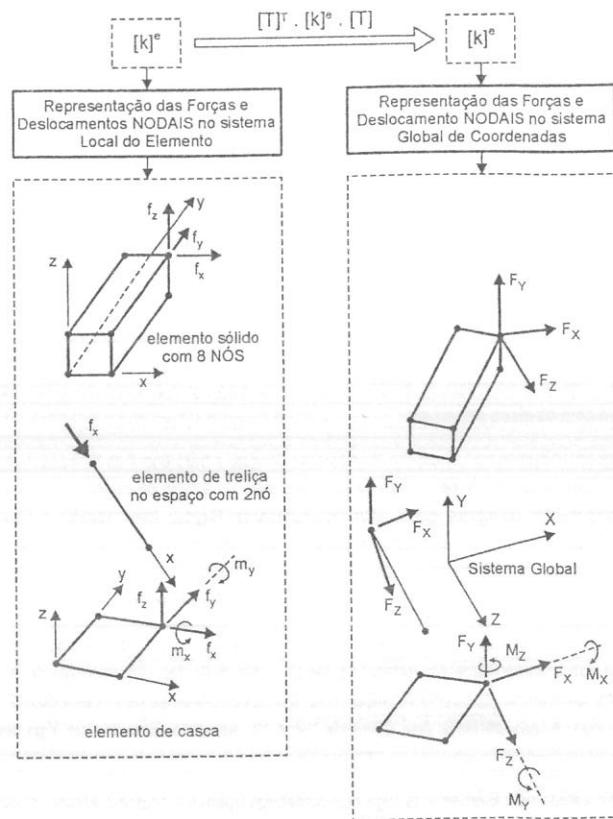
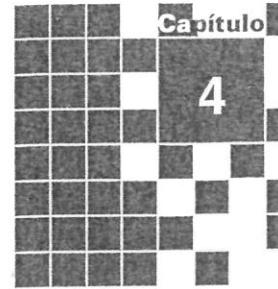


Figura 3.13 – Transformação da Matriz de Rígidez de um Elemento do Sistema Local para o Sistema Global de Coordenadas.

A partir dos Conceitos discutidos envolvendo a Transformação da Matriz $[k]^e$ para $[K]^e$, ou seja, do sistema local para o Sistema Global, fica claro que:

- Nas aplicações gerais das Montagens de Elementos Finitos, os elementos estão posicionados no espaço, segundo orientações as mais diversas possíveis. Assim, o procedimento de Transformação da Matriz de Rígidez de cada elemento do sistema local para o sistema global, dado por $[K]^e = [T]^T \cdot [k]^e \cdot [T]$, deve ser sempre executado antes da montagem da matriz de rigidez da estrutura, e deve ser feita elemento por elemento.
- Nessas aplicações gerais, como os arranjos dos elementos são totalmente diferentes para cada caso objeto de análise, seria impraticável formular o elemento finito no sistema global, até porque não sabemos “a priori” em que posição o elemento estará em um modelo futuro. Ou seja, a formulação do elemento deve independente de uma particular posição que este possa a vir ocupar no modelo a ser proposto para um dado problema. Dessa forma, a matriz de rigidez de um elemento, deve “nascer” no Sistema Local de Coordenadas. Para ser de uso geral, a Matriz de Rígidez do elemento finito deve então ser formulada inicialmente no Sistema Local de coordenadas. A utilização do elemento em uma posição qualquer, pode ser efetuar por intermédio de uma simples transformação, como já abordado anteriormente.



Elemento de Viga Superposição de Comportamentos Independentes

Elemento de viga – estudando os elementos unidimensionais, que transmitem - além de forças axiais - flexões, cisalhamentos e torções.

4.1. O ELEMENTO DE VIGA

Neste capítulo iniciaremos o estudo do terceiro elemento finito que fará parte da Biblioteca de Elementos que estamos construindo: O **Elemento de Viga**. À semelhança dos Elementos de Mola e de Treliça, desenvolvidos nos capítulos anteriores, mais uma vez aproveitaremos o estudo de um elemento simples para identificarmos muitas propriedades que são válidas para todos os tipos de elementos. Em particular, a idéia da superposição de comportamentos físicos independentes em um mesmo elemento e a contabilização destes, também de forma independente, na montagem da sua matriz de rigidez é um conceito geral útil para o entendimento de outros elementos a serem estudados posteriormente, como, por exemplo, o elemento de casca, a ser desenvolvido no estudo dos elementos bidimensionais, ainda dentro do âmbito linear.

Sabemos do estudo da Resistência dos Materiais Elementar, que uma Viga consiste de uma Barra Reta, de comprimento muito maior que as dimensões de sua seção transversal, e pode transmitir, além de **Forças Axiais**, **Momentos Fletores** nos planos que contêm seus dois eixos principais do plano da seção transversal da viga, **Forças Cortantes** nos mesmos planos de ação dos momentos fletores, e **Momentos Torções** em relação ao eixo dos centros de torção da viga, como representa a figura 4.1.

A **Lei das Seções Planas** constitui a base da **Teoria Elementar da Flexão de Vigas**, estabelecendo que qualquer seção transversal de uma viga, que é inicialmente plana, mantém-se plana após a deformação. As vigas, conectadas umas às outras em suas extremidades, compõem uma **Estrutura Reticulada**, como mostra a figura 4.1. Nessas estruturas, ao contrário do que ocorre com uma treliça já estudada no capítulo anterior, as **uniões entre os elementos** não são articuladas, mas sim **Rígidas**, dando origem nessa montagem às **Vigas Contínuas**, os **Pórticos Planos** e os **Pórticos Espaciais**, estes últimos amplamente utilizados nas Construções Metálicas.

As **Forças Externas** atuantes nas estruturas na forma de Pórticos ou Vigas Contínuas podem ser aplicadas nas Juntas estruturais ou, como já vimos, **nos Nós**, bem como no **vão das vigas**, isto é, entre os Nós. Vimos anteriormente, que as Cargas atuando no interior do membro, ou seja, entre os nós, para propósitos de análise, poderão ser substituídas por cargas estaticamente equivalentes atuando nos nós, as Cargas Nodais Equivalentes, citadas no capítulo 1. Este artifício introduzido, de modo a montar o sistema de equações com cargas nodais apenas e deslocamentos nodais, será comentado adiante. Porém, para propósito do

estudo da montagem da matriz de rigidez do elemento de viga, que é o nosso objetivo inicial, consideraremos que todas as Cargas Externas atuam somente nos Nós da Estrutura.

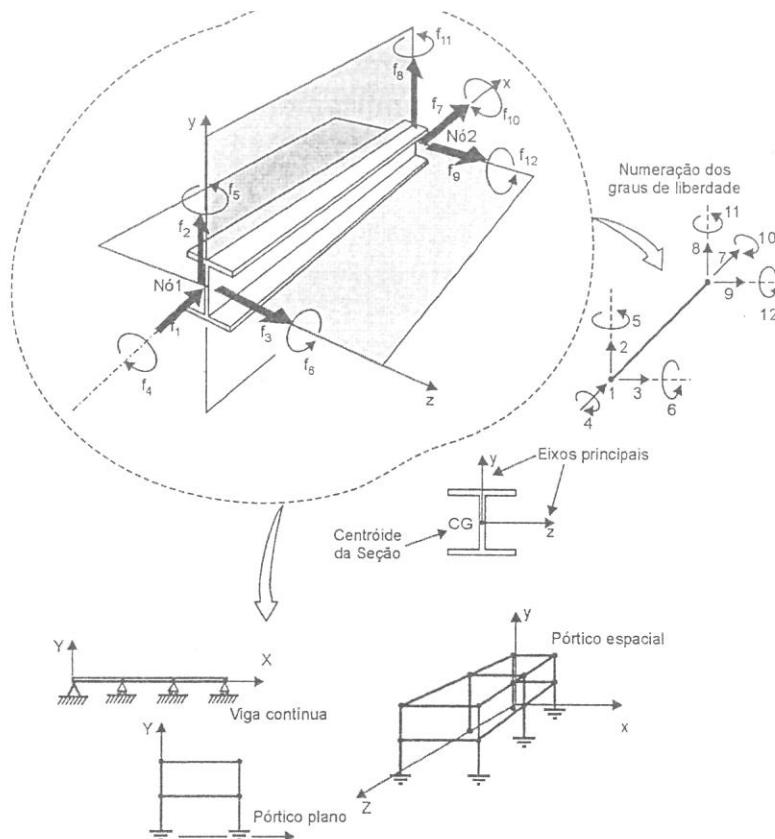


Figura 4.1 - A viga, no caso mais geral, pode transmitir Forças Axiais, Momentos Fletores em dois planos perpendiculares contendo seus eixos principais, Forças Cortantes e Momentos Torções.

Para o estudo de uma estrutura completa na forma de Viga Contínua ou Pórtico, utilizaremos a técnica geral estabelecida nos capítulos 1, 2 e 3. Objetiva-se determinar a configuração deformada da estrutura inteira por intermédio dos deslocamentos nodais. Deve-se, portanto, conhecer a Rigidez da Estrutura inteira, que deverá ser contabilizada a partir do conhecimento da rigidez de cada elemento. Isto é, o processo de montagem, generalizado na figura 2.13 será repetido para a estrutura constituída por Elementos de Viga. A base para resolver essa montagem está então na *formulação do Elemento de Viga*, por intermédio de sua *Matriz de Rigidez*, seguindo o mesmo procedimento dos capítulos anteriores. Para isso, é fundamental o entendimento de como as Forças internas em uma viga se relacionam com as deformações. Como vimos no capítulo 2, as relações que traduzem o comportamento físico do elemento são “importadas” do estudo da Resistência dos Materiais. No *Quadro VI* é feita uma breve revisão dos conceitos da Resistência dos Materiais, necessários para formular o Elemento de Viga.

Um aspecto é importante ao introduzirmos os procedimentos matemáticos para formular a Matriz de Rigidez do Elemento de Viga. Da Teoria da Resistência dos Materiais Elementar, sabemos que as Forças Axiais f_1 e f_7 da figura 4.1 só dependem dos seus correspondentes deslocamentos. Assim, dentro do âmbito linear, admitindo que os deslocamentos são pequenos, as *Ações de*

Flexão e Torção não afetam as Força Axiais presentes. Ou seja, pode-se, por exemplo, torcer a viga ou submetê-la à flexão, que não surgirão forças axiais decorrentes dessa solicitação. O mesmo é verdade para os Momentos Torções f_4 e f_{10} . Em relação à ação dos Momentos Fletores, deve-se tomar um especial cuidado ao tentar aplicar esse mesmo conceito, ou seja, tratar as Flexões nos planos perpendiculares da figura 4.1 como independentes. **Somente se os planos xy e xz coincidirem com os eixos principais da seção transversal da viga poder-se-á considerar que os momentos de flexão e as forças cortantes nos dois planos são independentes entre si.** Isto é, as Forças Cortantes e os Momentos Fletores agindo no plano xy, ou seja, f_2 , f_8 , f_6 e f_{12} , respectivamente, dependem somente dos deslocamentos nesse plano, não sendo afetados pelos deslocamentos decorrentes da flexão que possa ocorrer no plano xz perpendicular. Isso torna-se verdade também para os esforços de flexão no plano xz. Entretanto, para escolha arbitrária dos planos de flexão, as forças cortantes e os momentos fletores agindo em um desses planos dependeriam não somente dos seus correspondentes deslocamentos, mas também dos deslocamentos no outro plano perpendicular.

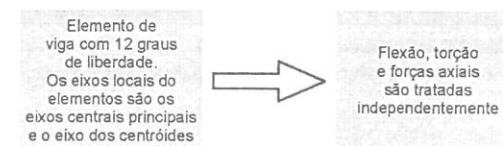
Assim, ao preparamos a estratégia para formularmos o Elemento de Viga, vamos definir como *Eixo x local do Elemento*, o eixo que passa pelos centrídeos das seções transversais ao longo da viga, e os *eixos y e z*, como os *eixos que passam pelo centrídeo da seção e coincidem com os eixos principais*.

Essa escolha terá implicações importantíssimas na formulação do elemento de viga, e trará enormes facilidades em nosso trabalho. Dessa forma, poderemos tratar a formulação do elemento de viga por intermédio do estudo de *quatro fenômenos independentes*, que estarão associados aos componentes de rigidez que o elemento apresenta: Rigidez Axial, Rigidez à Flexão no Plano xy, Rigidez à Flexão no Plano xz e Rigidez à Torção. Estas características do Elemento serão estudadas isoladamente, já que são independentes entre si, e definirão as matrizes de rigidez que traduzem esses comportamentos isolados. É o caso, por exemplo, da rigidez axial.

A rigidez axial já foi estudada no elemento de treliça, e não necessitamos formulá-la novamente, pois esta questão já está resolvida. Após efetuarmos a definição dos outros comportamentos independentes por intermédio das suas matrizes de rigidez, juntaremos todas essas propriedades em uma única matriz, que contabilizará o efeito dos 12 componentes de forças e dos 12 componentes de deslocamentos do elemento de viga, e que, portanto, terá dimensão 12 x 12. Assim, o Elemento de Viga terá 12 Graus de Liberdade.

Dessa forma, iniciaremos o nosso estudo pelo Elemento de Viga que contabiliza apenas a rigidez à Flexão, ou seja, sob ação de forças cortantes e momentos fletores. É o caso, por exemplo, das vigas que constituem a Estrutura chamada de *Viga Contínua*, sob a ação de forças e momentos atuantes nos nós, e apresentando deslocamentos apenas no plano xy, como representado na figura 4.2. Vencida esta etapa, estudaremos o comportamento à torção da viga. De posse dessas informações estaremos aptos a montar a Matriz de Rigidez do Elemento de Viga, contabilizando todos os efeitos simultaneamente em uma só Matriz de Rigidez, de dimensão 12 x 12.

Em resumo:



QUADRO VI – REVISANDO A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS - COMPORTAMENTO DAS VIGAS À FLEXÃO

FLEXÃO DE VIGAS - TENSÕES NORMAIS

Sob ação do carregamento externo P , a viga apresenta-se encurvada.

Na viga representada, as fibras da porção superior estão alongadas e as da porção inferior estão encurtadas.

Na transição entre essas duas porções não ocorre deformação da fibra, definindo, portanto, o EIXO NEUTRO, ou LINHA NEUTRA.

A intensidade da curvatura ($1/p$) desenvolvida em uma dada seção transversal depende diretamente do momento atuante na seção. As deformações presentes associadas com a curvatura variam linearmente ao longo da seção transversal, desde a máxima tração até a máxima compressão, com valor nulo na Linha Neutra.

A configuração deformada da viga pode ser traduzida matematicamente pela Equação de sua linha elástica. Para cada ponto ao longo da viga dado pela coordenada x , o deslocamento em y é $v(x)$. Tal como uma função matemática qualquer, a inclinação da função, isto é, da viga, ponto a ponto, pode ser dada pela derivada primeira de $v(x)$. Assim:

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = \tan \theta \quad (a)$$

O comprimento AB mantém-se inalterado antes e depois da flexão, e igual a dx , pois não há deformação na linha neutra.

No âmbito da Análise Linear, interessa-nos estudar apenas a TEORIA DE VIGAS para PEQUENAS DEFLEXÕES, isto é, quando os Ângulos θ são pequenos. Nestas condições, da Matemática, sabemos que para $\theta \leq 5^{\circ}44'$, temos:

$$\tan \theta = \sin \theta = \theta_{rd}$$

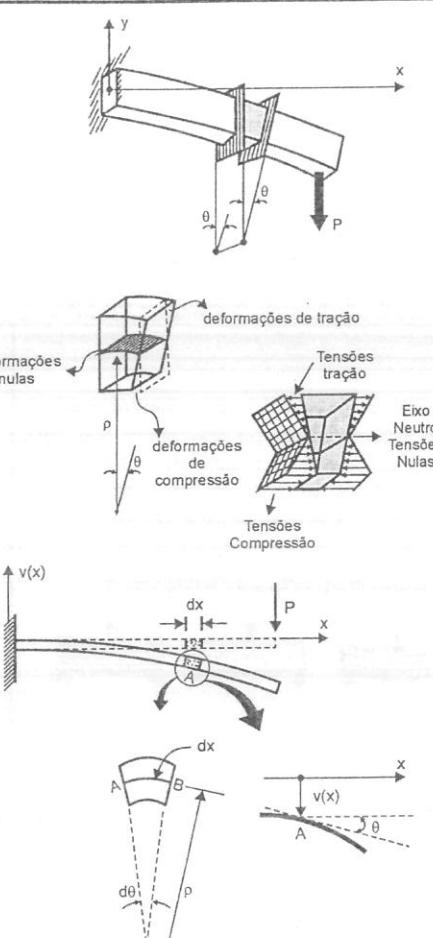
Ou seja, o valor da tangente do ângulo θ é aproximadamente igual ao seno do ângulo θ e ao valor do ângulo θ em Radianos.

Assim, de (a) temos:

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = \tan \theta = \theta_{rd} \quad (b)$$

Em um trecho elementar da viga de comprimento dx , após a flexão, estando a viga encurvada, identificamos o ângulo $d\theta$ e o raio de curvatura p . Pela definição de ângulo em radianos, temos:

$$d\theta = \frac{\text{ARCO}}{\text{RAIO}} = \frac{dx}{p} \rightarrow \frac{1}{p} = \frac{d\theta}{dx} \quad (c) \quad (\text{CURVATURA!})$$



QUADRO VI – REVISANDO A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS - COMPORTAMENTO DAS VIGAS À FLEXÃO (CONTINUAÇÃO)

A expressão (c) traduz a curvatura da viga ponto a ponto e como (b) temos que $\theta \approx v'(x)$, substituindo esta última expressão de θ em (c), teremos:

$$\frac{1}{p} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} (v'(x)) \rightarrow \frac{1}{p} = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = v''(x)$$

Assim:

$$\text{Curvatura da Viga em um ponto} = \frac{1}{p} = v''(x) \quad (d)$$

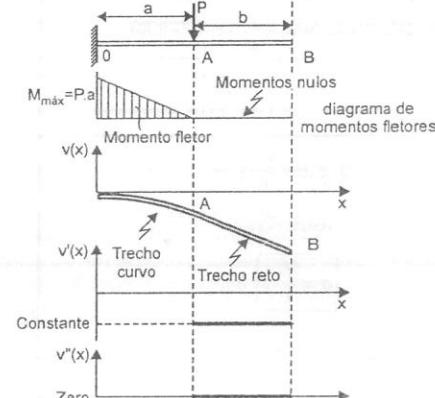
A expressão (d) relembrar-nos de uma conclusão importante da Teoria de Viga: A DEFORMAÇÃO POR FLEXÃO ESTÁ ASSOCIADA À CURVATURA ASSUMIDA PELA VIGA SOB AÇÃO DO MOMENTO FLETOR, E ASSOCIADA À SEGUNDA DERIVADA DO DESLOCAMENTO.

Assim, para a condição deslocada de uma viga, só haverá deformações se a 2ª derivada do deslocamento for diferente de zero. Fisicamente, podemos visualizar essa conclusão na figura ao lado.

No trecho AB o Momento Fletor é NULO EM TODAS AS SEÇÕES. Como não há ação de Momento, não há Curvatura. A VIGA nesse trecho se desloca, mas sem deformação. A Função que descreve o comportamento do Trecho AB (reto) é uma Função do 1º Grau, cuja 1ª derivada é constante, e cuja 2ª derivada é nula. O trecho reto pode ser interpretado como uma curva de raio infinito, ou seja: $\frac{1}{p} = 0$.

Como a intensidade da curvatura depende diretamente do Momento Atuante na seção, temos:

$$M(x) = +k \cdot v''(x)$$



Se não há atuação de momento fletor em um trecho, este será reto. Não há curvatura. A segunda derivada do deslocamento $V(x)$ é nula.

A constante k depende da RIJEZA DA VIGA, que é contabilizada levando em conta o Material e as propriedades da seção, representadas respectivamente pelo Módulo de Elasticidade E e pelo Momento de Inércia em relação à linha Neutra. Assim:

$$M(x) = +E \cdot I \cdot v''(x) \quad (e)$$

QUADRO VI – REVISANDO A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS - COMPORTAMENTO DAS VIGAS À FLEXÃO (CONTINUAÇÃO)

Na expressão (e), observamos que a RIJEZA (EI) e $v''(x)$, a curvatura, são inversamente proporcionais.

Para um dado Momento Fletor Atuante, quanto maior for EI , menor será a curvatura apresentada pela viga.

Resumindo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} = v''(x) \quad (f)$$

Relembrando a Resistência dos Materiais Elementar, para os pontos (A) da seção transversal da viga, a uma distância y da linha neutra, teremos:

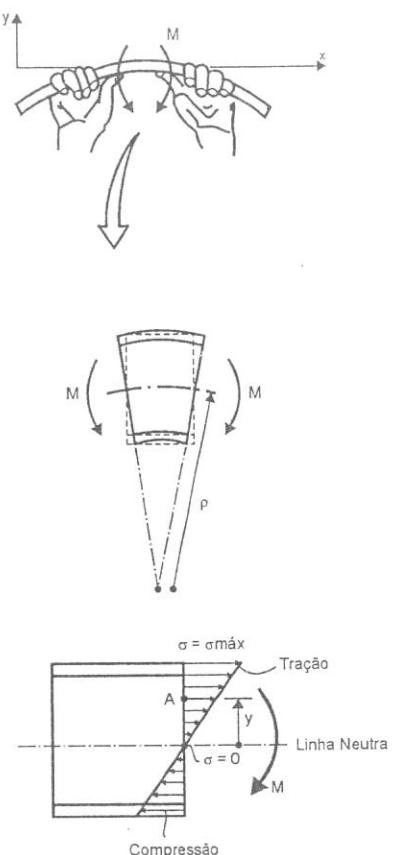
$$\epsilon \text{ (deformação axial)} = \frac{y}{\rho} = y \cdot v''(x) \quad (g)$$

$$\epsilon = y \cdot v''(x) = y \cdot \frac{M}{EI}$$

$$\text{ou } \frac{\epsilon \cdot E}{I} = \frac{M}{I} \cdot y \rightarrow$$

Tensão Normal

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \quad (h)$$



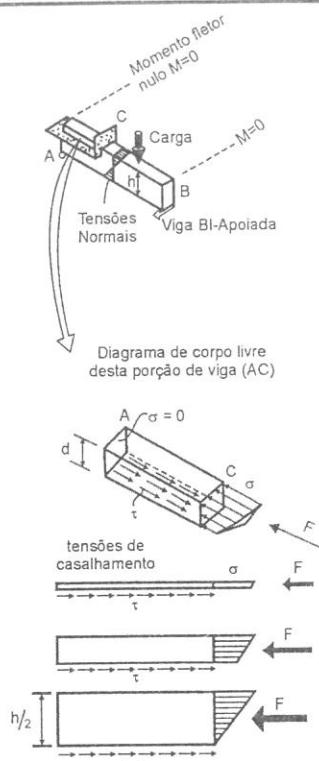
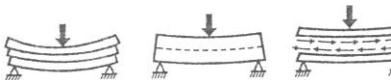
QUADRO VI – REVISANDO A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS - COMPORTAMENTO DAS VIGAS À FLEXÃO (CONTINUAÇÃO)

FLEXÃO DE VIGAS - TENSÕES DE CISALHAMENTO

Consideremos o Equilíbrio na Direção Horizontal do Trecho AC da Viga, por intermédio do seu Diagrama de Corpo Livre. As tensões σ atuando em C produzem uma Força F , agindo para a esquerda. Como na extremidade A não há tensões normais ($M = 0$), a Força F será equilibrada pela Ação de Cisalhamento do Trecho AC no resto da viga. Assim, justifica-se a existência de Tensões de Cisalhamento Horizontais τ . Isto justifica o porquê das tensões de cisalhamento serem máximas na Linha Neutra.

A idéia física da ação das tensões de cisalhamento é revisada na figura seguinte, em que são representadas duas vigas, sendo uma constituída de fibras separadas e outra, um bloco único. Na viga feita de fibras separadas, estas tendem a escorregar horizontalmenteumas em relação às outras.

No viga homogênea, embora esta tendência exista, as fibras não se separam devido às Tensões de Cisalhamento.



No estudo da Resistência dos Materiais, prova-se que a Tensão de Cisalhamento em uma fibra distando y da Linha Neutra é calculado por:

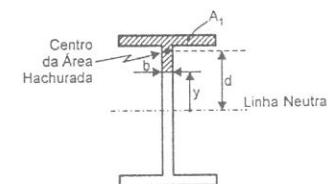
$$\tau = \frac{Q \cdot M_S}{b \cdot I} \quad (i), \text{ em que:}$$

Q = Força Cortante na Seção Transversal considerada;

b = Largura da viga na fibra considerada;

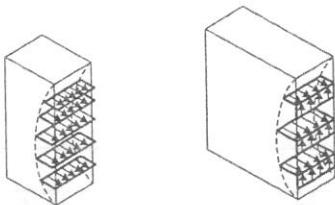
M_S = Momento Estático, ou primeiro momento de área, em relação à Linha Neutra, da área acima da fibra considerada, isto é, $M_S = A_1 \cdot d$ genericamente:

$$M_S = \int y \cdot dA$$

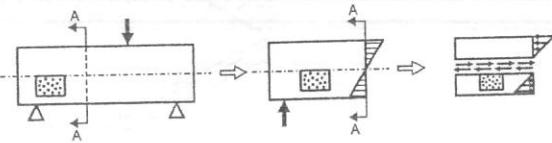


QUADRO VI – REVISANDO A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS - COMPORTAMENTO DAS VIGAS À FLEXÃO (CONTINUAÇÃO)

A expressão (i) para o cálculo de τ descreve também as tensões de cisalhamento verticais ou seja, em um ponto da seção as tensões de cisalhamento vertical e horizontal têm a mesma intensidade, como mostra o esquema seguinte:

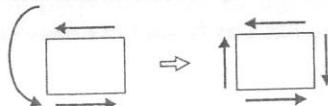


Esta última conclusão, demonstrada na Teoria de Vigas, da Resistência dos Materiais, pode ser visualizada no exemplo seguinte:



"Cortando" a viga em A, podemos representar o Diagrama de Corpo Livre da parte superior e inferior à Linha Neutra, justificando o Equilíbrio das partes isoladas, pelas Tensões de Cisalhamento atuantes.

Para o pequeno Elemento hachurado, as tensões de cisalhamento atuantes produzem um momento que tende a distorcer o elemento. Este momento é equilibrado pelo momento produzido em sentido oposto pelas tensões de cisalhamento verticais. Dessa forma, em um ponto, as tensões de cisalhamento horizontal e vertical devem ser iguais.



A relação entre Força Cortante (Q) e Momento Fletor (M) é dada na Resistência dos Materiais por:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

4.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA COM APENAS RIGIDEZ À FLEXÃO

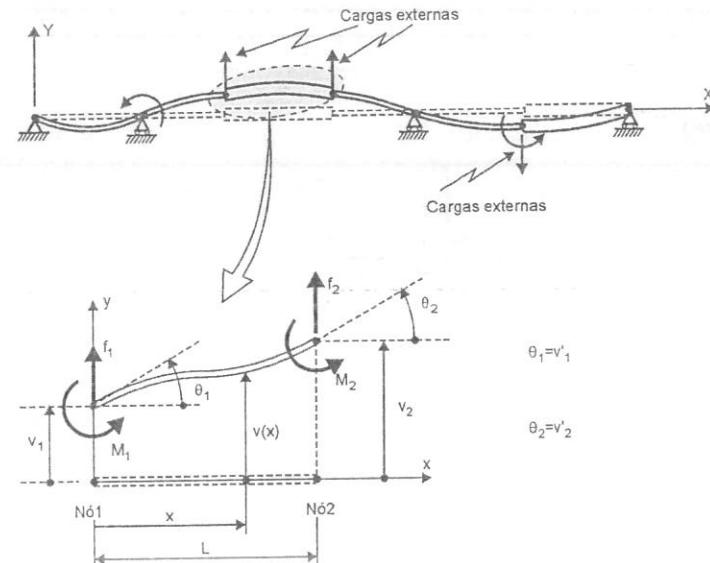
A figura 4.2 representa uma *Viga Contínua*. Nela identificamos um dos seus elementos, conectado ao resto da estrutura pelos seus Nós, posicionados nas extremidades da viga. O estudo do comportamento físico do elemento pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, isto é, por intermédio do seu *Diagrama de corpo livre*. Se a estrutura está em equilíbrio, o Elemento isolado também está, e podemos representá-lo nessa condição indicando as forças que esse elemento troca com o resto da estrutura, isto é, o efeito do resto da estrutura no elemento.

Note que este procedimento é válido para todos os elementos representados no modelo. Como sabemos, cada uma das Vigas da estrutura transmite apenas *Forças Cortantes e Momentos Fletores* no plano xy , e assim, no âmbito isolado do elemento, o

equilíbrio dele poderá ser representado pela ação de dois componentes de força e dois componentes de momento fletor, ou de forma mais geral, incluindo as forças e os momentos, podemos dizer que temos *quatro componentes de força e quatro componentes de deslocamento*. Observe que estamos reproduzindo, mais uma vez, a abordagem já definida anteriormente para os *Sistemas Discretos Padrão*, considerando apropriadamente em cada caso os componentes de força e os componentes de deslocamento que traduzem o comportamento físico do elemento. A relação entre eles expressa na forma matricial conduz à Matriz de Rigidez do Elemento. Os quatro componentes de Forças (duas forças e dois momentos) e os quatro de Deslocamentos (dois lineares e dois angulares) aplicáveis ao caso da viga foram representados no sentido positivo do eixo de referência, de sorte que ao montar as equações de equilíbrio, os sinais obtidos para essas forças, respeitando as convenções já discutidas no capítulo 1, indicarão o sentido real da força em qualquer caso, tornando o tratamento o mais geral possível. Em particular, os Momentos Nodais e os deslocamentos angulares são considerados positivos quando contabilizados no sentido anti-horário no plano xy . Essa convenção é revisada no Quadro VII. Assim, teremos, adotando a notação matricial:

■ *Forças Nodais:* $\{f\}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$ Representação como *Matriz Coluna 4x1*

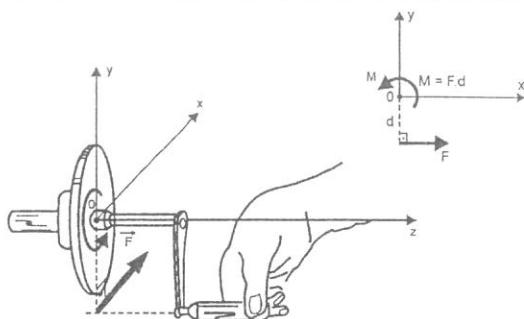
■ *Deslocamentos Nodais:* $\{\delta\}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \end{bmatrix}$ *Matriz Coluna 4x1*



Equilíbrio de um Elemento Isolado

Figura 4.2 - No modelo da Estrutura, identificamos um elemento de Viga. Para este elemento, como para qualquer outro do modelo, o equilíbrio pode ser justificado por intermédio do Diagrama de Corpo Livre, indicando as Forças aplicadas pelo resto da estrutura no elemento. Em particular, para o Elemento de Viga com somente rigidez à flexão, temos quatro componentes de forças e quatro componentes de deslocamentos presentes.

QUADRO VII – CONVENÇÃO PARA MOMENTOS NODAIS



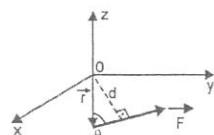
Ao trabalharmos na Estática com o Equilíbrio dos Corpos Extensos, definimos o Momento Escalar de uma Força \vec{F} , em relação a um ponto 0, como sendo o Produto da Intensidade força (F), pela distância que vai de 0 à linha de ação de \vec{F} , acrescido do sinal positivo ou negativo.

$$M_{F(0)} = \pm F \cdot d$$

O momento associado à tendência de rotação no sentido horário é admitido negativo, e no sentido anti-horário, positivo.

Esta última convenção vem da definição mais geral de momento de uma Força, que é uma GRANDEZA VETORIAL, definida como:

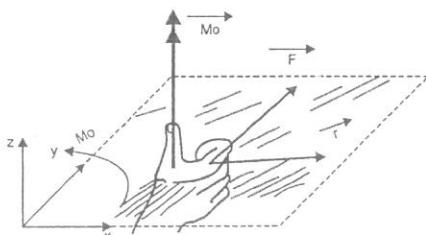
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \text{ (Produto Vetorial)}$$



O Momento \vec{M}_0 é um vetor cuja linha de ação é perpendicular ao plano formado por \vec{r} e \vec{F} . O sentido de \vec{M}_0 é obtido pela Regra da mão direita, e a intensidade de \vec{M}_0 é dada por:

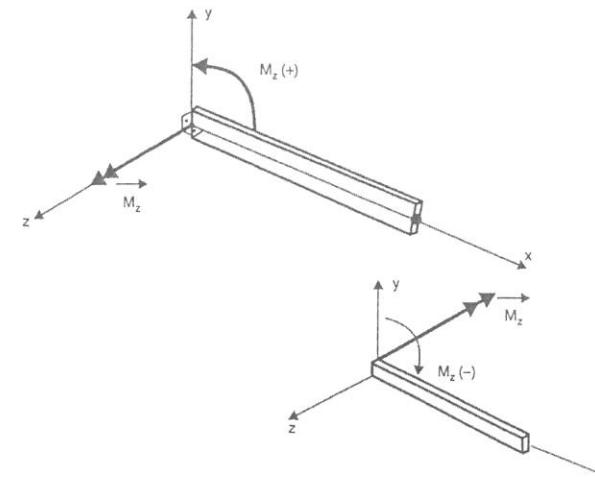
$$M_0 = (r \cdot \sin\theta) \cdot F = F \cdot d$$

em que d é a distância obtida pela perpendicular traçada de 0 até a linha de ação de \vec{F} .



QUADRO VII – CONVENÇÃO PARA MOMENTOS NODAIS (CONTINUAÇÃO)

Note que o Momento que atua no Plano xy é representado por um VETOR (seta dupla) perpendicular a esse plano na direção z.



Então, ao tratar o momento na forma escalar, admitindo tratamento algébrico, o momento M_z positivo atua no sentido anti-horário e o momento M_z negativo no sentido horário, justificando a Convenção adotada para o Momento Escalar, em função da regra da mão direita.

A relação entre todas as forças e deslocamentos referidos a um elemento finito é expressa pela Matriz de Rígidez do Elemento $[k]^e$. Assim:

$$\{f\}_{4 \times 1} = [k]_{4 \times 4}^e \cdot \{\delta\}_{4 \times 1} \quad (4.1)$$

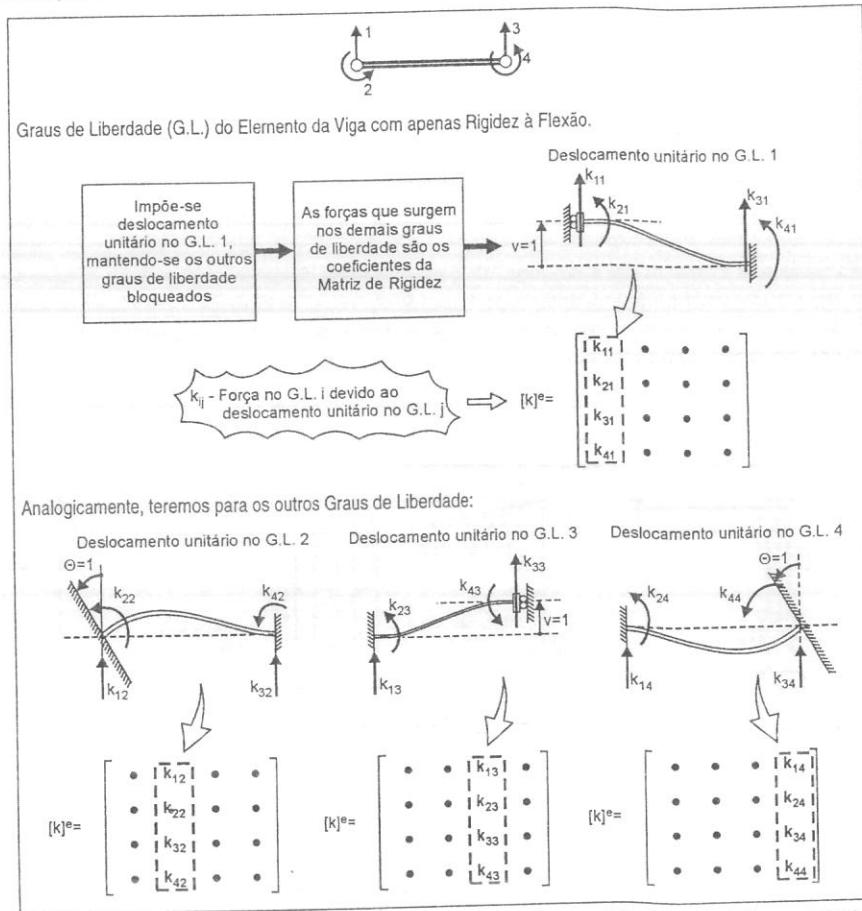
Levando em conta as condições para que seja possível a Multiplicação de duas Matrizes, revisadas no Quadro I, a Matriz de Rígidez do Elemento de Viga deve ter um número de colunas igual ao número de linhas da Matriz $\{\delta\}$, portanto igual a 4. Como o resultado da Multiplicação tem de ter dimensão 4×1 na representação matricial, pois são as forças nodais, a matriz de rigidez do elemento deve ter também 4 linhas. Portanto, a Matriz de Rígidez do Elemento de Viga, com somente rigidez à flexão, deve ter dimensão 4×4 . Esse fato já era por nós conhecido, pois como **o elemento tem 4 graus de liberdade, a sua matriz de rigidez deve ter dimensão 4×4** . Assim:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \quad (4.2)$$

Resta-nos, portanto, determinar quais são os coeficientes k_{ij} da Matriz de Rígidez do Elemento de Viga. Já sabemos, dos elementos estudados anteriormente, que os termos da matriz de rigidez do elemento finito representam relações de Causa e Efeito. A Causa é um Deslocamento Unitário Imposto em um Grau de Liberdade, e os Efeitos são as Forças que surgem nos Graus de Liberdade do Elemento devido a esse deslocamento.

Coeficiente k_{ij} da Matriz de Rígidez de um Elemento Finito representa a *Força no Grau de Liberdade i devido ao Deslocamento Unitário imposto ao Grau de liberdade j*, mantendo-se os outros graus de liberdade bloqueados.

Podemos então determinar os coeficientes da Matriz de Rígidez do Elemento de Viga, impondo deslocamentos unitários isoladamente nos diversos graus de liberdade, e "medindo" as forças que surgem nos graus de liberdade do elemento. Essa ideia é mostrada na figura 4.3.



Analogicamente, teremos para os outros Graus de Liberdade:

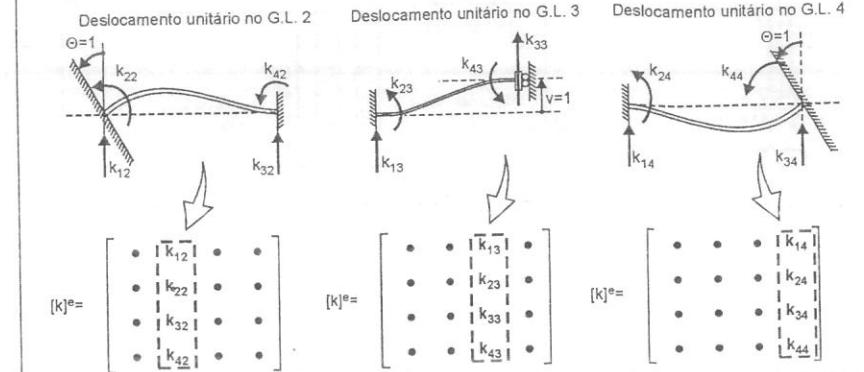


Figura 4.3 – Os coeficientes k_{ij} da Matriz de Rígidez do Elemento de Viga podem ser obtidos impondo deslocamentos unitários aos diversos graus de liberdade do elemento. Quando um deslocamento unitário é imposto a um grau de liberdade, todos os outros graus de liberdade são bloqueados.

As relações sugeridas na figura 4.3 são conhecidas da Resistência dos Materiais, e poderão ser "importadas" para determinarmos os coeficientes de rigidez da Matriz de rigidez do elemento de viga. Essas relações são mostradas na figura 4.4, que consideram as forças que surgem nas vigas quando se impõe um deslocamento Δ qualquer, ou um ângulo θ qualquer, dentro das hipóteses das pequenas deflexões. Essas relações poderão ser utilizadas para o caso particular em que os deslocamentos impostos forem sentidos positivos das forças e deslocamentos nodais, teremos então esses coeficientes.

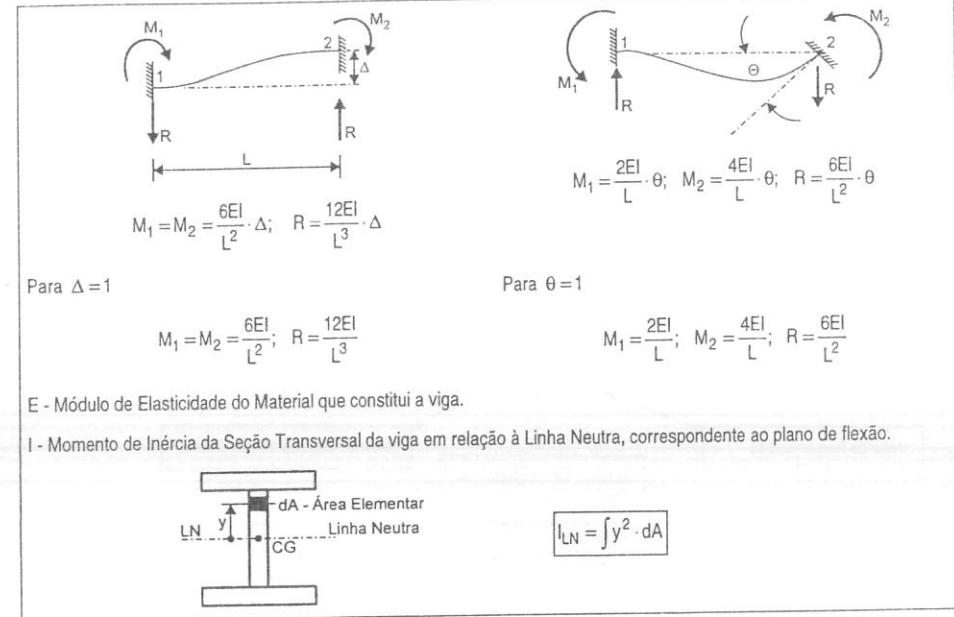


Figura 4.4 – Relações entre deslocamentos impostos nas extremidades de viga, e consequentes esforços de extremidade.

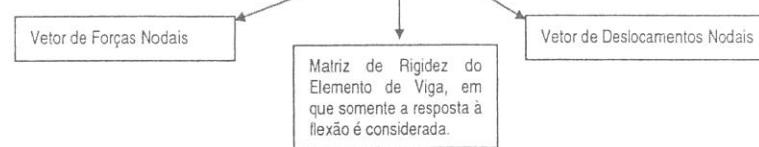
Assim:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{12EI}{L^3}; & k_{12} &= \frac{6EI}{L^2}; & k_{13} &= \frac{-12EI}{L^3}; & k_{14} &= \frac{6EI}{L^2} \\ k_{21} &= \frac{6EI}{L^2}; & k_{22} &= \frac{4EI}{L}; & k_{23} &= \frac{-6EI}{L^2}; & k_{24} &= \frac{2EI}{L} \\ k_{31} &= \frac{-12EI}{L^3}; & k_{32} &= \frac{-6EI}{L^2}; & k_{33} &= \frac{12EI}{L^3}; & k_{34} &= \frac{-6EI}{L^2} \\ k_{41} &= \frac{6EI}{L^2}; & k_{42} &= \frac{2EI}{L}; & k_{43} &= \frac{-6EI}{L^2}; & k_{44} &= \frac{4EI}{L} \end{aligned}$$

A relação entre as forças nodais e os deslocamentos nodais para o elemento de viga com somente rigidez à flexão, e como consequência a sua matriz de rigidez, será dada por:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12EI & 6EI & 12EI & 6EI \\ L^3 & L^2 & L^3 & L^2 \\ 6EI & 4EI & -6EI & 2EI \\ L^2 & L & L^2 & L \\ -12EI & -6EI & 12EI & -6EI \\ L^3 & L^2 & L^3 & L^2 \\ 6EI & 2EI & -6EI & 4EI \\ L^2 & L & L^2 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\{f\} = [k]^p \cdot \{\delta\} \quad (4.4)$$



$$[k]^p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12EI & 6EI & -12EI & 6EI \\ L^3 & L^2 & L^3 & L^2 \\ 6EI & 4EI & -6EI & 2EI \\ L^2 & L & L^2 & L \\ -12EI & -6EI & 12EI & -6EI \\ L^3 & L^2 & L^3 & L^2 \\ 6EI & 2EI & -6EI & 4EI \\ L^2 & L & L^2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Note que este elemento, do modo que foi formulado, ignora a presença de Forças e Deslocamentos Axiais. Ou seja, este elemento se presta apenas para simular aplicações práticas em que as Cargas são suportadas apenas por Flexão das Vigas. Como exemplo, temos o caso de uma Viga Contínua, ou uma Grelha sujeita a cargas perpendiculares ao seu plano.

4.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA COM RIGIDEZ À FLEXÃO E RIGIDEZ AXIAL PÓRTICO PLANO

Vimos que, dentro das hipóteses das pequenas deflexões, o comportamento axial da viga é independente do comportamento a flexão. Ou seja, a ação do Momento Fletor ou Força Cortante na viga não gera forças axiais no elemento, e vice-versa. Os elementos formulados até então permitem estudar esses comportamentos isoladamente. Ou seja, o elemento de treliça permite estudar o comportamento de barras apenas sob a ação de forças axiais, e o elemento de viga permite estudar o comportamento de barras apenas sob a ação de carregamentos de flexão.

Na figura 4.5.a, é representado um Pórtico Plano constituído por duas vigas. Para a Carga Vertical atuando no ponto A, a viga AB sofre flexão, cujos diagramas de força cortante e momento fletor são representados na figura 4.5.b. O comportamento dessa viga horizontal pode ser representado por intermédio do elemento de viga, já que o mecanismo de transferência dos esforços é apenas por flexão.

O carregamento é então transferido para a viga vertical BC, como indica a figura 4.5.c, sendo esta sujeita à ação de uma força axial e de um momento de flexão, cujos diagramas são mostrados na figura. O comportamento dessa viga vertical não pode ser traduzido pelo elemento de viga até então formulado, pois este, embora represente a flexão da viga, não apresenta rigidez axial, e não tem, portanto, capacidade de representar o trabalho axial da viga. Da mesma forma, o elemento de treliça não pode representar o comportamento da viga vertical, pois embora tenha condições de representar a rigidez axial da viga, ele não tem rigidez à flexão.

A figura 4.5.d representa o comportamento real da viga BC da estrutura. Os fenômenos independentes de flexão da viga e solicitação axial geram panoramas de tensões diferentes ao longo da seção transversal, que são superpostos, gerando o diagrama final de tensões na viga. Surge então, naturalmente, a idéia de formular um elemento de viga mais completo, de modo a representar, além da rigidez à flexão, também a rigidez axial do elemento dentro da hipótese das pequenas deflexões, que resulta em comportamento linear da estrutura, e onde pode-se aplicar o princípio da superposição. A figura 4.6 introduz essa idéia inicialmente para uma viga contínua. A força axial aplicada introduz unicamente deslocamentos axiais no elemento, que não afetam os deslocamentos relacionados à flexão da viga e vice-versa. Os graus de liberdade do elemento representados na figura 4.6 podem então ser representados também independentemente, por intermédio dos vetores de localização na montagem da matriz. Ou seja, a Matriz de Rigidez desse Elemento de Viga contém os termos das matrizes da barra de treliça, que contabiliza somente rigidez axial, e da viga, com somente rigidez à flexão.

Os termos de rigidez axial, de acordo com a numeração dos graus de liberdade, ocorrem nas 1^a e 4^a colunas da matriz, e os de rigidez à flexão nas demais localizações.

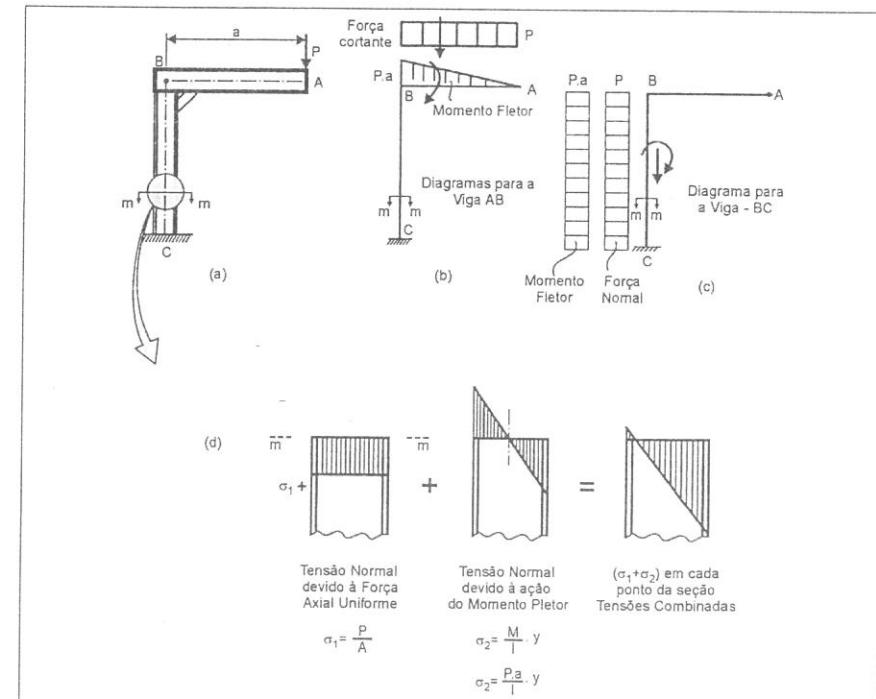


Figura 4.5- A viga sujeita à ação simultânea de Momento Fletor e Força Axial.

Portico Plano modelado por Elementos de Viga

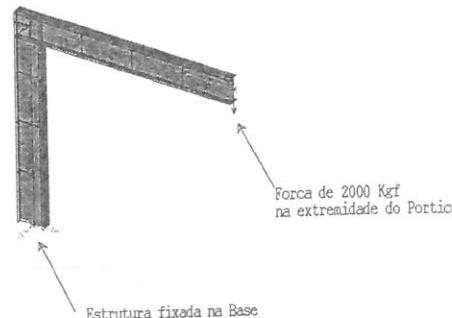


Figura 4.5 – Continuação – Modelo em vigas representado no computador. Por intermédio do Método dos Elementos Finitos, pode-se determinar o comportamento estrutural do Pórtico Plano, utilizando os “softwares” de análise disponíveis. Os programas de computador requerem o conhecimento das propriedades associadas aos elementos de viga, e que são contabilizadas na matriz de rigidez do elemento, tais como: Módulo de Elasticidade E, Módulo de Elasticidade em Cisalhamento G, Coeficiente de Poisson, Área da Seção Transversal da Viga, Momentos de Inércia em relação aos eixos centrais principais, Momento de Inércia à Torção. Conhecendo o carregamento atuante e as condições de fixação da estrutura, podem-se determinar as regiões mais solicitadas do componente, estabelecendo previsões a respeito do seu comportamento. Por exemplo, um tipo de informação obtida é o Diagrama de Momentos Fletores na Estrutura, que permite a determinação da consequente distribuição de Tensões Normais.

Analogamente, podem-se determinar os Diagramas de Forças Cortantes e as consequentes Tensões de Cisalhamento, e também os Diagramas de Momentos Torquos, com as consequentes Tensões de Cisalhamento na Torção.

Diagramas de Momentos Torquos, com as consequentes Tensões de Cisalhamento na Torção.

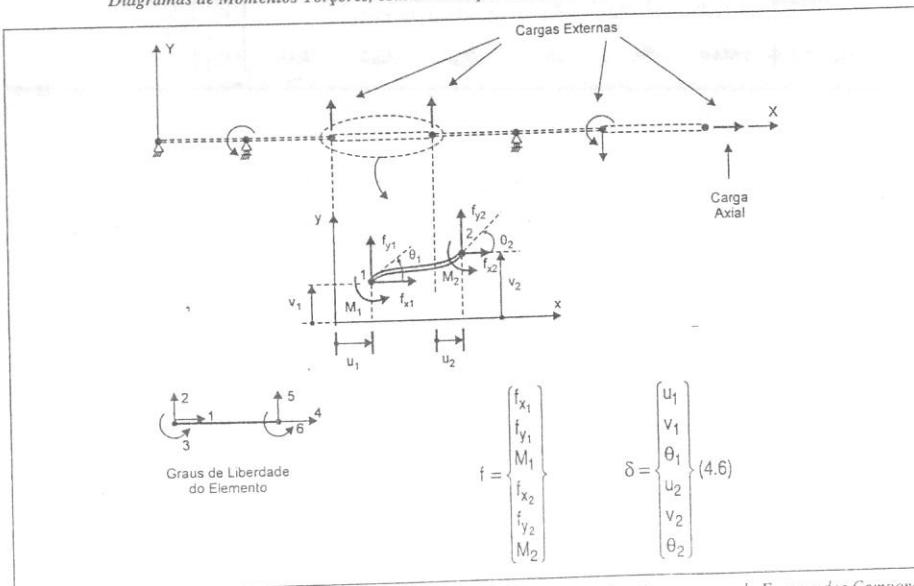
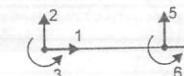


Figura 4.6 – Elemento de Viga com Rigidez Axial e Rigidez à Flexão. Identificação dos Componentes de Força e dos Componentes de Deslocamento (Graus de Liberdade) do Elemento.

Chamando de $a = \frac{EA}{L}$ e $b = \frac{EI}{L^3}$, apenas por facilidade de representação, a Matriz de Rigidez do Elemento de Viga com

Rigidez Axial e Rigidez à Flexão será dada no Sistema Local de Coordenadas do Elemento por:

$$[k]^S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2bL^2 & 0 & -6bL & 4bL^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$



4.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NOS SISTEMAS LOCAL E GLOBAL. MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

O Elemento de Viga que incorpora a Rigidez axial da viga bem como a sua rigidez à flexão, poderia ser utilizado para resolver o problema do pórtico plano. Porém, neste caso, os elementos não estão alinhados. Assim, para determinar as propriedades de rigidez da estrutura completa, a partir da rigidez de cada elemento, as forças e os deslocamentos associados a cada elemento individual devem ser relacionados a um Sistema de Referência Comum, válido para a estrutura como um todo.

Desde que as Matrizes de Rigidez dos Elementos são inicialmente calculadas em coordenadas locais, é necessário introduzir a Transformação de Forças de um Sistema para outro. Esse procedimento já nos é conhecido, ou seja:



Na figura 4.7 é representado o equilíbrio de um elemento de viga qualquer de um pórtico plano. Este elemento contabiliza a rigidez à flexão da viga, bem como a sua rigidez axial.

São efetuadas as transformações de forças acima citadas, tal como já havíamos estudado no elemento de treliça. Neste caso são incorporados também os momentos no plano xy do elemento, que podem ser representados por vetores perpendiculares a esse plano. Ou seja, tanto no sistema local quanto global tais vetores estão na direção z, de sorte que $M_1 = \bar{M}_1$, como já discutido anteriormente.

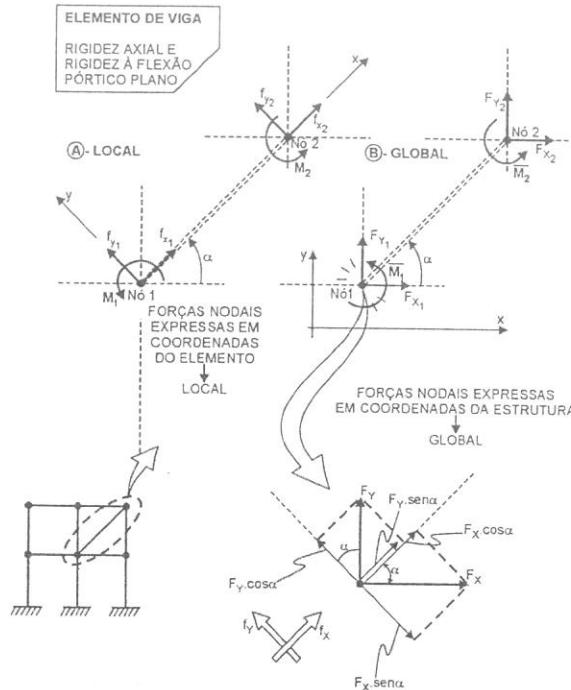


Figura 4.7 – O equilíbrio de um mesmo elemento é representado por intermédio de forças nodais nos sistemas local e global. Para cada nó, a Projeção das Forças Globais nos eixos locais x e y permite estabelecer a correspondência entre elas.

Projetando as Forças Globais nos eixos locais x e y, teremos a correspondência entre as Forças nos dois Sistemas, dada pela Matriz de Transformação.

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_{x_1} = F_{X_1} \cdot \cos \alpha + F_{Y_1} \cdot \sin \alpha \\ f_{y_1} = -F_{X_1} \cdot \sin \alpha + F_{Y_1} \cdot \cos \alpha \\ M_1 = \bar{M}_1 \\ f_{x_2} = F_{X_2} \cdot \cos \alpha + F_{Y_2} \cdot \sin \alpha \\ f_{y_2} = -F_{X_2} \cdot \sin \alpha + F_{Y_2} \cdot \cos \alpha \\ M_2 = \bar{M}_2 \end{cases} & \quad \mu = \sin \alpha \\ & \quad \lambda = \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ M_1 \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{X_1} \\ F_{Y_1} \\ \bar{M}_1 \\ F_{X_2} \\ F_{Y_2} \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

\Downarrow

$$\{f\} = [T] \cdot \{F\} \quad (4.10)$$

Já sabemos como transformar a Matriz de Rigidez de um Elemento do Sistema Local no Sistema Global. Assim:

$$[K]^e = [T]^T \cdot [k]^e \cdot [T] \quad (4.11)$$

GLOBAL

LOCAL

Aplicando a expressão 4.11 para o *Elemento de Viga com Rigidez Axial e Rigidez à Flexão*, em problemas de Pórticos Planos, teremos a *Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Global de Coordenadas*, dada em seguida.

Note que, neste caso, estão representados os vetores de localização, adicionando os graus de liberdade de rotação. A identificação dos Graus de Liberdade do Elemento no Vetor de Localização segue uma ordem dentro do nó: primeiro é identificado o Grau de liberdade em X, posteriormente em Y e depois a rotação. Então, para o elemento da figura 4.8, teremos:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \text{Grau de Liberdade } X & \text{Grau de Liberdade } Y & \text{Ângulo (Rotação)} & X & Y & \text{Ângulo} \\ \text{Nó 1} & \text{Nó 2} & & \text{Nó 1} & \text{Nó 2} & \\ \hline a\lambda^2 + 12b\mu^2 & (a-12b)\lambda\mu & a\mu^2 + 12b\lambda^2 & -6bL\mu & 6bL\lambda & 4bL^2 \\ (a-12b)\lambda\mu & a\mu^2 + 12b\lambda^2 & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & 6bL\mu & a\lambda^2 + 12b\mu^2 \\ -6bL\mu & 6bL\lambda & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -6bL\lambda & (a-12b)\lambda\mu \\ -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & -a\lambda^2 - 12b\mu^2 & 6bL\mu & a\mu^2 + 12b\lambda^2 \\ -(a-12b)\lambda\mu - a\mu^2 - 12b\lambda^2 & -6bL\lambda & 2bL^2 \\ -(a-12b)\lambda\mu - a\mu^2 - 12b\lambda^2 & 2bL^2 & 6bL\mu \\ -6bL\mu & 6bL\lambda & 2bL^2 & 6bL\mu & -6bL\lambda & 4bL^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Em que:

$$a = \frac{EA}{L}$$

$$b = \frac{EI}{L^3}$$

$$\lambda = \cos \alpha$$

$$\mu = \sin \alpha$$

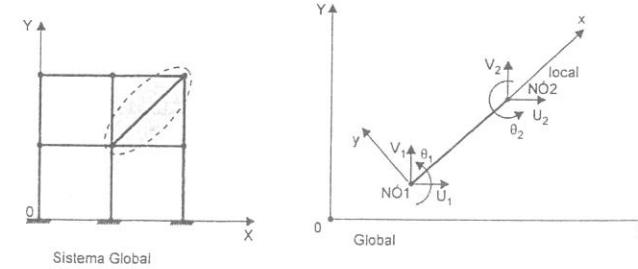


Figura 4.8 – Elemento de Viga com Rigidez Axial e Rigidez à Flexão para aplicação de Pórticos Planos, considerando os Componentes de Deslocamentos no Sistema Global de Coordenadas.

4.5. EXEMPLO DE MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ESTRUTURA DE PÓRTICO PLANO

este caso, é ilustrado um Modelo Estrutural constituído por uma *montagem de Elementos de viga, com rigidez axial e rigidez à flexão*, como indica a figura 4.9. Embora seja uma Estrutura Simples, aproveitaremos este exemplo para desenvolver mais uma vez montagem da Matriz de Rigidez de uma estrutura, considerando de forma geral o *concepto de Graus de liberdade*.

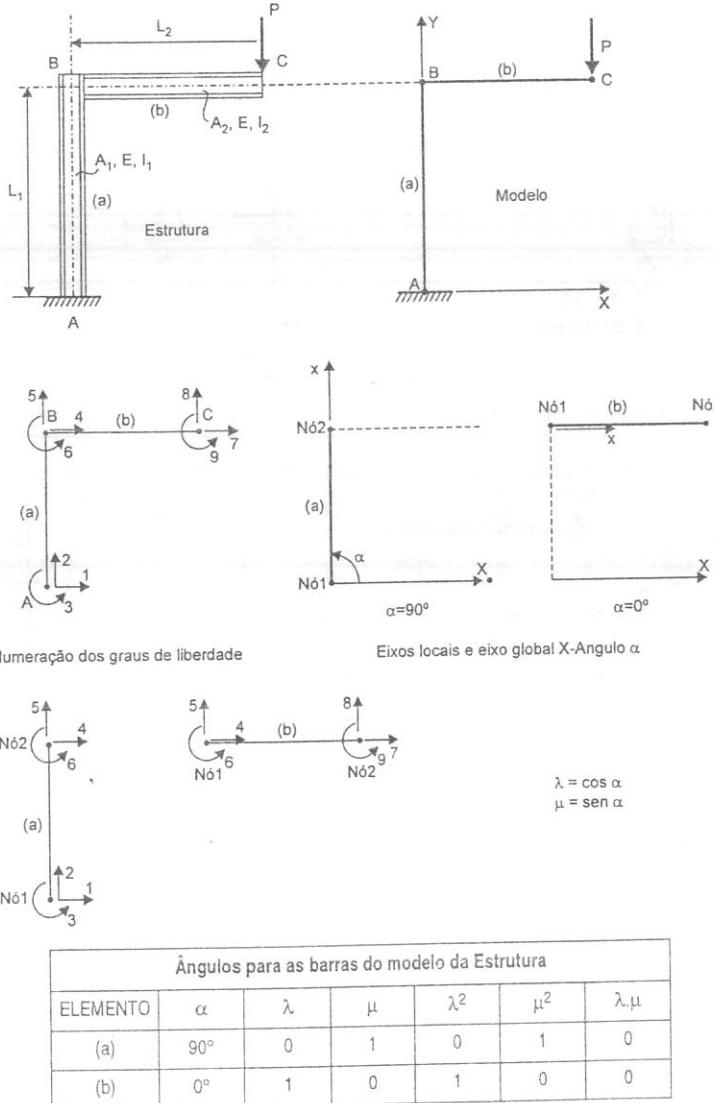


Figura 4.9 – Estrutura de Pórtico Plano, constituída por Elementos de Viga com Rigidez Axial e Rigidez à Flexão no Plano.

Os passos gerais para a Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura são semelhantes aos exemplos da montagem de molas e barras de treliça resolvidos nos capítulos anteriores. Serão consideradas nas matrizes de rigidez, neste caso, as contribuições da rigidez axial e da rigidez à flexão de modo independente, por intermédio das áreas das seções transversais A_1 e A_2 das vigas, dos respectivos Momentos de inércia I_1 e I_2 , e do Módulo de Elasticidade do Material E , como é representado na figura 4.9.

4.5.1. DEFINIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL COMO UMA MONTAGEM DE ELEMENTOS

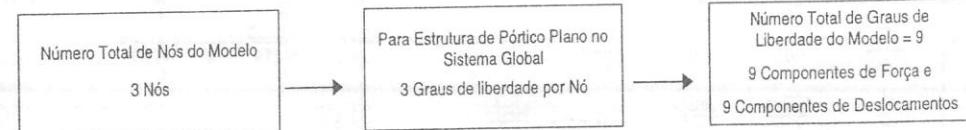
Neste exemplo, o Modelo da Estrutura Reticulada surge naturalmente, e corresponde à própria figura 4.9.

4.5.2. DETERMINE A MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO E REPRESENTE-A NO SISTEMA GLOBAL

Ao representar a montagem de elementos no modelo, cada elemento deverá referir-se ao Sistema que vale para a estrutura como um todo, isto é, o *Sistema Global de Coordenadas*, para posteriormente montar a Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez de cada um de seus elementos. A expressão da Matriz de Rigidez de cada elemento no Sistema Global é dada por (4.12). É fundamental, ao definir os Vetores de Localização de cada elemento, *estabelecer os seus Nós 1 e 2, pois estes definirão a orientação do eixo local x do elemento*. Essa definição é arbitrária, porém escolhidos esses nós, esta orientação deverá permanecer inalterada, pois *definirá o ângulo α formado entre os eixos x local e X global*.

Assim, na figura 4.9 foram feitas as numerações dos graus de liberdade da estrutura, seguindo a orientação estabelecida, independentemente de qualquer condição de restrição.

Nesta mesma figura foi identificada para cada elemento a definição do *eixo local x*, por intermédio da escolha arbitrária dos nós 1 e 2. A partir dessa definição, cada elemento foi identificado em uma visão “explodida”, de modo a definir em cada caso o valor do ângulo α . Assim, para a estrutura em estudo, temos:



Assim, substituindo os valores numéricos definidos na tabela da figura 4.9, bem como as propriedades geométricas e de material, teremos as Matrizes de Rigidez de todos os elementos da estrutura objeto de análise, dadas em seguida.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para o elemento (a): } a = \frac{EA_1}{L_1}; \quad b = \frac{EI_1}{L_1^3} \\ \text{Para o elemento (b): } a = \frac{E \cdot A_2}{L_2}; \quad b = \frac{E \cdot I_2}{L_2^3} \end{array} \right\} \text{Parâmetros de Rigidez Axial e Rigidez à Flexão}$$

$$[K]^a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 12E\frac{l_1}{l_1^3} & 0 & -6E\frac{l_1}{l_1^2} & -12E\frac{l_1}{l_1^3} & 0 & 6E\frac{l_1}{l_1^2} \\ 0 & 0 & E\frac{A_1}{l_1} & 0 & 0 & -4E\frac{l_1}{l_1} \\ -6E\frac{l_1}{l_1^2} & 0 & 0 & 6E\frac{l_1}{l_1^2} & 12E\frac{l_1}{l_1^3} & 0 \\ -12E\frac{l_1}{l_1^3} & 0 & 6E\frac{l_1}{l_1^2} & 0 & 0 & E\frac{A_1}{l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E\frac{A_1}{l_1} \\ 6E\frac{l_1}{l_1^2} & 0 & 0 & 0 & E\frac{A_1}{l_1} & -4E\frac{l_1}{l_1} \end{bmatrix}$$

"Simétrica"

$$[K]^b = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline E\frac{A_2}{l_2} & 0 & -12E\frac{l_2}{l_2^3} & 0 & 0 & 6E\frac{l_2}{l_2^2} \\ 0 & 0 & 6E\frac{l_2}{l_2^2} & 0 & 0 & -4E\frac{l_2}{l_2} \\ E\frac{A_2}{l_2} & 0 & 0 & E\frac{A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & -12E\frac{l_2}{l_2^3} & 0 & 0 & 12E\frac{l_2}{l_2^3} & -6E\frac{l_2}{l_2^2} \\ 0 & 6E\frac{l_2}{l_2^2} & 0 & -6E\frac{l_2}{l_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6E\frac{l_2}{l_2^2} & 12E\frac{l_2}{l_2^3} \end{bmatrix}$$

"Simétrica"

É importante observar na montagem das Matrizes o significado dos termos $k_{ij} = 0$.

Por exemplo, para o elemento (a), o termo $K_{32} = 0$ significa que a força no Grau de Liberdade 3 devido a um deslocamento unitário no Grau de Liberdade 2 é igual a Zero. O Grau de Liberdade 3 está associado à presença do Momento Fletor, e o Grau de Liberdade 2, Força Axial. Daí, temos para esse coeficiente de rigidez o valor nulo.

Da mesma forma, todos os outros coeficientes $k_{ij} = 0$ das matrizes (a) e (b) devem ser interpretados.

4.5.3. MONTE A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA A PARTIR DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS SEUS ELEMENTOS - SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Utilizando o Procedimento de Montagem já estabelecido de forma geral, podemos obter a *Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez de cada um dos seus elementos*.

Devemos identificar em cada Matriz de Rigidez de Elemento, a sua contribuição nessa montagem. Por exemplo, os coeficientes I, J (linha, coluna) da matriz de um elemento serão adicionados na mesma localização I, J da Matriz da estrutura. Assim, por intermédio desse procedimento, serão obtidas as *Equações de Equilíbrio da Estrutura*. É obtida a Matriz Coeficiente que relaciona as Forças

Nodais e os Deslocamentos Nodais para toda a Estrutura, como mostra a figura 4.10. A estrutura analisada tem 9 graus de liberdade, portanto a sua Matriz de Rigidez terá dimensão 9×9 . A Matriz de Rigidez da Estrutura contém todos os seus graus de liberdade identificados no vetor de localização. Inserindo os termos nas linhas e colunas correspondentes para montar $[K]$, teremos:

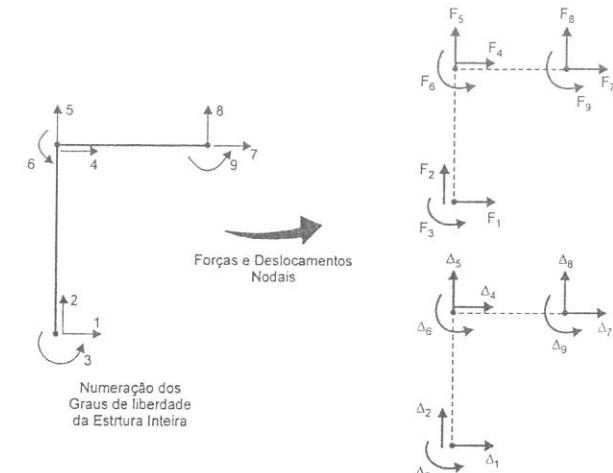


Figura 4.10 – Forças e Deslocamentos Nodais para a Estrutura inteira.

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 12E\frac{l_1}{l_1^3} & 0 & -6E\frac{l_1}{l_1^2} & -12E\frac{l_1}{l_1^3} & 0 & 6E\frac{l_1}{l_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E\frac{A_1}{l_1} & 0 & 0 & E\frac{A_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6E\frac{l_1}{l_1^2} & 0 & 4E\frac{l_1}{l_1} & 6E\frac{l_1}{l_1^2} & 0 & 2E\frac{l_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ -12E\frac{l_1}{l_1^3} & 0 & 6E\frac{l_1}{l_1^2} & 12E\frac{l_1}{l_1^3} + E\frac{A_2}{l_2} & 0 + 0 & 6E\frac{l_1}{l_1^2} + 0 & -E\frac{A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & E\frac{A_1}{l_1} & 0 & 0 + 0 & E\frac{A_1}{l_1} + 12E\frac{l_2}{l_2^3} & 0 + 6E\frac{l_2}{l_2^2} & 0 & -12E\frac{l_2}{l_2^3} & 6E\frac{l_2}{l_2^2} \\ -6E\frac{l_1}{l_1^2} & 0 & 2E\frac{l_1}{l_1} & 6E\frac{l_1}{l_1^2} + 0 & 0 + 6E\frac{l_2}{l_2^2} & 4E\frac{l_1}{l_1} + 4E\frac{l_2}{l_2} & 0 & -6E\frac{l_2}{l_2^2} & 2E\frac{l_2}{l_2} \\ 0 & 0 & 0 & -E\frac{A_2}{l_2} & 0 & 0 & E\frac{A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12E\frac{l_2}{l_2^3} & -6E\frac{l_2}{l_2^2} & 0 & 12E\frac{l_2}{l_2^3} & 6E\frac{l_2}{l_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6E\frac{l_2}{l_2^2} & 2E\frac{l_2}{l_2} & 0 & -6E\frac{l_2}{l_2^2} & 4E\frac{l_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

Simétrica

$[K]$ - Matriz de rigidez da estrutura
Sistema global de coordenadas

A última equação matricial representa as Equações de Equilíbrio da estrutura. Se fizéssemos o produto matricial, poderíamos representar as equações constituintes desse sistema. Na forma matricial essas equações poderiam ser resolvidas de forma impactante.

Importante observar alguns detalhes dessa montagem. O termo $k_{4,4}$ da Matriz [K] da estrutura é obtido pela *soma de um termo*

Rigidez à flexão e outro de Rigidez Axial. Note que o termo $k_{4,4}$ da Matriz [K]^a representa uma *Força Cortante* em (a) na direção X Global, enquanto o termo $k_{4,4}$ da Matriz [K]^b representa uma *Força Axial* em (b), também na direção X Global. Portanto, dimensionalmente, temos uma soma de forças, e na mesma direção, tratada algebraicamente. Adicionalmente, vale servar o significado físico dessa soma. A rigidez no ponto B da estrutura, na direção X, é obtida pela contribuição da rigidez axial juntamente com a rigidez à flexão (Força Cortante) da viga (a). A adição desses dois coeficientes traduz esse significado físico.

5.4 DEFINA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DESLOCAMENTOS - AS RESTRIÇÕES - PARA PREPARAR A SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Matriz de Rigidez da Estrutura completamente montada é *Simétrica e Singular*. Já sabemos da impossibilidade de resolver esse sistema devido ao movimento de corpo rígido, pois o sistema completo representa a estrutura sem qualquer vínculo. Para as condições de Restrição, isto é, a estrutura restrita em A, correspondente aos *graus de liberdade 1, 2, e 3*, as Forças Externas aplicadas na estrutura são F_1, F_2 e F_3 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim *Reações de Apoio* e são incógnitas do problema. Dessa forma, como vimos anteriormente, podemos estabelecer a relação entre as forças nodais aplicadas e os deslocamentos nodais. Assim, a relação entre as forças F_4, F_5, F_6, F_7, F_8 e F_9 , e os correspondentes deslocamentos $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8$ e Δ_9 , é expressa pelos coeficientes representados nas localizações 4, 5, 6, 7, 8 e 9 da matriz de Rigidez. Portanto, uma parte da Matriz de Rigidez é invertida para obter os deslocamentos nodais. Para os valores de forças aplicadas conhecidas e para as propriedades definidas numericamente, poder-se-iam calcular os deslocamentos pelos procedimentos numéricos já conhecidos.

$$F_4 = F_5 = F_6 = F_7 = F_8 = 0 \quad \text{e} \quad F_9 = -P$$

$$\begin{matrix} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 0 & \left[\frac{12EI_1}{L_1^2} + \frac{EA_2}{L_2} \right] & 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{EA_1}{L_1} + \frac{12EI_2}{L_2^3} \right] & \frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{6EI_2}{L_2^2} \\ 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \left[\frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2} \right] & 0 & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{2EI_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ -P & 0 & -\frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & \frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{2EI_2}{L_2} & 0 & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_2}{L_2} \end{matrix} \begin{matrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{matrix}$$

Cálculo dos Deslocamentos, a partir da Inversão da Matriz anterior, de dimensão 6 x 6, não será desenvolvido. O objetivo principal deste exemplo é entender o procedimento de montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura para o caso de uma Montagem de Elementos de Viga.

4.6. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA COM SOMENTE RIGIDEZ À TORÇÃO

Vimos anteriormente que, dentro das limitações definidas, o comportamento axial da viga é independente do comportamento à flexão, e as contribuições dos respectivos componentes de rigidez na montagem da matriz eram encaradas também independentemente. De forma semelhante, é tratada a contribuição da rigidez torcional da viga.

De acordo com as Hipóteses da Resistência dos Materiais Elementar, a Torção de Saint-Venant é governada pela equação seguinte:

$$M_x = G \cdot J \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (4.13)$$

Em que o produto GJ define a rigidez torcional da viga, chamado também de Módulo de Rigidez à torção da Viga, e sendo:

M_x = Momento Torçor

$$G = \text{Módulo de Elasticidade em Cisalhamento} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ν = Coeficiente de Poisson

J = Momento de Inércia à Torção de Saint - Venant

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \text{Taxa de Variação do ângulo de torção ou Ângulo de Torção Unitário}$$

A figura 4.11 representa uma viga sujeita à ação de momentos torcôres.

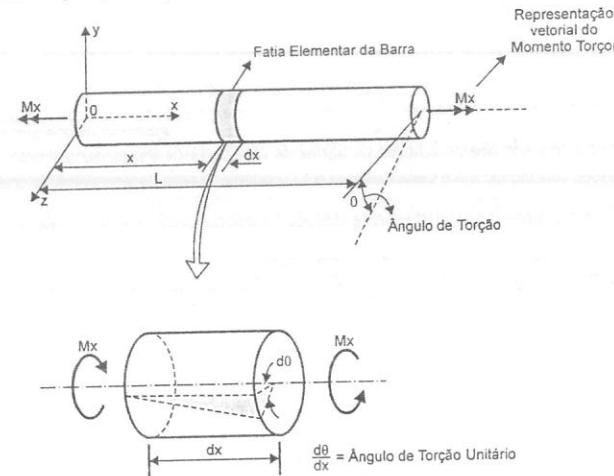


Figura 4.11 – Elementos de Viga sob a ação de Momentos Torcôres.

A partir da equação 4.13 e considerando a viga da figura 4.12 sob a ação exclusiva de momentos torcôres, teremos:

$$M_x \cdot dx = G \cdot J \cdot d\theta$$

Integrando a equação anterior, teremos

$$\int M_x \cdot dx = \int G \cdot J \cdot d\theta \rightarrow M_x \cdot x = G \cdot J \cdot \theta + C_1 \quad (4.14), \text{ em que } C_1 \text{ é uma constante de integração.}$$

O valor de C_1 na última equação pode ser determinado aplicando as condições de extremidade da viga, como representado na figura 4.12.

Para $x = 0 \rightarrow \theta = \theta_1$ e $M_x = M_1$ e substituindo esses valores na equação 4.14, temos:

$$M_1 \cdot 0 = GJ\theta_1 + C_1 \rightarrow C_1 = -GJ\theta_1 \quad (4.15)$$

Para $x = L \rightarrow M_x = -M_1$ e $\theta = 0$ e substituindo esses valores na equação 4.14, temos:

$$-M_1 \cdot L = GJ \cdot 0 + C_1 \rightarrow C_1 = -M_1 \cdot L \quad (4.16)$$

Igualando as equações 4.15 e 4.16 que definem C_1 , teremos:

$$\begin{aligned} -M_1 \cdot L = -GJ\theta_1 \rightarrow M_1 = \frac{GJ}{L}\theta_1. \text{ Assim:} \\ M = \frac{GJ}{L} \cdot \theta \end{aligned} \quad (4.17)$$

Esta última expressão que relaciona o **Momento Torçor** aplicado na extremidade livre da viga e o correspondente **Ângulo θ** é semelhante àquela que relacionava a **Força na Extremidade livre de uma barra de trilça** e o correspondente **Deslocamento**. Na **barra de trilça**, o coeficiente de proporcionalidade era $\frac{E \cdot A}{L}$, no qual estava presente a característica do **material**, por intermédio do **Módulo de Elasticidade E**, e as **características geométricas** da viga, a seção transversal por intermédio da **área A**, e o **comprimento** da viga L . Na **barra em torção**, o coeficiente de proporcionalidade é $\frac{G \cdot J}{L}$, no qual está presente a característica do **material**, por intermédio do **Módulo de Elasticidade em Cisalhamento G**, e as **características geométricas** da barra em torção, o **Momento de Inércia à Torção** e o **comprimento** da viga L .

Ou seja, da mesma forma que a **barra de trilça** trabalha como uma “**mola**” de constante elástica $\frac{E \cdot A}{L}$, a barra em torção trabalha como uma “**mola torcional**” cuja constante elástica é dada por $\frac{G \cdot J}{L}$. Dessa forma, a expressão da Matriz de Rígidez de uma barra sujeita apenas à torção será dada de forma semelhante à Matriz de rigidez de uma barra de trilça, substituindo os coeficientes apropriados. A comparação entre esses dois elementos é dada na figura 4.13. Portanto, todo o desenvolvimento analítico efetuado para a barra de trilça no capítulo 2, item 2, poderia ser integralmente utilizado a partir do conhecimento da relação $M = \frac{G \cdot J}{L} \cdot \theta$. A barra em torção apresenta também apenas dois graus de liberdade, e para construirmos a relação matricial no âmbito do elemento, deveríamos considerar dois componentes de Momento Torçor e os dois correspondentes deslocamentos angulares. A Matriz de Rígidez terá dimensão 2×2 , e os coeficientes dessa matriz serão os termos dados por $\frac{G \cdot J}{L}$.

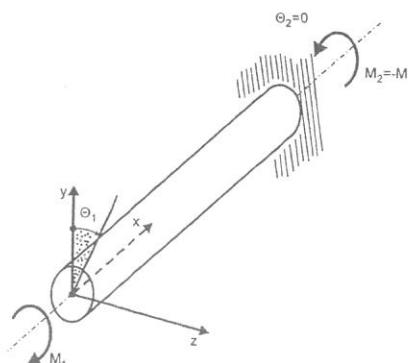
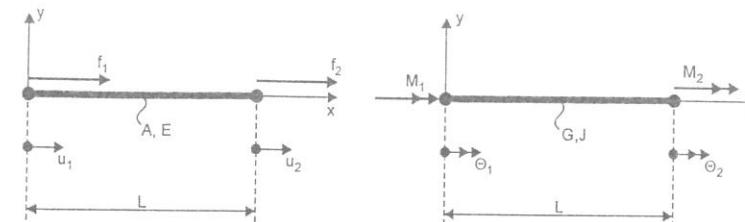


Figura 4.12 - Aplicação de Momento Torçor em Nós de Elemento de Viga.



$$\begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 \\ M_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_1 \\ \theta_2 \end{cases}$$

Matriz de Rígidez de Barra em Torção

$$[k]^B = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}$$

(4.18)

Figura 4.13 – Comparação entre os elementos de viga com somente rigidez axial e somente rigidez à torção.

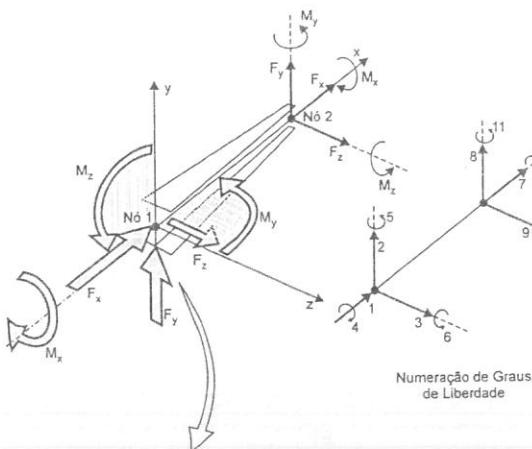
4.7. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA NO ESPAÇO

Já formulamos, anteriormente, a Matriz de Rígidez do Elemento de Viga, considerando independentemente a contribuição da sua rigidez axial, rigidez à flexão em um plano principal, e por último, a rigidez torcional. Sabemos que esses comportamentos são independentes entre si, dentro das hipóteses já discutidas anteriormente. Sob a ação simultânea de forças axiais, forças cortantes atuantes nos dois planos que contêm os eixos centrais principais, momentos fletores agindo nesses planos e momentos torções, a viga responderá apresentando componentes de deslocamentos independentes entre si. Por exemplo, na figura 4.14, são esquematizados os trabalhos das Forças Axiais e dos momentos fletores. As Tensões Normais decorrentes da ação desses esforços são contabilizadas independentemente. Posteriormente, em cada ponto de uma seção transversal objeto de análise, é feita a superposição dessas tensões.

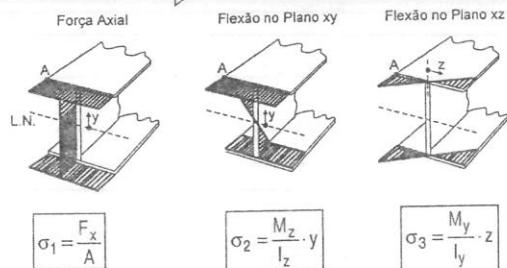
A Matriz de rigidez do Elemento de Viga, no caso mais geral, com 12 Graus de Liberdade, pode ser montada considerando todos os componentes de rigidez correspondentes aos trabalhos de:

- Flexão em cada um dos planos perpendiculares que contêm os eixos centrais principais, devido à ação de momentos fletores e forças cortantes atuantes nesses planos.
- Torção da Viga.
- Forças Axiais.

Assim, inserindo os coeficientes de rigidez já desenvolvidos anteriormente, teremos a Matriz de Rígidez representada na expressão (4.19).



Numeração de Graus de Liberdade



$$\text{no ponto A: } \sigma_A = \sigma_{1A} + \sigma_{2A} + \sigma_{3A}$$

Figura 4.14 – Tensões Normais em Elemento de Viga, devido à ação simultânea de Forças Axiais e Momentos fletores agindo em dois planos perpendiculares que contêm os eixos principais.

$$[k]_e = \begin{bmatrix} a & & & & & & & \\ 0 & 12b_z & & & & & & \\ 0 & 0 & 12b_y & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & t & & & & \\ 0 & 0 & -6b_y L & 0 & 4b_y L^2 & & & \\ 0 & 6b_z L & 0 & 0 & 0 & 4b_z L^2 & & \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & \\ 0 & -12b_z & 0 & 0 & 0 & -6b_z L & 0 & 12b_z \\ 0 & 0 & -12b_y & 0 & -6b_y L & 0 & 0 & 0 & 12b_y \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & -6b_y L & 0 & 2b_y L^2 & 0 & 0 & 0 & 4b_y L^2 \\ 0 & 6b_z L & 0 & 0 & 0 & 2b_z L^2 & 0 & -6b_z L & 0 & 0 & 0 & 4b_z L^2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Em que:

$$a = \frac{EA}{L}$$

$$b_z = \frac{EI_z}{L^3}$$

$$b_y = \frac{E \cdot I_y}{L^3}$$

$$t = \frac{GJ}{L}$$

4.8. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE VIGA NO ESPAÇO - FORMULAÇÃO COMPLETA INCLUINDO A DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO

As tensões de cisalhamento atuantes na seção transversal de uma viga provocam um deslocamento ou ação de deslizamento de uma seção em relação à outra, em um plano perpendicular ao eixo da viga, como é mostrado na figura 4.15.a. Estes deslocamentos têm natureza diferente daqueles provocados pela flexão e representados na figura 4.15.b. Nas atividades diárias de projeto, ao avaliar a deflexão de uma viga, na maioria das vezes, consideramos somente o efeito das deformações por flexão. Por exemplo, para a viga em balanço da figura 4.15.c, sujeita à Carga concentrada na extremidade, a deflexão máxima na extremidade livre é usualmente calculada por $\Delta_{\text{max, Flexão}} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$. Esta deflexão só contabiliza as deformações decorrentes da flexão, já estudadas anteriormente ao tratar das relações entre Momento Fletor e curvatura da viga.

As deflexões ocasionadas pelo cisalhamento são normalmente ignoradas, pois elas constituem uma pequena parcela das deflexões totais. Porém, em alguns casos, a sua consideração torna-se importante. No estudo da Resistência dos Materiais, é desenvolvido o cálculo das deformações por cisalhamento para vigas com diversas condições de carregamentos e de apoio. O desenvolvimento analítico dessas expressões é bastante trabalhoso e foge aos objetivos deste texto. Interessa-nos, porém, algumas conclusões desse estudo para incorporá-las na formulação dos Elementos de Viga. Para a mesma viga do exemplo da figura 4.15.c, pode-se provar que o deslocamento máximo na extremidade da viga, decorrente apenas das deformações por cisalhamento, é dado por

$$\Delta_{\text{Max, Cisalhamento}} = \frac{\alpha_s \cdot P \cdot L}{G \cdot A}, \text{ em que } \alpha_s \text{ é uma constante chamada de } \text{coeficiente de cisalhamento}.$$

A figura 4.15.d. representa a comparação dessas deflexões em função do comprimento da viga, para uma dada viga I. Nesses gráficos, identificamos em primeiro lugar que a deflexão por cisalhamento cresce linearmente com o comprimento da viga, enquanto as deflexões decorrentes da flexão crescem muito rapidamente com a terceira potência do comprimento da viga. Podemos notar que quando o comprimento da viga é dezoito vezes o valor da sua altura, a deflexão decorrente da flexão é muito maior. Este é um caso típico das vigas utilizadas normalmente nas aplicações práticas dos pórticos, e a desconsideração da deformação por cisalhamento não é relevante. Porém, para as vigas cujo comprimento não é muito maior que a sua altura, as chamadas *vigas curtas*, a deflexão decorrente do cisalhamento pode ser da ordem da própria deflexão decorrente da flexão, em particular, no exemplo objeto de estudo, quando o comprimento é seis vezes maior que a sua altura, essas deflexões são iguais. Ignorar as deformações decorrentes do cisalhamento constitui, portanto, um erro grosseiro.

A título de ilustração, a Tabela 4.1 apresenta as expressões de cálculo das deflexões em vigas de seção retangular, considerando isoladamente as deformações decorrentes da flexão, as deformações por cisalhamento e posteriormente a combinação dos dois efeitos.

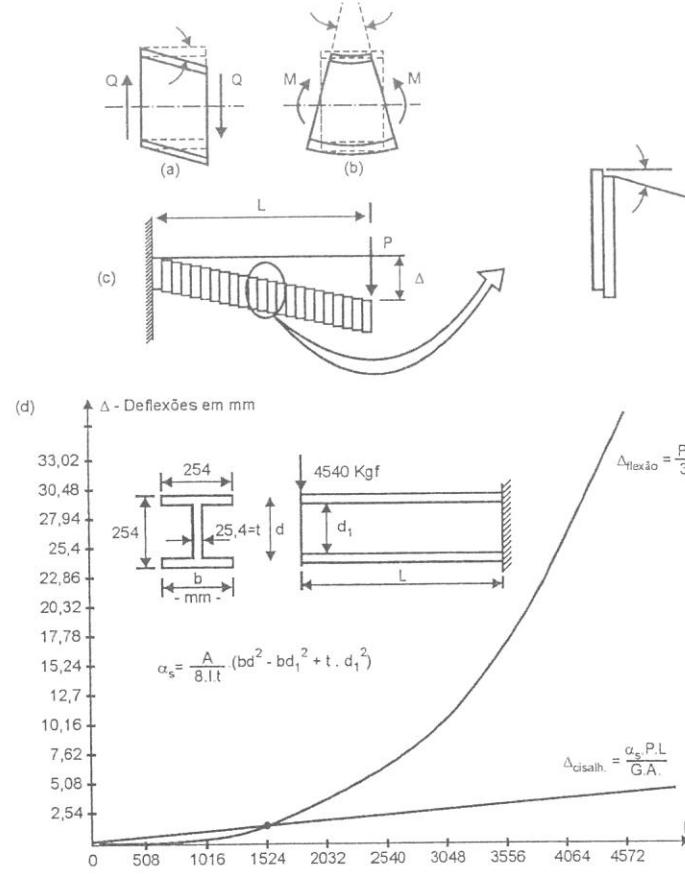


Figura 4.15 - Comparação entre as Deflexões Máximas observadas em Viga em Balanço, considerando as deformações por cisalhamento e as deformações por flexão, para diversas relações entre o comprimento da viga e a sua altura.

Tipo de Viga e Condição de Carregamento	Deflexão Máxima devido somente às deformações decorrentes da flexão	Deflexão Máxima devido somente às deformações decorrentes do cisalhamento	Deflexão Máxima devido às deformações de cisalhamento e de flexão combinadas
Viga biapoiada com carregamento (q) uniformemente distribuído	$v_{flexão} = \frac{5.qL^4}{384.EI}$	$v_{cis} = \frac{\alpha_s q L^2}{8.G.A}$	$v = \frac{5.qL^4}{384.EI} \left(1 + \frac{48.\alpha_s E I}{5.G.A.L^2}\right)$
Viga biapoiada com carga concentrada (P) no centro da viga	$v_{flexão} = \frac{P.L^3}{48.E.I}$	$v_{cis} = \frac{\alpha_s P.L}{4.G.A}$	$v = \frac{P.L^3}{48.E.I} \left(1 + \frac{12.\alpha_s E I}{G.A.L^2}\right)$
Viga em Balanço, com extremidade engastada e Carga Concentrada (P) na extremidade livre	$v_{flexão} = \frac{P.L^3}{3.E.I}$	$v_{cis} = \frac{\alpha_s P.L}{G.A}$	$v = \frac{P.L^3}{3.E.I} \left(1 + \frac{3.\alpha_s E I}{G.A.L^2}\right)$

Tabela 4.1 – Deflexão máxima em vigas com e sem deformação por cisalhamento.

Observando as expressões para o cálculo das deflexões máximas, contabilizando os efeitos de flexão e cisalhamento, notamos que fora dos parênteses das equações estão presentes os valores das deflexões decorrentes apenas das deformações por flexão. Dentro dos parênteses, temos um “fator de correção” que permite incorporar o efeito da deformação por cisalhamento no cálculo das deflexões. Estes termos, quando a deformação por cisalhamento é irrelevante no cálculo da deflexão total, tendem a zero, e o valor da deflexão máxima é todo, praticamente, devido à contribuição das deformações por flexão.

Assim, do ponto de vista operacional, poderíamos incluir alguma correção desse tipo na formulação da Matriz de Rigidize do Elemento Finito de Viga, de modo a incorporar o efeito das deformações por cisalhamento.

Uma idéia interessante é pensar que ao calcularmos as deflexões máximas, considerando apenas as deformações por Flexão, estamos calculando uma deflexão menor do que a real, pois a deformação por cisalhamento não foi contabilizada. Poderíamos incluir um fator de correção que diminuisse a rigidez à flexão do elemento de viga, de modo que com menor rigidez à flexão, as deflexões seriam maiores, e este aumento nas deflexões incorporaria o efeito das deformações por cisalhamento. Esta é a base para introduzirmos essas correções na definição da matriz de rigidez do elemento.

O parâmetro de rigidez à flexão, já definido anteriormente, e que faz parte da matriz de rigidez do elemento, é dado por:

$$b = \frac{E.I}{L^3} \quad (4.20)$$

Pode-se provar na Resistência dos Materiais que o parâmetro de rigidez à flexão, incorporando o efeito das deformações por cisalhamento, é dado por:

$$b = \frac{E.I}{(1+\Phi).L^3} \quad (4.21)$$

em que o fator de correção Φ é dado por:

$$\Phi = \frac{12.E.I}{G.A_s L^2} \quad (4.22)$$

Sendo:

A_s - É a Área da Seção transversal da viga que é efetiva quanto ao cisalhamento. Por exemplo, no caso de Vigas I, a alma suporta praticamente quase toda a força cortante, e a tensão de cisalhamento é aproximadamente uniforme em toda a altura da alma. Assim, a área A_s é aproximadamente igual à área da alma.

O parâmetro b é definido para as duas direções em que ocorrem as flexões em planos perpendiculares. Assim, por exemplo, quando a flexão ocorre em torno do eixo z (no plano xy), e as deformações por cisalhamento são contabilizadas na direção y, teremos:

$$b_z = \frac{E.I_z}{(1+\Phi_y).L^3}, \quad (4.22) \quad \text{e} \quad \Phi_y = \frac{12.E.I_z}{G.A_{sy}L^2} \quad (4.23)$$

A expressão 4.23 permite incorporar à Matriz de rigidez do elemento de viga o efeito da deformação por cisalhamento, dentro do parâmetro de rigidez à flexão. Quando esta não for relevante, o valor de Φ será praticamente nulo e então $1+\Phi \approx 1$.

Para termos uma idéia da importância da correção introduzida, façamos uma aplicação para o caso da flexão de uma barra chata, em que a altura da “alma” é bem maior que a sua espessura, ou seja, admitimos que a área A_s seja igual à própria área da barra, tal como a alma de um perfil I. A figura 4.16 mostra o desenvolvimento da expressão para cálculo de Φ e a sua importância no cálculo de b_z em função da relação entre o comprimento da viga e sua altura. Nota-se que para as vigas curtas, quando a altura da viga não é muito menor que o seu comprimento, as deformações por cisalhamento passam a ser relevantes.

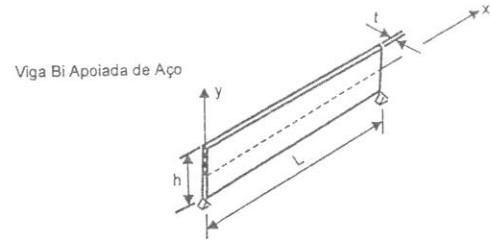


Figura 4.16 – Viga Biapoiada de aço.

Para a viga da figura 4.16, temos:

$$\text{Área de Seção} = A = A_S = t \cdot h$$

$$\text{Momento de Inércia em relação ao eixo } z: I_z = \frac{t \cdot h^3}{12}$$

Coeficiente Possion: $\nu = 0,3$ (aço)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+0,3)} = \frac{E}{2,6} = 2,6$$

$$\text{Calculando } \phi_y = \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{G \cdot A_S \cdot L^2} \text{ de (4.22)} \quad \therefore \quad \phi_y = \frac{12 \cdot E \cdot t \cdot h^3 / 12}{E / 2,6 \cdot t \cdot h \cdot L^2} \text{ resultando em}$$

$$\boxed{\phi_y = 2,6 \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2}$$

Montemos uma tabela para calcular ϕ e $(1 + \phi)$ para diversas relações $\frac{h}{L}$, isto é, desde vigas curtas até vigas longas; com isto avaliaremos como se altera o parâmetro b_z de rigidez à flexão.

$\frac{h}{L}$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
ϕ_y	0,0065	0,026	0,104	0,234	0,416	0,65	0,936
$1 + \phi_y$	1,0065	1,026	1,104	1,234	1,416	1,65	1,936
$\frac{1}{1 + \phi_y}$	0,994	0,975	0,906	0,810	0,706	0,606	0,517

Como $b_z = \frac{E I_z}{(1 + \phi_y) L^3}$; quando $\frac{h}{L} = 0,05 \rightarrow \frac{1}{1 + \phi_y} = 0,994$, portanto a deformação por cisalhamento praticamente não exerce

nenhuma influência. À medida que $\frac{h}{L}$ aumenta, ou seja, a altura da viga aumenta em relação ao seu comprimento, a relação

$\frac{1}{1 + \phi_y}$ passa a desempenhar papel importante.

Por exemplo, para $\frac{h}{L} = 0,4 \rightarrow \frac{1}{1 + \phi_y} = 0,706$; significa que em termos de rigidez à flexão, a viga só tem efetivamente 70,6% da rigidez à flexão calculada sem a presença da deformação por cisalhamento.

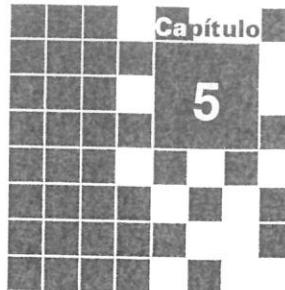
Assim, a partir da consideração dos parâmetros ϕ_y e ϕ_z , teremos a matriz completa do Elemento de Viga com 12 Graus de Liberdade e contabilizado o efeito da deformação por cisalhamento, dada por (4.25) em seguida:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} a & & & & & & & & \\ 0 & 12 b_z^- & & & & & & & \\ 0 & 0 & 12 b_y^- & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & t & & & & & \\ 0 & 0 & -6b_y^- L & 0 & (4 + \phi_z)b_y^- L^2 & & & & \\ 0 & 6b_z^- L & 0 & 0 & 0 & (4 + \phi_y)b_z^- L^2 & & & \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & & \\ 0 & -12 b_z^- & 0 & 0 & 0 & -6b_z^- L & 0 & 12 b_z^- & \\ 0 & 0 & -12 b_y^- & 0 & 6b_y^- L & 0 & 0 & 0 & 12 b_y^- \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & -6b_y^- L & 0 & (2 - \phi_z)b_y^- L^2 & 0 & 0 & 0 & (4 + \phi_z)b_y^- L^2 \\ 0 & 6b_z^- L & 0 & 0 & 0 & (2 - \phi_y)b_z^- L^2 & 0 & -6b_z^- L & 0 & 0 & 0 & (4 + \phi_y)b_z^- L^2 \end{bmatrix}$$

Em que:

$$\begin{cases} a = \frac{EA}{L} \\ b_z^- = \frac{EI_z}{(1 + \phi_y)L^3} \\ b_y^- = \frac{EI_y}{(1 + \phi_z)L^3} \\ t = \frac{G \cdot J}{L} \end{cases}$$

Anotações



Elementos Bidimensionais e Tridimensionais – Aplicações Gerais

Elementos bi e tridimensionais e sua aplicação em problemas de engenharia estrutural - chapas, sólidos, etc. – método geral para a determinação da matriz de rigidez de qualquer elemento finito.

5.1. ASPECTOS IMPORTANTES NA FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICAÇÕES GERAIS

A determinação dos esforços internos que agem em uma estrutura, discretizada como uma montagem de elementos finitos, obedeceu a uma seqüência de passos aplicáveis aos chamados "Sistemas Discretos Padrão". A partir do conhecimento da Matriz de Rrigidez de cada Elemento, foi possível montar a Matriz de Rrigidez da Estrutura. Para uma dada Condição de Contorno definida pelas Restrições e pelo Carregamento atuante, foi possível determinar os Deslocamentos Nodais para a Estrutura inteira. Conseqüentemente, para cada elemento isolado, identificando os componentes de deslocamentos presentes, foi possível determinar as Forças Internas.

Os *elementos mais simples* abordados anteriormente (Molas, Treliças e Vigas) permitiram a aplicação do *Método Direto* para a determinação da sua Matriz de Rrigidez, que consiste, a partir da Resistência dos Materiais Elementar, em estabelecer relações diretas entre as Forças Nodais aplicadas no Elemento e os correspondentes Deslocamentos Nodais. Dessa forma, foi possível estabelecer o *significado físico* de um termo k_{ij} da Matriz de Rrigidez de um Elemento Finito: é a *Força no grau de liberdade i, devido a um deslocamento unitário no grau de liberdade j*, enquanto todos os outros graus de liberdade do elemento estão bloqueados em seus movimentos, isto é, apresentam componentes de deslocamentos iguais a zero.

Dessa forma, poderíamos em princípio estabelecer um Método Geral para montar a Matriz de rigidez de qualquer elemento finito: aplica-se um deslocamento unitário isoladamente a um de seus graus de liberdade, e em seguida contabilizam-se as forças que surgem em todos os graus de liberdade do elemento. Essas forças associadas ao deslocamento unitário aplicado são os coeficientes de rigidez presentes na Matriz de Rigidez do Elemento.

O fato de conseguirmos definir de forma exata a rigidez dos elementos finitos unidimensionais decorre de duas condições, que já vimos no item 4 do capítulo 2.

- Primeiro, a lei de deformação interna do elemento era "simples" (como, por exemplo, o caso da Mola). Era possível Calcular os Deslocamentos dentro do elemento a partir dos deslocamentos nodais, e de forma exata.
- Segundo, os elementos unidimensionais só são conectados nos elementos adjacentes nos pontos nodais. Não ocorrem interações de elementos vizinhos fora desses pontos.

Em se tratando de elementos bi e tridimensionais, a determinação da Matriz de Rígidez do Elemento torna-se impraticável pelo Método Direto. Essa dificuldade decorre das seguintes situações:

- A Resistência dos Materiais Elementar não quantifica essas relações diretas entre as forças nodais atuantes no elemento e os correspondentes deslocamentos nodais, como ilustrados para a chapa da figura 5.1.
- Independentemente da dificuldade anterior, o tratamento isolado do equilíbrio de um elemento pelo método direto deveria considerar que na estrutura real o elemento troca ações também no contorno. Essas situações que ocorrem nas interfaces dos elementos podem ser inúmeras, dependendo dos elementos vizinhos, tornando maiores ainda as dificuldades antes levantadas.

É certo que na formulação do problema matricial, a Matriz de Rígidez do Elemento representa a relação entre todas as forças nodais e os deslocamentos nodais. A chapa da figura 5.1 apresenta oito componentes de forças nodais e oito componentes de deslocamentos nodais. Nesse caso, como já sabemos, a Matriz de Rígidez terá dimensão 8x8. As equações algébricas representativas do equilíbrio do elemento têm formato semelhante àquelas dos elementos unidimensionais.

As Forças Nodais representadas na configuração de equilíbrio devem ser interpretadas como as Forças que aplicadas aos nós estão em equilíbrio com todas as forças internas, inclusive às ações do contorno, e são, portanto, estaticamente equivalentes às forças internas.

Da própria montagem e manipulação do sistema de equações, pode-se identificar que um termo k_{ij} da matriz pode ser interpretado também como uma força associada a um deslocamento unitário, mas que de alguma forma deveria contabilizar a situação do contorno com o elemento adjacente. Matematicamente, a equação matricial traduz isso.

Embora seja útil neste caso também pensar nos termos da Matriz de Rígidez do Elemento Finito do ponto de vista físico, o modo utilizado para a determinação dos coeficientes de rigidez será diferente daquele aplicado aos elementos unidimensionais: aplicar um deslocamento unitário e contabilizar forças atuantes nos nós não será utilizado pelos motivos anteriormente mencionados. Os conceitos de Rígidez do Elemento e Rígidez da Estrutura continuam presentes, como anteriormente já estudado para os elementos unidimensionais; a questão está em como determiná-las. Nos elementos unidimensionais essa determinação era feita de forma exata; a partir de agora, para os elementos bi e tridimensionais, ela será feita de forma aproximada.

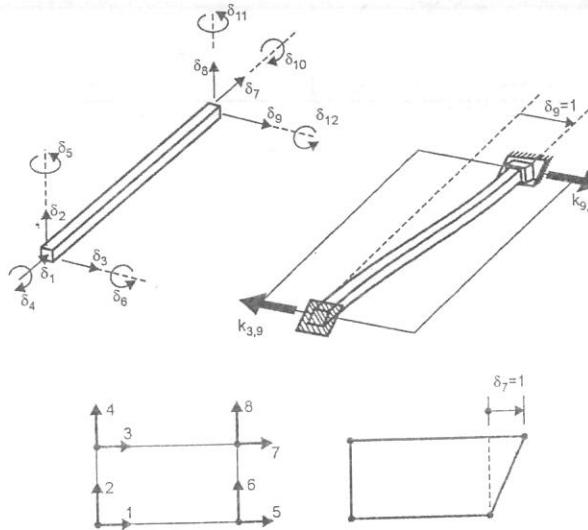


Figura 5.1 – Aplicação de Deslocamento Unitário em um dos graus de liberdade de Elemento Finito Unidimensional e Elemento Finito Bidimensional.

5.2. CONCEITOS IMPORTANTES NA DEFINIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS FINITOS BI E TRIDIMENSIONAIS

A determinação da Matriz de rigidez de um Elemento Finito, de forma aproximada, como comentado no item 1, utilizará alguns conceitos matemáticos e físicos que nos são familiares. A utilização deles em conjunto irá nos permitir estabelecer um Procedimento Geral para a Determinação da Matriz de Rigidez de qualquer elemento finito. Tais conceitos são:

- Técnicas Matemáticas de Interpolação.
- Trabalho realizado por uma Força, Energia de Deformação e Transformação de energia.

Vamos relembrá-los, e posteriormente utilizá-los nessa nova empreitada.

a) Técnicas de Interpolação e sua aplicação ao Cálculo das deformações em um elemento

Em diversas aplicações da engenharia, somos colocados diante de situações em que conhecemos os valores de uma dada função $f(x)$ para um dado conjunto de valores discretos da variável x . Porém, não dispomos de uma expressão analítica que nos permita calcular o valor da função para um valor arbitrário de x . Os valores da função podem representar uma dada grandeza física obtida a partir de um experimento, como, por exemplo, os valores das deformações registradas por intermédio de um extensômetro elétrico em função da Carga externa aplicada, e representada na figura 5.2.a. Surge então naturalmente a pergunta: como obter o valor da função para um ponto arbitrário dentro do intervalo conhecido? Uma idéia seria **desenhar uma curva suave definida a partir desses pontos conhecidos, e utilizá-la como a função representativa da Lei de Variação dessa Grandeza dentro do intervalo** em estudo, como mostra a figura 5.2.b. Esse procedimento é chamado de **Interpolação**. Esta relação estabelecida para a correspondência entre a variável e o valor da Grandeza constitui um **Modelo Matemático** para a situação física em estudo. O conhecimento de que este modelo matemático seja adequado ou não para efetuar as previsões do valor da Grandeza em todo o intervalo constitui uma questão importante. **Se o modelo adotado conduzir a previsões razoáveis, é o que basta para considerá-lo adequado.** No estudo da matemática, dispõe-se de uma vasta literatura em que são abordados diversos teoremas, que consideram as classes de funções que podem ser bem aproximadas por intermédio de funções de interpolação, e cujo estudo foge aos objetivos deste texto.

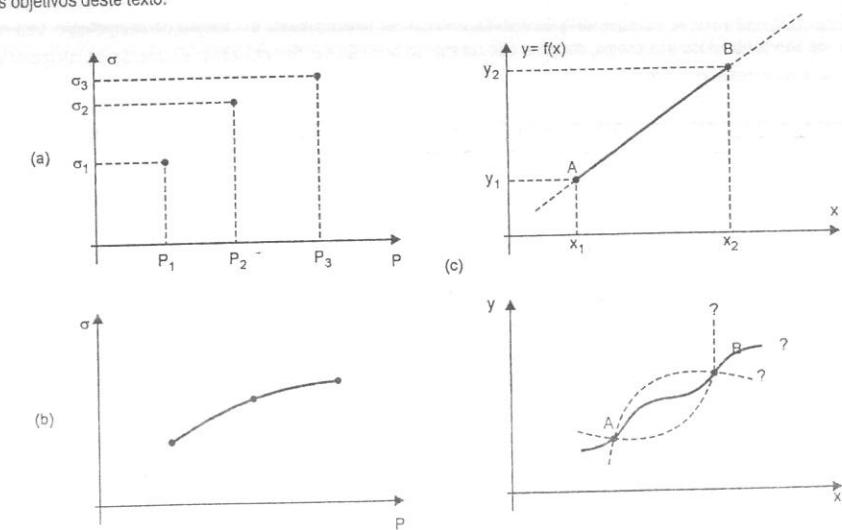


Figura 5.2 – Funções de Interpolação. O grau da função de interpolação, de sorte que esta seja única, depende do números de pontos conhecidos.

Pensando inicialmente apenas no aspecto matemático, convém relembrar:

- 1) A definição da *Função de Interpolação utilizada como uma aproximação* está associada à determinação de certas constantes, que definem de forma única a relação estabelecida. Por exemplo, na figura 5.2.c, é representada a *Interpolação Linear entre os pontos A e B conhecidos*. A Função de Interpolação Linear define a reta que passa pelos pontos A e B, cuja equação é:

$y = a \cdot x + b$, sendo a e b constantes a determinar. As duas constantes desconhecidas podem ser determinadas a partir dos valores conhecidos de x e y nos pontos A e B, ou seja, do par (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Assim:

Para o ponto A: $y_1 = a \cdot x_1 + b$

Para o ponto B: $y_2 = a \cdot x_2 + b$

Com essas duas equações, as duas constantes a e b poderão ser determinadas, e a função de interpolação linear estará definida de forma única, representando a única reta que passa por A e B.

Note que poderíamos tentar utilizar uma função de maior grau para efetuar a interpolação desejada entre os dois pontos, motivados por uma melhor representação do fenômeno em estudo, por exemplo, uma função do segundo grau. A função de interpolação teria a seguinte forma então:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Porém, para determinarmos as constantes a , b e c teremos dificuldades. Como só dois pontos são conhecidos, o número de equações geradas, duas, será menor que o número de constantes a determinar, três. Uma outra maneira de interpretar essa indeterminação é que por dois pontos passam infinitas parábolas do segundo grau. Essa última interpolação só seria possível de forma única se tivéssemos três pontos.

Portanto, a definição do grau do polinômio da função de interpolação e a consequente representação desta de forma única estão associadas ao número de pontos conhecidos.

Se são conhecidos só dois pontos, somente duas constantes poderão ser determinadas, e a função de interpolação será do Primeiro Grau. Se são conhecidos três pontos, somente três constantes poderão ser determinadas, e a função de interpolação será do segundo grau, e assim por diante.

- 2) As técnicas de interpolação estarão presentes intensamente no estudo dos Modelos Discretizados pelo Método dos Elementos Finitos. Vimos que ao discretizarmos um Sistema como uma Montagem de Elementos, a idéia inicial era que não estávamos calculando em princípio o equilíbrio dos infinitos pontos do sistema contínuo, mas apenas de alguns, que são os *Nós* do Modelo. Ou seja, a "Função" que representava os deslocamentos dos infinitos pontos não era conhecida analiticamente, da mesma forma que no exemplo citado em 1. Eram conhecidos apenas alguns valores discretos dessa "função", ou seja, nos *Nós*. Surge então naturalmente a questão anteriormente discutida: Como os pontos entre os nós do modelo se comportam, ou seja, como calcular os deslocamentos dos pontos que estão entre os nós do modelo, dentro dos elementos? Essa determinação será efetuada utilizando também o Conceito de *Funções de Interpolação*. Apenas que neste caso a função matemática tem significado físico. A partir dos deslocamentos nodais calcularemos os deslocamentos dentro do elemento, utilizando as aproximações contidas na função adotada.

Assim, na impossibilidade de estabelecer a correspondência entre os deslocamentos nodais e os deslocamentos dentro do elemento de forma exata, como nos elementos de mola, treliça e viga, definindo a configuração deformada do elemento, pode-se atribuir ao elemento uma configuração deformada aproximada, por intermédio de uma *Função de Interpolação para os Deslocamentos*.

Entretanto, neste caso, uma condição física adicional deve estar presente. A estrutura sob ação das Cargas atuando nos Nós se deforma. Essa deformação é expressa trecho a trecho do modelo, por intermédio da configuração deformada do elemento, que em última análise será contabilizada pela função de interpolação. Um elemento "muito deformado" estará sujeito a uma

"elevada" força interna. Mas essa condição deformada é consequência do carregamento que atua na estrutura e da sua rigidez. Ou seja, a função que descreve os deslocamentos dentro do elemento não é "imposta" apenas por uma condição matemática, pois se assim fosse, poderíamos escolher a função mais "agradável" para atender a um dado requisito, como, por exemplo, a estrutura não apresentar falha. Precisamos apenas saber se a estrutura "concorda" com isso. Ou seja, a condição real da estrutura não se modifica pelo fato de estarmos propondo um modelo de cálculo, pois este sim, deve ser capaz de prever o seu comportamento adequadamente. A condição adicional que necessitamos para descrever adequadamente o comportamento da estrutura vem do conceito de *trabalho e energia de deformação*, o que faremos em seguida.

b) Trabalho e Energia Interna de Deformação

Na formulação da Matriz de Rígidez dos elementos unidimensionais, os coeficientes de rigidez da matriz eram determinados por intermédio da imposição de deslocamentos unitários nos diversos graus de liberdade, e a contabilização das forças nos demais graus de liberdade do elemento. Na configuração deformada do elemento, identificamos as Forças Nodais presentes e os correspondentes deslocamentos. A ação de uma força e o correspondente deslocamento remetem-nos ao Conceito de *Trabalho de uma Força*, que representa fisicamente a *Transferência de Energia ao Sistema*. Essa energia introduzida pela ação das forças nodais evidentemente deverá ser transformada de alguma forma dentro do elemento, em particular, em *Energia de Deformação*, que pode ser contabilizada utilizando os conceitos da Resistência dos Materiais. Para estabelecermos essa idéia, vamos inicialmente tomar um exemplo simples que envolve transformações de energia, conceitos já bastante utilizados por nós na física básica.

Por exemplo, o sistema representado na figura 5.3 ilustra um corpo dotado de velocidade V_0 e uma mola indeformada, para a qual pretende-se determinar a sua constante elástica k , isto é, a sua Rígidez. Esse problema pode ser resolvido utilizando os conceitos de energia. Admitindo conhecidas a massa e a velocidade do corpo, a Energia Mecânica do Sistema é devido apenas ao seu movimento, considerando a energia potencial gravitacional nula nesse plano de referência. O corpo comprime a mola até parar, provocando no elemento elástico uma deformação x . Para o caso simples da mola, com apenas 1 grau de liberdade, o valor de x define a *condição deformada*. Toda energia cinética é transformada em energia potencial elástica, ou seja, *energia de deformação da mola*. Admitindo o sistema conservativo, temos:

$$\text{Energia Mecânica} = \text{Constante} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_0^2$$

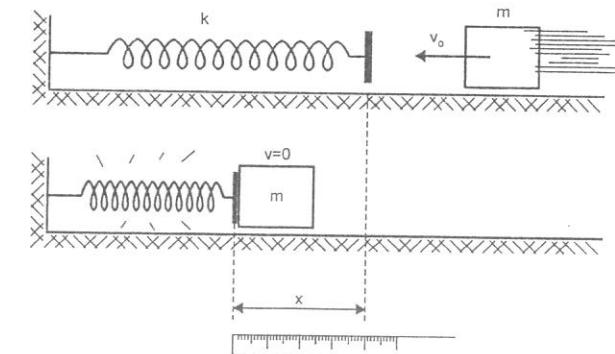


Figura 5.3 – A velocidade V_0 é conhecida. A deformação x é medida. A Energia Mecânica se conserva. A energia cinética é transformada em Energia Potencial Elástica, devido à deformação da mola. A igualdade dessas energias permite determinar k , que contabiliza a rigidez da mola. Esse raciocínio será utilizado como analogia para determinar a matriz de rigidez de um elemento. A energia externa introduzida pelos Nós será armazenada no elemento como energia de deformação.

Note que por intermédio da expressão anterior, podemos calcular a constante elástica da mola, ou seja, contabilizar a sua Rígidez, pois conhecemos V_0 e podemos medir x . Admitindo que o comportamento da mola é linear, o valor de k não é afetado pelo valor de V_0 , desde que a mola não ultrapasse o regime elástico. Variando V_0 , a deformação da mola x também varia, porém o valor de k

o mesmo. Ou seja, a rigidez da mola não é afetada pela solicitação externa, no caso desta ser linear. Esta idéia é fundamental e será utilizada na determinação da matriz de rigidez de um elemento finito.

Para um Elemento Finito qualquer, o procedimento é semelhante. A energia externa introduzida ao elemento finito é contabilizada pelo **trabalho das forças nodais, em associação com os correspondentes deslocamentos**. Essa energia é armazenada na forma de **energia de deformação dentro do elemento**. Mas a energia de deformação está associada à configuração deformada do elemento finito. E esta configuração deformada está descrita pela função de interpolação. Eis o que nos faltava! **A função de interpolação, que permite calcular os deslocamentos dentro do elemento a partir dos deslocamentos nodais, deve também atender a uma condição de Energia**, tal como o exemplo anterior da mola. Da mesma forma que no exemplo da mola, ao calcularmos a energia de deformação com base na configuração deformada aproximada do elemento finito, e igualarmos com o trabalho externo, teremos a possibilidade de determinar, ainda que em caráter aproximado, a rigidez do elemento finito. Este será o procedimento para a determinação da sua matriz de rigidez.

Portanto, como o Campo de Deslocamentos dentro de cada elemento está associado à rigidez dele, a contabilização da energia nessa condição deformada e a igualdade com o trabalho externo permitirão calcular $[k]^e$. Quanto mais bem especificado for esse comportamento interno, mais a resposta do modelo irá se aproximar do comportamento real da estrutura. Ou seja, **o elemento discreto que representa um dado trecho da estrutura entre os nós deve ser muito bem definido. E esta definição é feita pela função de interpolação**. Esta é a questão mais importante na definição dos Elementos Finitos.

Finalmente, convém lembrar que a Função de Interpolação que atenderá a essa condição de Energia deve ser definida de forma única. Vimos anteriormente que para satisfazer essa condição, o grau do polinômio de interpolação deve ser definido pelo número de pontos conhecidos, de modo geral. No caso específico da nossa aplicação, **os valores conhecidos são os Graus de Liberdade do Elemento**, ou seja, os componentes de deslocamentos nodais. Assim:

A escolha da função de interpolação que definirá o campo de deslocamentos dentro do elemento finito, de forma única, estará "amarraada" ao número de graus de liberdade que o elemento possui. Portanto, o grau do polinômio de interpolação é definido a partir do conhecimento do número de graus de liberdade do elemento.

Nota Complementar

Relembrando o Cálculo do Trabalho de uma Força

a) Deslocamento Retilíneo

O processo de transferência ou de transformação de energia está, em geral, associado à troca de forças entre os corpos e ao deslocamento do ponto de aplicação dessas forças. A grandeza que leva em conta a Força e o Deslocamento de seu ponto de aplicação é denominada TRABALHO DE UMA FORÇA, uma grandeza escalar. No esquema ao lado, o homem troca uma FORÇA CONSTANTE com o bloco. O bloco recebe energia; ela pode ser medida por intermédio do Trabalho da Força \vec{F} , dado por:

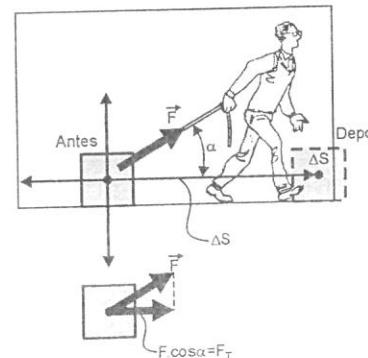
$$\tau_F = \vec{F} \cdot \Delta S \cos \alpha$$

Em que:

F é a intensidade da força constante \vec{F} ;

ΔS é a intensidade do deslocamento do ponto de aplicação da força;

α é o ângulo formado entre a força e o deslocamento.



Note que $F \cos \alpha$ é a Projeção da Força \vec{F} no eixo do movimento, representada por F_T . Assim, o Trabalho de uma Força pode ser expresso por meio da sua projeção:

$$\tau_F = F_T \cdot \Delta S$$

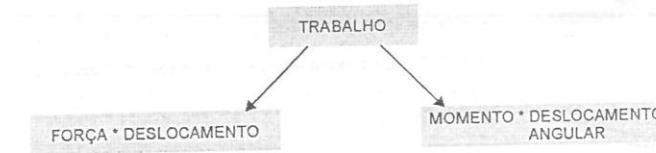
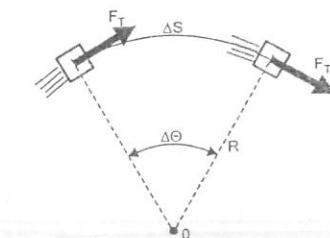
b) Deslocamento Curvilíneo

No esquema ao lado, supõe-se que F_T , a projeção da Força no deslocamento ΔS , seja constante. Assim:

$\tau_F = F_T \cdot \Delta S$. Pela definição do ângulo em radianos: $\frac{\Delta S}{R} = \Delta \theta$ e portanto $\Delta S = R \cdot \Delta \theta$. Então:

$\tau_F = F_T \cdot R \cdot \Delta \theta$. Mas $F_T \cdot R$ é o Momento da Força F_T em relação ao polo $O(M_0)$. Dessa forma, o trabalho pode ser calculado como o produto de um momento por um ângulo, isto é, $\tau = M_0 \cdot \Delta \theta$.

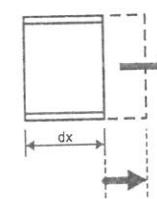
Assim:



c) Aplicações Estruturais

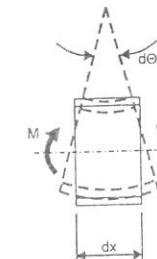
Nas aplicações da Dinâmica, estudamos Movimentos causados pela ação de Forças, e contabilizamos a Energia transferida por intermédio do Trabalho das Forças presentes.

Na Análise Estrutural, temos a presença de deslocamentos mediados de uma configuração indeformada a uma configuração deformada de equilíbrio. O Conceito de trabalho também está presente tanto para a ação de uma Força como para a ação de um momento. Como exemplo, temos:



A ação da FORÇA AXIAL F no trecho de barra de comprimento dx produz o deslocamento du . O trabalho da Força F associado à deformação desse pequeno brecho será:

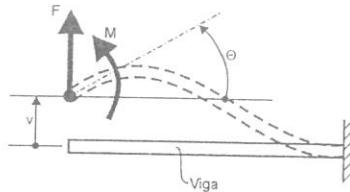
$$d\tau = F \cdot du$$



A ação do MOMENTO FLETOR M no trecho de viga de comprimento dx produz um DESLOCAMENTO ANGULAR $d\theta$. O Trabalho do Momento M associado à deformação angular desse pequeno trecho será:

$$d\tau = \text{Momento} \cdot \text{Deslocamento Angular} = M \cdot d\theta$$

d) Trabalho das Forças Externas



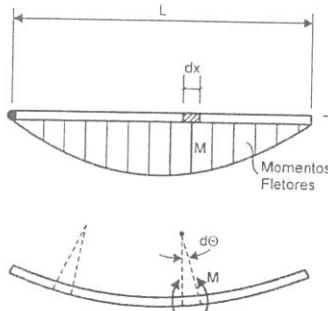
À Força F corresponde o Deslocamento v . Ao Momento M corresponde o ângulo θ . O trabalho dessas FORÇAS EXTERNAS será:

$$\tau_{\text{EXT}} = F \cdot v + M \cdot \theta$$

Trabalho da Força

Trabalho do Momento

e) Trabalho das Forças Internas



A viga ao lado está sujeita a uma distribuição de Momentos Fletores. A viga deforma e armazena ENERGIA DE DEFORMAÇÃO. Em um trecho de comprimento dx , o Momento Fletor é M , e a estrutura nesse trecho apresenta um pequeno deslocamento angular $d\theta$. Nesse trecho a Energia Armazenada é dada por:

$\tau = M \cdot \theta$ = Momento * Ângulo que corresponde ao Trabalho das Forças Internas. Se somarmos a energia armazenada em todos os trechos, teremos a Energia de Deformação da Viga Inteira. Essa soma é dada pela Integral ao longo de toda a viga. Assim:

$$\tau_{\text{INTERNO}} = \int_0^L M \cdot d\theta$$

f) Condição de Equivalência

Nos casos gerais, devem-se considerar o trabalho das Forças Externas e o trabalho das Forças Internas. A energia fornecida pelas Forças Externas é armazenada como Energia de Deformação. Assim:

$$\tau_{\text{EXT}} = \tau_{\text{INT}}$$

5.3. MÉTODO GERAL PARA A MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE QUALQUER ELEMENTO FINITO

No capítulo 2, estabelecemos o Procedimento Geral dos Elementos Finitos. Na figura 2.13 resumimos os passos principais, em que identificávamos a Determinação da Matriz de Rígidez do Elemento, como passo fundamental para efetuar o procedimento de montagem da Matriz de Rígidez da Estrutura. Utilizamos naquela ocasião o elemento de mola e, de forma exata, conseguimos montar a matriz de rígidez desse elemento. Utilizando a mesma idéia, aplicamos essa abordagem para os elementos de treliça e de viga. A determinação da matriz de rígidez dos elementos bi e tridimensionais merece, entretanto, considerações adicionais, citadas nos itens 2.a e 2.b do presente capítulo. Vamos então estabelecer agora o *Procedimento Geral para a montagem da matriz de Rígidez de qualquer elemento finito*, dentro do caráter aproximado já citado antes, e em que condições essas aproximações poderão oferecer-nos bons resultados na Modelagem dos problemas de engenharia.

Esse procedimento será introduzido para um elemento já conhecido, e depois aplicado para todos os elementos objeto de interesse, e que constam da biblioteca de elementos dos Programas de Análise. Utilizaremos o Elemento de Viga como "pano de fundo" para estabelecer esse procedimento geral, para tirar proveito da simplicidade que esse elemento oferece em termos de tratamento

matemático. Entendido o conceito, as aplicações mais gerais serão encaradas como um exercício adicional, apenas que as funções matemáticas apresentarão uma maior sofisticação, pelo fato de traduzirem um problema bi ou tridimensional.

No item 5.2 já estabelecemos as principais idéias que fornecerão subsídios para a determinação da matriz de rigidez de um elemento finito. Em resumo:

Trabalho das Forças aplicadas nos nós do Elemento

Trabalho das Forças Internas, para a condição deformada aproximada pela Função de Interpolação

Determinação da rigidez do Elemento de forma aproximada

Vamos então iniciar os **CINCO PASSOS PARA A DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE QUALQUER ELEMENTO FINITO**.

A figura 5.4 representa um elemento finito de viga, sujeito apenas a ações de flexão no plano xy. O elemento possui apenas 4 Graus de Liberdade, correspondentes aos deslocamentos lineares v_1 e v_2 na direção y, e os ângulos θ_1 e θ_2 . Esses valores definem os graus de liberdade conhecidos para esse elemento. Já sabemos do estudo do elemento de viga no espaço, que as flexões e os cisalhamentos em planos perpendiculares que contêm os eixos centrais principais são independentes entre si. Assim, o estudo da flexão em um plano poderá ser utilizado para o outro plano perpendicular, considerando apenas as propriedades geométricas adequadas. Da mesma forma, as forças axiais e a torção não influenciam as flexões nos dois planos.

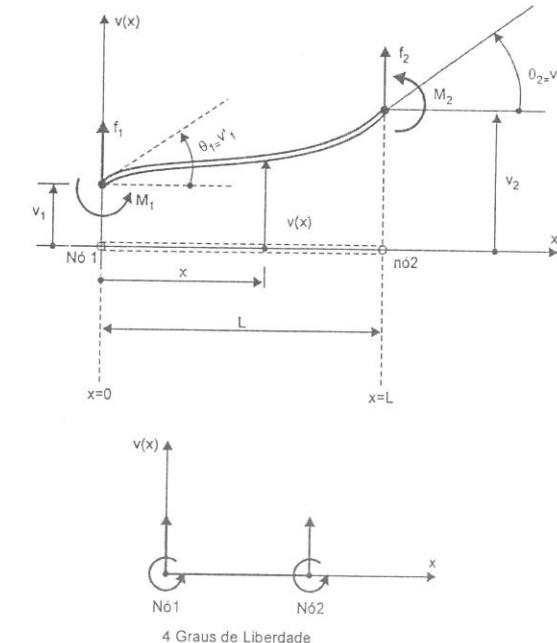


Figura 5.4 – Elemento Finito de Viga. A partir do conhecimento dos deslocamentos nodais, pretende-se determinar o deslocamento $v(x)$ de qualquer ponto dentro do elemento, dado pela coordenada x , no sistema local. Isso será feito por intermédio da função de interpolação. Essa idéia é geral para todos os elementos finitos.

Estamos então diante da questão mais importante do Método dos Elementos Finitos: Como, a partir do conhecimento dos componentes de deslocamentos nodais, isto é, dos graus de liberdade, poderemos calcular os deslocamentos dentro do elemento? Em seguida, como determinar as deformações e as forças internas e, consequentemente, as Tensões?

5.3.1. FORMULE A FUNÇÃO DE DESLOCAMENTOS PARA O ELEMENTO FINITO - ESCOLHA A FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO ADEQUADA PARA O ELEMENTO

Deve-se especificar a *Função de Deslocamentos* que defina de forma única o estado de deslocamentos em todos os pontos dentro do elemento, em termos dos Graus de liberdade dos Nós, permitindo, a partir dos deslocamentos nodais conhecidos, determinar os deslocamentos dentro do elemento. A função de interpolação escolhida deve representar o elemento deformado o mais próximo possível do seu comportamento real. A função polinomial, como uma série de potências, é amplamente utilizada como função de interpolação, desde que pode ser facilmente manipulada, limitando o número de termos em função do número de coeficientes que é possível determinar.

O polinomial escolhido deve ter um coeficiente desconhecido para cada Grau de Liberdade. Assim:

The diagram shows two boxes connected by an arrow. The left box contains the text "O Elemento possui 4 Graus de Liberdade". The right box contains the text "O Polinômio escalhido deve ter 4 Coeficientes. O Polinômio que tem 4 coeficientes é o Polinômio Cúbico". Below this is a downward arrow pointing to a box containing the equation $v(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3$. To the right of the equation is the label "(5.1)".

$$v(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3 \quad (5.1)$$

Note que para cada posição ao longo da viga dada por x , podemos calcular o deslocamento $v(x)$. Note que os deslocamentos são apenas na direção y , e só dependem de x . Daí a função de deslocamentos ser expressa apenas em função da variável x .

Está, portanto, definida a função de deslocamentos do elemento de viga, considerando apenas o seu trabalho de flexão em um plano. Vale ressaltar que no sistema local de coordenadas, a posição de cada ponto de um elemento unidimensional é especificada por apenas uma variável. Devemos notar que essa equação não "nasceu" matricial. Porém, para propósitos de representação computacional, deve-se representar essa equação na Notação Matricial, como já fizemos anteriormente. Assim:

$$v(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Convém mencionar que a representação matricial é introduzida por "questões administrativas" de armazenamento no computador.

De forma compacta:

$$v(x) = [H(x)] \cdot [C] \quad (5.3)$$

em que $[H(x)]$ representa a Matriz que contém as variáveis e $[C]$ a Matriz que contém os coeficientes desconhecidos, e que devem ser determinados.

Da mesma forma que os deslocamentos lineares foram formulados, podemos exprimir a inclinação da viga ponto a ponto na condição deformada, já que a inclinação é expressa pela primeira derivada dos deslocamentos. Assim, tomando a derivada de $v(x)$, teremos:

$$v'(x) = C_2 + 2 \cdot C_3 \cdot x + 3 \cdot C_4 \cdot x^2 \quad (5.4)$$

ou ainda, se quisermos representar matricialmente as equações que dão os deslocamentos e as inclinações ponto a ponto do elemento, teremos:

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x & 3 \cdot x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Dessa forma, as Funções de Interpolação para o Elemento Finito de viga estão formuladas. Devemos apenas determinar as Constantes em função dos valores conhecidos de deslocamentos nodais, o que será feito no segundo passo deste procedimento geral.

5.3.2. CALCULE OS COEFICIENTES DESCONHECIDOS DA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO, RELACIONANDO OS DESLOCAMENTOS DENTRO DO ELEMENTO COM OS DESLOCAMENTOS NODAIS

Vamos substituir os valores de deslocamentos nodais, conhecidos, nas funções de interpolação definidas em 5.1 e 5.4. Assim, para $x = 0$, no nó 1 do elemento, temos $v = v_1$ e $\theta = v'_1$, e para $x = L$, no Nó 2 do Elemento, temos $v = v_2$ e $\theta = v'_2$. Assim:

The diagram shows two rows of boxes. The top row starts with "Nó 1" leading to "x=0", which then leads to the equations $v(x)=v(0)=v_1=C_1+C_2 \cdot 0+C_3 \cdot 0^2+C_4 \cdot 0^3=C_1$ and $v'(x)=v'(0)=v'_1=C_2+2 \cdot C_3 \cdot 0+3 \cdot C_4 \cdot 0^2=C_2$. The bottom row starts with "Nó 2" leading to "x=L", which then leads to the equations $v(x)=v(L)=v_2=C_1+C_2 \cdot L+C_3 \cdot L^2+C_4 \cdot L^3$ and $v'(x)=v'(L)=v'_2=C_2+2 \cdot C_3 \cdot L+3 \cdot C_4 \cdot L^2$.

$$\begin{aligned} \text{Nó 1} &\rightarrow x=0 & v(x) = v(0) = v_1 = C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0^2 + C_4 \cdot 0^3 = C_1 \\ && v'(x) = v'(0) = v'_1 = C_2 + 2 \cdot C_3 \cdot 0 + 3 \cdot C_4 \cdot 0^2 = C_2 \\ \text{Nó 2} &\rightarrow x=L & v(x) = v(L) = v_2 = C_1 + C_2 \cdot L + C_3 \cdot L^2 + C_4 \cdot L^3 \\ && v'(x) = v'(L) = v'_2 = C_2 + 2 \cdot C_3 \cdot L + 3 \cdot C_4 \cdot L^2 \end{aligned}$$

Note que montamos quatro equações a quatro incógnitas, e podemos determinar os coeficientes desconhecidos. Novamente utilizando a notação matricial por uma "questão administrativa", as equações anteriores poderão ser representadas como um produto de matrizes. Assim:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot L & 3 \cdot L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

ou se representarmos de forma compacta, teremos:

$$\{\delta\} = [A] \cdot [C], \text{ ou } [C] = [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (5.6)$$

A matriz $[A]$ contém somente termos conhecidos que definem a geometria do elemento, sendo $[A]^{-1}$ a sua inversa, e $[C]$ é a matriz coluna dos coeficientes desconhecidos, e $\{\delta\}$ é a matriz que contém os deslocamentos nodais conhecidos.

Se fizermos a inversão da matriz $[A]$, teremos:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

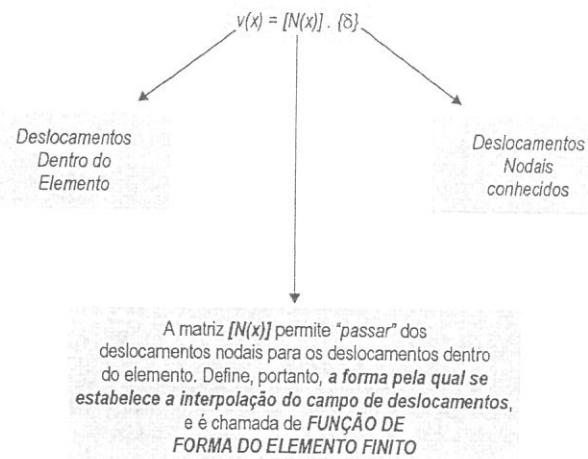
Como:

$$v(x) = [H(x)] \cdot \{C\}$$

e

$$\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

Sendo $[N(x)] = [H(x)] \cdot [A]^{-1}$, poderemos então escrever:



(5.7)

Embora tenha sido introduzida para o Elemento de Viga, a idéia da **Função de Forma** de um Elemento Finito é Geral, e constitui um dos Conceitos mais importantes na formulação dos Elementos. Ela estabelece o **comportamento do elemento**, ou seja, **dados os deslocamentos nodais, permite-nos calcular os deslocamentos dentro do elemento**.

Todos os elementos finitos, incluídos na Biblioteca de Elementos de um Programa de Análise, estão disponíveis e trazem consigo a Função de Forma que se propõe a representar um dado comportamento físico do elemento. Embora para os elementos bi e tridimensionais a expressão da Função de Forma possa se apresentar mais sofisticada, o conceito é idêntico, e convém generalizar essa idéia.

A manipulação matemática das equações matriciais é feita nas aplicações práticas pelo computador. Porém, para estabelecer de forma completa a Função de Forma do Elemento de Viga, vamos desenvolver a equação (5.7). Assim:

$$N(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}_{1 \times 4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

O produto das matrizes terá dimensão 1×4 e será:

$$N(x) = \left[\underbrace{1 + 0 \cdot x - 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{x^3}{L^3}}_{\text{Termo 1}} \right] \left[\underbrace{1 \cdot 0 + x \cdot 1 - 2 \cdot \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}}_{\text{Termo 2}} \right] \left[\underbrace{1 \cdot 0 + x \cdot 0 + 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3}}_{\text{Termo 3}} \right] \left[\underbrace{1 \cdot 0 + x \cdot 0 - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}}_{\text{Termo 4}} \right]$$

$$N(x) = [\eta_{11} \quad \eta_{12} \quad \eta_{13} \quad \eta_{14}]_{1 \times 4}$$

5.3.3. CALCULE AS DEFORMAÇÕES INTERNAS NO ELEMENTO A PARTIR DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

Da revisão da Teoria de Vigas feita no Quadro VI, vimos que as deformações por flexão estão associadas à curvatura apresentada pela viga ao longo do seu comprimento. A curvatura está associada à segunda derivada dos deslocamentos. Assim:

$$\text{Curvatura} = \frac{1}{p} = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{d^2v}{dx^2} = v''(x) \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{y}{p} = \frac{M}{E \cdot I} \cdot y = y \cdot v''(x) \quad (5.8)$$

Podemos calcular $v''(x)$, derivando a equação (5.4). Assim:

$$v''(x) = 2 \cdot C_3 + 6 \cdot C_4 \cdot x$$

representando essa equação na Notação Matricial, temos:

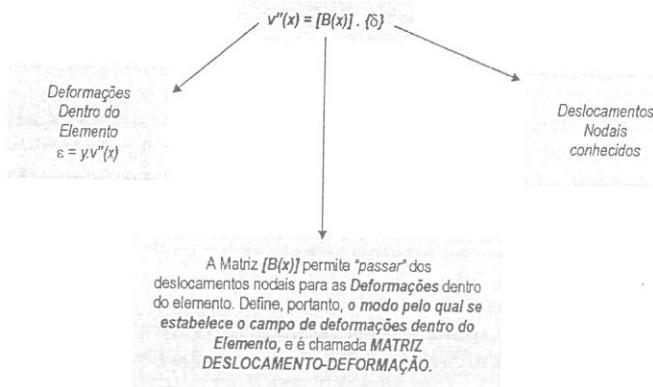
$$v''(x) = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \cdot x] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad \text{e como } \{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}, \text{ teremos:}$$

$$v''(x) = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \cdot x] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

sendo

$$[B(x)] = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \cdot x] \cdot [A]^{-1}$$

podemos escrever de forma compacta:



Embora tenha sido introduzida para o Elemento de Viga, a idéia da **MATRIZ DESLOCAMENTO-DEFORMAÇÃO** de um Elemento Finito é Geral, e constitui um dos Conceitos mais importantes na formulação da sua Matriz de Rígidez. Ela estabelece também o **comportamento do elemento**, ou seja, **DADOS OS DESLOCAMENTOS NODAIS, PERMITE-NOS CALCULAR AS DEFORMAÇÕES DENTRO DO ELEMENTO**.

Todos os elementos finitos, incluídos na Biblioteca de Elementos de um Programa de Análise, estão disponíveis e trazem consigo a **Matriz Deslocamento-Deformação** que se propõe a representar um dado comportamento físico do elemento, ou seja, o **modelo matemático para o Cálculo das Deformações no domínio do elemento**. Embora para os elementos bi e tridimensionais a expressão da Matriz Deslocamento-Deformação possa se apresentar mais sofisticada, o conceito é idêntico, e convém generalizar de essa idéia. Veremos que a Matriz Deslocamento-Deformação estará presente na expressão geral da formulação da Matriz de Rígidez de qualquer elemento finito.

A manipulação matemática das equações matriciais é feita nas aplicações práticas pelo computador. Porém, para estabelecer de forma completa a Matriz Deslocamento-Deformação do Elemento de viga, vamos desenvolver a equação (5.9). Assim:

$$[B] = \left[\begin{pmatrix} -\frac{6}{L^2} + 12 \cdot \frac{x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + 6 \cdot \frac{x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - 12 \cdot \frac{x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + 6 \cdot \frac{x}{L^2} \end{pmatrix} \right] \quad (5.10)$$

5.3.4. CALCULE AS FORÇAS INTERNAS NO ELEMENTO E, COMO CONSEQUÊNCIA, AS TENSÕES A PARTIR DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

O Momento Fletor em qualquer ponto dentro do Elemento de viga, identificado pela coordenada x , poderá ser calculado também a partir dos deslocamentos Nodais. Das equações 5.8, podemos exprimir o Momento Fletor interno à viga, $\mu(x)$, por:

$$\mu(x) = E \cdot I \cdot v''(x), \text{ e como } v''(x) = [B(x)] \cdot \{\delta\}$$

$$\mu(x) = E \cdot I \cdot [B(x)] \cdot \{\delta\}, \text{ ou ainda chamando de } [S(x)] = E \cdot I \cdot [B(x)], \text{ teremos:}$$

$$\mu(x) = [S(x)] \cdot \{\delta\} \quad (5.11)$$

A expressão 5.11 permite, a partir dos deslocamento nodais, calcular as forças internas dentro do elemento. As tensões ao longo de uma seção transversal, localizada em uma posição x , poderiam ser obtidas a partir da expressão já conhecida da teoria de vigas:

$$\sigma = \frac{\mu(x)}{I} \cdot y \quad (5.12)$$

5.3.5. DETERMINE A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO $[K]$ ESTABELECENDO A RELAÇÃO ENTRE FORÇAS NODAIS E DESLOCAMENTOS NODAIS PARA O ELEMENTO FINITO

Os passos I a IV anteriormente definidos permitiram-nos determinar os deslocamentos, as deformações, as forças internas e tensões dentro do elemento finito. Entretanto, para que isto se torne possível, é necessário conhecer os deslocamentos nodais, pois as interpolações foram efetuadas com base neles. Sabemos que os deslocamentos nodais são determinados a partir do conhecimento da Matriz de Rígidez da Estrutura Inteira e do Carregamento atuante. A Matriz de Rígidez da Estrutura é montada a partir das matrizes de Rígidez dos elementos. Essas matrizes de cada elemento devem, portanto, ser conhecidas, senão não poderemos calcular os passos anteriores de I a IV.

Nos elementos mais simples, a determinação da sua matriz de rigidez era feita a partir da imposição de deslocamentos unitários, como já sabemos. Nos casos mais gerais, esse procedimento é impraticável, e para eles ainda não dispomos de um procedimento para a determinação da sua matriz de rigidez. Portanto, apesar de estabelecermos por intermédio dos passos I a IV o procedimento para o Cálculo dos esforços dentro do elemento, "nada foi resolvido", porque os deslocamentos nodais não são conhecidos, pois não temos a matriz de rigidez dos elementos.

A resolução dessa questão é possível com os conceitos de *trabalho* e *energia de deformação* introduzidos e discutidos no item 2. À semelhança da determinação da constante elástica no exemplo da mola, podemos imaginar o elemento sendo deformado pela ação das forças nodais atuantes, e visualizar os correspondentes deslocamentos.

O **Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)** será utilizado para estabelecer a **Condição de Equivalência entre as forças internas atuantes no elemento, e as Forças Nodais estaticamente equivalentes**. A condição de equivalência será estabelecida utilizando os Conceitos de *Energia* discutidos anteriormente. A **condição deformada do elemento é estabelecida pela função de interpolação**, e a esta condição podemos associar uma *Energia de Deformação*. O *trabalho externo* é obtido por intermédio do conhecimento das forças nodais e dos correspondentes deslocamentos. Trabalho que "entra" pelos nós é armazenado no elemento como Energia de Deformação. Então, à semelhança do exemplo da mola, vamos admitir uma condição externa arbitrária imposta ao elemento, representada por um conjunto de deslocamentos nodais e as correspondentes forças nodais atuantes. Esses deslocamentos impostos arbitrariamente são os "**deslocamentos virtuais**" utilizados na aplicação do PTV. Assim:

Durante qualquer deslocamento virtual imposto ao elemento, o Trabalho Externo Total realizado pelas Forças Nodais deve ser igual ao Trabalho interno total realizado pelas forças internas. Enquanto o deslocamento virtual é imposto, todas as forças, interna e externa, são constantes.

$$\tau_{externo} = \tau_{interno}$$

A figura 5.5 representa as Forças Nodais consideradas no diagrama de corpo livre do elemento de viga. São representados também os **deslocamentos virtuais arbitrários** de acordo com os conceitos discutidos anteriormente. São imaginados deslocamentos associados às forças atuantes, de intensidade tal, que ao ocorrerem, as forças associadas possam ser consideradas constantes. Vamos então contabilizar a energia que "entra" no elemento por intermédio das forças nodais, e o seu armazenamento no elemento na forma de energia de deformação. A contabilização dessas quantidades, como sabemos, é efetuada pelo cálculo dos trabalhos interno e externo. Assim:

TRABALHO VIRTUAL EXTERNO

$$\tau_{externo} = f_1 \cdot v_1^* + M_1 \cdot v_1^{*'} + f_2 \cdot v_2^* + M_2 \cdot v_2^{*'} \quad (5.13)$$

Essa última expressão contabiliza o Produto das Forças pelos correspondentes deslocamentos e o Produto dos Momentos pelos correspondentes ângulos, obtendo assim o Trabalho.

Na Notação Matricial, podemos representar a equação da seguinte forma:

$$\tau_{externo} = \begin{bmatrix} v_1^* & v_1^{*'} & v_2^* & v_2^{*'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{bmatrix},$$

em que a primeira matriz, que é uma matriz-linha, representa a matriz-coluna dos deslocamentos virtuais transposta. A segunda é a matriz-coluna, que representa as forças nodais atuantes no elemento. De forma compacta podemos representar:

$$\tau_{externo} = \{v^*\}^T \cdot \{f\} \quad (5.14)$$

Note que na representação matricial da expressão do Cálculo do Trabalho, a Matriz Coluna dos Deslocamentos aparece transposta. Essa conclusão decorreu imediatamente da montagem da equação do $\tau_{externo}$, e está coerente com a condição exigida para efetuar o produto de duas matrizes. O produto de duas matrizes colunas não seria possível, pois o número de colunas da primeira matriz seria diferente do número de linhas da segunda. Essa mesma observação é válida ao ser montada a equação do Trabalho Interno em termos matriciais, o que será efetuado em seguida.

TRABALHO VIRTUAL INTERNO

Da mesma forma que temos deslocamentos virtuais impostos aos nós do elemento, a esta situação corresponde uma **condição deformada virtual interna do elemento**. A deformação por flexão de uma viga está associada à curvatura. Assim, para uma curvatura virtual arbitrária, associada à condição arbitrária externa imposta, podemos contabilizar o trabalho interno, decorrente da ação do Momento Fletor atuante ao longo da viga e o correspondente ângulo que caracteriza a curvatura ao longo da viga. Assim, para um trecho de comprimento dx do elemento, podemos calcular o trabalho interno devido à ação do momento fletor naquele trecho. Essa parcela diferencial de trabalho associada a um comprimento diferencial de elemento será:

$$d\tau_{\text{interno}} = M \cdot d\theta$$

O trabalho total contabilizado ao longo de todo o elemento será obtido pelo somatório de todos esses trabalhos elementares, ou seja pela integral no intervalo de $x=0$ até $x=L$, como revisado em 5.2.

Assim:

$$\tau_{\text{interno}} = \int_0^L M \cdot d\theta \quad (5.15)$$

Da teoria de vigas vimos que :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \rightarrow d\theta = \frac{dx}{\rho} = dx \cdot v''(x) \quad (5.16)$$

No cálculo do **Trabalho Virtual Interno**, são considerados os deslocamentos virtuais associados às Forças Internas.

$$\tau_{\text{interno}} = \int_0^L M \cdot d\theta = \int_0^L [v''(x)]^T \cdot M(x) \cdot dx \quad (5.17)$$

A curvatura virtual é imposta indiretamente, ou seja, ela está associada aos deslocamentos nodais virtuais por intermédio da Matriz Deslocamento – Deformação. Assim:

$$\{v''(x)\}^T = ([B] \cdot \{\delta\})^T = \{\delta\}^T \cdot [B]^T \quad (5.18)$$

Esta última relação é justificada pelas propriedades da álgebra matricial, em que a transposta do produto das matrizes é igual ao produto das transpostas.

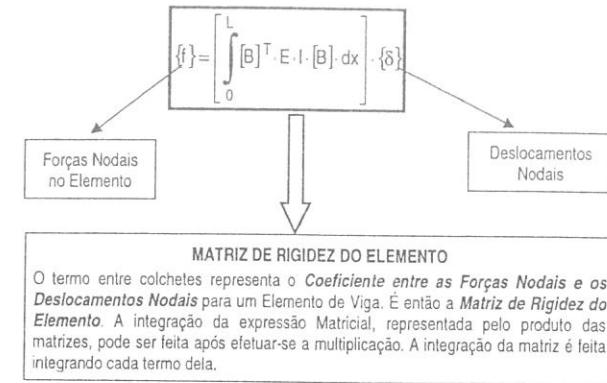
Como $M(x) = E \cdot I \cdot v''(x)$ (5.19), substituímos 5.18 e 5.19 em 5.17 e teremos:

$$\tau_{\text{interno}} = \int_0^L \{\delta\}^T \cdot [B]^T \cdot E \cdot I \cdot v''(x) \cdot dx \text{ e como } v''(x) = [B] \cdot \{\delta\} \text{ resultará:}$$

$$\tau_{\text{interno}} = \int_0^L \{\delta^*\}^T \cdot [B]^T \cdot E \cdot I \cdot [B] \cdot \{\delta\} \cdot dx \quad (5.20)$$

CONDIÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Vamos, portanto, igualar as expressões do Trabalho Externo e do Trabalho Interno. Como os deslocamentos impostos virtuais são arbitrários, vamos escolher esses deslocamentos com valor unitário. Igualando as expressões (5.14) e (5.20), teremos então:



Se substituirmos a Matriz $[B]$, efetuarmos o produto e as integrais, obteremos a mesma matriz que resultou do estudo do elemento de viga, no capítulo 3, isto é:

$$\{K\}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

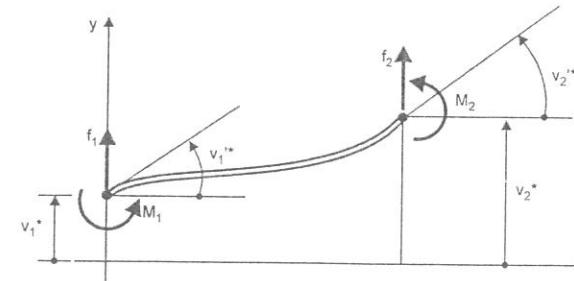


Figura 5.5 – Forças Nodais e os correspondentes Deslocamentos virtuais. Sob a ação dos deslocamentos virtuais admite-se que as forças nodais se mantêm constantes.

COMENTÁRIOS E GENERALIZAÇÕES

Os 5 passos utilizados na determinação da Matriz de Rígidez do Elemento de Viga, e que resultaram na mesma matriz já obtida anteriormente, poderiam levantar a seguinte questão:

Se a aplicação de deslocamentos unitários e a consequente avaliação de forças permitiram calcular a matriz de rigidez do elemento, e o procedimento aproximado por intermédio da função de interpolação, ora desenvolvido, permitiu obter exatamente a mesma matriz, qual seria então a necessidade dos 5 passos estabelecidos para a determinação da matriz de rigidez de qualquer elemento finito?

A resposta é que, ao utilizarmos o Elemento de viga como "pano de fundo" para estabelecermos esse procedimento geral, utilizamos a função de interpolação na forma de um polinômio do 3º grau. Ocorre que na teoria de vigas, a função que descreve a linha elástica de uma viga sujeita à ação apenas de momentos de extremidade é uma curva do 3º grau também. Ou seja, neste caso particular, a função adotada para interpolação é a mesma que dentro das hipóteses da teoria de vigas permite obter os deslocamentos internos de forma exata. Dessa forma, a Matriz de Rígidez deveria logicamente ser a mesma, até porque já partimos da função de interpolação exata. O elemento de viga foi utilizado como pretexto para introduzir o procedimento geral, pela sua facilidade de manipulação. Entendido o procedimento, iremos repeti-lo para casos mais gerais, de elementos bidimensionais e tridimensionais.

É exatamente para esses casos mais gerais que ficará clara a idéia da função de interpolação como ferramenta de aproximação. Para estes casos, não se conhece a função de interpolação, que à semelhança da viga, fornece o campo de deslocamentos dentro do elemento de forma exata. A função adotada sempre será uma aproximação do campo de deslocamentos e, como consequência, a rigidez do elemento será sempre também avaliada de forma aproximada. A questão central da formulação do elemento reside então no quanto essa aproximação pode ser aceitável. Essa discussão será aprofundada ao abordarmos os exemplos bi e tridimensionais.

Na expressão (5.21), desenvolvida a partir do Elemento de Viga, o termo EI representa as propriedades elásticas do elemento, caracterizando a Elasticidade do Material por intermédio do Módulo de Elasticidade E , e a Propriedade Geométrica por intermédio do Momento de Inércia I . Essa expressão pode ser generalizada e representa o procedimento geral para o Cálculo da Matriz de Rígidez de qualquer Elemento Finito. Nesta expressão geral, estarão presentes os seguintes termos, semelhantes ao caso do Elemento de Viga:

[B] – Matriz Deslocamento – Deformação. É a Matriz que permite passar dos Deslocamentos Nodais para as Deformações dentro do Elemento. Essa Matriz desempenha papel importantíssimo no desenvolvimento de qualquer elemento finito. Cada Elemento Finito, de acordo com o comportamento físico que se propõe a simular, e de acordo com as hipóteses matemáticas adotadas para esse fim, apresenta a sua matriz [B].

[D] – Matriz de Elasticidade. No caso do elemento de viga, essa matriz tem dimensão 1×1 , e é dada por $[EI]$. Porém, para os casos mais gerais, a sua dimensão estará definida pelo número de componentes de tensão e deformação que caracterizam o estado de tensão em um ponto do elemento, e será discutida posteriormente. Assim, generalizando, a matriz de rigidez de qualquer elemento finito é dada por:

$$\{k\}^e = \int_{\text{volume}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dVol \quad (5.23)$$

↓
 Matriz de Elasticidade Matriz Deslocamento-Deformação

No caso de um elemento unidimensional, como o elemento de viga, a integral é calculada ao longo do comprimento da viga, daí na formulação do elemento aparecer o termo dx . Nos elementos bidimensionais, a integral acima é calculada no domínio de uma superfície, e nos elementos tridimensionais, de um volume. Assim, na expressão 5.23, foi representada de forma genérica a integral no domínio do volume do elemento.

Outro aspecto importante, e que será abordado com mais profundidade em capítulos futuros, é a questão referente ao cálculo da integral que permite determinar a Matriz de Rígidez do Elemento, dada pela expressão (5.23). Essa integração é efetuada por procedimentos numéricos. Nesses procedimentos, pode-se adotar um número maior ou menor de pontos de integração. Essa escolha afetará a precisão com que será avaliada a integral e, como consequência, a rigidez do elemento, e logicamente terá repercussões no cálculo final dos deslocamentos, deformações e tensões. Essa outra característica de aproximação do método, em

conjunto com a característica de aproximação da função de interpolação adotada, revela o caráter aproximado do Método dos Elementos Finitos.

A partir do estabelecimento dos 5 passos fundamentais para definir a matriz de rigidez de qualquer elemento finito, e do Procedimento Geral do Método dos Elementos Finitos resumido na figura 2.13, podemos resumir as Principais Características do Método, como representado na figura 5.6.

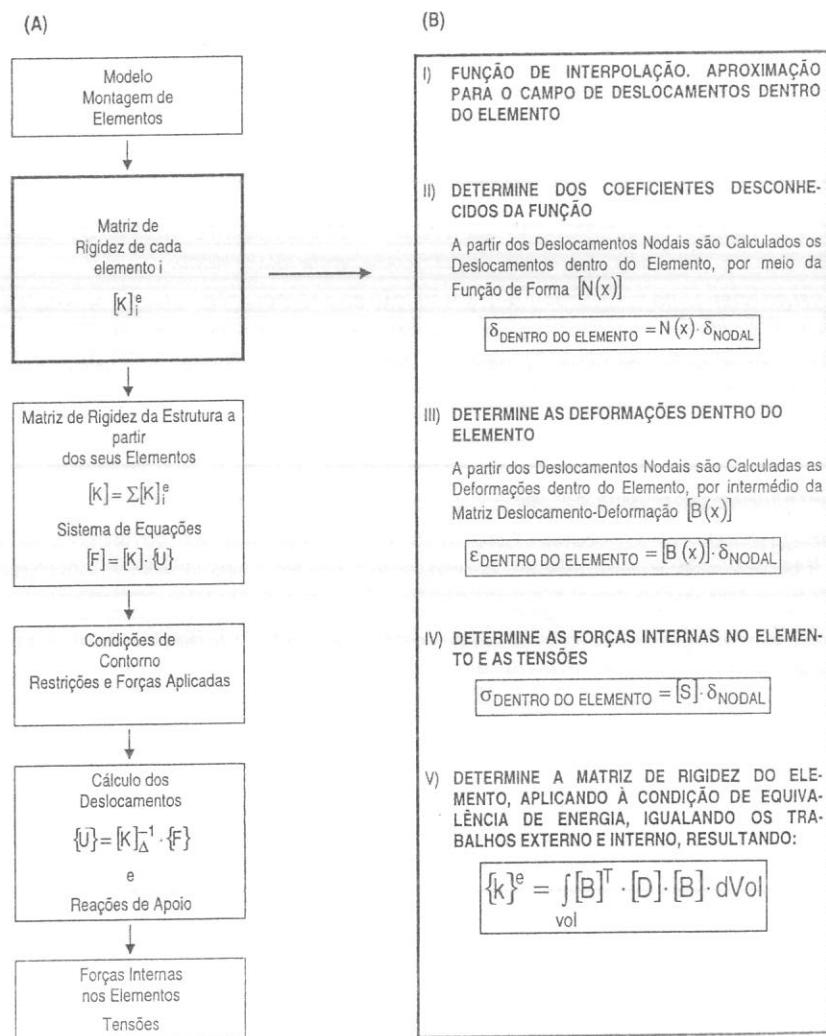


Figura 5.6 – Visão Geral do Método dos Elementos Finitos. O Quadro (A) representa o procedimento de Montagem do Modelo da Estrutura a partir dos Elementos, até o Cálculo das Forças Internas nos Elementos. O Quadro (B), representa os procedimentos adotados na determinação da Matriz de Rígidez de qualquer elemento finito.

5.4 PREPARANDO O CAMINHO PARA A FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS BI E TRIDIMENSIONAIS

Vimos no capítulo 1 que para os Elementos estruturais conectados continuamente, o *corpo contínuo é subdividido artificialmente em um certo número finito de elementos, conectados apenas nos nós*. Estavamos então fazendo a representação aproximada de um corpo contínuo. A especificação das propriedades do elemento, por intermédio da definição de sua matriz de rigidez, é feita de forma aproximada, como vimos neste capítulo, e que discutiremos nos diversos exemplos que abordaremos em seguida. O procedimento de definição da Matriz de Rigidez de um Elemento, por intermédio das Funções de Interpolação, define as propriedades do elemento com vistas a traduzir um dado comportamento físico, dentro das aproximações citadas. Assim, com base nas discussões efetuadas no capítulo 1, e a partir do procedimento ora introduzido, podemos identificar as **DUAS CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS:**

- A subdivisão da Estrutura em Elementos, isto é, a **MALHA DE ELEMENTOS FINITOS**.
- A escolha da **FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO**, que descreve o **COMPORTAMENTO INTERNO DO ELEMENTO**, especificando as suas propriedades, e que constitui a mais importante característica do Método.

O **COMPORTAMENTO INTERNO DO ELEMENTO** é descrito pela **FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO**. As funções de interpolação são **ESPECIALMENTE ESCOLHIDAS** com o objetivo de representar os **DESLOCAMENTOS DENTRO DO ELEMENTO**. Em particular, para o elemento de viga estudado neste capítulo, foi escolhido o polinômio do 3º grau. Essa escolha foi efetuada porque o **elemento tem 4 graus de liberdade**, e devemos ter **4 coeficientes desconhecidos no polinômio**, e como o polinômio do 3º grau tem 4 coeficientes, ele foi “especialmente” escolhido para efetuar a interpolação.

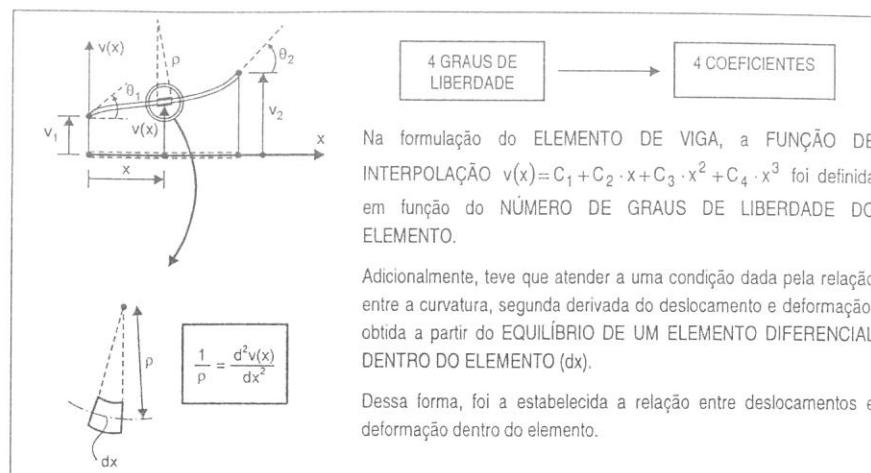
O Elemento finito é então “obrigado” a se deformar de uma maneira específica. Em particular, para o elemento de viga, essa maneira específica é traduzida pelo polinômio do 3º grau.

Assim, genericamente, estabelecemos dois importantes Procedimentos para as aplicações gerais do Método dos Elementos Finitos, inicialmente no âmbito da Mecânica Estrutural, muito embora muitos desses procedimentos sejam utilizados em outras aplicações. A saber:

- Os Procedimentos Gerais do Método, em termos de Técnica de Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura, a partir do conhecimento das Matrizes de Rigidez de cada elemento.
- Procedimento Geral para a definição da Matriz de Rigidez de qualquer elemento finito de forma aproximada, referida ao âmbito local do Elemento, usando as Funções de Interpolação.

É importante ressaltar, em relação a esta última observação, que de acordo com a função de interpolação adotada para representar o campo de deslocamentos dentro do elemento, decorrerão as aproximações nos resultados obtidos, ditadas pelas limitações contidas na função escolhida. Essa discussão é importantíssima na aplicação prática do método, pois ao se efetuar uma malha de elementos finitos, a escolha dos elementos deve ser efetuada com base nesse conhecimento. Discutiremos esses aspectos ao formularmos os elementos finitos bi e tridimensionais. Porém, o procedimento para formulá-los já está estabelecido, tanto no âmbito do procedimento de Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura, quanto à Técnica de Formulação do Elemento por intermédio da sua Função de Interpolação.

No caso da formulação do *Elemento de Viga*, a partir da escolha do polinômio de interpolação, utilizamos as relações entre deformações, deflexões, curvatura e Momento Flotor interno à viga, para estabelecer o comportamento do elemento, como resume a figura 5.7. Isso foi possível, pois nos socorremos na **Teoria de Vigas**, que traduz fisicamente o comportamento deste tipo de elemento estrutural, e na **Condição de Equivalência de Energia**.



Na formulação do **ELEMENTO DE VIGA**, a **FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO** $v(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3$ foi definida em função do **NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO**.

Adicionalmente, teve que atender a uma condição dada pela relação entre a curvatura, segunda derivada do deslocamento e deformação, obtida a partir do **EQUILÍBRIO DE UM ELEMENTO DIFERENCIAL DENTRO DO ELEMENTO** (dx).

Dessa forma, foi estabelecida a relação entre deslocamentos e deformação dentro do elemento.

Figura 5.7 – A formulação de um Elemento Finito incorpora o uso das Funções de Interpolação, que descrevem o comportamento do elemento em termos de um campo de deslocamentos, e as relações matemáticas que relacionam esses deslocamentos assumidos com as consequentes deformações e tensões no elemento.

Da mesma forma estabeleceremos a formulação para os **Elementos Finitos bi e tridimensionais**. Os polinômios, ou genericamente, as funções adotadas para descrever o campo de deslocamentos dentro do elemento finito, deverão submeter-se às relações matemáticas que traduzem o comportamento físico do elemento, obtidas da Teoria apropriada para esse fim, e “importadas” do estudo da Mecânica Estrutural. Assim, ao estudarmos uma **chapa** ou um **corpo sólido tridimensional**, a **Teoria de Placas e Cascas** e a **Teoria da Elasticidade** vão nos fornecer subsídios para, em conjunto com as funções de interpolação adotadas, oferecer um tratamento adequado a esses tipos de elementos. Faremos então, uma breve revisão desses conceitos, “importando” as informações relevantes para a formulação do elemento finito em cada caso, dentro das hipóteses da Análise Linear que constitui o nosso interesse neste estágio.

Uma das aplicações mais importantes no dia-a-dia da Análise Estrutural, e que será motivo da formulação de diversos elementos finitos, são as estruturas constituídas por **chapas finas**. Tais elementos estruturais são corpos com uma dimensão (**espessura**), bem menor que as duas outras (**largura e comprimento**) que, por sua vez, são da mesma ordem de grandeza, como mostra a figura 5.8. As chapas que são amplamente utilizadas em engenharia estrutural, aviação, construção naval, mecânica automobilística, etc. são estudadas pela **Teoria Geral de Placas e Cascas**. As chapas podem estar sujeitas a **cargas laterais**, isto é, Cargas **perpendiculares ao seu plano**, exibindo comportamento de **flexão**, o que resulta em deslocamentos perpendiculares ao seu plano. Tal comportamento é chamado de **Comportamento de Placa**. Por outro lado, quando sujeita apenas a **forças agindo paralelamente a seu plano**, sem a presença de cargas laterais, a chapa apresenta deslocamentos que estão no seu próprio plano, caracterizando o **Estado Plano de Tensões** (“*Plane Stress*”).

À semelhança do estudo efetuado para o Elemento de Viga, em que o comportamento do Elemento sob a ação de Cargas Axiais era independente do comportamento sob Carregamento de Flexão, o estudo do comportamento das chapas sob ação de Cargas no seu próprio plano, e cargas perpendiculares ao seu plano, pode também ser tratado considerando esses efeitos de forma independente, dentro das hipóteses das pequenas deflexões, que comentaremos adiante, e que estão dentro do interesse da Análise Linear por Elementos Finitos.

Assim, estabelecendo um paralelo com a seqüência adotada para o estudo dos elementos unidimensionais, em que primeiro foi estudado o comportamento do elemento sob Carga Axial (*Treliça - Mola*) e, posteriormente, o comportamento à flexão, para finalmente efetuar-se a superposição desses dois efeitos, o comportamento estrutural da chapa seguirá a mesma seqüência, ou seja, formularemos inicialmente o Estado Plano de Tensões, para posteriormente efetuarmos o estudo do comportamento isolado de Placa, e por último a superposição desses dois efeitos, agregados em um só elemento. O **Quadro VIII** resume os Fundamentos

necessários para o estudo do *Estado Plano de Tensões*, e fornecerá os subsídios para a Formulação do primeiro elemento finito bidimensional que estudaremos no item seguinte. Adicionalmente, introduziremos nessa breve revisão a ampliação desses conceitos para o *Estado Triaxial de Tensões*, que será fundamental para a formulação dos *Elementos Finitos Sólidos*. Tais conceitos constituem algumas relações fundamentais da *Teoria da Elasticidade*.

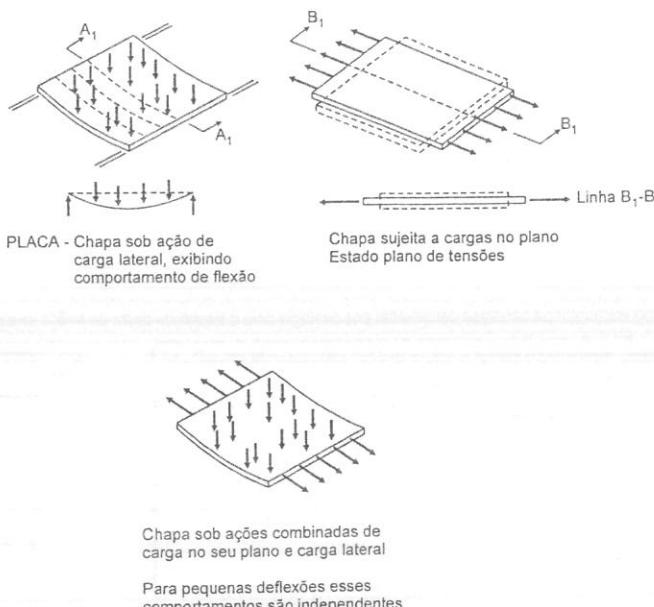
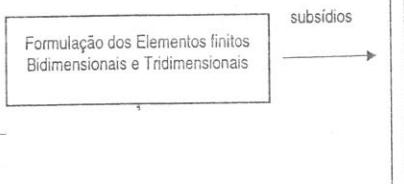


Figura 5.8 – Chapas sob ação de Carregamento atuante em seu próprio plano, Carregamento perpendicular ao seu plano e ação combinada dos Carregamentos.

Resumindo....



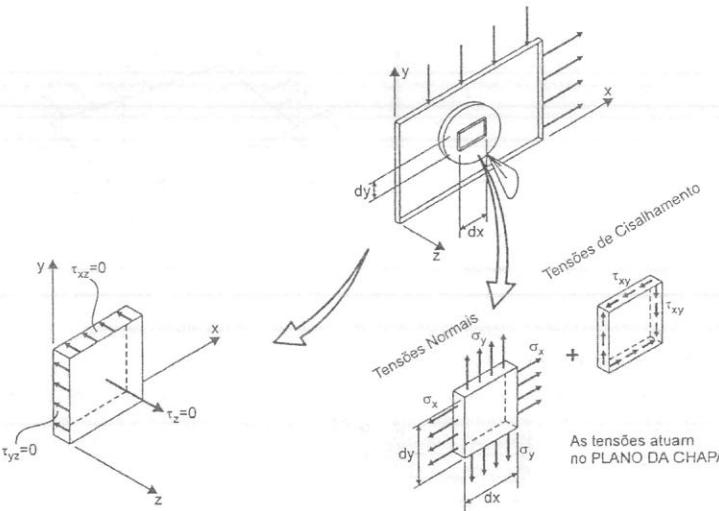
QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

Estado Plano de Tensões

Em muitos problemas práticos ocorre um ESTADO DE TENSÕES BIDIMENSIONAL, como, por exemplo, uma chapa fina sob a ação de Forças Atuantes paralelas ao "plano da chapa", e distribuídas uniformemente ao longo da sua espessura. Neste caso, não existirá tensão atuando na direção perpendicular ao plano da chapa ($\sigma_z = 0$).

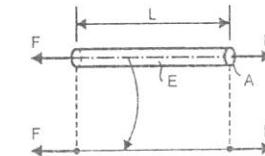
As tensões atuantes resumir-se-ão a DUAS TENSÕES NORMAIS σ_x e σ_y e UMA TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xy} , todas atuando no plano xy.

Em decorrência desses fatos esse Estado das Tensões é chamado de ESTADO PLANO DE TENSÕES. ("PLANE STRESS").



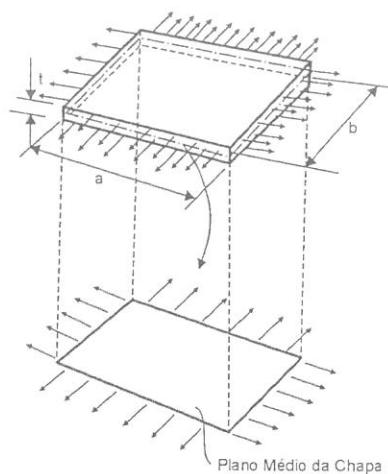
Para o comportamento da chapa sob ESTADO PLANO DE TENSÕES, interessa-nos revisar algumas relações importantes da Teoria da Elasticidade. É interessante estabelecer uma analogia com o Elemento Unidimensional que transmite apenas Forças Axiais. A Barra de Treliça.

A Barra de Treliça é representada pela linha que passa pelos Centróides das Seções Transversais, associando-se a essa representação as Propriedades Geométricas (A – área; L – comprimento) e a Propriedade do Material (E – Módulo de Elasticidade). A Barra de Treliça transmite apenas Forças Axiais.



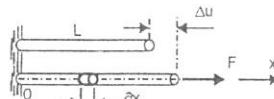
**QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE
(CONTINUAÇÃO)**

A representação da chapa Fina pode ser feita por intermédio do seu **Plano Médio**, associando-se a essa representação as propriedades Geométricas (t – espessura; a, b – comprimento dos lados). A chapa em Estado Plano de Tensões transmite apenas **Forças no Plano da Chapa**.



Podem-se estabelecer algumas analogias entre a Barra de Treliça e a chapa sob Estado Plano de Tensões, também para o cálculo das Deformações, que são relações essencialmente geométricas. Em particular, estamos interessados nas aplicações em que são consideradas as Pequenas Deflexões e Pequenas Deformações, no âmbito das Análises Lineares.

Barra de Treliça



Define-se **DEFORMAÇÃO LINEAR MÉDIA** para a Barra de Treliça, a relação:

$$\epsilon = \frac{\Delta u}{L}$$
 em que Δu representa a variação de comprimento da Barra, de comprimento inicial L .

Podemos calcular a **DEFORMAÇÃO AO REDOR DE UM PONTO**, considerando um trecho elementar de barra de comprimento ∂x e que representa uma variação elementar de comprimento ∂u . Assim a deformação na direção x será dada por:

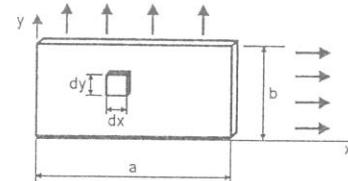
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$



A rigor, se conhecermos a função u que fornece o deslocamento ao longo da barra, em função de x , a deformação é calculada por derivação da função u .

**QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE
(CONTINUAÇÃO)**

Chapa sob Estado Plano de Tensões

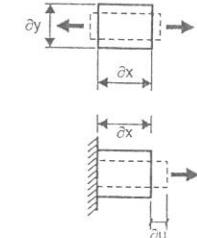


Podemos também calcular a **DEFORMAÇÃO AO REDOR DE UM PONTO** para uma chapa carregada, considerando um trecho elementar de chapa de dimensões ∂x e ∂y .

Vamos imaginar esse trecho elementar na condição deformada, por analogia com o trecho da barra de treliça analisada.

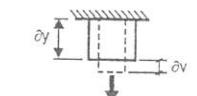
Por facilidade de visualização, vamos representar o deslocamento elementar de um lado só do trecho. Assim, a **DEFORMAÇÃO NA DIREÇÃO x** será dada por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$



Da mesma forma, para uma situação genérica, podemos calcular a **DEFORMAÇÃO NA DIREÇÃO y**:

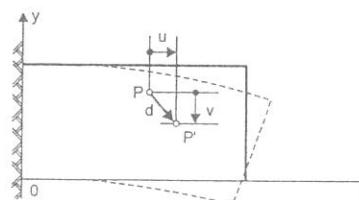
$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b)$$



Interpretação das expressões (a) e (b)

Um ponto genérico da chapa desloca-se de P a P' quando a chapa se deforma. O deslocamento d pode ser representado por intermédio de seus componentes nas direções x e y , isto é, u e v .

Se conhecermos as funções que fornecem os deslocamentos u e v para todos os pontos da chapa poderemos calcular as deformações ϵ_x e ϵ_y , por intermédio das derivadas das funções que fornecem u e v , nas expressões (a) e (b).



**QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE
(CONTINUAÇÃO)**

Distorções

As DEFORMAÇÕES NORMAIS calculadas por (a) e (b) justificam-se pela ação das TENSÕES NORMAIS.

Por outro lado, as TENSÕES DE CISALHAMENTO acarretam DISTORÇÕES, isto é, VARIAÇÕES DE FORMA no pequeno Elemento Diferencial.

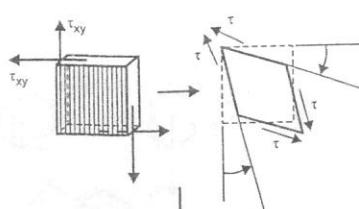
Vamos imaginar o trecho elementar já estudado antes, sob ação das Tensões de Cisalhamento.

Para PEQUENAS DEFORMAÇÕES, o deslocamento dos pontos da Linha AD é paralelo ao eixo x. Como nestas condições os ângulos são pequenos, a DISTORÇÃO angular no eixo y será dada por ($\gamma_1 \approx \gamma_{1,\text{ad}}$):

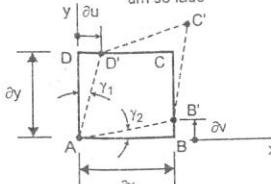
$$\gamma_1 \approx \frac{DD'}{DA} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Analogicamente, a distorção angular no eixo x será dada por:

$$\gamma_2 \approx \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial v}{\partial x}$$



ou genericamente, representando as PEQUENAS DEFORMAÇÕES de um só lado



Assim, o Elemento que inicialmente era retangular, distorceu, mudou sua forma, e os lados não formam mais 90° entre si. A medida desta distorção poderia ser dada pelo desvio angular apresentado pelo Elemento em relação ao ângulo inicial de 90°. Esse desvio então será dado por $\gamma_1 + \gamma_2$. Assim:

Distorção no plano xy: $\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2$.

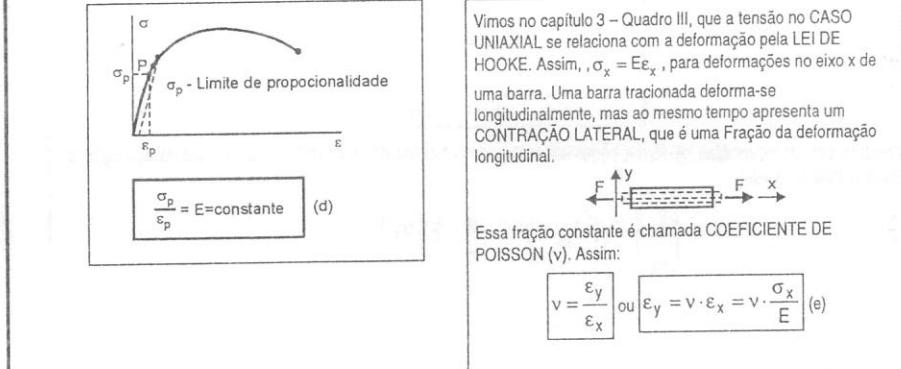
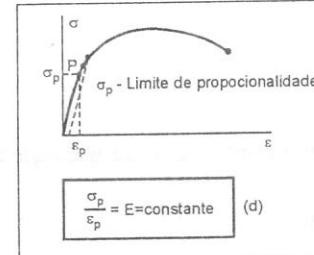
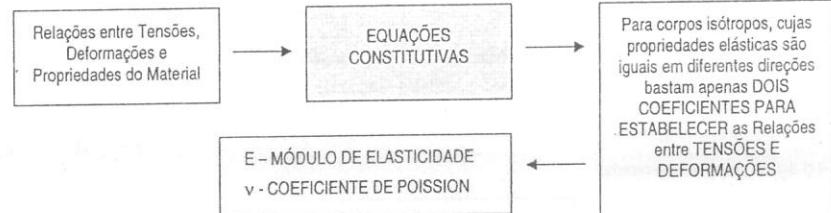
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{c})$$

Analogamente ao cálculo de ϵ_x e ϵ_y , γ_{xy} pode ser obtido pelas derivadas parciais das funções u e v.

**QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE
(CONTINUAÇÃO)**

Relações Elásticas Tensão-Deformação – Estado Plano de Tensões

As equações envolvendo deformação e deslocamentos anteriormente abordadas são relações essencialmente geométricas. Agora, queremos relacionar os efeitos observados – as Deformações, às suas causas – as Tensões. Para isso, a Propriedade do Material deverá ser considerada. Em particular, vamos considerar somente Materiais Elásticos Isotrópicos que constituem o nosso interesse na Análise Linear. Assim:

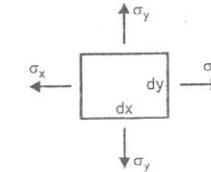


No caso da AÇÃO SIMULTÂNEA das Tensões σ_x e σ_y no pequeno Elemento Diferencial, o cálculo das deformações merece atenção especial.

Se só houvesse AÇÃO DE σ_x , teríamos:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{f})$$

Entretanto, como σ_y atua conjuntamente, a ação de σ_y provoca na direção y uma deformação ϵ_y dada por $\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$. Devido a essa deformação ocorre uma CONTRAÇÂO LATERAL na direção x. Assim, da deformação em x calculada anteriormente em (f), deve-se descontar essa contração lateral que é dada por $v \cdot \frac{\sigma_y}{E}$. Portanto:



**QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE
(CONTINUAÇÃO)**

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - v \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad (g)$$

e fazendo o mesmo raciocínio na direção y:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - v \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad (h)$$

As TENSÕES DE CISALHAMENTO ATUANTES no Elemento produzem DISTORÇÕES, em que:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad (i)$$

(i), em que G é o MÓDULO DE ELASTICIDADE em CISALHAMENTO ou MÓDULO DE RIGIDEZ sendo

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

Organizando as equações anteriores, teremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - v \cdot \frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= -v \cdot \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+v)}{E} \cdot \tau_{xy} \end{aligned} \quad (j)$$

As equações (j) podem ser representadas de forma compacta utilizando a NOTAÇÃO MATRICIAL, para a futura aplicação do Método dos Elementos Finitos. Assim:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -v & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (k)$$

Note que estas equações não "nasceram" matriciais; foram assim representadas apenas por interesse "administrativo".

Podemos inverter a matriz Coeficiente da Matriz das Tensões, estabelecendo a RELAÇÃO ENTRE OS DIVERSOS COMPONENTES DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES PARA QUALQUER PONTO DA CHAPA sob Estado Plano de Tensões. Assim:

$$\text{Tensões} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (l)$$

ou de forma compacta

$$(m) \quad \begin{Bmatrix} \sigma(x,y) \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon(x,y) \end{Bmatrix}$$

Deformações

Matriz das tensões em um ponto P (x, y)
Matriz de Elasticidade
Matriz das deformações em um ponto P (x, y) da chapa
Matriz do material

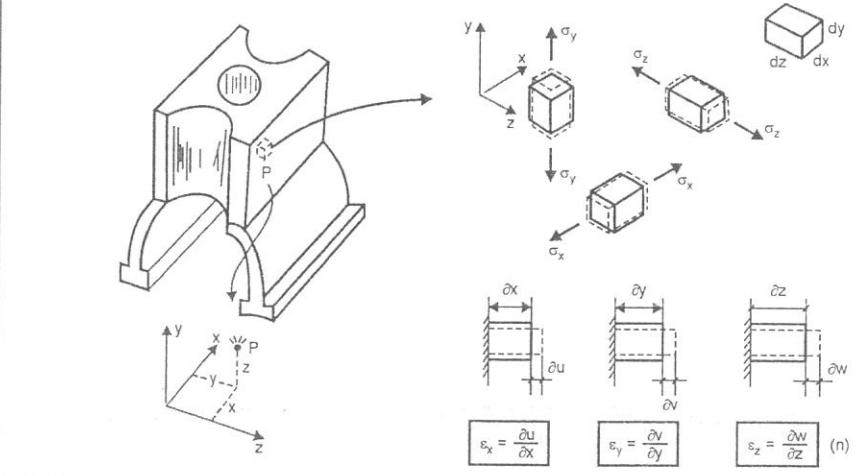
**QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE
(CONTINUAÇÃO)**

Note que esta última relação traduz a correspondência entre TENSÕES E DEFORMAÇÃO em qualquer ponto da chapa.

É a relação $\sigma = E \cdot \varepsilon$ em caráter mais amplo, agora não apenas para o estado uniaxial, mas de forma generalizada. A matriz [D] representa, neste caso geral, o papel do módulo de elasticidade E do caso uniaxial. Portanto, é chamada de **Matriz de Elasticidade**.

Estado Triaxial de Tensões – Generalizando

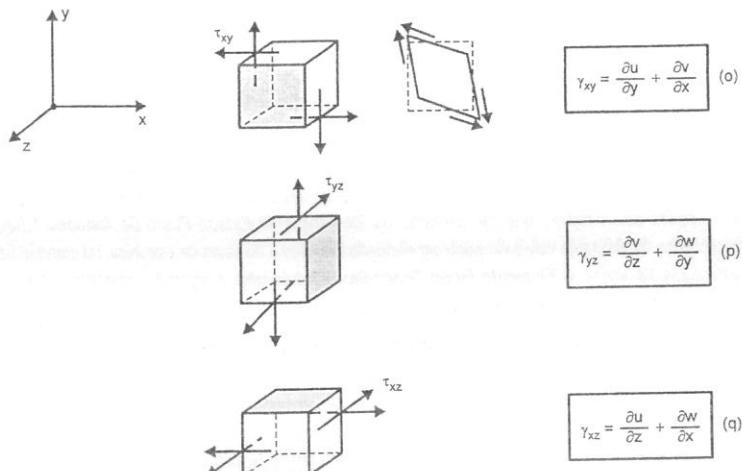
Os conceitos anteriormente relembrados da Teoria da Elasticidade podem ser aplicados aos casos mais gerais, isto é, para os casos de ESTADO TRIAXIAL DE TENSÕES. Essa classe de aplicações compreende corpos cujas três dimensões são comparáveis, ou genericamente falando, corpos contínuos elásticos preenchendo as três dimensões do espaço, como alguns componentes de máquinas e estruturas, como eixos sólidos, carcaças, peças fundidas com variações agradáveis de espessura, etc., embora os conceitos sejam os mesmos, as expressões matemáticas necessitam ser "ampliadas" para considerar as deformações e tensões nas três direções do espaço. Além dos deslocamentos u e v, respectivamente nas direções x e y, deverá ser considerado o deslocamento w de um ponto, na direção z. Analogamente, teremos um estado de deformações ε_x , ε_y , ε_z e as tensões σ_x , σ_y , σ_z . As definições de deformação seguem os conceitos anteriormente já relembrados, só que agora, neste caso, vamos considerar um trecho elementar na forma de um pequeno paralelepípedo. Assim:



QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE (CONTINUAÇÃO)

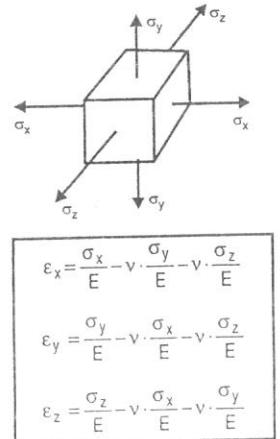
No caso triaxial de Tensões, as DISTORÇÕES são contabilizadas de acordo com o plano de ação das tensões de cisalhamento.

Assim:



Equações Constitutivas

A relação entre um componente de deformação, considerando a tensão atuante nessa direção, e a ocorrência de CONTRAÇÕES LATERAIS devido à ação das tensões normais atuantes nas outras direções, é feita utilizando o mesmo raciocínio do Estado Plano de Tensões, porém, agora, considerando a direção z e o componente de deslocamento w. Assim:



e para as Tensões de Cisalhamento

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}, \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \quad (s)$$

QUADRO VIII – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE (CONTINUAÇÃO)

À semelhança do Estudo do Estado Plano de Tensões, podemos organizar essas expressões e representá-las Matricialmente.

Assim:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (t)$$

Invertendo a Matriz coeficiente da Matriz das Tensões, teremos:

$$[\sigma(x,y,z)] = [D] \cdot [\epsilon(x,y,z)] \quad (u)$$

MATRIZ DE ELASTICIDADE PARA O ESTADO TRIAXIAL

Com

$$[\sigma(x,y,z)] = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad [\epsilon(x,y,z)] = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (v)$$

e

$$[D] = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix} \quad (x)$$

É importante observar um aspecto que será fundamental para a formulação dos Elementos Finitos bidimensionais e tridimensionais, e cujos subsídios nos são fornecidos pela Teoria da Elasticidade, que acabamos de revisar. A saber:

- As deformações obtidas nos diversos pontos de um corpo, tanto no caso da Teoria de Vigas como para o Estado Plano de Tensões ou o Estado Triaxial de Tensões, são sempre calculadas como uma derivada da função que fornece os deslocamentos ao longo do corpo. No caso da teoria de vigas, ou de modo mais geral, problemas em que a deformação está associada à curvatura, é a segunda derivada dos deslocamentos. Nos casos de Estado Plano de Tensões e Estado Triaxial de Tensões, as deformações estão relacionadas à primeira derivada das funções que fornecem os deslocamentos.
- Em particular, é importante observar que a definição do campo de deslocamentos em uma chapa sob Estado Plano de Tensões é efetuada por dois componentes de deslocamentos: o componente de deslocamento u na direção x , e o componente de deslocamento v na direção y . Ou seja, o conhecimento dos deslocamentos u e v em todos os pontos da chapa é suficiente para estabelecer completamente o campo de deformações e tensões na chapa.
- Para o Estado Triaxial de Tensões, o conhecimento dos três componentes de deslocamentos u , v e w , nas direções x , y , e z , é suficiente para estabelecer completamente o campo de deformações e tensões no sólido.

5.5. FORMULANDO OS ELEMENTOS FINITOS BIDIMENSIONAIS E TRIDIMENSIONAIS

5.5.1. INTRODUÇÃO

A formulação dos diversos elementos finitos bidimensionais e tridimensionais seguirá, portanto, os mesmos 5 passos definidos para a formulação de qualquer elemento finito, já estudados anteriormente. Em cada caso, discutiremos a escolha da função de interpolação, considerando as particularidades do comportamento físico que o elemento se propõe a simular, e a Teoria disponível para agregá-la na formulação do elemento. Dentro dessa visão, os diversos elementos a serem formulados serão encarados como exercícios adicionais, em relação aos passos I a V, do item 3 do presente capítulo.

Entretanto, seria interessante aplicar os Passos I a V de modo mais objetivo, que permitisse de forma direta e compacta tirar conclusões a respeito do comportamento físico do elemento, sem necessidade de efetuar inversões de matrizes, que é tarefa reservada ao computador. É interessante que o analista que utiliza a biblioteca de elementos do programa de computador saiba definir claramente em cada caso, que tipo de comportamento aquele elemento descreve, e com quais limitações essa descrição é efetuada ao utilizar o elemento na montagem de um modelo discretizado.

Assim, a parte relativa à inversão das Matrizes será sempre tratada como um complemento ao exercício referente ao elemento que se está formulando. Em termos práticos, estamos dizendo que, ao estudar a função de interpolação que define o comportamento de cada elemento, a importância não está em definir numericamente o valor das constantes que definem o polinômio. Esta determinação é efetuada ao substituir as equações pelos valores nodais, que é uma tarefa que se resume em efetuar operações algébricas e matriciais; esta é a função da máquina.

O importante nos exercícios é identificar por intermédio das funções de interpolação adotadas como são calculados os deslocamentos, deformações e tensões dentro do elemento, ou seja, a qualidade dessa resposta obtida. Maiores detalhes serão esclarecidos nas formulações dos elementos que serão desenvolvidas a partir de agora, e que constituem a parte final da formulação dos elementos que fazem parte da biblioteca de elementos dos programas de elementos finitos. Assim, nas aplicações seguintes os pontos-chave ao estudar cada um dos elementos finitos será estabelecer três pontos fundamentais, a saber:

A) Definição das Funções de Interpolação

B) Cálculo das Deformações

C) Cálculo das Tensões

A determinação das constantes que definem as funções, que dependem de substituição dos valores nodais, como já fizemos para o Elemento de Viga, bem como a determinação dos termos da matriz de rigidez, será tratada sempre no final do estudo do elemento, como complemento. Passemos então à resolução dos exercícios citados anteriormente.

5.5.2. FORMULAR O ELEMENTO DE ESTADO PLANO DE TENSÕES TRIANGULAR LINEAR

A figura 5.9 representa uma chapa plana sob ação de forças agindo apenas no seu plano, portanto sob condições de Estado Plano de Tensões, como vimos no Quadro VIII. A chapa contínua pode ser subdividida artificialmente em um certo número finito de elementos, conectados apenas nos seus nós. Devido à versatilidade de geometria, qualquer corpo contínuo bidimensional pode ser representado como um conjunto de Triângulos, que são, portanto, os Elementos de Estado Plano de Tensões Triangulares. O estudo do comportamento físico do elemento triangular pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, tal como já fizemos para todos os elementos estudados até agora. O Elemento Finito Triangular tem três nós. A figura 5.9 identifica o elemento isolado para o estudo, na posição indeformada e na posição após a deformação.

O movimento dos nós do elemento pode ser descrito pelos componentes u e v , pois a definição do campo de deslocamentos em uma chapa sob Estado Plano de Tensões é efetuada por dois componentes de deslocamentos, segundo a Teoria da Elasticidade revisada no Quadro VIII. A única diferença neste caso é que o número de pontos escolhidos para descrever o comportamento da chapa é discreto, mas a natureza do problema é a mesma. Portanto, o Elemento de Estado Plano de Tensões apresenta 2 Graus de Liberdade por Nós. Como tem 3 nós, esse elemento terá 6 Graus de Liberdade. Assim, a Matriz Coluna das Forças nodais tem dimensão 6×1 , e da mesma forma, a Matriz coluna dos deslocamentos nodais terá dimensão 6×1 e, como consequência, a Matriz de Rigidez terá dimensão 6×6 . Assim:

$$\{F\}_{6 \times 1} = [k]_{6 \times 6} \cdot \{\delta\}_{6 \times 1} \quad (5.24)$$

Seguindo, portanto, as orientações introduzidas no item 5.5.1, vamos estabelecer inicialmente os três passos fundamentais.

Observação

Há inúmeras situações práticas em que estão presentes a ação de um Estado Plano de Tensão, em uma chapa isoladamente ou com a ação simultânea do fenômeno de flexão.

Como no âmbito linear esses fenômenos são tratados independentemente, a formulação dos elementos para simular esse comportamento é extremamente importante.

Por exemplo, as chapas do fundo de um navio estão sujeitas à ação de um estado plano de Tensões devido à flexão da estrutura do navio como um todo, pois o fundo do navio comporta-se como se fosse o flange inferior de uma enorme viga que é o navio, sendo o flange superior o convés. Simultaneamente, a chapa do fundo também sofre flexão, devido à ação de pressão da água.

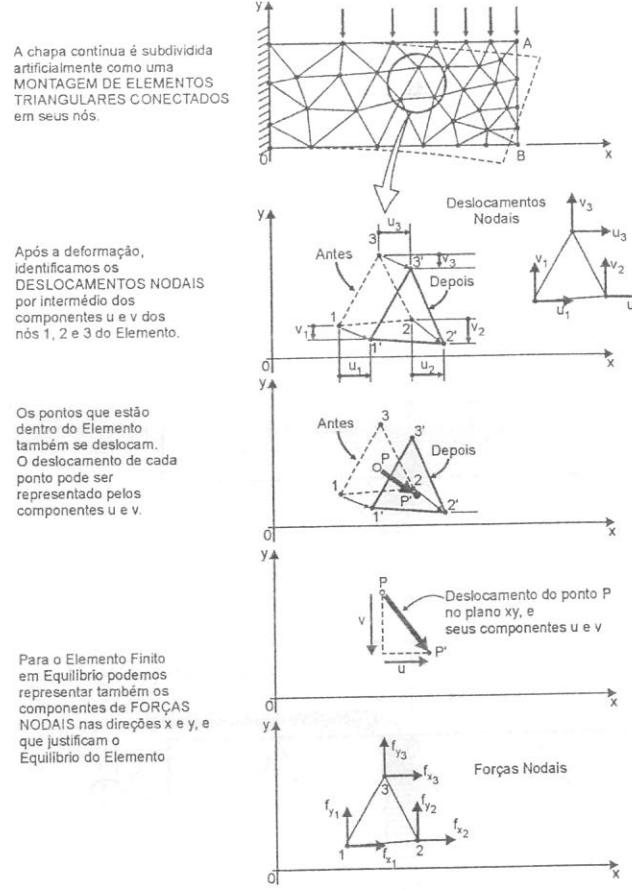


Figura 5.9 – Elemento Triangular Linear de Estado Plano de Tensões.

a) Definição das Funções de Interpolação

Já sabemos que o grau do polinômio de interpolação é definido a partir do conhecimento do número de graus de liberdade do elemento.

O elemento possui 6 Graus de Liberdade

O Polinômio escolhido deve ter 6 Coeficientes desconhecidos

Porém, em qualquer problema de Estado Plano de Tensões, o deslocamento de qualquer ponto é definido pelos componentes u e v , nas direções x e y respectivamente. Deve-se notar que o deslocamento de um ponto depende da posição que esse ponto se encontra na chapa; por exemplo, um ponto do engastamento tem deslocamento nulo, porém um ponto da extremidade da chapa, como o ponto A, desloca-se, e de forma diferente do ponto B. Ou seja, em um problema bidimensional, o deslocamento depende da posição (x,y) em que o ponto se encontra. Como temos dois componentes de deslocamento em cada ponto, teremos duas funções escolhidas para representar o campo de deslocamentos.

Estas funções deverão, a partir dos deslocamentos nodais, isto é, dos vértices do elemento, calcular os deslocamentos de qualquer ponto P dentro do elemento, como mostra a figura 5.9. Como devemos utilizar seis coeficientes, e temos duas funções, uma para o deslocamento u e outra para o deslocamento v , e desde que nenhuma preferência deve ser dada para a direções x e y , cada uma das funções utilizará três coeficientes, dos seis disponíveis. Como cada uma das funções depende de x e y , as funções serão, portanto, de duas variáveis. Assim:

$$u(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y$$

$$v(x,y) = C_4 + C_5 x + C_6 y$$

(5.25)

Seja, o deslocamento varia linearmente com x e com y , daí o fato de ser chamado de *Elemento Linear*. A partir desta definição podemos observar que nesta montagem de elementos não ocorrerão "buracos" entre elementos, apesar de os elementos vizinhos estarem conectados apenas nos nós, exatamente pelo fato de os deslocamentos variarem linearmente. Assim, os lados adjacentes de dois elementos com nós comuns irão manter-se retos na condição deformada. Ou seja, para esse elemento é atendida a *Condição de Compatibilidade* tanto nos nós do elemento como também no contorno. Esta situação por si só ainda não nos garante que em termos de cálculo de tensões esse elemento forneça um comportamento adequado, como veremos adiante.

b) Cálculo das Deformações

Do Quadro VIII, em que fizemos uma breve revisão da Teoria da Elasticidade, podemos calcular as deformações em qualquer ponto dentro do elemento finito, dentro das hipóteses das Funções de Interpolação adotadas. Assim, das equações a, b e c, do Quadro VIII, temos:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

É importante relembrar que estas funções contêm derivadas parciais. Nas derivadas em relação a x , os termos em y serão considerados como constantes, e terão portanto derivadas nulas, e vice-versa. Assim, efetuando as derivações das funções u e v que fornecem os deslocamentos em todos os pontos do elemento finito, teremos:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 = \text{CONSTANTE}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = C_6 = \text{CONSTANTE}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_3 + C_5 = \text{CONSTANTE}$$
(5.26)

Assim, podemos tirar uma conclusão importante a respeito do Elemento em estudo. As deformações acima calculadas são funções que se aplicam a todos os pontos do elemento. E como vimos, são constantes. Esta é uma séria limitação do elemento triangular. O fato de a deformação ser constante em todos os pontos do elemento finito decorreu da escolha da função do primeiro grau para a representação dos deslocamentos. A partir do cálculo das deformações passaremos em seguida para o Cálculo das Tensões. Assim:

O Elemento Triangular Linear de Estado Plano de Tensões é um Elemento de Deformações Constantes.

c) Cálculo das Tensões

O Cálculo das Tensões decorre imediatamente a partir do Cálculo das Deformações. Podemos utilizar as relações do Quadro VIII para esse fim, o que faremos adiante, porém, antes disso, é interessante explorarmos conceitualmente os resultados obtidos. Se o Elemento Triangular de Estado Plano de Tensões é um Elemento de Deformações Constantes, então obviamente podemos concluir que também é um Elemento de Tensões Constantes. Assim:

O Elemento Triangular Linear de Estado Plano de Tensões é um Elemento de Tensões Constantes.

Assim, as Tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} serão **constantes** em toda extensão do elemento triangular, cada qual assumindo um valor que pode ser calculado a partir das relações do Quadro VIII. A figura 5.10 representa essa distribuição para um elemento triangular. No exemplo é mostrado um caso em que já sabemos antecipadamente que a distribuição de tensões é variável ao longo de uma seção, pois a chapa está submetida à flexão no seu próprio plano, com tensões variando da tração à compressão. Eis então a série limitação desse elemento: se a chapa for modelada por uma montagem de elementos triangulares de sorte que a altura dos triângulos seja igual à própria altura da chapa, esse modelo calculará as tensões como sendo constantes de cima para baixo. Para obter um resultado acurado para o cálculo das tensões, deveríamos utilizar um número muito grande de elementos. Embora dentro de cada elemento a tensão continue sendo calculada de forma constante, as variações de tensão de um elemento para outro não apresentariam grandes descontinuidades.

Outro aspecto importante na formulação do elemento triangular refere-se ao estabelecimento das condições de equilíbrio do elemento. Na figura 5.11, são representados dois elementos triangulares adjacentes de uma malha de elementos finitos. Sabemos que as tensões dentro de um elemento finito dependem dos deslocamentos nodais, como resumido na figura 5.6. O Elemento triangular ABC e o elemento triangular BCD são adjacentes, tendo dois nós comuns, os nós B e C. Porém, os nós A e D não são comuns aos dois elementos. Dessa forma, como os deslocamentos nodais não são iguais para os dois elementos, em todos os seus nós, as tensões calculadas nos dois elementos não serão iguais.

No elemento ABC, a tensão na direção x é σ_1 , e no elemento BCD é σ_2 . A tensão σ_1 é constante em todo o elemento triangular ABC, inclusive em seu contorno. Da mesma forma, a tensão σ_2 é constante em todo o elemento triangular BCD, inclusive no seu contorno. Como o contorno BC é comum aos dois elementos, ao calcular a tensão na direção x, nesse contorno, os valores serão diferentes se calculados pelos dois elementos diferentes. Assim, um mesmo ponto terá dois valores diferentes de tensão, se calculados pelo elemento ABC ou BCD, já que as tensões são calculadas elemento por elemento, como já sabemos. Portanto, isto quer dizer que o elemento triangular linear não atende à condição de equilíbrio.

O desejável seria que os valores de tensão σ_1 e σ_2 fossem não muito diferentes, de modo a considerar essa diferença como uma aproximação aceitável. Isso só seria possível se os deslocamentos dos nós A e D não fossem muito diferentes já que os outros dois nós são comuns. Isso então poderia ser possível se os nós A e D não fossem muito distantes, ou, em outras palavras, se os elementos fossem de tamanho pequeno, isto é, o erro seria minimizado se a malha fosse refinada.

Embora o elemento triangular tenha a vantagem de ter uma formulação simples, e a habilidade de representar contornos irregulares, o uso prático deve ser efetuado com extremo cuidado, devido às sérias limitações para o cálculo das tensões no elemento. Para obter um resultado acurado, dever-se-ia utilizar um número muito grande de elementos.

O Quadro IX mostra o Cálculo de uma Chapa com um furo circular no centro, submetida à Tração. O valor de tensão ao redor do furo pode ser determinado neste caso pela Teoria da Elasticidade de forma exata, pois corresponde a um caso clássico de geometria e carregamentos "bem comportados". Foram efetuados diversos cálculos por elementos finitos, utilizando elementos triangulares lineares de diversos tamanhos, refinando sucessivamente as malhas utilizadas. Tal procedimento objetivou efetuar um Teste de Convergência da Malha, isto é, determinar a malha ideal para modelar o problema objeto de estudo, um procedimento normal do Método. Evidentemente que a busca da malha ideal para cada problema não deve ser guiada apenas pelo teste de convergência, como se a escolha da malha fosse semelhante a um processo de tentativa e erro, como um teste empírico. O conhecimento da formulação do elemento e a relação desta com o problema físico em estudo é o maior indicador do modelo a ser adotado para a representação deste problema.

Outros elementos com desempenho melhor que o Elemento Triangular Linear serão estudados em seguida para representar os problemas de Estado Plano de Tensões. Porém, o estudo do Elemento Triangular desempenha papel fundamental no estudo dos elementos de geometria bi e tridimensional. Primeiramente, pela metodologia introduzida, que será repetida para todos os outros elementos, e pelo papel que desempenha na estória de implantação do método; foi um dos primeiros elementos formulados.

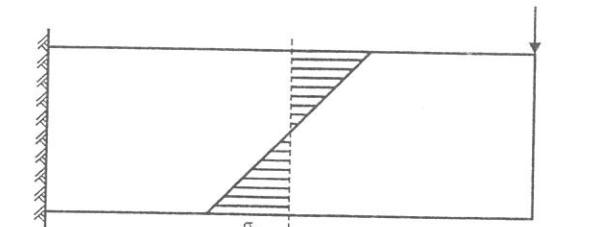
Se quiséssemos calcular numericamente as tensões em um ponto dentro do elemento, poderíamos utilizar a equação (1) do Quadro VIII. Assim:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \text{ efetuando o produto matricial, teremos:}$$

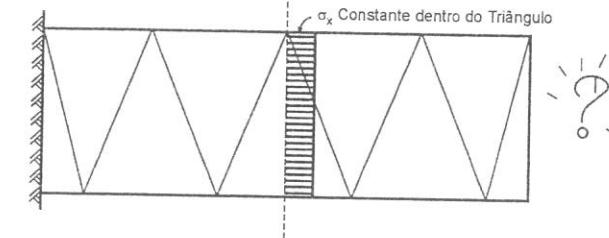
$$\sigma_x = \frac{E}{1-v^2} (\epsilon_x + v \cdot \epsilon_y) = \frac{E}{1-v^2} (C_2 + v \cdot C_6) = \text{CONSTANTE}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-v^2} (v \cdot \epsilon_x + \epsilon_y) = \frac{E}{1-v^2} (v \cdot C_2 + C_6) = \text{CONSTANTE}$$

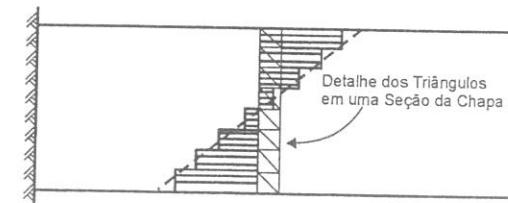
$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-v^2} \cdot \frac{(1-v)}{2} \cdot (C_3 + C_5) = \text{CONSTANTE}$$



Distribuição de Tensões na Chapa Real



Modelo discretizado da chapa, com Elementos de Estado Plano de Tensões Triangulares. Dentro de cada Elemento Triangular a Tensão é constante



Com um número maior de Elementos, a Tensão, embora constante dentro de cada Triângulo, poderia ser obtida com razoável precisão. O erro seria minimizado com um grande número de Elementos

Figura 5.10 – As tensões no Elemento triangular de Estado Plano de Tensões são constantes.

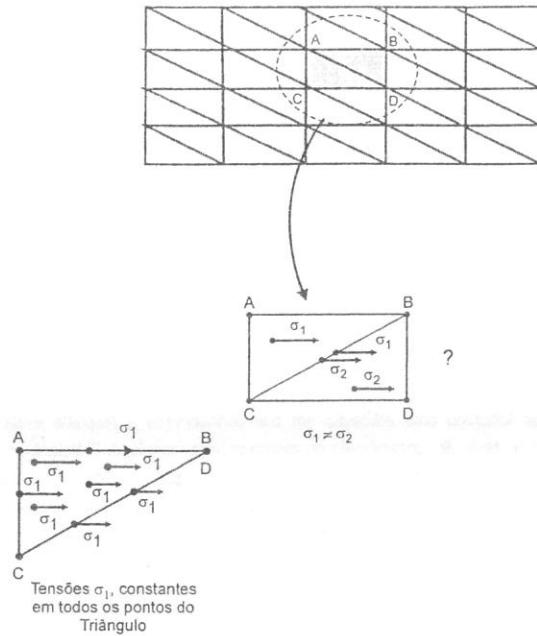


Figura 5.11 – As tensões calculadas em contornos comuns de elementos triangulares são diferentes quando calculadas pelos diferentes elementos. A condição de equilíbrio não é atendida.

QUADRO IX – TESTE DE CONVERGÊNCIA - CHAPA RETANGULAR COM FURO CENTRAL

Com o objetivo de avaliar o comportamento do Elemento de Estado Plano de Tensões Triangulares, foi efetuado o Cálculo de uma Chapa Longa com furo central pelo Método dos Elementos Finitos. O resultado obtido para diversas malhas, com diferentes números de elementos, foi comparado ao resultado obtido pela Teoria da Elasticidade, cuja solução neste caso é conhecida analiticamente, e corresponde à solução exata do problema.

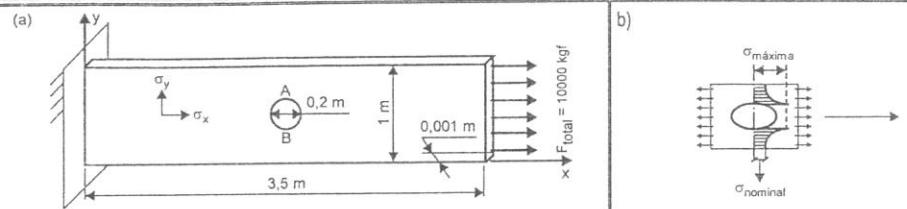
A figura (a) representa a chapa objeto de estudo, indicando sua largura, comprimento, espessura e o carregamento de tração. A tensão σ_x nos pontos A e B diametralmente opostos do furo são máximas, e podem ser calculadas a partir do conhecimento da Tensão Nominal calculada na região do furo, multiplicada pelo Fator de Concentração de Tensões. Assim:

$$\sigma_{\text{nominal}} = \frac{\text{Força}}{\text{Área Efetiva}} = \frac{10000 \text{ Kgf}}{(1000 - 200) \text{ mm} \cdot 1 \text{ mm}} = 12,5 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2}$$

A figura (b) indica o aspecto geral da distribuição de tensões na chapa. Para este caso, em função da relação entre o diâmetro do furo e a largura da chapa, o Fator de Concentração de Tensões, obtido da Teoria da Elasticidade, vale $K_t = 2,4$. Assim:

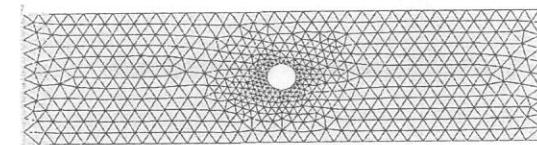
$$\sigma_{x,\text{Máximo}} = K_t \sigma_{\text{nominal}} = 2,4 \cdot 12,5 = 30 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2}$$

QUADRO IX – TESTE DE CONVERGÊNCIA - CHAPA RETANGULAR COM FURO CENTRAL (CONTINUAÇÃO)

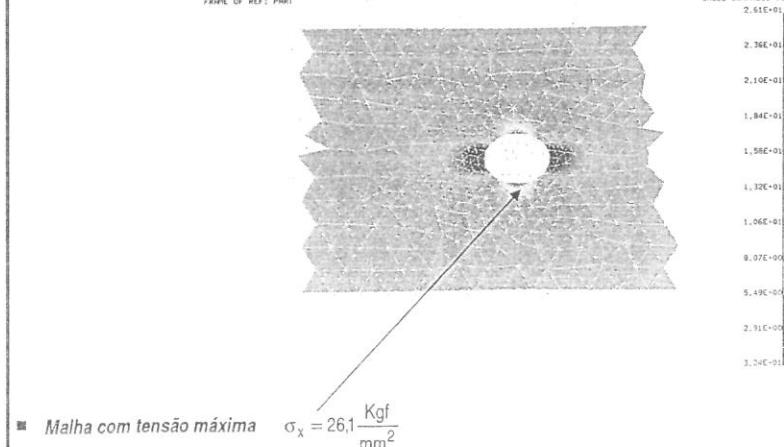


As figuras c e d representam duas malhas com refinamentos diferentes, podendo ser observado que na malha mais refinada o valor máximo obtido para as tensões σ_x , que ocorrem ao redor do furo, está mais próximo do valor exato. Por intermédio de sucessivos refinamentos da malha, podemos observar a convergência dos valores obtidos de tensão, para o valor exato. Uma idéia desse procedimento é obtida da figura e, na qual foram representados alguns pontos correspondentes a análises efetuadas, observando-se que com a utilização de modelos com maior número de nós, ou de elementos, as respostas obtidas foram sucessivamente melhores. Os pontos do gráfico representam os casos estudados, representando o par (número de nós, tensão obtida). A partir destes pontos ajustou-se uma curva para observar a tendência dos resultados obtidos. Deve-se observar que se apenas um elemento triangular fosse adotado para representar o trecho entre o ponto A e a borda da chapa, já saberíamos que nesse elemento a tensão seria constante, o que seria extremamente inadequado para a representação da distribuição de tensões ao redor do furo.

c)

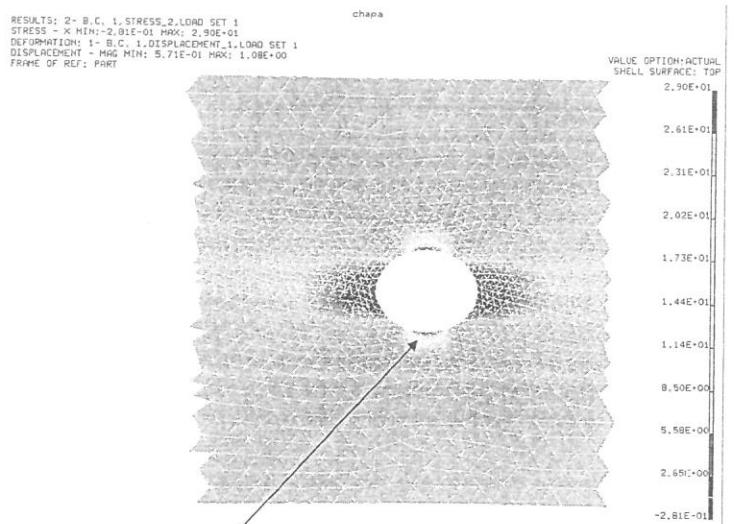


RESULTS: 2= 9.C, 1, STRESS_2, LOAD SET 1
STRESS - X MM: 3,24E-01 MMK: 2,61E-01
DEFORMATION: 1= B.C, 1, DISPLACEMENT_1, LOAD SET 1
DISPLACEMENT - X MM: 4,99E-01 MMK: 1,13E+00
LEVEL OF REF: PART

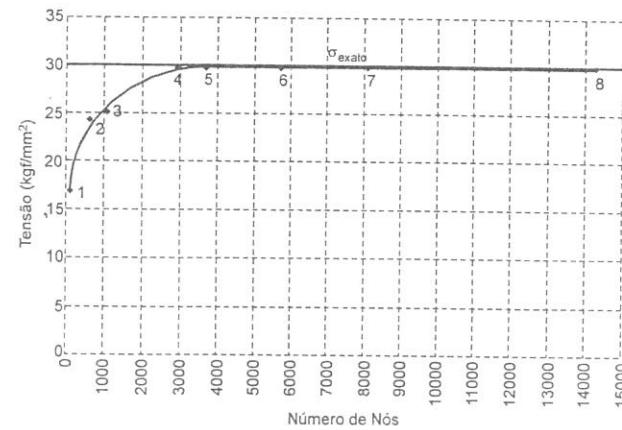


QUADRO IX – TESTE DE CONVERGÊNCIA - CHAPA RETANGULAR COM FURO CENTRAL (CONTINUAÇÃO)

d)



■ **Malha com tensão máxima** $\sigma_x = 29,0 \frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2}$ (veja esta figura colorida no apêndice A)



Observações a respeito da Malha de elementos finitos adotada

O teste de convergência efetuado anteriormente permitiu observar que os resultados obtidos, por intermédio da discretização da estrutura em elementos, convergiram para o valor exato dado pela Teoria da Elasticidade. À medida que o número de elementos na malha é aumentado, melhores respostas são obtidas. Evidentemente que o tempo de solução aumentará também, acarretando um

custo maior da solução. Em problemas de pequeno porte, o impacto desse aumento do número de nós no modelo, no tempo de solução, pode não ser significativo. Porém, nas aplicações mais gerais do método, em que um número elevado de elementos se faz necessário, essa questão passa a ser importante.

Uma das técnicas mais utilizadas, de modo a não tornar o modelo muito "pesado", é adotar uma *Malha Gradual*, isto é, uma malha em que os elementos variem gradualmente de tamanho. Nas *regiões onde ocorram variações acentuadas do panorama de tensões*, deve-se adotar uma malha mais refinada, de sorte que a limitação existente pelo fato de a tensão ser constante dentro do elemento, possa ser superada com pequenas descontinuidades de tensões entre elementos pequenos adjacentes. Claro que nesta discussão está presente, de modo bastante significativo, a formulação do elemento. Em particular, o elemento triangular estudado é bastante limitado. Outros elementos mais completos serão ainda estudados, e permitirão obter resultados aceitáveis sem a necessidade de utilizar elementos extremamente pequenos.

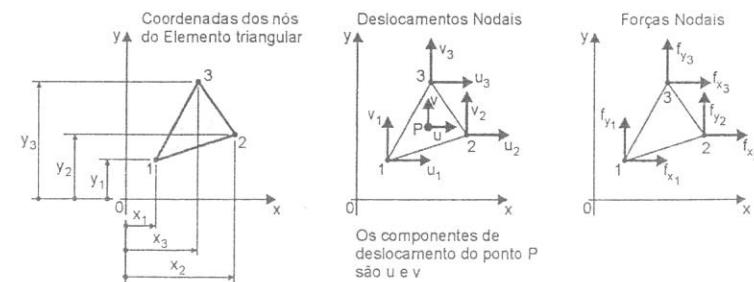
As regiões onde ocorrem as tais variações acentuadas de tensões são normalmente próximas a aberturas na peça, recortes, que acarretam as *Concentrações de Tensões* na Estrutura objeto de Análise. Pontos de Aplicação de Cargas Concentradas merecem também cuidados especiais nesse sentido.

O Teste de Convergência efetuado focalizou uma aplicação em que conhecíamos a resposta exata dada pela Teoria da Elasticidade. Serviu, portanto, como um teste de confiabilidade do elemento finito formulado. Entretanto, nas inúmeras aplicações práticas do dia-a-dia, as estruturas objeto de Análise têm formato o mais geral possível e estão submetidas a carregamentos os mais diversos possíveis. Nestes casos, não estão disponíveis as soluções analíticas exatas. A rigor, dever-se-ão testar diversas malhas com diversos tamanhos de elementos, e testar a Taxa de Convergência dela, isto é, à medida que o aumento do número de nós adotados no modelo não acarreta variação das tensões ou deslocamentos obtidos, não há necessidade de aumentar o número de elementos utilizados. A experiência em estruturas similares, com a utilização de um dado tipo de elemento, é um importante conhecimento também, e constitui uma valiosa fonte de informações para outras análises a serem efetuadas.

Porém, deve-se ter sempre em mente que o *primeiro passo para efetuar um bom modelo discretizado é conhecer a formulação do elemento finito a ser utilizado*, e como, em função das hipóteses adotadas, ele calcula os deslocamentos, deformações e tensões em seu interior. Por si só, esse conhecimento já é pelo menos um indicativo se o elemento é adequado para simular o problema físico objeto de estudo, e também o tamanho do elemento a ser adotado em função das dimensões principais e locais do componente a ser analisado.

COMPLEMENTO – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

A determinação da Matriz de rigidez do Elemento será efetuada neste complemento, separadamente das discussões anteriores, pois constitui uma mera repetição dos passos já estudados no item 3 deste capítulo, fazendo as substituições das funções de interpolação adotadas para os valores nodais e, posteriormente, efetuando os cálculos dos Trabalhos Externo e Interno e, em consequência, a Condição de Equivalência. É importante mencionarmos que essa tarefa é normalmente efetuada pelo computador. No estudo dos demais elementos finitos, adotaremos essa separação de tarefas, dando ênfase sempre em primeiro lugar à definição da função de interpolação, juntamente com o cálculo de deformações e tensões.



Forças Nodais e Deslocamentos Nodais

$$\{f\} = \begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \\ f_{x_3} \\ f_{y_3} \end{bmatrix}, \{\delta\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \{f\} = [k]^e \cdot \{\delta\}$$

Matriz de Rígidez do Elemento

REPRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO NA FORMA MATRICIAL E CÁLCULO DOS COEFICIENTES DESCONHECIDOS

$$u = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y \quad \rightarrow \quad \{\delta(x,y)\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}}_{[H(x,y)]} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Substituindo os valores dos deslocamentos nodais conhecidos dos nós 1, 2 e 3 e os valores das coordenadas, resultando:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}$$

(A) em que forma compacta:

$$\{\delta\} = [A] \cdot \{C\} \rightarrow \{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (5.29)$$

e substituindo em 5.28, temos:

$$\{\delta_{(x,y)}\} = [H(x,y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (5.30)$$

Invertendo [A], teremos:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2 \Delta} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & -x_1 y_3 + x_3 y_1 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & -x_1 y_3 + x_3 y_1 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot \Delta = 2 \cdot (\text{área do Triângulo } 123) = (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) - (x_1 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$$

A inversão da Matriz [A] é normalmente efetuada pelo computador.

DEFORMAÇÕES

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_2 \\ \varepsilon_y &= C_6 \\ \delta_{xy} &= C_3 + C_5 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \delta_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[G]} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon(x,y)\} = [G] \cdot [C] \quad (5.31)$$

Assim, substituindo (5.29) em (5.31) → $\{\varepsilon(x,y)\} = \underbrace{[G] \cdot [A]^{-1}}_{[B]} \cdot \{\delta\}$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [B] \cdot \{\delta\} \quad (5.32) \rightarrow \begin{array}{l} \text{A partir dos deslocamentos nodais } \{\delta\} \text{ podemos calcular} \\ \text{as Deformações dentro do Elemento por intermédio da} \\ \text{Matriz } [B]. \\ \text{Matriz Deslocamento} \\ \text{Deformação} \end{array}$$

Em que:

$$[B] = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

TENSÕES

$$\text{Do quadro VIII, equação (m), temos: } \{\sigma(x,y)\} = [D] \cdot \{\varepsilon(x,y)\}$$

E substituindo (5.32) nesta equação, temos:

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\} \quad (5.33)$$

As tensões são calculadas a partir dos deslocamentos nodais.

EQUIVALÊNCIA ENTRE TRABALHO EXTERNO E TRABALHO INTERNO, E OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO TRIANGULAR DE ESTADO PLANO DE TENSÕES

Aplicaremos o Princípio dos Trabalhos Virtuais, considerando os Deslocamentos Virtuais representados em asterisco (*) tal como fizemos no item 3 – Método Geral para Montagem da Matriz de Rígidez de qualquer Elemento Finito.

$$\tau_{\text{EXTERNO}} = f_{x1} \cdot u_1^* + f_{y1} \cdot v_1^* + f_{x2} \cdot u_2^* + f_{y2} \cdot v_2^* + f_{x3} \cdot u_3^* + f_{y3} \cdot v_3^*$$

$$\tau_{\text{EXTERNO}} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* & v_1^* & u_2^* & v_2^* & u_3^* & v_3^* \end{bmatrix}$$

$$\tau_{\text{EXTERNO}} = \left[\delta^* \right]^T \cdot \{f\} \quad (5.34)$$

TRABALHO VIRTUAL INTERNO

$$W_{\text{int}} = \int_{\text{vol}} [\epsilon^*(x,y)]^T \cdot \{\sigma(x,y)\} \cdot d\text{vol}$$

Em que vol é o volume do elemento

$$\begin{cases} \epsilon^*(x,y) = B \cdot \delta^* \\ \epsilon = \\ \sigma(x,y) = D \cdot \epsilon(x,y), \text{ temos:} \end{cases}$$

$$W_{\text{int}} = \int_{\text{vol}} [B \cdot \delta^*]^T \cdot D \cdot \epsilon(x,y) d\text{vol}$$

$$W_{\text{int}} = \int_{\text{vol}} \delta^{*T} \cdot B^T \cdot DB \cdot \delta d\text{vol}$$

Fazendo δ^* igual à unidade e igualando os trabalhos externos e interno, temos:

$$\boxed{\{f\} = \left[\int_{\text{vol}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d\text{vol} \right] \cdot \{\delta\}}$$

↑
↓

$$\boxed{\{f\} = [k]^e \cdot \{\delta\}}$$

Neste caso, as matrizes $[B]$ e $[D]$ contêm somente termos constantes e podem ser colocados fora da integral, restando somente $\int d\text{vol}$. Para um elemento de espessura constante, esta última integral é igual à área do triângulo multiplicada pela espessura t . Portanto:

$$\boxed{[k]^e = [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot A_{123} \cdot t}$$

O resultado pode ser dado em dois componentes

$$\boxed{[k]^e = [k]_e + [k]_\gamma}$$

que correspondem ao termo de deformação ϵ e ao termo de deformação por cisalhamento γ .

Assim, teremos:

$$\boxed{[K]_e^e = \frac{E \cdot t}{4 \cdot A_{123} (1 - \nu^2)} \begin{matrix} y_{32}^2 & -v \cdot y_{32} \cdot x_{32} & x_{32}^2 & y_{31}^2 & \dots \\ -v \cdot y_{32} \cdot x_{32} & v \cdot x_{32} \cdot y_{31} & -x_{32} \cdot x_{31} & -v \cdot y_{31} \cdot x_{31} & \dots \\ x_{32}^2 & -x_{32} \cdot x_{31} & v \cdot x_{31} \cdot y_{31} & x_{31}^2 & \dots \\ y_{32} \cdot y_{31} & -v \cdot x_{32} \cdot y_{21} & -y_{31} \cdot y_{21} & v \cdot x_{31} \cdot y_{21} & y_{21}^2 \\ -v \cdot y_{32} \cdot x_{21} & x_{32} \cdot x_{21} & v \cdot y_{31} \cdot x_{21} & -x_{31} \cdot x_{21} & -v \cdot y_{21} \cdot x_{21} \\ x_{32}^2 & \dots & \dots & \dots & x_{21}^2 \end{matrix} "Sim"}$$

$$\boxed{[K]_\gamma^e = \frac{E \cdot t}{8 \cdot A_{123} (1 + \nu)} \begin{matrix} x_{32}^2 & -x_{32} \cdot y_{32} & y_{32}^2 & x_{31}^2 & \dots \\ -x_{32} \cdot y_{32} & y_{32} \cdot x_{31} & -x_{32} \cdot x_{31} & y_{31}^2 & \dots \\ x_{32} \cdot y_{31} & -y_{32} \cdot y_{31} & -x_{31} \cdot y_{31} & x_{31}^2 & \dots \\ x_{32} \cdot x_{21} & -y_{32} \cdot x_{21} & -x_{31} \cdot x_{21} & y_{31} \cdot x_{21} & x_{21}^2 \\ -x_{32} \cdot y_{21} & y_{32} \cdot y_{21} & x_{31} \cdot y_{21} & -y_{31} \cdot y_{21} & -x_{21} \cdot y_{21} \\ y_{32}^2 & \dots & \dots & \dots & y_{21}^2 \end{matrix} "Sim"}$$

Em que:
 $x_{ij} = x_i - x_j$
 $y_{ij} = y_i - y_j$

5.5.3. FORMULAR O ELEMENTO SÓLIDO TETRAÉDRICO LINEAR

A figura 5.12 representa um Corpo Sólido, sob ação de forças agindo nas três direções x, y e z, portanto sob condições de *Estado Triaxial de Tensões*, como vimos no Quadro VIII. O corpo sólido contínuo pode ser subdividido artificialmente em um certo número finito de elementos, conectados apenas nos seus nós. Devido à versatilidade de geometria, qualquer corpo contínuo sólido pode ser representado como um conjunto de Tetraedros, que são os *Elementos Sólidos Tetraédricos*. O estudo do comportamento físico do elemento tetraédrico pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, tal como já fizemos para todos os elementos estudados até agora. *O Elemento Finito Sólido Tetraédrico tem quatro nós*. A figura 5.12 identifica o Elemento isolado para o estudo, na posição indefomada e na posição após a deformação.

O movimento dos nós do elemento pode ser descrito pelos componentes u , v e w , pois a definição do campo de deslocamentos em um sólido sob *Estado Triaxial de Tensões* é efetuada por *três componentes de deslocamentos*, segundo a Teoria da Elasticidade revisada no Quadro VIII. A única diferença neste caso é que o número de pontos escolhidos para descrever o comportamento do sólido é discreto, mas a natureza do problema é a mesma. Portanto, o Elemento Sólido apresenta *3 Graus de Liberdade por Nós*. Como tem *quatro nós*, esse elemento terá *12 Graus de Liberdade*. Assim, a Matriz Coluna das Forças nodais tem dimensão 12×1 , e da mesma forma, a Matriz coluna dos deslocamentos nodais terá dimensão 12×1 e, como consequência, a *Matriz de Rigidez terá dimensão 12×12* . Assim:

$$\boxed{\{f\}_{12 \times 1} = [k]_{12 \times 12} \cdot \{\delta\}_{12 \times 1} \quad (5.39)}$$

Segundo, portanto, as orientações introduzidas no item 5.1, vamos estabelecer inicialmente *os três passos fundamentais*.

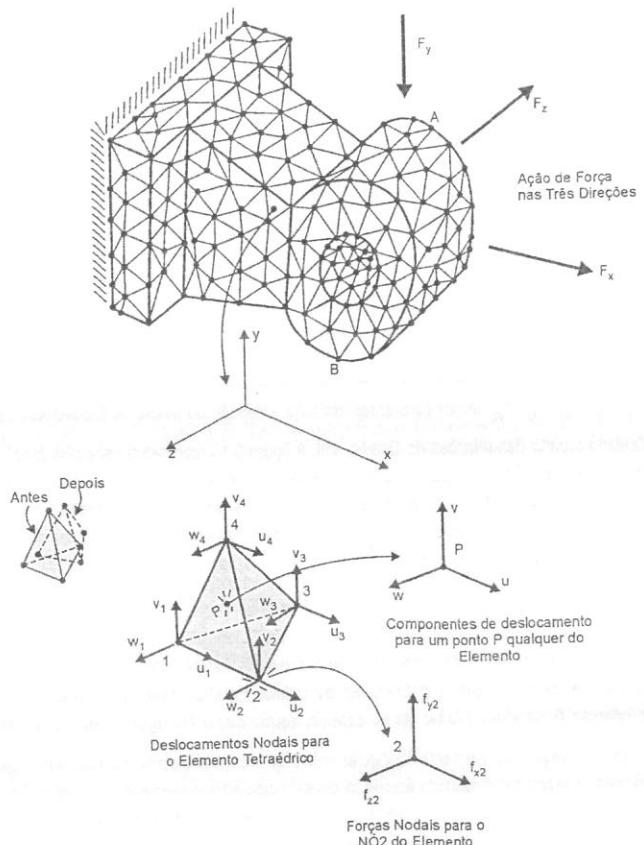


Figura 5.12 – Elemento Sólido Tetraédrico Linear.

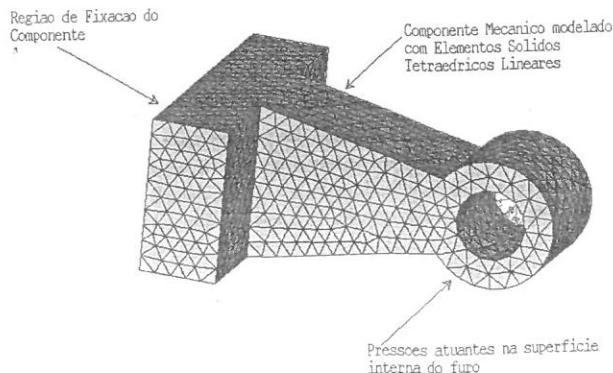


Figura 5.12 – Continuação – Uma visão do exemplo anterior no computador. Veja esta figura colorida no Apêndice A.

NCE
RESULTS: 2- B.C. 1,STRESS_2,LOAD SET 1
STRESS - MAX PRIN MIN:-7.47E-01 MAX: 3.48E+00
DEFORMATION: 1- B.C. 1,DISPLACEMENT_1,LOAD SET 1
DISPLACEMENT - MAG MIN: 0.00E+00 MAX: 4.46E-01
FRAME OF REF: PART
VALUE OPTION:ACTUAL



Figura 5.12 – Continuação – Por intermédio do Método dos Elementos Finitos, pode-se determinar o comportamento estrutural de componentes com formas complexas, utilizando os “softwares” de análise disponíveis. A partir da geração da geometria da peça, com o auxílio dos recursos de CAD tridimensional, pode-se efetuar a geração automática da malha, tomando como base a geometria gerada. Conhecendo o carregamento atuante, podem-se determinar as regiões mais solicitadas do componente, estabelecendo previsões a respeito do seu comportamento. A escolha do elemento adequado desempenha papel fundamental com vistas à obtenção de resultados confiáveis. Neste exemplo, foram utilizados Elementos Sólidos Tetraédricos Lineares que como vimos no estudo de sua formulação, apresentam várias limitações e devem ser utilizados com muito cuidado.

a) Definição das Funções de Interpolação

Já sabemos que o grau do polinômio de interpolação é definido a partir do conhecimento do número de graus de liberdade do elemento.

O elemento possui 12 Graus de Liberdade

O Polinômio escolhido deve ter 12 Coeficientes desconhecidos

Porém, em qualquer problema de *Estado Triaxial de Tensões*, o deslocamento de qualquer ponto é definido pelos componentes u , v e w , nas direções x , y e z respectivamente. Deve-se notar que o deslocamento de um ponto depende da posição em que esse ponto se encontra no sólido; por exemplo, um ponto do engastamento tem deslocamento nulo, porém um ponto da extremidade do bloco, como o ponto A, desloca-se, e de forma diferente do ponto B. Ou seja, em um problema tridimensional, o deslocamento depende da posição (x, y, z) em que o ponto se encontra. Como temos três componentes de deslocamento em cada ponto, teremos três funções escolhidas para representar o campo de deslocamentos. Estas funções deverão, a partir dos deslocamentos nodais, isto é, dos vértices do elemento, calcular os deslocamentos de qualquer ponto P dentro do elemento, como mostra a figura 5.12. Como devemos utilizar 12 coeficientes, e temos três funções, uma para o deslocamento u , outra para o deslocamento v e outra para o deslocamento w , e desde que nenhuma preferência deve ser dada para as direções x , y e z , cada uma das funções utilizará quatro coeficientes dos doze disponíveis. Como cada uma das funções depende de x , y e z , as funções serão de três variáveis.

Assim:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot z \\ v(x, y, z) &= C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot z \\ w(x, y, z) &= C_9 + C_{10} \cdot x + C_{11} \cdot y + C_{12} \cdot z \end{aligned} \quad (5.40)$$

Ou seja, o deslocamento varia linearmente com x , com y e com z , daí o fato de ser chamado de *Elemento Linear*. A partir desta definição podemos observar que nesta montagem de elementos não ocorrerão "buracos" entre elementos, apesar de os elementos vizinhos estarem conectados apenas nos nós, exatamente pelo fato de os deslocamentos variarem linearmente. Assim, as faces adjacentes de dois elementos com nós comuns irão manter-se planas na condição deformada. Ou seja, para esse elemento é atendida a *Condição de Compatibilidade tanto nos nós do elemento como também no contorno*. Esta situação por si só ainda não nos garante que em termos de cálculo de tensões esse elemento forneça um comportamento adequado, como veremos adiante.

b) Cálculo das Deformações

No Quadro VIII, em que fizemos uma breve revisão da Teoria da Elasticidade, podemos calcular as deformações em qualquer ponto dentro do elemento finito sólido, dentro das hipóteses das Funções de Interpolação adotadas. Assim, das equações (n) a (q), do Quadro VIII, temos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

É importante lembrar que estas funções contêm derivadas parciais. Por exemplo, nas derivadas em relação a x , os termos em y e z serão considerados como constantes e terão portanto derivadas nulas. Assim, efetuando as derivações das funções u , v e w que fornecem os deslocamentos em todos os pontos do elemento finito, teremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 = \text{CONSTANTE} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = C_7 = \text{CONSTANTE} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = C_{12} = \text{CONSTANTE} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_3 + C_6 = \text{CONSTANTE} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = C_4 + C_{10} = \text{CONSTANTE} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = C_8 + C_{11} = \text{CONSTANTE} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Assim, podemos tirar uma conclusão importante a respeito do Elemento Sólido em estudo. As deformações acima calculadas são funções e se aplicam a todos os pontos do elemento. E como vimos, são constantes. Esta é uma série limitação do elemento Sólido Tetraédrico Linear. O fato de a deformação ser constante em todos os pontos do elemento finito decorreu da escolha da função do primeiro grau para a representação dos deslocamentos. A partir do cálculo das deformações passaremos em seguida para o Cálculo das Tensões.

Assim:

O Elemento Sólido Tetraédrico Linear é um Elemento de Deformações Constantes.

c) Cálculo das Tensões

O Cálculo das Tensões decorre imediatamente a partir do Cálculo das Deformações. Podemos utilizar as relações do Quadro VIII para esse fim, o que faremos adiante, porém, antes disso, é interessante explorarmos conceitualmente os resultados obtidos anteriormente. Se o Elemento Sólido Tetraédrico Linear é um Elemento de Deformações Constantes, então obviamente podemos concluir que também é um Elemento de Tensões Constantes. Assim:

O Elemento Sólido Tetraédrico Linear é um Elemento de Tensões Constantes.

Assim, as tensões $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ serão constantes em toda extensão do elemento tetraédrico, cada qual assumindo um valor que pode ser calculado a partir das relações do Quadro VIII. A figura 5.13 representa essa distribuição para um elemento tetraédrico. No exemplo é mostrado um caso em que já sabemos antecipadamente que a distribuição de tensões é variável ao longo de uma seção, pois o bloco está submetido à flexão no plano xy , com tensões variando da tração à compressão. Eis então a série limitação desse elemento: se o sólido for modelado por uma montagem de elementos tetraédricos de sorte que a altura dos tetraedros seja igual à própria altura do bloco, este modelo calculará as tensões como sendo constantes de cima para baixo.

Para obter um resultado acurado para o cálculo das tensões, devemos utilizar um número muito grande de elementos. Embora dentro de cada elemento a tensão continue sendo calculada de forma constante, as variações de tensão de um elemento para outro não apresentariam grandes descontinuidades. Este problema, como podemos perceber facilmente, permite fazer uma analogia direta entre o Elemento Sólido Tetraédrico Linear e o Elemento de Estado Pano de tensões Triangular. Em termos figurados, poderíamos dizer que o "Elemento Tetraédrico Linear faz no espaço, aquilo que o Triângulo linear faz no plano".

Outro aspecto importante na formulação do elemento triangular refere-se ao estabelecimento das condições de equilíbrio do elemento. Para estas condições, o raciocínio é idêntico àquele já estabelecido para o elemento triangular. No contorno comum a dois elementos, isto é, em uma dada face comum a dois tetraedros, ao calcular a tensão na direção x , nesse contorno, os valores serão diferentes se calculados pelos dois elementos diferentes. Assim, um mesmo ponto terá dois valores diferentes de tensão, já que as tensões são calculadas elemento por elemento, como já sabemos. Portanto, isto quer dizer que o elemento sólido tetraédrico linear não atende à condição de equilíbrio.

O desejável seria que os valores de tensão em dois elementos vizinhos fossem não muito diferentes, de modo a considerar essa diferença como uma aproximação aceitável. Isso só seria possível se os deslocamentos dos nós não comuns a dois tetraedros vizinhos não fossem muito diferentes já que os outros nós são comuns. Isso então poderia ser possível se os nós não comuns fossem não muito distantes, ou, em outras palavras, se os elementos fossem de tamanho pequeno, isto é, o erro seria minimizado se a malha fosse refinada.

Embora o elemento tetraédrico linear tenha a vantagem de ter uma formulação simples, e a habilidade de representar contornos irregulares, o uso prático deve ser efetuado com extremo cuidado, devido às sérias limitações para o cálculo das tensões no elemento. Para obter um resultado acurado, dever-se-ia utilizar um número muito grande de elementos, à semelhança do elemento Triangular Linear já estudado, e avaliado no *Teste de Convergência de Malha*, efetuado no Quadro IX.

Outros elementos com desempenho melhor que o Elemento Sólido Tetraédrico Linear serão estudados em seguida para representar os problemas de Estado Triaxial de Tensões. Porém, o estudo do Elemento Tetraédrico Linear desempenha papel fundamental no estudo do elemento de geometria tridimensional. Primeiramente pela metodologia introduzida, que será repetida para todos os outros elementos sólidos, e pelo papel que desempenha na estória de implantação do método; foi um dos primeiros elementos formulados.

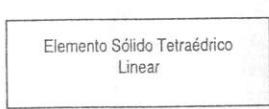
Se quiséssemos calcular numericamente as tensões em um ponto dentro do elemento, poderíamos utilizar a equação (u) do Quadro VIII, utilizando a Matriz de Elasticidade [D] dada pela equação (x) do mesmo Quadro. A título de exemplo, vamos calcular apenas a tensão σ_x em qualquer ponto do elemento, que é constante. Assim, efetuando o produto matricial $\{\sigma(x,y,z)\} = [D]\{\varepsilon(x,y,z)\}$, a tensão σ_x será dada por:

$$\sigma_x = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} (\varepsilon_x + \frac{v}{1-v} \cdot \varepsilon_y + \frac{v}{1-v} \cdot \varepsilon_z) = \text{constante} \quad (5.42)$$

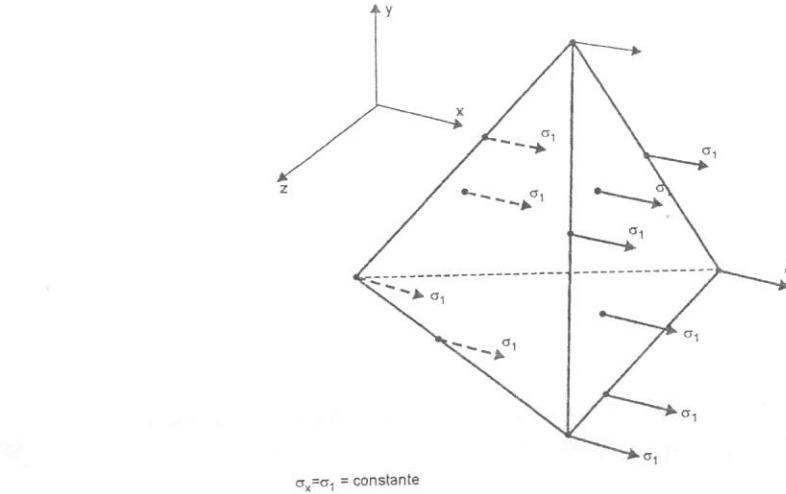
Note que esta expressão para o Cálculo das tensões σ_x é válida para qualquer ponto submetido a um estado triaxial de tensões, e foi desenvolvida na Teoria da Elasticidade, revisada anteriormente. Em particular, no âmbito do elemento Tetraédrico, foram utilizados os valores de deformações $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e ε_z que resultaram do campo de deslocamentos atribuído ao elemento. Daí decorre a aproximação no cálculo das tensões. Como as deformações utilizadas são constantes em todos os pontos do elemento, as tensões também serão.

Observações a respeito da utilização do Elemento Sólido Tetraédrico Linear

O teste de convergência efetuado anteriormente para o caso do Estado Plano de Tensões poderia ser repetido para o Elemento Sólido ora estudado; o procedimento seria semelhante. Não o faremos, pois a idéia geral já foi estabelecida, e não traria nenhuma novidade. A discussão da utilização de uma *Malha Gradual*, isto é, uma malha em que os elementos variem gradualmente de tamanho, continua válida. Nas *regiões em que ocorram variações acentuadas do panorama de tensões, deve-se adotar uma malha mais refinada*. Novamente está presente de modo bastante significativo, a formulação do elemento. Em particular, o elemento tetraédrico estudado é bastante limitado. Outros elementos sólidos mais completos serão ainda estudados, e permitirão obter resultados aceitáveis sem a necessidade de utilizar elementos extremamente pequenos.



- Elemento cujas deformações são constantes em cada uma das direções x, y, z.
 $\varepsilon_x = C_2 ; \varepsilon_y = C_1 ; \varepsilon_z = C_{12}$
- Elemento cujas tensões são constantes em cada uma das direções x, y, z.
- Elemento bastante limitado, deve ser utilizado com muito critério nas aplicações práticas.



As tensões em cada uma das direções x, y e z são constantes. Por exemplo, todos os pontos do Tetraédro têm a mesma tensão σ_x , como mostra a figura. O mesmo vale para σ_y e σ_z com seus respectivos valores.

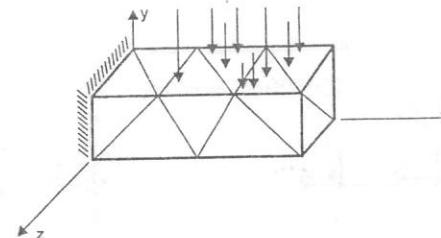


Figura 5.13 – As tensões no Elemento Sólido Tetraédrico Linear são constantes.

Observação - Determinação das Matrizes de rigidez dos Elementos

A determinação da Matriz de Rigidez do Elemento, à semelhança do caso do Estado Plano de Tensões estudado anteriormente, constitui uma mera repetição dos passos já estudados no item 3 deste capítulo, efetuando as substituições das funções de interpolação adotadas para os valores nodais, determinando as constantes desconhecidas e, posteriormente, os cálculos dos Trabalhos Externo e Interno e a Condição de Equivalência. À medida que os elementos apresentam um número maior de graus de liberdade, essa tarefa torna-se extremamente trabalhosa; é importante então, mais uma vez, mencionarmos que essa tarefa é efetuada pelo computador.

Pelo fato de constituir uma mera manipulação de uma enorme quantidade de dados, não apresentará nenhuma novidade importante no estudo conceitual do elemento. Por este motivo, não desenvolveremos para o estudo da maioria dos elementos a montagem das suas matrizes de rigidez, mas apenas a Definição das Funções de Interpolação, e o Cálculo das Deformações e Tensões, que constitui a parte mais importante para o Analista, que deve sempre conhecer as hipóteses de formulação de cada elemento, e as consequências dessas hipóteses no cálculo da resposta obtida por intermédio do modelo discretizado por uma montagem de elementos finitos.

5.5.4. FORMULAR O ELEMENTO DE ESTADO PLANO DE TENSÕES RETANGULAR LINEAR

A figura 5.14 representa uma chapa plana, sob ação de forças agindo apenas no seu plano, portanto sob condições de *Estado Plano de Tensões*, como já sabemos. A chapa contínua pode ser subdividida artificialmente em um certo número finito de *Elementos Retangulares*, conectados apenas nos seus nós, que são os *Elementos de Estado Plano de Tensões Retangulares*. O estudo do comportamento físico do elemento retangular pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, tal como já fizemos para todos os elementos estudados até agora. *O Elemento Finito Retangular tem quatro nós*. A figura 5.14 identifica o Elemento isolado para o estudo, na posição indeformada e na posição após a deformação. O movimento dos nós do elemento pode ser descrito pelos componentes u e v , pois a definição do campo de deslocamentos em uma chapa sob *Estado Plano de Tensões* é efetuada por *dois componentes de deslocamentos*, segundo a Teoria da Elasticidade revisada no Quadro VIII. Portanto, o Elemento de Estado Plano de Tensões apresenta *2 Graus de Liberdade por Nô*. Como tem *quatro nós*, esse elemento terá *8 Graus de Liberdade*. Assim, a Matriz Coluna das Forças nodais tem dimensão 8×1 , e, da mesma forma, a Matriz coluna dos deslocamentos nodais terá dimensão 8×1 , como consequência, a *Matriz de Rigidez terá dimensão 8×8* . Assim:

$$\{f\}_{8 \times 1} = [k]_{8 \times 8} \cdot \{\delta\}_{8 \times 1} \quad (5.43)$$

Segundo, portanto, as orientações introduzidas no item 5.1, vamos estabelecer inicialmente *os três passos fundamentais*.

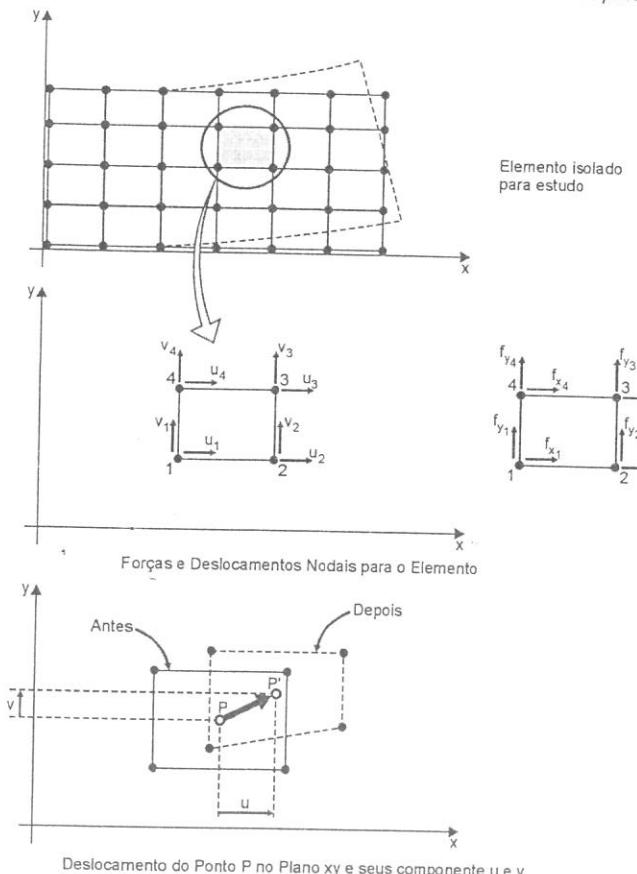
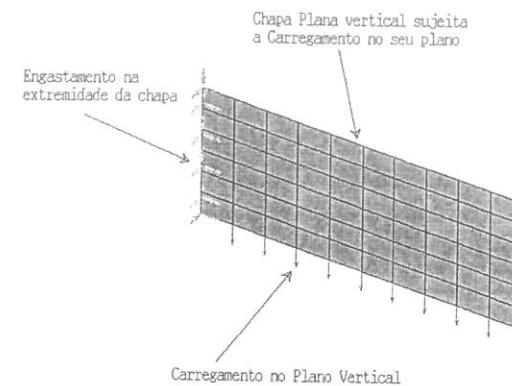


Figura 5.14 – Elemento de Estado Plano de Tensões Retangular Linear.



RESULTS: 2- B.C. 1_STRESS_2,LOAD SET 1
STRESS - X MIN:-9.35E+00 MAX: 5.24E+00
DEFORMATION: 1- B.C. 1,DISPLACEMENT_1,LOAD SET 1
DISPLACEMENT - MAG MIN: 0.00E+00 MAX: 3.78E-01
FRAME OF REF: PART

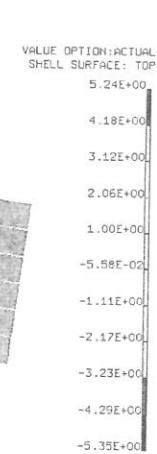


Figura 5.14 – Continuação – Uma Visão no computador de uma chapa carregada no seu próprio plano. Veja esta figura colorida no apêndice A. Exemplo de Chapa Vertical discretizada por intermédio de Elementos Retangulares Lineares de Estado Plano de Tensões. A flexão da chapa no seu próprio plano gera tensões de tração e compressão nas extremidades da chapa. A formulação dos elementos retangulares lineares foi desenvolvida no texto.

a) Definição das Funções de Interpolação

A definição das funções de interpolação é efetuada utilizando o mesmo raciocínio do Elemento Triangular. Assim, resumidamente, temos:



Assim:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y \\ v(x, y) &= C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y \end{aligned} \quad (5.44)$$

Deve-se notar que o coeficiente C_4 acompanha o produto das variáveis x e y . A escolha do produto $x \cdot y$ se justifica, desde que nenhuma preferência deve ser dada para as direções x e y , e dessa forma ambas as variáveis acompanham o coeficiente C_4 , e com expoente de mesmo grau. A análise destas expressões permite observar que:

Se $x = \text{constante}$, isto é, para todos os pontos da chapa que estão localizados em uma reta paralela ao eixo y , os deslocamentos u e v variam linearmente com y , e analogamente, se $y = \text{constante}$, u e v variam linearmente com x , como indica a figura 5.15.

Como os deslocamentos variam linearmente ao longo dos contornos comuns de dois elementos adjacentes, e os deslocamentos são iguais nos nós comuns, os deslocamentos serão iguais no contorno comum de dois elementos vizinhos.

Assim, este elemento atende à Condição de Compatibilidade.

b) Cálculo das deformações

Sabemos que:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Assim, calculando as derivadas parciais das funções u e v que fornecem os deslocamentos em todos os pontos do elemento finito, teremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 + C_4 \cdot y \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = C_7 + C_8 \cdot x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_3 + C_4 \cdot x + C_6 + C_8 \cdot y \end{aligned} \quad (5.45)$$

Assim, podemos tirar uma conclusão importante a respeito do Elemento em estudo. As deformações acima calculadas são funções e se aplicam a todos os pontos do elemento. E como vimos, variam linearmente. Note que o Elemento de Estado Plano de Tensões Retangular apresenta um comportamento muito melhor que o Elemento Triangular. A figura 5.15 compara as respostas obtidas por intermédio desses dois elementos. Por exemplo, para a chapa sujeita à flexão no seu próprio plano, enquanto um elemento triangular linear de altura igual à largura da chapa calcula as deformações ε_x como sendo constantes, um elemento retangular de mesma altura calcula as deformações ε_x variando linearmente com y . Assim, a variação linear das deformações ao longo da altura da chapa, que traduz o comportamento da chapa, pode ser representada por este elemento.

Por outro lado, apesar de este comportamento ser muito melhor que o elemento triangular, algumas limitações devem ser observadas. A análise da expressão de ε_x indica que as deformações na direção x variam linearmente com y , porém independentemente de x . Isto quer dizer que para um elemento retangular, como representado na figura 5.15, para uma dada posição y ao longo da altura da chapa, as deformações são constantes ao longo de todo o comprimento do elemento. Assim, este elemento deve merecer

alguns cuidados em sua utilização também. Em uma região em que ocorra uma acentuada variação da deformação ε_x ao longo do eixo x do elemento, deve-se evitar a definição de um elemento muito comprimido em relação à sua altura, pois a deformação ε_x será constante na direção x .

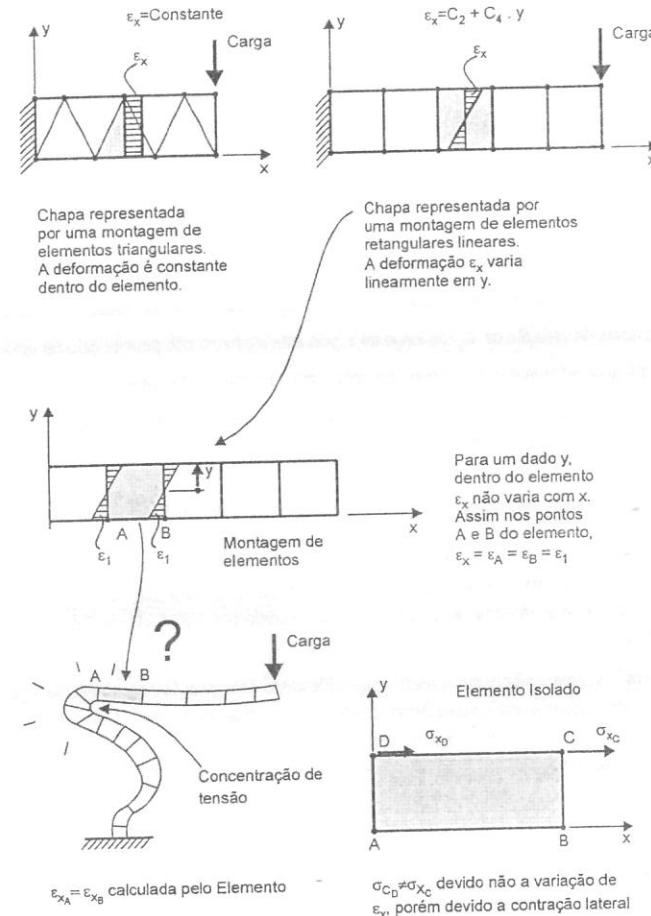


Figura 5.15 – Elemento de Estado Plano de Tensões Retangular. Cálculo das deformações, tensões e comparação com o Elemento Triangular de Estado Plano de Tensões.

c) Cálculo das Tensões

O Cálculo das Tensões decorre imediatamente a partir do Cálculo das Deformações. Podemos utilizar as relações do Quadro VIII para esse fim, tal como já fizemos para o Elemento Triangular. Devemos apenas substituir as expressões apropriadas, que fornecem as deformações no domínio do elemento retangular.

Se quiséssemos calcular numericamente as tensões em um ponto dentro do elemento, poderíamos utilizar a equação (I) do Quadro VIII. Assim:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \text{ efetuando o produto matricial, teremos:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_x + v \cdot \varepsilon_y) = \frac{E}{1-v^2} \{C_2 + C_4 \cdot y + v(C_7 + C_8 \cdot x)\} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-v^2} (v \cdot \varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{E}{1-v^2} \{v(C_2 + C_4 \cdot y) + C_7 + C_8 \cdot x\} \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1-v^2} \cdot \left(\frac{1-v}{2}\right) \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{1-v^2} \cdot \left(\frac{1-v}{2}\right) \cdot (C_3 + C_4 \cdot x + C_6 + C_8 \cdot y) \end{aligned} \quad (5.46)$$

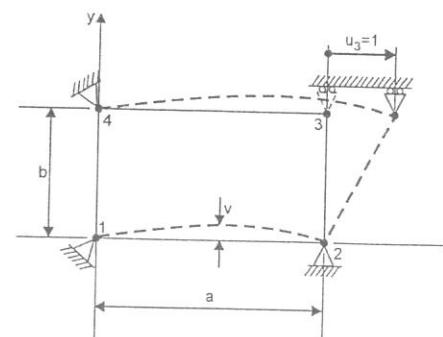
A análise das expressões (5.46) anteriores permite-nos observar que embora as deformações ε_x variem apenas com y e não com x , as tensões σ_x variam com x e y . Entretanto, é importante interpretar o significado desta conclusão. Esta variação da tensão σ_x com x não se deve à ação direta da variação de ε_x ao longo de x , pois este elemento não permite calcular essa variação, mas devido à ação da contração lateral provocada por ε_y . Assim, em uma região em que ocorra uma acentuada variação da tensão σ_x ao longo do eixo x do elemento, deve-se evitar a definição de um elemento muito comprimido em relação à sua altura, como indica a figura 5.15.

Observações adicionais em relação ao comportamento do Elemento de Estado Plano de Tensões Retangular Linear

As equações $u(x,y) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y$ e $v(x,y) = C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y$ constituem um Modelo Matemático para os Deslocamentos dentro de um Elemento Finito de Estado Plano de Tensões Retangular Linear. Evidentemente, seria desejável que este modelo representasse os deslocamentos da forma mais acurada possível, traduzindo assim, o comportamento real com o mínimo desvio possível.

Já vimos anteriormente, que este elemento, embora muito melhor que o Elemento Triangular Linear, apresenta algumas limitações também quanto ao cálculo das deformações e, em consequência, das tensões. Poderemos ter uma visão física dessas limitações, fazendo um "teste" deste elemento. Para um dado problema físico, em que já temos uma expectativa de comportamento da estrutura real, avaliaremos o resultado obtido por intermédio do modelo matemático proposto para os deslocamentos. Dessa forma, teremos uma outra visão das limitações do elemento. Esse tipo de abordagem, embora aqui discutida para o elemento retangular, poderia ser utilizada como referência para estudo de outros elementos.

Na figura ao lado, é representada uma chapa retangular com as dimensões indicadas, e submetida à ação de um deslocamento imposto apenas na direção x , como ilustra a figura. É representado também o aspecto da configuração deformada da chapa. Tal situação, embora não seja por nós aqui demonstrada, corresponde à situação obtida na prática para essa estrutura. Seria então desejável que o modelo matemático proposto para os deslocamentos pudesse traduzir esse comportamento adequadamente. Uma boa representação do campo de deslocamentos evidentemente acarretará uma boa representação das deformações, que são as suas derivadas, e adicionalmente, das tensões. Estas últimas permitirão avaliar a resistência do componente adequadamente, à luz de um dado critério de projeto.



Tomando como base as funções de interpolação propostas, vamos tentar avaliar a configuração deformada da chapa, representando-a por um elemento, e compará-la com a figura anterior.

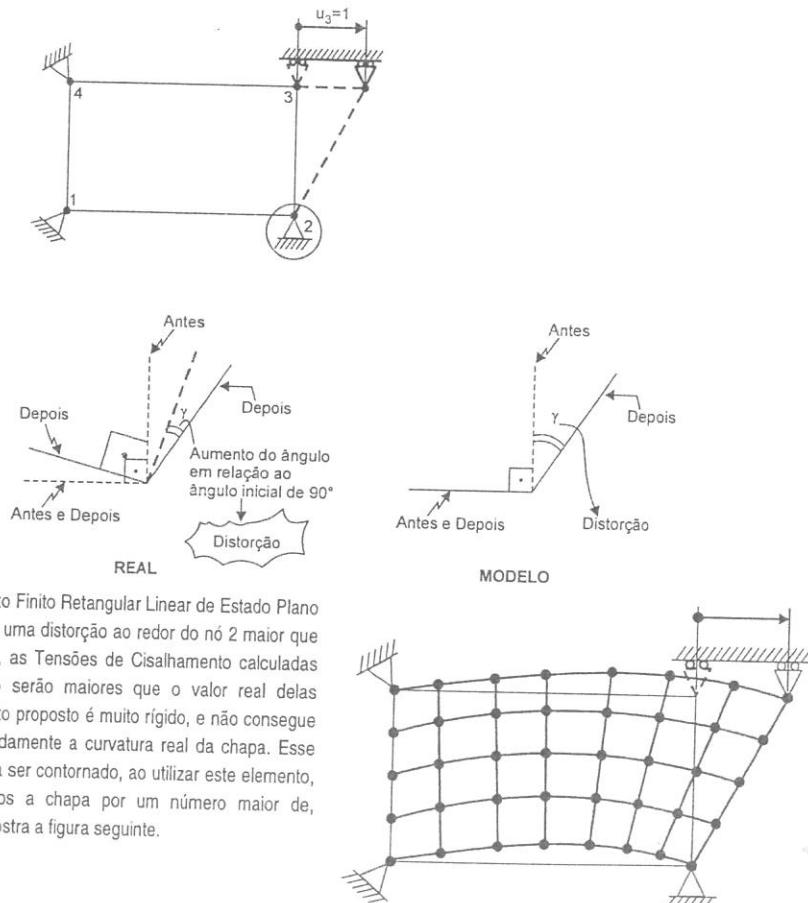
Todos os pontos situados na aresta 1-2 do elemento estão em posições cuja coordenada y é nula, isto é, $y = 0$. Dessa forma, os deslocamentos na direção y para esses pontos, dados pela equação

$$v(x,y) = C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y \text{ de forma geral, serão:}$$

$$v(x,y) = C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot 0 + C_8 \cdot x \cdot 0, \text{ o que resultará:}$$

$$v(x,y) = C_5 + C_6 \cdot x$$

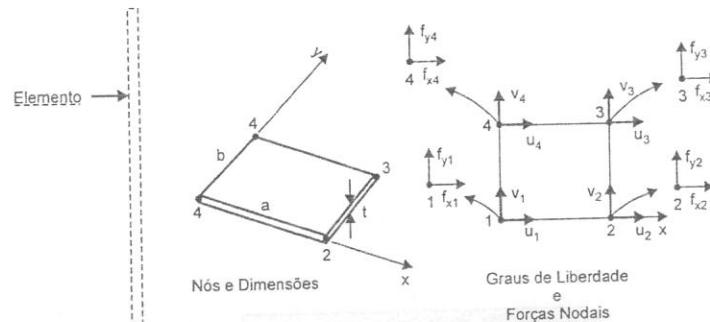
Nesta última equação, fica claro que a curva que representa as deflexões $v(x, y)$ é dada por uma função do 1º Grau, portanto representa a **equação de uma reta**. Como essa reta deve passar pelos pontos 1 e 2, pois a chapa está presa nesses pontos (podendo apenas girar nesses locais), a configuração deformada da chapa dada pelo modelo matemático não admitirá a curvatura observada na prática. O mesmo raciocínio podemos empregar para a aresta 3-4, em que $y = \text{constante} = b$.



Portanto, o Elemento Finito Retangular Linear de Estado Plano de Tensões de Cisalhamento calcula uma distorção ao redor do nó 2 maior que o valor real. Assim, as Tensões de Cisalhamento calculadas por esse elemento serão maiores que o valor real delas mesmas. O elemento proposto é muito rígido, e não consegue representar adequadamente a curvatura real da chapa. Esse problema só poderia ser contornado, ao utilizar este elemento, se representássemos a chapa por um número maior de elementos, como mostra a figura seguinte.

COMPLEMENTO – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

A determinação da Matriz de Rigidez do Elemento será efetuada neste complemento, à semelhança do procedimento adotado para o elemento Triangular de Estado Plano de Tensões



Existem 2 graus de Liberdade por Nô
O Elemento tem 8 graus de Liberdade

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}; \quad \{f\} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \{f\} = [k]^e \cdot \{\delta\}$$

Funções de Deslocamentos:

$$u(x,y) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y$$

$$v(x,y) = C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix}$$

OU

$$\{\delta(x,y)\} = [H(x,y)] \cdot [C]$$

RELACIONE OS DESLOCAMENTOS GERAIS DENTRO DO ELEMENTO AOS DESLOCAMENTOS NODAIS

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \cdot \{C\}$$

ou

$$\{\delta\} = [A] \cdot \{C\}$$

Portanto:

$$\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

$$\{C\} = \frac{1}{a \cdot b} \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \{\delta\}$$

$$\{\delta(x,y)\} = [H(x,y)] \cdot [C] \quad \text{e} \quad \{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

$$\{\delta(x,y)\} = [H] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

$2 \times 1 = 2 \times 8 \quad 8 \times 8 \quad 8 \times 1$

EXPRIMIR DEFORMAÇÃO INTERNA EM TERMOS DE DESLOCAMENTOS NODAIS

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 + C_4 \cdot y \\ C_7 + C_8 \cdot y \\ C_3 + C_4 \cdot x + C_6 + C_8 \cdot y \end{pmatrix}$$

↓

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \cdot \{C\}$$

ou

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [G] \cdot \{C\}$$

Como:

$$\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \rightarrow \{\varepsilon(x,y)\} = [G] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

$$[B] = [G] \cdot [A]^{-1}$$

↓

$$\boxed{\{\varepsilon(x,y)\} = [B] \cdot \{\delta\}}$$

Fazendo o produto matricial $[G] \cdot [A]^{-1}$, teremos:

$$[B] = \frac{1}{a \cdot b} \begin{bmatrix} -b+y & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -a+x & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ -a+x & -b+y & -x & b-y & x & y & a-x & -y \end{bmatrix}$$

EXPRIMIR AS FORÇAS INTERNAS (TENSÕES) EM TERMOS DE DESLOCAMENTOS NODAIS, USANDO A LEI DE COMPORTAMENTO ELÁSTICO DO ELEMENTO

Já sabemos que para o Estado Plano de Tensões, temos:

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{pmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix}}_{[D]} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \sigma \end{pmatrix}$$

↓

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$$

e como: $\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta\}$

$$\boxed{\{\sigma(x,y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\}}$$

$$\boxed{\{\sigma(x,y)\} = [D] \cdot [B]}$$

A Análise de $S(x,y)$ permite monstrar que todos os componentes de Tensão variam linearmente segundo as direções x e y.

OBTER A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO $[k]^e$ RELACIONANDO FORÇAS NODAIS E DESLOCAMENTOS NODAIS

Este passo é idêntico ao utilizado para o Elemento Triangular anteriormente estudado.

$$[k]^e = \int_{\text{vol}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B]^T \cdot d\text{vol}$$

Sendo $t = \text{Constante (espessura)}$, temos:

$$[k]^e = t \cdot \left(\int \int \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot [D] \cdot \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dx dy \right)$$

↓

Ao contrário do Elemento Triangular já estudado, no qual $[B]$ só contém termos constantes, neste caso $[B]$ contém os termos x e y e não pode ser tirada da Integral

↓

Calcular primeiro o produto $[B]^T \cdot [D] \cdot [B]$

↓

Integrar os termos da Matriz obtida

Como no caso do Elemento Triangular, convém apresentar $[k]^e$ como soma de duas parcelas:

$$[k]^e = [k]_\varepsilon + [k]_\gamma \text{ em que:}$$

$$[k]_\varepsilon = \frac{Et}{12(1-v^2)} \begin{bmatrix} \frac{4}{\alpha} & & & & & & & \\ 3v & 4\alpha & & & & & & \\ -\frac{4}{\alpha} & -3v & \frac{4}{\alpha} & & & & & \\ 3v & 2\alpha & -3v & 4\alpha & & & & \\ -\frac{2}{\alpha} & -3v & \frac{2}{\alpha} & -3v & \frac{4}{\alpha} & & & \\ -3v & -2\alpha & 3v & -4\alpha & 3v & \frac{4}{\alpha} & & \\ \frac{2}{\alpha} & 3v & -\frac{2}{\alpha} & 3v & -4\alpha & -3v & \frac{4}{\alpha} & \\ -3v & -4\alpha & 3v & -2\alpha & 3v & 2\alpha & -3v & 4\alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{em que: } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$[k]_y = \frac{E \cdot t}{24(1+v)} \begin{bmatrix} 4\alpha & & & \\ 3 & \frac{4}{\alpha} & & \\ 2\alpha & 3 & 4\alpha & \\ -3 & -\frac{4}{\alpha} & -3 & \frac{4}{\alpha} \\ -2\alpha & -3 & -4\alpha & 3 & 4\alpha \\ -3 & -\frac{2}{\alpha} & -3 & \frac{2}{\alpha} & 3 & \frac{4}{\alpha} \\ -4\alpha & -3 & -2\alpha & 3 & 2\alpha & 3 & 4\alpha \\ 3 & \frac{2}{\alpha} & 3 & -\frac{2}{\alpha} & -3 & -\frac{4}{\alpha} & -3 & \frac{4}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Caso haja necessidade de Transformação de Coordenadas

$$[K]^e = [T]^T [k]^e [T]$$

5.5.5. FORMULAR O ELEMENTO SÓLIDO HEXAÉDRICO LINEAR

A figura 5.16 representa um Corpo Sólido, sob ação de forças agindo nas três direções x, y e z , portanto sob condições de *Estado Triaxial de Tensões*, como vimos no Quadro VIII. O corpo sólido contínuo pode ser subdividido artificialmente em um certo número finito de *Elementos Sólidos*, conectados apenas nos seus nós. Neste caso, a montagem de elementos é constituída por elementos sólidos na forma de “paralelepípedos”, que são os *Elementos Sólidos Hexaédricos*. O estudo do comportamento físico do elemento Hexaédrico pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, tal como já fizemos para todos os elementos estudados até agora. O Elemento Finito Hexaédrico tem oito nós. A figura 5.16 identifica o Elemento isolado para o estudo, na posição indeformada e na posição após a deformação.

O movimento dos nós do elemento pode ser descrito pelos componentes u, v e w , pois a definição do campo de deslocamentos em um sólido sob *Estado Triaxial de Tensões* é efetuada por **três componentes de deslocamentos**, segundo a Teoria da Elasticidade revisada no Quadro VIII. Portanto, o Elemento Sólido apresenta **3 Graus de Liberdade por Nós**. Como tem **oito nós**, esse elemento terá **24 Graus de Liberdade**. Assim, a Matriz Coluna das Forças nodais tem dimensão 24×1 e, da mesma forma, a Matriz coluna dos deslocamentos nodais terá dimensão 24×1 , e como consequência, a *Matriz de Rigidizez* terá dimensão 24×24 . Assim:

$$\{f\}_{24 \times 1} = [k]_{24 \times 24} \cdot \{\delta\}_{24 \times 1} \quad (5.47)$$

Segundo portanto as orientações introduzidas no item 5.1, vamos estabelecer inicialmente **os três passos fundamentais**.

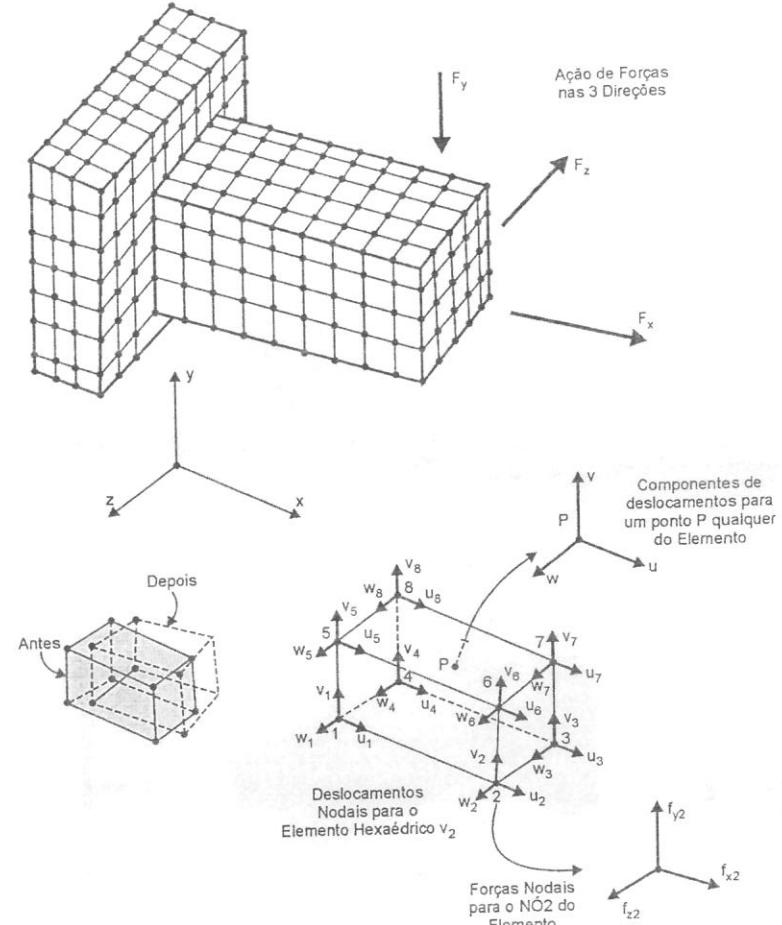


Figura 5.16 – Elemento Sólido Hexaédrico Linear.

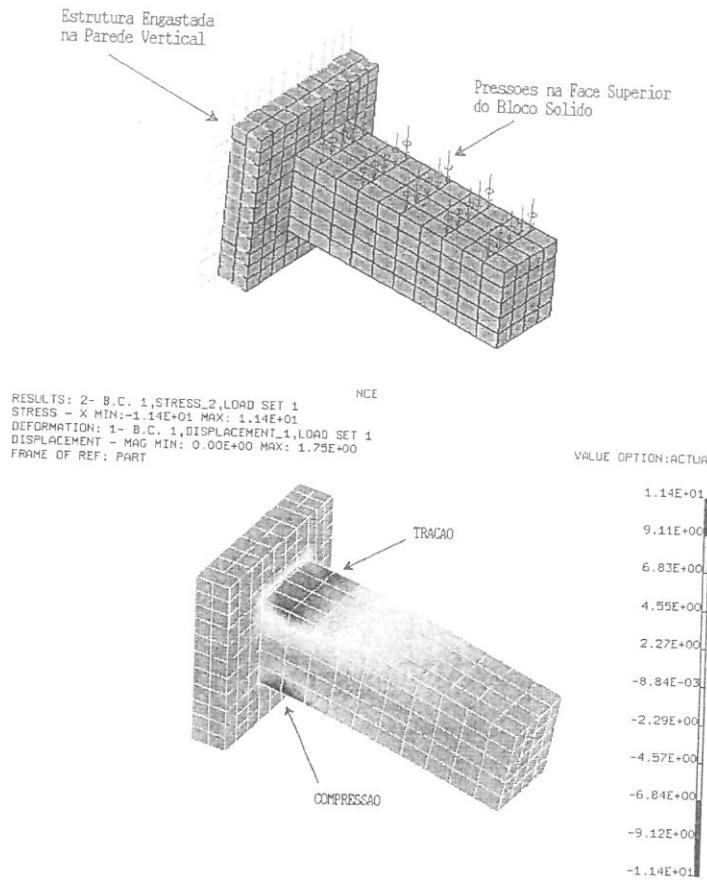
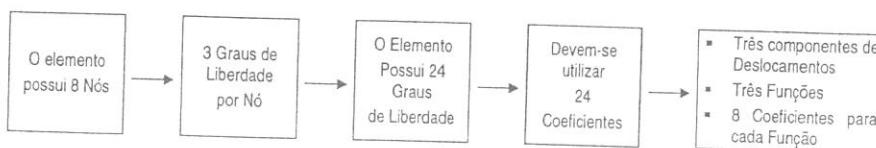


Figura 5.16 – Continuação – Uma Visão do exemplo anterior no computador. Veja esta figura colorida no Apêndice A.

a) Definição das Funções de Interpolação

A definição das funções de interpolação é efetuada utilizando o mesmo raciocínio do Elemento Tetraédrico Linear. Assim, resumidamente, temos:



Assim:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot z + C_5 \cdot x \cdot y + C_6 \cdot x \cdot z + C_7 \cdot y \cdot z + C_8 \cdot x \cdot y \cdot z \\ v(x,y,z) &= C_9 + C_{10} \cdot x + C_{11} \cdot y + C_{12} \cdot z + C_{13} \cdot x \cdot y + C_{14} \cdot x \cdot z + C_{15} \cdot y \cdot z + C_{16} \cdot x \cdot y \cdot z \\ w(x,y,z) &= C_{17} + C_{18} \cdot x + C_{19} \cdot y + C_{20} \cdot z + C_{21} \cdot x \cdot y + C_{22} \cdot x \cdot z + C_{23} \cdot y \cdot z + C_{24} \cdot x \cdot y \cdot z \end{aligned} \quad (5.48)$$

Deve-se notar que à semelhança dos elementos anteriormente formulados, nenhuma preferência foi dada às direções x, y e z. A análise destas expressões permite observar que:

Se $x = \text{constante}$, isto é, para todos os pontos do sólido que estão localizados em um plano paralelo ao plano yz, os deslocamentos u , v e w variam linearmente com y e z . Analogamente, para os pontos situados em planos paralelos aos planos definidos pelo sistema de referência, poderíamos estabelecer raciocínio semelhante.

Como os deslocamentos variam linearmente ao longo das faces comuns de dois elementos adjacentes, e os deslocamentos são iguais nos Nós comuns, os deslocamentos serão iguais no contorno comum de dois elementos vizinhos.

Ou seja, o deslocamento varia linearmente com x , com y e com z , daí o fato de ser chamado de *Elemento Linear*, e não ocorrerão "buracos" entre elementos, apesar de os elementos vizinhos estarem conectados apenas nos nós, exatamente pelo fato de os deslocamentos variarem linearmente. Assim, as faces adjacentes de dois elementos com nós comuns irão manter-se planas na condição deformada. Ou seja, para este elemento é atendida a *Condição de Compatibilidade* tanto nos nós do elemento como também no contorno.

b) Cálculo das deformações

Do Quadro VIII, em que fizemos uma breve revisão da Teoria da Elasticidade, podemos calcular as deformações em qualquer ponto dentro do elemento finito sólido, dentro das hipóteses das Funções de Interpolação adotadas. Assim, das equações (n) a (q), do Quadro VIII, temos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

É importante relembrar que estas funções contêm derivadas parciais. Por exemplo, nas derivadas em relação a x , os termos em y e z serão considerados como constantes e terão portanto derivadas nulas. Assim, efetuando as derivações das funções u , v e w que fornecem os deslocamentos em todos os pontos do elemento finito, teremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 + C_5 \cdot y + C_6 \cdot z + C_8 \cdot y \cdot z \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = C_{11} + C_{13} \cdot x + C_{15} \cdot z + C_{16} \cdot x \cdot z \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = C_{20} + C_{22} \cdot x + C_{23} \cdot y + C_{24} \cdot x \cdot y \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_3 + C_5 \cdot x + C_7 \cdot z + C_8 \cdot x \cdot z + C_{10} + C_{13} \cdot y + C_{14} \cdot z + C_{16} \cdot y \cdot z$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = C_4 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y + C_{18} + C_{21} \cdot y + C_{22} \cdot z + C_{24} \cdot y \cdot z$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = C_{12} + C_{14} \cdot x + C_{15} \cdot y + C_{16} \cdot x \cdot y + C_{19} + C_{21} \cdot x + C_{23} \cdot z + C_{24} \cdot x \cdot z$$

Assim, podemos tirar uma conclusão importante a respeito do Elemento Sólido Hexaédrico em estudo. As deformações acima calculadas são funções e se aplicam a todos os pontos do elemento. E como observamos das equações 5.49, as deformações variam dentro do elemento, e como vimos, variam linearmente, portanto, não são constantes, como no caso do elemento sólido tetraédrico linear. Note que o Elemento Sólido Hexaédrico Linear apresenta um comportamento muito melhor que o Elemento Sólido Tetraédrico Linear. O fato de a deformação não ser constante em todos os pontos do elemento finito decorreu da escolha da função para a representação dos deslocamentos. O número de graus de liberdade do elemento neste caso é maior, utilizando um maior número de coeficientes.

A figura 5.17 compara as respostas obtidas por intermédio desses dois elementos. Por exemplo, para o corpo sólido sujeito à flexão no plano vertical, enquanto um elemento sólido tetraédrico linear de altura igual à altura do bloco calcula as deformações ϵ_x como sendo constantes, um elemento sólido hexaédrico de mesma altura calcula as deformações ϵ_x variando linearmente com y e z . Assim, a variação linear das deformações ao longo da seção transversal do bloco pode ser representada por este elemento.

Por outro lado, apesar de este comportamento ser muito melhor que o elemento tetraédrico, algumas limitações devem ser observadas. A análise da expressão de ϵ_x indica que as deformações na direção x variam linearmente com y e z , porém independem de x . Isto quer dizer que para um elemento hexaédrico linear, como representado na figura 5.17, para uma dada posição definida y e z ao longo do elemento, independente da posição x em que se encontre, as deformações são constantes ao longo de todo o comprimento do elemento. Assim, este elemento deve merecer alguns cuidados em sua utilização também. Em uma região em que ocorra uma acentuada variação da deformação ϵ_x ao longo do eixo x do elemento, deve-se evitar a definição de um elemento muito comprimido em relação à sua altura, pois a deformação ϵ_x será constante na direção x .

c) Cálculo das Tensões

O Cálculo das Tensões decorre imediatamente a partir do Cálculo das Deformações. Podemos utilizar as relações do Quadro VIII para esse fim, tal como já fizemos para o Elemento Tetraédrico. Devemos apenas substituir as expressões apropriadas, que fornecem as deformações no domínio do elemento hexaédrico. Evidentemente, como já sabemos que as deformações variam linearmente dentro do elemento, o mesmo deverá ocorrer com as tensões.

Mais uma vez, como podemos perceber facilmente, podemos fazer uma analogia direta entre o Elemento Sólido Hexaédrico Linear e o Elemento de Estado Pano de Tensões Retangular Linear. Em termos figurados, poderíamos dizer que o "Elemento Hexaédrico Linear faz no espaço, aquilo que o Retângulo linear faz no plano".

Se quiséssemos calcular numericamente as tensões em um ponto dentro do elemento, poderíamos utilizar a equação (u) do Quadro VIII, utilizando a Matriz de Elasticidade [D] dada pela equação (x) do mesmo Quadro. A título de exemplo, vamos calcular apenas a tensão σ_x em qualquer ponto do elemento. Assim, efetuando o produto matricial $\{\sigma(x,y,z)\} = [D] \cdot \{\epsilon(x,y,z)\}$, a tensão σ_x será dada por:

$$\sigma_x = \frac{E \cdot (1-v)}{(1+v) \cdot (1-2v)} (\epsilon_x + \frac{v}{1-v} \cdot \epsilon_y + \frac{v}{1-v} \cdot \epsilon_z)$$

$$\sigma_x = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \left\{ C_2 + C_5 \cdot y + C_6 \cdot z + C_8 \cdot y \cdot z + \left(\frac{v}{1-v}\right) \cdot (C_{11} + C_{13} \cdot x + C_{15} \cdot z + C_{16} \cdot x \cdot z) + \left(\frac{v}{1-v}\right) \cdot (C_{20} + C_{22} \cdot x + C_{23} \cdot y + C_{24} \cdot x \cdot y) \right\} \quad (5.50)$$

A análise da expressão (5.50) anterior permite-nos observar que embora as deformações ϵ_x variem apenas com y e z e não com x , as tensões σ_x variam com x , y e z . Entretanto, é importante interpretar o significado desta conclusão, e que apresenta semelhança com o caso do elemento retangular de estado plano de tensões linear, já estudado. Esta variação da tensão σ_x com x não se deve à ação direta da variação de ϵ_x ao longo de x , pois este elemento não permite calcular essa variação, mas devido à ação da contração lateral provocada por ϵ_y e ϵ_z . Assim, em uma região em que ocorra uma acentuada variação da tensão σ_x ao

longo do eixo x do elemento, deve-se evitar a definição de um elemento muito comprimido em relação à sua altura, como indica a figura 5.17.

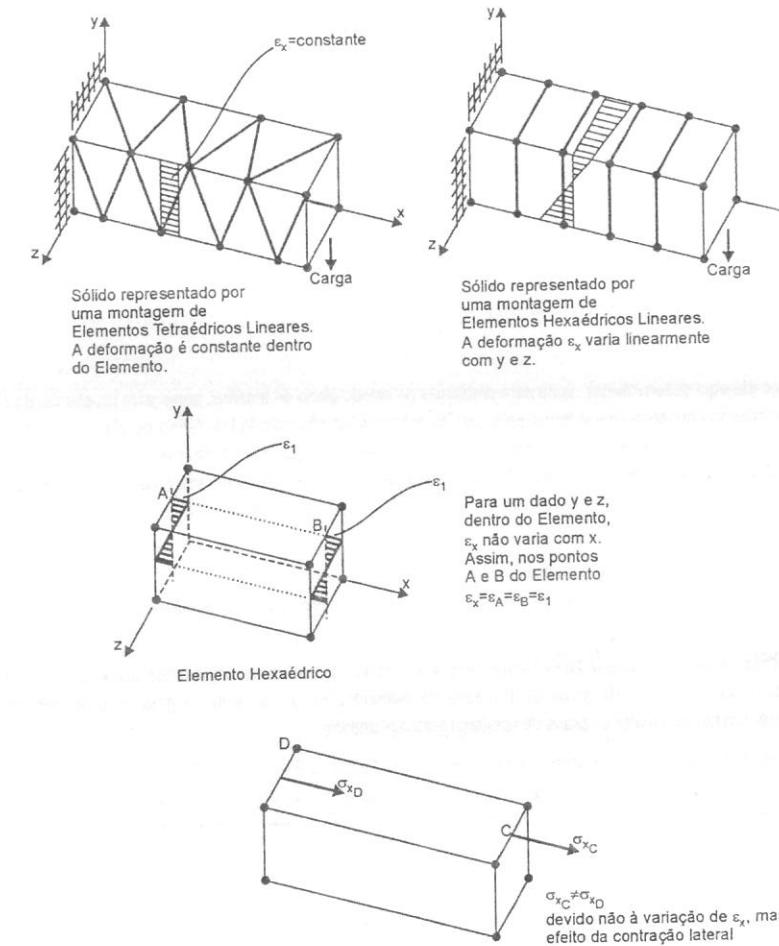


Figura 5.17 - Elemento Sólido Hexaédrico Linear. Cálculo das deformações, tensões e comparação com o Elemento Sólido Tetraédrico Linear.

Observações a respeito da utilização do Elemento Sólido Hexaédrico Linear

O teste de convergência efetuado anteriormente para o caso do Estado Plano de Tensões poderia ser repetido para o Elemento Sólido ora estudado; o procedimento seria semelhante. Não o faremos, pois a idéia geral já foi estabelecida, e não traria nenhuma novidade. A discussão da utilização de uma *Malha Gradual*, isto é, uma malha em que os elementos variem gradualmente de tamanho, continua válida. Nas regiões em que ocorram variações acentuadas do panorama de tensões, deve-se adotar uma malha mais refinada. Novamente está presente de modo bastante significativo a formulação do elemento.

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

A determinação da Matriz de Rígidez do Elemento, à semelhança dos casos estudados anteriormente, constitui uma mera repetição dos passos já estudados no item 3 deste capítulo, efetuando as substituições das funções de interpolação adotadas para os valores nodais, determinando as constantes desconhecidas e, posteriormente, os cálculos dos Trabalhos Externo e Interno e a Condição de Equivalência. À medida que os elementos apresentam um número maior de graus de liberdade, essa tarefa torna-se extremamente trabalhosa; é importante então, mais uma vez, mencionarmos que essa tarefa é efetuada pelo computador. Pelo fato de constituir uma mera manipulação de uma enorme quantidade de dados, não apresentará nenhuma novidade importante no estudo conceitual do elemento. Assim, para este elemento e para a maioria dos elementos que estudaremos daqui em diante, não desenvolveremos a determinação de sua matriz de rigidez, mas apenas as formulações do campo de deslocamentos, deformações e tensões no elemento, o que constitui para o engenheiro de aplicação do Método os aspectos fundamentais e obrigatórios.

5.5.6. FORMULAR O ELEMENTO DE ESTADO PLANO DE TENSÕES TRIANGULAR PARABÓLICO

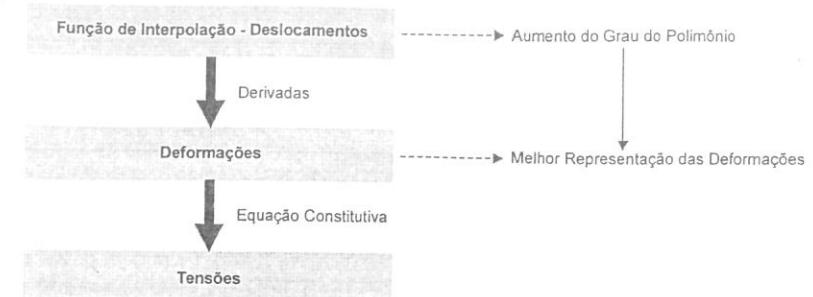
O estudo dos elementos até aqui desenvolvidos, tanto para problemas de estado plano de tensões, como para problemas de estado triaxial de tensões, permitiu-nos observar que a forma pela qual as deformações são calculadas dentro do elemento finito estava intimamente relacionada à função proposta para o cálculo dos deslocamentos, pois as deformações nestes dois casos são calculadas a partir das primeiras derivadas dos deslocamentos. Por exemplo, o fato de o elemento triangular linear de estado plano de tensões calcular as deformações constantes decorreu de a função que exprime os deslocamentos ser representada por um polinômio do primeiro grau, cuja primeira derivada é constante.

Uma melhor representação do campo de deformações dentro do elemento só seria possível se a função que exprime os deslocamentos tivesse um grau maior, ou produto das variáveis de sorte que a sua derivada também melhor representasse o campo de deformações.

Porém, uma função polinomial de maior grau também requer um maior número de coeficientes desconhecidos, e o número destes está intimamente relacionado ao número de graus de liberdade do elemento. Isto é, aumentar o grau do polinômio significa necessariamente requerer um número maior de graus de liberdade para o elemento.

O número de graus de liberdade por nó já está definido pelos requisitos da Teoria da Elasticidade. Em problemas de estado plano de tensões são dois, em problemas de estado triaxial de tensões são três. Assim, o requisito de **aumentar o número de graus de liberdade do elemento** só poderá ser atingido **se aumentarmos o número de nós do elemento finito**.

Para um Elemento Triangular, como os vértices do triângulo já constituem nós do elemento, o número de graus de liberdade só poderá ser aumentado se admitirmos **nós intermediários entre os vértices**. Dessa forma, o número de graus de liberdade aumentará substancialmente para o elemento com a colocação desses nós adicionais, e a função de interpolação será mais “rica” na representação do campo de deslocamentos, e a suas derivadas, isto é, as deformações, também. Esquematicamente, representamos em seguida essa idéia, que será generalizada para os demais elementos a serem estudados, com o intuito de melhorar os desempenhos dos elementos até aqui introduzidos. Assim:



A figura 5.18 representa uma chapa plana, sob ação de forças agindo apenas no seu plano, portanto sob condições de **Estado Plano de Tensões**, como já sabemos. A chapa contínua pode ser subdividida artificialmente em um certo número finito de **Elementos Triangulares**, conectados apenas nos seus nós. Neste caso, o Elemento admite um nó intermediário em cada lado, o qual será compartilhado com o elemento adjacente. O estudo do comportamento físico do elemento triangular pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, tal como já fizemos para todos os elementos estudados até agora. **O Elemento Finito Triangular neste caso tem seis nós**.

O movimento dos nós do elemento pode ser descrito pelos componentes u e v , pois a definição do campo de deslocamentos em uma chapa sob **Estado Plano de Tensões** é efetuada por **dois componentes de deslocamentos**, segundo a Teoria da Elasticidade revisada no Quadro VIII. Portanto, esse Elemento apresenta **2 Graus de Liberdade por Nô**. Como tem **seis nós**, esse elemento terá **12 Graus de Liberdade**. Assim, a Matriz Coluna das Forças nodais tem dimensão 12×1 , e da mesma forma, a Matriz coluna dos deslocamentos nodais terá dimensão 12×1 e, como consequência, a **Matriz de Rígidez terá dimensão 12×12** . Assim:

$$\{f\}_{12 \times 1} = [k]_{12 \times 12} \cdot \{\delta\}_{12 \times 1} \quad (5.51)$$

Seguindo, portanto, as orientações introduzidas no item 5.1, vamos estabelecer os **três passos fundamentais**.

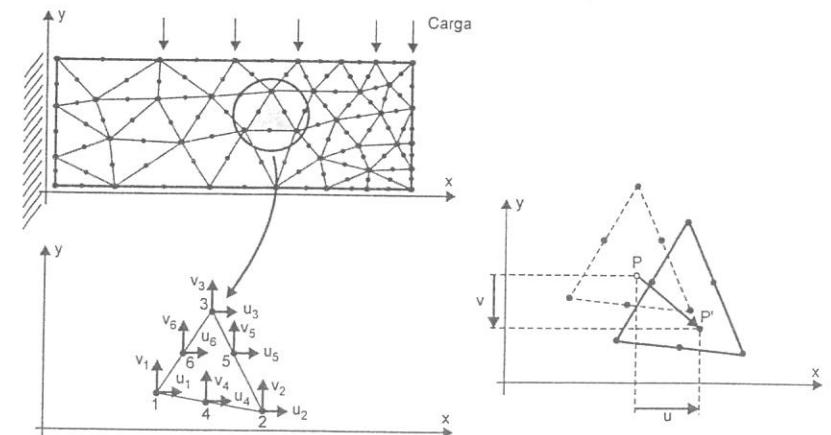


Figura 5.18 – Elemento de Estado Plano de Tensões Triangular Parabólico.

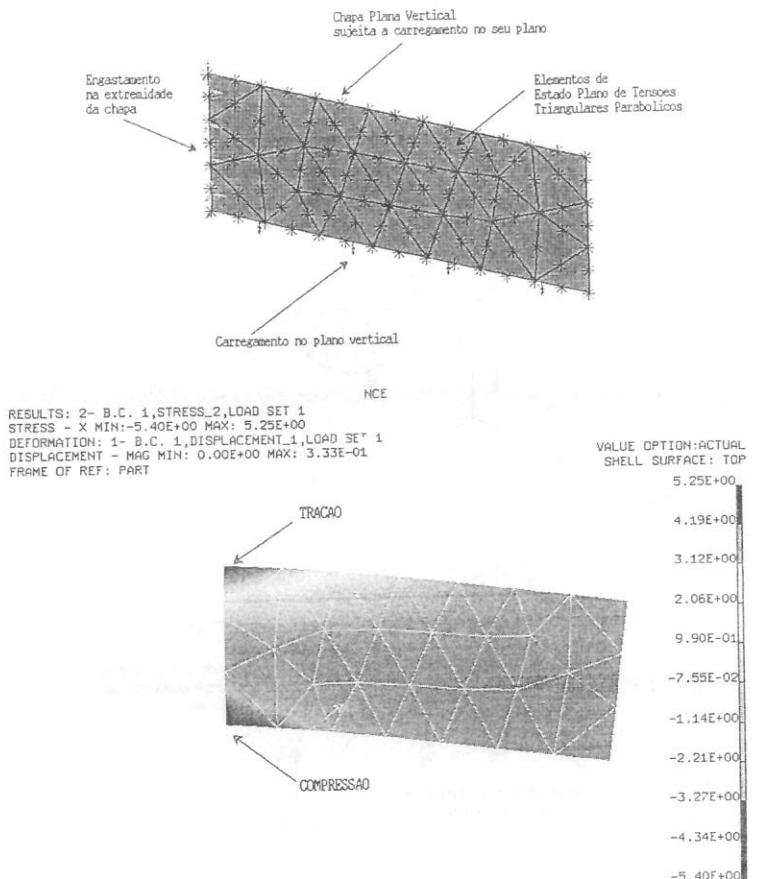
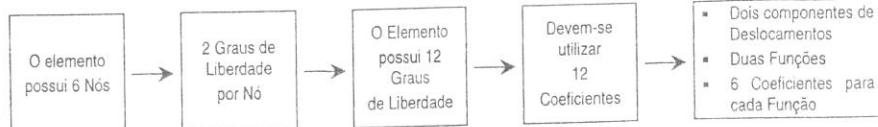


Figura 5.18 – Continuação – Uma visão do exemplo anterior no computador. Veja esta figura colorida no Apêndice A. Exemplo de Chapa Vertical discretizada por intermédio de Elementos Triangulares Parabólicos de Estado Plano de Tensões. A flexão da chapa no seu próprio plano gera tensões de tração e compressão nas extremidades da chapa. A formulação dos elementos triangulares parabólicos foi desenvolvida no texto. Nesse exemplo foi resolvida a mesma chapa considerada no exemplo do elemento retangular linear de estado plano de tensões. Os resultados obtidos nos dois modelos são consistentes.

a) Definição das Funções de Interpolação

A definição das funções de interpolação é efetuada utilizando o mesmo raciocínio dos Elementos até aqui formulados. Assim, resumidamente, temos:



Assim:

$$u(x, y) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y + C_5 \cdot x^2 + C_6 \cdot y^2$$

$$v(x, y) = C_7 + C_8 \cdot x + C_9 \cdot y + C_{10} \cdot x \cdot y + C_{11} \cdot x^2 + C_{12} \cdot y^2 \quad (5.52)$$

Deve-se notar que, à semelhança das formulações anteriores, nenhuma preferência foi dada para as direções x e y , e dessa forma os coeficientes são distribuídos nas funções de forma a se dar igual importância à participação das duas variáveis. Adicionalmente, outro aspecto a se notar consiste no crescimento dos expoentes das variáveis. Inicialmente, esgotou-se a representação dos termos do primeiro grau de forma equilibrada, para em seguida adotar os expoentes de ordem mais alta, neste caso, segundo grau. Esta escolha tem um importante significado físico, que comentaremos adiante, após formularmos os diversos elementos que constarão da "biblioteca" que estamos montando. A análise destas expressões permite observar que:

O campo de deslocamentos u e v varia de acordo com uma função do segundo grau, por este motivo o elemento é chamado ELEMENTO DE ESTADO PLANO DE TENSÕES PARABÓLICO.

Este elemento, assim como os elementos a serem definidos com o polinômio de interpolação em grau superior ao linear, é normalmente chamado de ELEMENTO DE ALTA ORDEM.

b) Cálculo das deformações

Sabemos que:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Assim, calculando as derivadas parciais das funções u e v que fornecem os deslocamentos em todos os pontos do elemento finito, teremos:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 + C_4 \cdot y + 2 \cdot C_5 \cdot x$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = C_9 + C_{10} \cdot x + 2 \cdot C_{12} \cdot y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_3 + C_4 \cdot x + 2 \cdot C_6 \cdot y + C_8 + C_{10} \cdot y + 2 \cdot C_{11} \cdot x$$

As deformações acima calculadas variam linearmente com x e y .

Note que o Elemento de Estado Plano de Tensões Triangular Parabólico apresenta um comportamento melhorado em relação aos elementos de estado plano de tensões anteriormente formulados. As deformações variam ponto a ponto dentro do triângulo.

Porém, deve-se notar que um modelo discretizado por elementos desse tipo tende a apresentar um número maior de nós. Deve-se então sempre discutir a conveniência do uso deste elemento ou do elemento retangular linear, levando-se em conta as limitações deste último, que podem ser superadas com uma escolha adequada do comprimento do elemento, pelos motivos já anteriormente citados.

c) Cálculo das Tensões

O Cálculo das Tensões decorre imediatamente a partir do Cálculo das Deformações. Podemos utilizar as relações do Quadro VIII para esse fim, tal como já fizemos para o Elementos anteriores. Devemos apenas substituir as expressões apropriadas, que fornecem as deformações no domínio do elemento

Se quiséssemos calcular numericamente as tensões em um ponto dentro do elemento, poderíamos utilizar a equação (l) do Quadro VIII. Assim:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \text{ efetuando o produto matricial, teremos:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-v^2} (\epsilon_x + v \cdot \epsilon_y) = \frac{E}{1-v^2} \{C_2 + C_4 \cdot y + 2 \cdot C_5 \cdot x + v(C_9 + C_{10} \cdot x + 2 \cdot C_{12} \cdot y)\} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-v^2} (v \cdot \epsilon_x + \epsilon_y) = \frac{E}{1-v^2} \{v(C_2 + C_4 \cdot y + 2 \cdot C_5 \cdot x) + C_9 + C_{10} \cdot x + 2 \cdot C_{12} \cdot y\} \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1-v^2} \cdot \left(\frac{1-v}{2}\right) \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{1-v^2} \cdot \left(\frac{1-v}{2}\right) \cdot (C_3 + C_4 \cdot x + 2 \cdot C_6 \cdot y + C_8 + C_{10} \cdot y + 2 \cdot C_{11} \cdot x) \end{aligned} \quad (5.54)$$

A análise das expressões (5.54) anteriores permite-nos observar que as tensões σ_x variam com x e y , o mesmo ocorrendo com as tensões σ_y e τ_{xy} . É importante interpretar o significado desta conclusão, da mesma forma que tínhamos efetuado para o elemento retangular linear de estado plano de tensões. A variação da tensão σ_x com x deveu-se neste caso à ação direta da variação de ϵ_x ao longo de x , pois este elemento permite calcular essa variação, bem como devido à ação da contração lateral provocada por ϵ_y . Assim, em uma região em que ocorra uma acentuada variação da tensão σ_x ao longo do eixo x do elemento, o elemento triangular de estado plano de tensões parabólico pode representar essa variação. Evidentemente, em função do gradiente de tensões presente, o estudo do tamanho adequado de elemento sempre merecerá cuidados ao definir a malha em elementos finitos, pois a variação da tensão no domínio deste elemento é linear.

5.5.7. FORMULAR O ELEMENTO SÓLIDO TETRAÉDRICO PARABÓLICO

A figura 5.19 representa um Corpo Sólido, sob ação de forças agindo nas três direções x , y e z , portanto sob condições de **Estado Triaxial de Tensões**, como vimos no Quadro VIII. O corpo sólido contínuo pode ser subdividido artificialmente em um certo número finito de **Elementos Sólidos**, conectados apenas nos seus nós. Neste caso, a montagem de elementos é constituída por elementos sólidos na forma de "Tetraedros", porém com **um nó intermediário nas arestas entre dois nós**.

O motivo da colocação desses nós intermediários se justifica pelos mesmos motivos já discutidos no elemento triangular parabólico, isto é, aumentar o número de graus de liberdade do elemento, de modo a definir uma função de interpolação de maior grau, permitindo um cálculo mais acurado da deformações dentro do elemento e, como consequência, das tensões. O **Elemento Sólido Tetraédrico Parabólico tem dez nós**, e apresenta **3 Graus de Liberdade por Nô**, portanto terá **30 Graus de Liberdade**. Assim, a Matriz Coluna das Forças nodais tem dimensão 30×1 e, da mesma forma, a Matriz coluna dos deslocamentos nodais terá dimensão 30×1 e, como consequência, a **Matriz de Rigidez terá dimensão 30×30** . Assim:

$$\{f\}_{30 \times 1} = [k]_{30 \times 30} \cdot \{\delta\}_{30 \times 1} \quad (5.55)$$

Seguindo, portanto, as orientações introduzidas no item 5.1, vamos estabelecer inicialmente **os três passos fundamentais**.

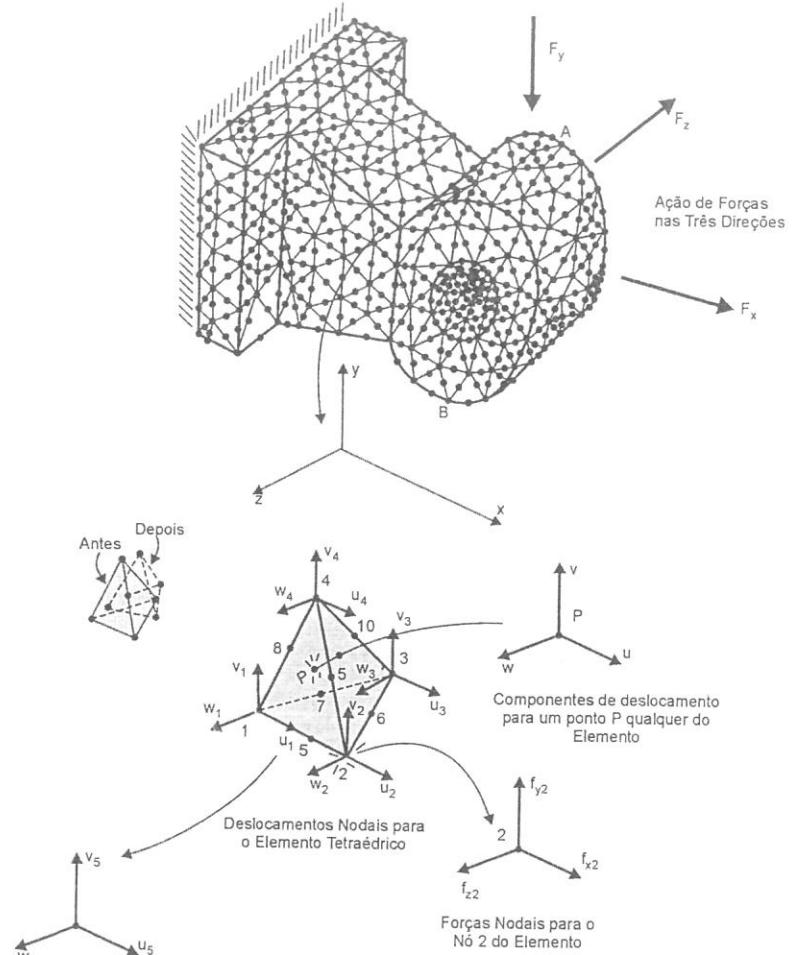


Figura 5.19 – Elemento Sólido Tetraédrico Parabólico.

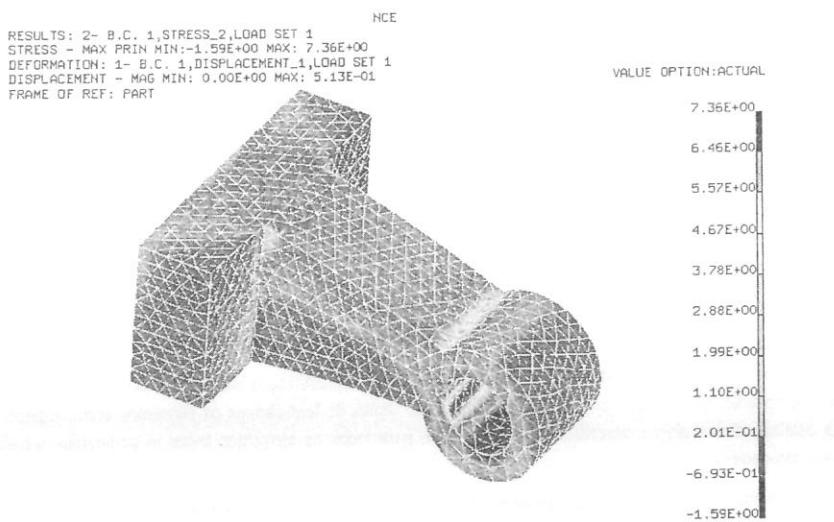
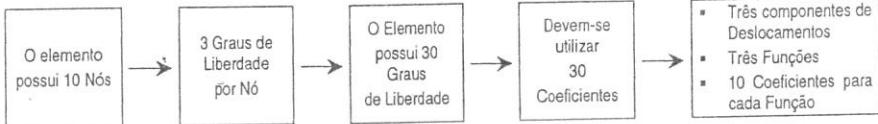


Figura 5.19 – Continuação -Uma visão do exemplo anterior no computador. Veja esta figura colorida no Apêndice A. O Modelo do Componente analisado anteriormente no estudo dos elementos sólidos tetraédricos lineares foi resolvido novamente com o auxílio de Elementos Sólidos Tetraédricos Parabólicos. O tamanho dos elementos foi mantido, porém a formulação do elemento neste caso é muito melhor que o elemento linear. Observe que na região do furo, a tensão obtida é praticamente o dobro daquela obtida com o elemento linear. Este exemplo prático oferece mais uma vez, de forma clara, a importância da escolha do elemento ao gerar a malha em elementos finitos. Neste caso, ficam mais uma vez evidentes as limitações do elemento sólido tetraédrico linear, que é um elemento de tensão Constante. Assim, as variações de tensão ao longo da espessura da peça na região furo são muito melhor determinadas com os elementos parabólicos. A justificativa precisa destas observações está na formulação do elemento que ora estamos estudando.

a) Definição das Funções de Interpolação

A definição das funções de interpolação é efetuada utilizando o mesmo raciocínio do Elemento Tetraédrico Linear. Assim, resumidamente, temos:



Assim:

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot z + C_5 \cdot x \cdot y + C_6 \cdot x \cdot z + C_7 \cdot y \cdot z + C_8 \cdot x^2 + C_9 \cdot y^2 + C_{10} \cdot z^2 \\
 v(x,y,z) &= C_{11} + C_{12} \cdot x + C_{13} \cdot y + C_{14} \cdot z + C_{15} \cdot x \cdot y + C_{16} \cdot x \cdot z + C_{17} \cdot y \cdot z + C_{18} \cdot x^2 + C_{19} \cdot y^2 + C_{20} \cdot z^2 \\
 w(x,y,z) &= C_{21} + C_{22} \cdot x + C_{23} \cdot y + C_{24} \cdot z + C_{25} \cdot x \cdot y + C_{26} \cdot x \cdot z + C_{27} \cdot y \cdot z + C_{28} \cdot x^2 + C_{29} \cdot y^2 + C_{30} \cdot z^2
 \end{aligned} \quad (5.56)$$

Deve-se notar que, à semelhança dos elementos anteriormente formulados, nenhuma preferência foi dada às direções x, y e z. A análise destas expressões permite observar que:

O campo de deslocamentos u , v e w varia de acordo com uma função do segundo grau, por este motivo o elemento é chamado ELEMENTO SÓLIDO TETRAÉDRICO PARABÓLICO.

Este elemento, com o polinômio de interpolação em grau superior ao linear, é normalmente chamado de ELEMENTO DE ALTA ORDEM, como já sabemos.

b) Cálculo das deformações

Do Quadro VIII em que fizemos uma breve revisão da Teoria da Elasticidade, podemos calcular as deformações em qualquer ponto dentro do elemento finito sólido, dentro das hipóteses das Funções de Interpolação adotadas. Assim, das equações (n) a (q), do Quadro VIII, temos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

É importante relembrar que estas funções contêm derivadas parciais. Por exemplo, nas derivadas em relação a x , os termos em y e z serão considerados como constantes. Assim, efetuando as derivações das funções u , v e w que fornecem os deslocamentos em todos os pontos do elemento finito, teremos:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 + C_5 \cdot y + C_6 \cdot z + 2 \cdot C_8 \cdot x \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = C_{13} + C_{15} \cdot x + C_{17} \cdot z + 2 \cdot C_{19} \cdot y \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = C_{24} + C_{26} \cdot x + C_{27} \cdot y + 2 \cdot C_{30} \cdot z \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_3 + C_5 \cdot z + 2 \cdot C_9 \cdot y + C_{12} + C_{15} \cdot y + C_{16} \cdot z + 2 \cdot C_{18} \cdot x \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = C_4 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + 2 \cdot C_{10} \cdot z + C_{22} + C_{25} \cdot y + C_{26} \cdot z + 2 \cdot C_{28} \cdot x \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = C_{14} + C_{16} \cdot x + C_{17} \cdot y + 2 \cdot C_{20} \cdot z + C_{23} + C_{25} \cdot x + C_{27} \cdot z + 2 \cdot C_{29} \cdot y
 \end{aligned} \quad (5.57)$$

As deformações acima calculadas variam linearmente com x , y e z .

Note que o Elemento Sólido Tetraédrico Parabólico apresenta um comportamento melhorado em relação aos elementos sólidos anteriormente formulados. As deformações variam ponto a ponto dentro do tetraedro.

Porém, deve-se notar que um modelo discretizado por elementos desse tipo tende a apresentar um número maior de nós. Muitos componentes mecânicos, tais como: suportes fundidos que apresentam apreciáveis variações de espessuras, carcaças, blocos de motor, etc., são discretizados utilizando o Elemento Tetraédrico Parabólico, em função da boa representação do campo de deformações dentro do elemento, pelos motivos anteriormente citados e, como consequência, uma boa representação da distribuição de tensões.

A geração automática de malhas em elementos finitos, disponíveis atualmente nos "softwares" de análise, permite em geometrias complicadas gerar malhas de Elementos Tetraédricos, pois devido à versatilidade de geometria, qualquer corpo sólido ou suas diversas partes podem ser representados como um conjunto de Tetraedros, como já sabemos. Este elemento é, portanto, bastante utilizado nas aplicações práticas em que o cálculo de deformações e tensões requer resultados acurados.

c) Cálculo das Tensões

O Cálculo das Tensões decorre imediatamente a partir do Cálculo das Deformações. Podemos utilizar as relações do Quadro VIII para esse fim, tal como já fizemos para os Elementos Sólidos anteriormente estudados. Devemos apenas substituir as expressões apropriadas, que fornecem as deformações no domínio do elemento tetraédrico parabólico, agora por nós determinadas.

Mais uma vez, como podemos perceber facilmente, é interessante fazer uma analogia direta entre o Elemento Sólido Tetraédrico Parabólico e o Elemento de Estado Pano de Tensões Triangular Parabólico. Em termos figurados (já que em um caso temos um estado plano de tensões e em outro um estado triaxial de tensões, que são situações totalmente diferentes!!!) poderíamos dizer que o "Elemento Tetraédrico Parabólico faz no espaço, aquilo que o Triângulo Parabólico faz no plano".

Se quiséssemos calcular numericamente as tensões em um ponto dentro do elemento, poderíamos utilizar a equação (u) do Quadro VIII, utilizando a Matriz de Elasticidade [D] dada pela equação (x) do mesmo Quadro. A título de exemplo, vamos calcular apenas a tensão σ_x em qualquer ponto do elemento. Assim, efetuando o produto matricial $\{\sigma(x,y,z)\} = [D] \cdot \{\epsilon(x,y,z)\}$, a tensão σ_x será dada por:

$$\sigma_x = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \left(\epsilon_x + \frac{v}{1-v} \cdot \epsilon_y + \frac{v}{1-v} \cdot \epsilon_z \right) \quad (5.58)$$

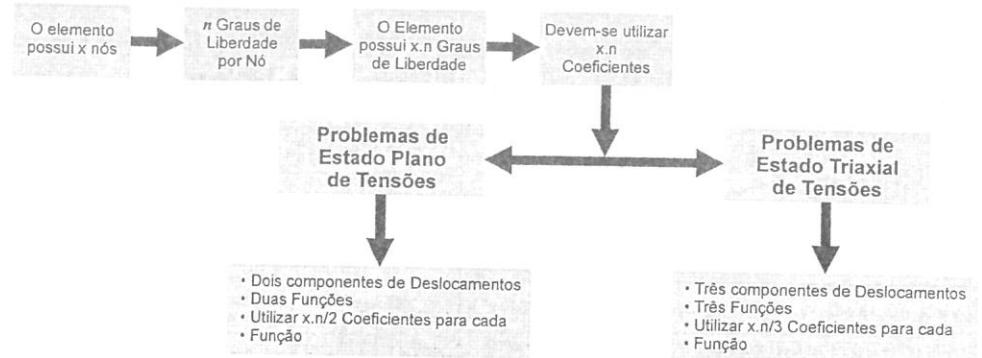
$$\sigma_x = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \cdot \left\{ C_2 + C_5 \cdot y + C_6 \cdot z + 2C_8 \cdot x + \frac{v}{1-v} (C_{13} + C_{15} \cdot x + C_{17} \cdot z + 2C_{19} \cdot y) - \frac{v}{1-v} (C_{24} + C_{26} \cdot x + C_{27} \cdot y + 2C_{30} \cdot z) \right\}$$

A análise da expressão (5.58) anterior permite-nos observar que as tensões σ_x variam com x , y e z , o mesmo ocorrendo com as tensões σ_y , σ_z e com as tensões de cisalhamento. É importante interpretar o significado desta conclusão, da mesma forma que tínhamos efetuado para os elementos sólidos anteriormente estudados. A variação da tensão σ_x com x deveu-se neste caso à ação direta da variação de ϵ_x ao longo de x , pois este elemento permite calcular essa variação, bem como devido à ação da contração lateral provocada por ϵ_y e ϵ_z . Assim, em uma região em que ocorre uma acentuada variação da tensão σ_x ao longo do eixo x do elemento, o elemento sólido tetraédrico parabólico pode representar essa variação. Evidentemente, em função do gradiente de tensões presente, o estudo do tamanho adequado de elemento sempre merecerá cuidados ao definir a malha em elementos finitos, pois a variação da tensão no domínio deste elemento é linear.

5.5.8. FORMULAR OS ELEMENTOS

- *Estado Plano de Tensões Retangular Parabólico.*
- *Sólido Hexaédrico Parabólico.*

A formulação destes elementos seguirá todos os procedimentos estabelecidos até agora. Deve-se identificar o número de graus de liberdade por nó do elemento, em função de ser um problema de estado plano de tensões ou estado triaxial de tensões. Os elementos lineares só apresentam nós nos vértices; os parabólicos, um nó intermediário e os elementos cúbicos, dois nós intermediários. Os elementos lineares apresentam funções de interpolação do primeiro grau, os elementos parabólicos, funções do segundo grau, e os elementos cúbicos, do terceiro grau. A figura 5.20 resume, na forma de uma tabela, as características de cada um dos elementos que se deseja formular, seguindo o raciocínio idêntico a todos os elementos bidimensionais e tridimensionais até aqui definidos. De forma geral, podemos resumir o *Procedimento Padrão* adotado na formulação dos elementos finitos até aqui estudados, e que serão repetidos nos exemplos seguintes, a saber:



Outra questão que surge naturalmente refere-se às variáveis utilizadas na representação matemática do campo de deslocamentos dentro do elemento finito, bem como o grau do polinômio utilizado. Antes de formularmos os elementos acima especificados, é conveniente estabelecermos alguns conceitos gerais que valem para todos os elementos finitos, e poderemos visualizar nas formulações já estudadas.

As variáveis que acompanham os coeficientes desconhecidos foram atribuídas até agora utilizando alguns conceitos que estavam intimamente relacionados ao entendimento do problema físico objeto de análise. Por exemplo:

- Nos *elementos unidimensionais*, o deslocamento depende da posição em que o ponto se encontra no elemento (Vigas, Treliças), portanto apenas com uma coordenada x essa posição é definida. Então, a função é de uma variável.
- Nos *elementos bidimensionais*, o deslocamento depende da posição em que o ponto se encontra no elemento (Chapas), portanto necessitamos de duas coordenadas x e y . Então, a função é de duas variáveis.
- Nos *elementos tridimensionais*, o deslocamento depende da posição em que o ponto se encontra no elemento (Sólidos), portanto necessitamos de três coordenadas x , y e z . Então, a função é de três variáveis.

Assim, para os elementos anteriormente mencionados, vamos representar apenas a formulação do campo de deslocamentos. As deformações serão obtidas por intermédio das suas derivadas primeiras, como já sabemos, e as tensões, pela aplicação das equações constitutivas, tal como já fizemos em todos os casos anteriores. Representaremos em cada caso apenas o componente de deslocamento em x , isto é, o componente u , já que para os outros componentes as equações são semelhantes, apenas que os coeficientes têm subíndices diferentes.

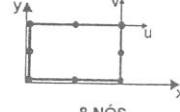
Elemento	Nº de Graus de Liberdade e Nº de Coeficientes
Estado Plano de Tensões Retangular Parabólico  8 NÓS	Nº de graus de Liberdade por Nó = 2 Nº total de Graus de Liberdade = 16 Nº de Coeficientes = 16 Duas Funções 8 Coeficientes por Função
Funções de Interpolação para os Deslocamentos	Deformações
$u = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot xy + C_5 \cdot x^2 + C_6 \cdot y^2 + C_7 \cdot x^2y + C_8 \cdot xy^2$	$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 + C_4 \cdot y + 2 \cdot C_5 \cdot x + 2 \cdot C_7 \cdot xy + C_8 y^2$

Figura 5.20 – Formulação dos Elementos Finitos (continua).

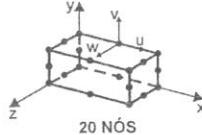
Elemento	Nº de Graus de Liberdade e Nº de Coeficientes
Sólido Hexaédrico Parabólico 	Nº de graus de Liberdade por Nô = 3 Nº total de Graus de Liberdade = 60 Nº de Coeficientes = 60 Três Funções 20 Coeficientes por Função
Funções de Interpolação para os Deslocamentos	Deformações
$u = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot z + C_5 \cdot xy + C_6 \cdot xz + C_7 \cdot yz + C_8 \cdot x^2 + C_9 \cdot y^2 + C_{10} \cdot z^2 + C_{11} \cdot xyz + C_{12} \cdot x^2y + C_{13} \cdot x^2z + C_{14} \cdot y^2z + C_{15} \cdot xz^2 + C_{16} \cdot y^2z + C_{17} \cdot yz^2 + C_{18} \cdot x^3 + C_{19} \cdot y^3 + C_{20} \cdot z^3$	$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 + C_5 \cdot y + C_6 \cdot z + 2 \cdot C_8 \cdot x + C_{11} \cdot yz + 2 \cdot C_{12} \cdot xy + 2 \cdot C_{13} \cdot xz + C_{14} \cdot y^2 + C_{15} \cdot z^2 + 3 \cdot C_{18} \cdot x^2$

Figura 5.20 – Continuação - Formulação dos Elementos Finitos.

5.5.9. FORMULAR O ELEMENTO DE PLACA RETANGULAR LINEAR

5.5.9.1. INTRODUÇÃO

Já vimos anteriormente que as chapas podem estar sujeitas a *cargas laterais*, isto é, cargas perpendiculares ao seu plano, exibindo comportamento de flexão, o que resulta em deslocamentos perpendiculares ao seu plano. Tal comportamento é chamado de *Comportamento de Placa*. Por outro lado, quando sujeita apenas a *forças agindo paralelamente a seu plano*, sem a presença de cargas laterais, a chapa apresenta deslocamentos que estão no seu próprio plano, caracterizando o *Estado Plano de Tensões* ("Plane Stress"), para o qual já formulamos diversos elementos finitos.

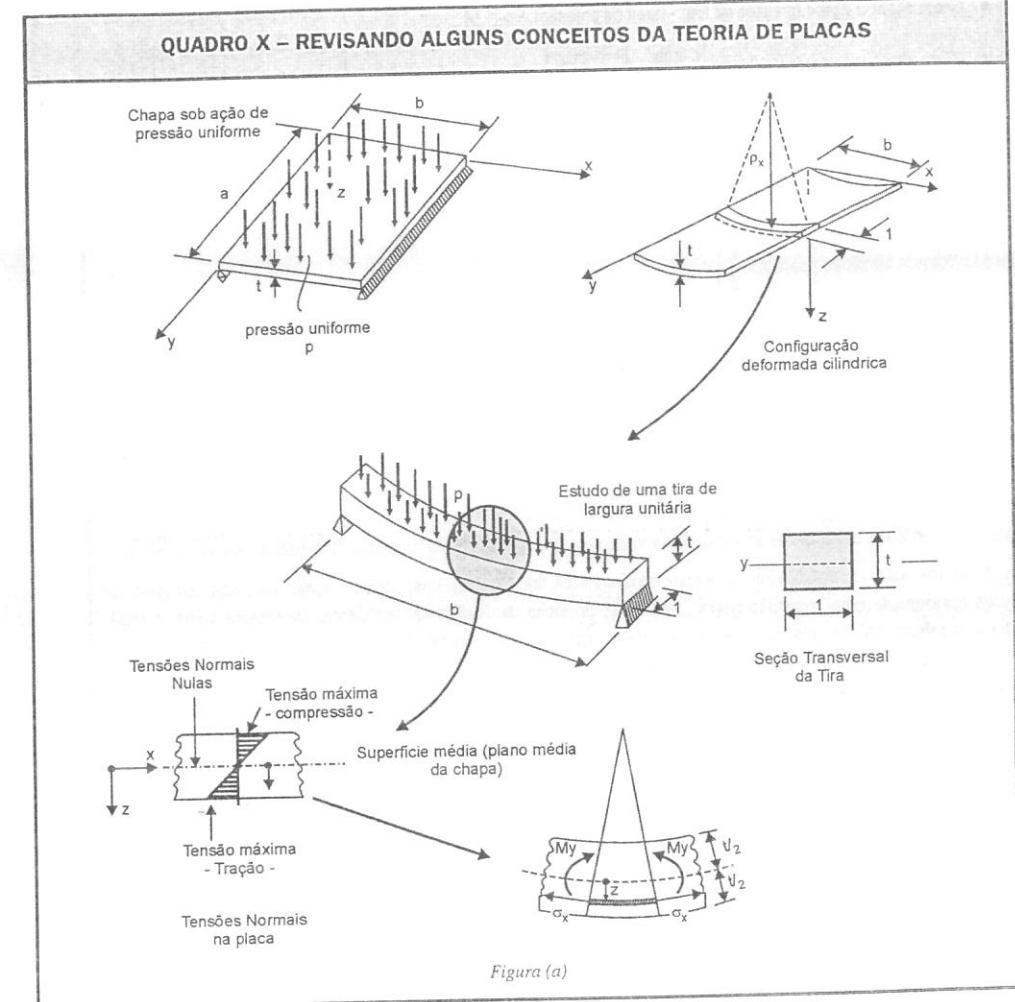
À semelhança do estudo efetuado para o Elemento de Viga, em que o comportamento do Elemento sob a ação de Cargas Axiais era independente do comportamento sob Carregamento de Flexão, o estudo do comportamento das chapas sob ação de Cargas no seu próprio plano, e cargas laterais, pode também ser tratado considerando esses efeitos de forma independente, dentro das hipóteses das pequenas deflexões, e que estão dentro do interesse da Análise Linear por Elementos Finitos.

O estudo do comportamento das *chapas em flexão* pode ser revisado por intermédio de um exemplo simples, que nos forneça os subsídios necessários para formular o *Elemento Finito de Placa*. Na figura (a) do *Quadro X* é representada uma chapa sujeita à ação de *carga lateral*, na forma de uma pressão p uniformemente distribuída sobre a chapa. O estudo da flexão de uma *chapa longa*, isto é, chapa cujo lado maior tem dimensão consideravelmente maior que o lado menor ($a >> b$), pode ser feito estabelecendo algumas semelhanças com a teoria de vigas. A configuração deformada de uma chapa longa, nas condições de carregamento de pressão constante, a considerável distância das bordas menores, tem a forma cilíndrica ("flexão cilíndrica de placas").

Se imaginarmos a chapa sendo constituída de diversas tiras de largura unitária, adjacentes umas às outras, essas tiras apresentarão comportamentos idênticos. Poderemos então imaginar cada uma dessas tiras como uma viga de comprimento igual à largura da chapa, sob carga uniformemente distribuída, portanto sob flexão. O estudo de uma dessas tiras, como uma viga de seção retangular de largura unitária e altura igual à espessura da chapa, irá nos permitir tirar importantes conclusões do comportamento das placas, e efetuar em seguida importantes generalizações.

Ao calcular as tensões normais devido à flexão dessa tira de largura unitária, o procedimento é semelhante àquele desenvolvido no estudo da teoria de vigas; a seção transversal dessa viga de largura unitária se mantém plana durante a flexão, apenas apresentando rotação em relação ao eixo neutro da barra.

À semelhança da *linha neutra* já considerada no caso das vigas, a superfície média da chapa representa a sua "superfície neutra", desde que não haja ação de carregamento paralelo ao plano da chapa, como um estado plano de tensões. Na superfície média da chapa não ocorrem deformações, sendo estas máximas nas superfícies externas da chapa. À semelhança do comportamento das vigas, podem-se estabelecer as relações entre as deformações e a curvatura da chapa, e as *relações entre Momento Fletor e Curvatura*. O conhecimento dessas relações é fundamental para estabelecer a *Formulação do Elemento de Placa*. Essas relações são revisadas no *Quadro X*.



QUADRO X – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE PLACAS (CONTINUAÇÃO)

Considerando a tira de largura unitária como uma viga, teremos:

- Momento de Inércia em relação à Linha Neutra: $I_y = \frac{1 \cdot t^3}{12}$
- Carga sobre a viga = (pressão na tira) · (área de pressão) = $p \cdot (1 \cdot b)$
- Carga distribuída na viga = $q = \frac{\text{carga}}{\text{comprimento}} = \frac{p \cdot 1 \cdot b}{b} = p \cdot (\text{numericamente igual ao valor da pressão})$
- Momento Fletor Máximo em Viga Bi-Apoiada com carga distribuída q .

$$M_{y,\max} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{q \cdot b^2}{8} = \frac{p \cdot b^2}{8}$$

- Tensões Normais Máximas (para $z = \frac{t}{2}$)

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \rightarrow \sigma_{x,\max} = \frac{p \cdot b^2}{\frac{t^3}{12} \cdot \frac{t}{2}} \rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_{x,\max} = \frac{3 \cdot p}{2} \cdot \left(\frac{b}{t}\right)^2}$$

As relações entre tensões e deformações em um dado ponto da placa são expressas pelas Equações Constitutivas, como já sabemos. A figura (b) representa o comportamento da seção transversal da tira. Se esta fosse isolada, como uma viga, a região sob compressão apresentaria uma "expansão lateral", decorrente do efeito do Coeficiente de Poisson. Da mesma forma, a região inferior tracionada apresentaria uma contração lateral, de sorte que a tira teria sua seção transversal deformada, como indica nas linhas tracejadas. Estas deformações ocorrem na direção y .

Entretanto, as diversas tiras da placa estão umas "coladas" às outras, e na Condição Deformada não se observa uma sucessão de "empelotamentos" na chapa. Isso decorre da condição de compatibilidade em relação às deformações na direção y . Cada tira tem a tendência de se deformar na direção y , porém, como a tira vizinha tem a mesma tendência, elas interagem entre si, de modo que a deformação ϵ_y seja compensada em duas tiras vizinhas, fazendo $\epsilon_y = 0$. Porém, devido a essas trocas de forças entre duas tiras vizinhas na direção y , surgem as tensões σ_y .

Assim, para as tensões ao redor de um ponto da chapa teremos:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - v \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad \text{e} \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_x}{E} + v \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\text{Com } \epsilon_y = 0 \rightarrow 0 = \frac{\sigma_y}{E} - v \cdot \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \boxed{\sigma_y = v \cdot \sigma_x}$$

Substituindo na equação de ϵ_x , teremos:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - v \cdot v \cdot \sigma_x \rightarrow \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \left(1 - v^2\right) \rightarrow \boxed{\sigma_x = \left(\frac{E}{1-v^2}\right) \cdot \epsilon_x}$$

QUADRO X – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE PLACAS (CONTINUAÇÃO)

Podemos observar que a expressão anterior para o cálculo das tensões é a mesma utilizada no caso da teoria de vigas. Apenas que o Módulo de Elasticidade E é substituído por $E' = \frac{E}{1-v^2}$, chamado de Módulo de Elasticidade "Efetivo". Note que $E' > E$ sempre, o que indica que a chapa é mais rígida que um simples conjunto de vigas isoladas postas lado a lado.

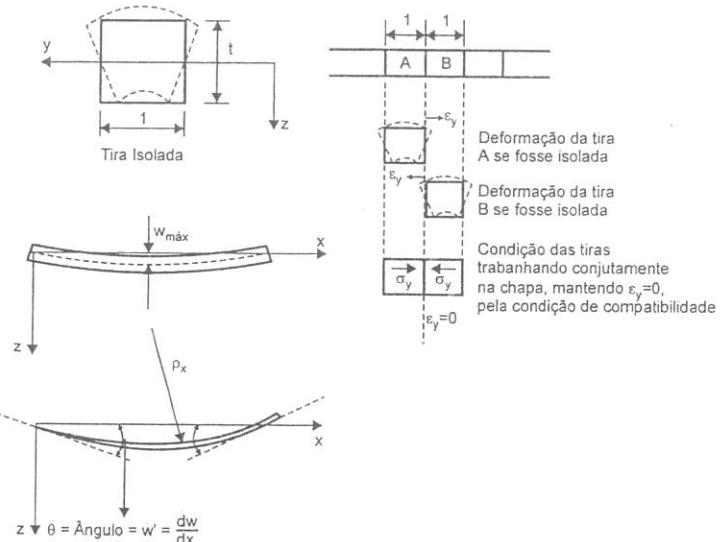


Figura (b)

A partir da conclusão anterior, podemos calcular a deflexão máxima na placa como uma viga biapoiada, utilizando o módulo de elasticidade efetivo e considerando o momento de inércia da tira.

$$\text{Assim: } W_{\max} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384E'I_y} \quad (\text{para uma viga}) \quad \text{Com} \quad \begin{cases} q=p \\ L=b \end{cases}$$

$$W_{\max} = \frac{5 \cdot p \cdot b^4}{384 \cdot \frac{E}{1-v^2} \cdot \frac{t^3}{12}} \quad \boxed{W_{\max} = \frac{5 \cdot p \cdot b^4}{384 \cdot D}}$$

QUADRO X – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE PLACAS (CONTINUAÇÃO)

Note que $D = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{t^3}{12} = E I_y$, substitui o correspondente $E I$ na teoria de vigas, e é chamado de RIGIDEZ À FLEXÃO DA PLACA.

Note que à semelhança da Teoria de Vigas, para pequenas deflexões:

$$\theta \approx w' = \frac{dw}{dx} \quad (\text{figura b})$$

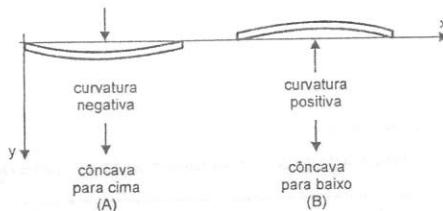
À semelhança da teoria de vigas, podem-se contabilizar também as ações das tensões de cisalhamento na placa.

Da mesma forma que na Teoria de Vigas, o raio de Curvatura da Placa pode ser expresso em termos da sua deflexão.

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -w'' \quad \text{e analogamente} \quad M = -D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Nesta última expressão, notamos a presença do sinal negativo, o que não ocorria com a expressão (d) do Quadro VI, que traduzia a curvatura da viga. O motivo desta diferença está na CONVENÇÃO DE SINAIS ADOTADA para a CURVATURA DA VIGA sujeita à flexão, que está relacionada à orientação adotada para os eixos x e y , como é discutido a seguir:

Eixo x positivo para direita e y positivo para baixo:



O Momento Fletor é adotado positivo quando produz compressão na parte superior da viga. Assim:

$$M = -EI \cdot v''(x)$$

No caso (A), a curvatura é negativa, e corrigida pelo sinal negativo produz momento positivo, e a viga está comprimida na parte superior.

Se a convenção de sinais for alterada, por exemplo, considerando y positivo para cima, assim como v , como foi representado o elemento d'viga, o sinal da equação torna-se positivo. Assim:

$$M = +EI \cdot v''(x)$$

Essa última equação foi utilizada na formulação do elemento de viga.

Como no estudo das Placas, é bastante comum adotar o eixo perpendicular ao plano da placa orientado "para baixo". A equação aparece com o sinal negativo, não havendo, portanto, nenhuma incoerência com a Teoria de Vigas.

Os momentos fletores calculados na placa são por unidade de largura de chapa, ou seja, a tira unitária para a qual calculamos o momento de inércia. Normalmente são dados, por exemplo, em kgf·mm, por mm de largura de chapa. Assim: $[M] = (\text{kgf} \cdot \text{mm})/\text{mm}$.

QUADRO X – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE PLACAS (CONTINUAÇÃO)

No caso geral, como mostra a figura (c), a placa apresenta curvaturas nas duas direções e as dimensões dos lados são comparáveis entre si.

As relações entre deflexões e inclinação da viga ponto a ponto podem ser estabelecidas à semelhança da Teoria de Vigas, como indicado na figura c.

As deformações são contabilizadas em função das curvaturas nas duas direções, que são tanto maiores quanto mais afastadas da superfície neutra.

$$\epsilon_x = -z \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \epsilon_y = -z \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Para um caso geral de placa retangular subcarregamento de pressão uniforme, a figura d representa graficamente os resultados do desenvolvimento analítico a partir da Teoria de Placas. O cálculo da Tensão máxima é dado por:

$$\sigma_{\max} = k \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{b}{t} \right)^2$$

semelhante ao que havíamos calculado anteriormente para uma placa longa. No caso da placa longa temos: $K = \frac{3}{2}$.

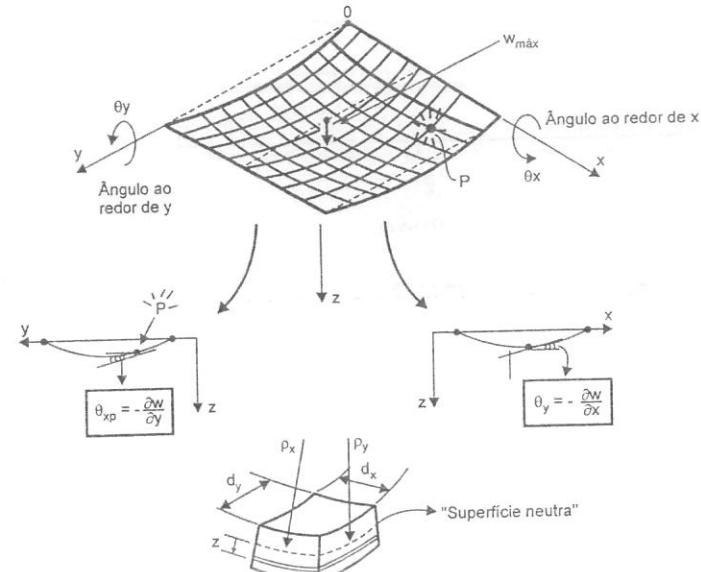


Figura (c)

QUADRO X – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE PLACAS (CONTINUAÇÃO)

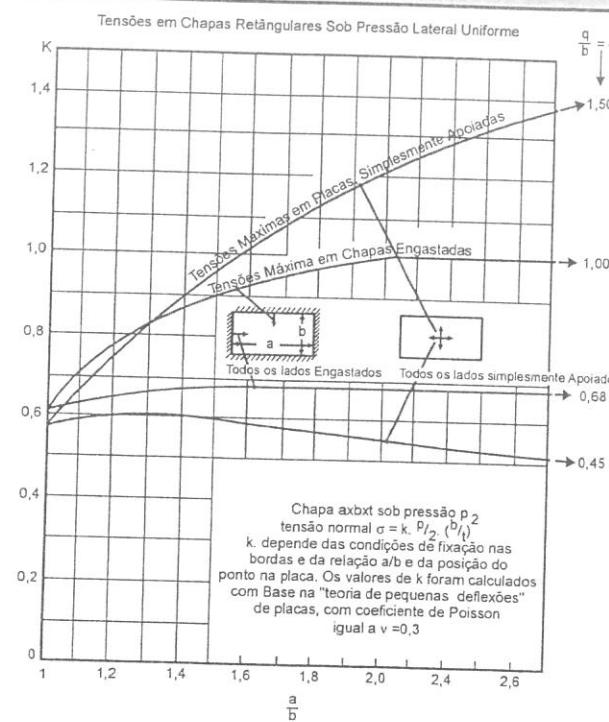


Figura (d)

É interessante observar na figura (d) que para uma chapa longa $a \gg b$ ou $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$, o valor de K para o cálculo das tensões paralelas aos lados menores tende a $K = 1,50$ ou $K = \frac{3}{2}$.

Assim $\sigma = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{b}{t}\right)^2$ que é a expressão anteriormente demonstrada para a tensão máxima.

Note que para a tensão normal paralela aos lados maiores, temos $K = 0,45$.

Como já havíamos demonstrado que $\sigma_y = v \cdot \sigma_x$, com $v = 0,3$; $\sigma_y = 0,3 \cdot 1,5 \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{b}{t}\right)^2 = 0,45 \cdot \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{b}{t}\right)^2$ o que confirma o cálculo desenvolvido anteriormente.

Finalmente, é importante observar que a condição deformada da placa é caracterizada ponto a ponto, pela deflexão w que depende da posição (x, y) na placa, e as inclinações que são as derivadas do deslocamento.

QUADRO X – REVISANDO ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE PLACAS (CONTINUAÇÃO)

Assim, o deslocamento de um ponto P da placa é caracterizado apenas pelo componente w . As inclinações em x e y são consequências de w , dadas pelas derivadas primeiras da função w .

Ao utilizarmos as hipóteses do comportamento de uma tira, obedecendo às relações conhecidas da Teoria de Vigas, algumas limitações estão contidas no nosso estudo. Assim:

Hipóteses Limitadoras do Estudo Anterior

O comportamento de uma placa depende das suas características geométricas, em particular da proporção entre a sua espessura e as outras dimensões. No estudo anteriormente desenvolvido, vale ressaltar tais limitações:

- A placa é plana e tem espessura constante.
- A placa é composta de material homogêneo, linear elástico e isotrópico.
- A placa é fina. A espessura da placa é menor que $\frac{1}{10}$ da sua mínima dimensão lateral.
- Não há deformação no plano médio da placa. Este plano se mantém como "superfície neutra" durante a flexão. As deflexões são pequenas quando comparadas com a espessura da placa ($W_{\max} \leq \frac{3}{4}t$)
- As retas normais à superfície média da placa indeformada mantêm-se retas e normais à superfície média durante a deformação. Ou seja, não são contabilizadas as deformações por cisalhamento da placa.
- Não há ação de forças paralelas no "plano" da chapa.
- A máxima tensão não excede a tensão de escoamento, assim, o material se mantém no regime elástico.

Alguns conceitos adicionais da Teoria de Placas – Estudos Futuros

É importante tecer algumas considerações conceituais a respeito do comportamento estrutural dos painéis de chapa, em relação ao panorama de tensões originado, decorrente da carga lateral na forma de pressão. Quando as **deflexões máximas na chapa são da ordem das espessuras dela e até maiores**, as hipóteses embutidas na análise linear estática deixam de ser atendidas, e uma verificação mais acurada desse comportamento deveria ser efetuada por meio de uma **análise não linear do painel de chapa**, que foge aos objetivos deste texto, e será tratada em um volume destinado ao estudo do comportamento não linear da estrutura.

Dessa forma é possível considerar as tensões no plano médio da chapa, que surgem quando o carregamento introduz deflexões da ordem da espessura dela, deformando a superfície média da placa decorrente da flexão, fato este não considerado, por hipótese, na análise linear estática. É importante mencionar que as tensões que surgem no plano médio da chapa são decorrentes das grandes deflexões, e não da ação independente de cargas no plano da chapa. Sob ação das grandes deflexões, a chapa apresenta a tendência de aproximação das extremidades, efeito este não coberto pela análise linear, que considera apenas os deslocamentos perpendiculares ao plano da chapa. As tensões que surgem no plano médio decorrentes das grandes deflexões da chapa são chamadas de "tensões de membrana". Essa denominação decorre da semelhança entre os tipos de tensões que ocorrem em uma membrana, que transmite tensões constantes ao longo da espessura, e as tensões constantes ao longo da espessura que ocorrem na placa sob efeito de grandes deflexões.

A rigor, é uma denominação imprópria, mas consagrada pelo uso, pois uma placa e uma membrana são elementos estruturais bastante diferentes. Enquanto uma placa carregada trabalha somente à flexão, uma membrana é solicitada pela tração axial. Já sabemos que as placas, dentro da hipótese linear, têm deflexões muito menores que a sua espessura. Entretanto, essa condição

de linearidade é estabelecida a partir de uma condição geométrica de definição da chapa, até para poder trabalhar como uma placa. Ou seja, esta condição é satisfeita a partir do estabelecimento da relação entre a largura (l) da placa e a sua espessura (t). Assim, para chapas que obedecem à relação $\frac{l}{t} = 40.....50$ aproximadamente, estas têm condição de trabalhar como uma placa e, em

particular, com comportamento linear dentro das hipóteses das pequenas deflexões. Para chapas em que $\frac{l}{t} \geq 300$ caracterizamos

o comportamento de uma membrana. As chapas consideradas na revisão do Quadro X foram tratadas com material perfeitamente elástico e isotrópico. Para pequenas cargas, ou no estágio inicial de carregamento, em que as deflexões são da ordem da espessura, a chapa irá se comportar de acordo com a teoria clássica originalmente formulada por Lagrange. À medida que o carregamento aumenta, e como consequência as deflexões, as tensões de membrana irão se desenvolver no plano médio e o comportamento da chapa será mais bem representado pela Teoria das Grandes Deflexões (von Karman).

Assumindo que o material continua a obedecer a Lei de Hooke, um maior aumento nas deflexões fará com que a chapa assuma um comportamento de membrana pura, e serão consideradas as equações da membrana elástica. A especificação da meia espessura é importante. Se a chapa é muito espessa, num primeiro estágio de deformação corresponderá melhor a Formulação de Reissner, que contabiliza a deformação por cisalhamento na chapa.

Como nenhum material comporta-se de acordo com a Lei de Hooke indefinidamente, a placa poderia escoar num dos estágios definidos acima. Se a placa é muito espessa, poderia começar a escoar antes das altas forças de membrana terem se desenvolvido. Se a placa é muito fina, poderia comportar-se como membrana plástica antes da ruptura. Para chapas de proporções encontradas em estruturas típicas de navios, vagões, etc., o escoamento deveria ocorrer após consideráveis ensaios de membrana terem se desenvolvido.

As considerações anteriormente efetuadas são importantes no sentido de definir o Modelo em Elementos Finitos para o Cálculo da Estrutura, pois a escolha da formulação adequada é parte integrante do processo de modelagem, e constitui uma questão que envolve decisão de engenharia.

No presente estágio, o nosso interesse é apenas o trabalho da placa sob as condições em que as hipóteses da Análise Linear são aceitáveis.

5.5.9.2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

a) Definição das Funções de Interpolação

A figura 5.21 representa uma placa plana, subdividida artificialmente em um certo número finito de elementos retangulares, conectados apenas nos seus nós, que são os **Elementos de Placa Retangulares**. O estudo do comportamento físico do elemento retangular pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, tal como já fizemos para todos os elementos estudados até agora. O Elemento Finito Retangular tem quatro nós. A figura 5.21 identifica o Elemento isolado para o estudo.

O movimento dos nós do elemento pode ser descrito pelo componente w , pois a definição do campo de deslocamentos em uma placa sob Flexão é efetuada por **um componente de deslocamento perpendicular ao plano da placa**, segundo a Teoria de placas revisada no Quadro X. Adicionalmente, por analogia com a teoria de vigas, como já explorado anteriormente, podemos definir os ângulos de inclinação da placa em um ponto nas duas direções, por intermédio das derivadas primeiras da função que define os deslocamentos w .

Essas derivadas são parciais, como já revisado no Quadro X. Portanto, o Elemento de Placa apresenta 3 Graus de Liberdade por nó; um deslocamento em z , e dois ângulos, um em x e um em y . Como tem quatro nós, esse elemento terá 12 Graus de Liberdade. Assim, a Matriz Coluna das Forças Nodais tem dimensão 12×1 , e da mesma forma, a Matriz coluna dos deslocamentos nodais terá dimensão 12×1 e, como consequência, a Matriz de Rigidize terá dimensão 12×12 . Assim:

$$\{f\}_{12 \times 1} = [k]_{12 \times 12} \cdot \{\delta\}_{12 \times 1} \quad (5.59)$$

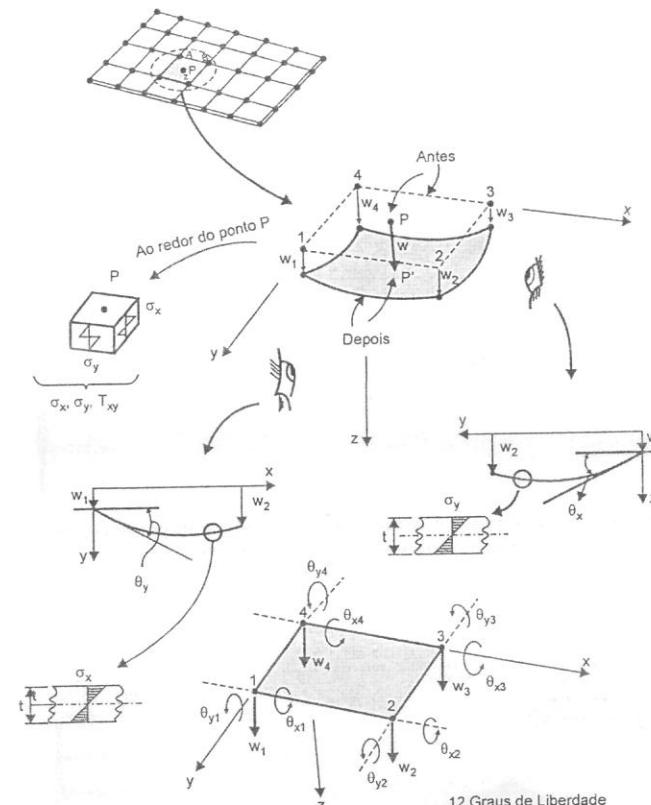


Figura 5.21 – Elemento Finito de Placa Retangular Linear.

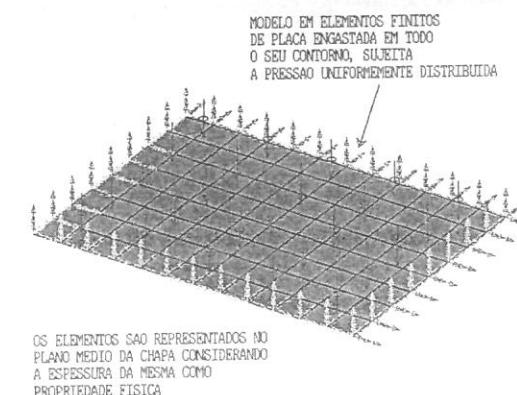
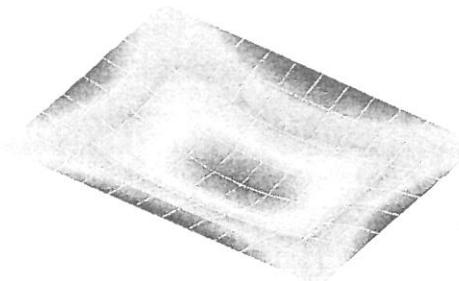


Figura 5.21 – Continuação. Exemplo de Modelo de Placa representado no computador.

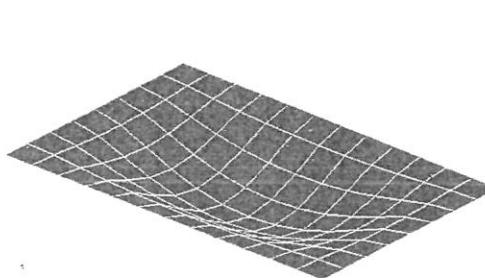
RESULTS: 2- B.C. 1,STRESS_2,LOAD SET 1
 STRESS - MAX PRIM MIN:-2.02E+00 MAX: 5.17E+00
 DEFORMATION: 1- B.C. 1,DISPLACEMENT_1,LOAD SET 1
 DISPLACEMENT - MAG MIN: 0.00E+00 MAX: 5.10E+00
 FRAME OF REF: PART



VALUE	OPTION:ACTUAL	SHELL SURFACE: TOP
5.17E+00		
4.45E+00		
3.73E+00		
3.01E+00		
2.29E+00		
1.58E+00		
8.55E-01		
1.36E-01		
-5.84E-01		
-1.30E+00		
-2.02E+00		

Figura 5.21 – Continuação – Veja esta figura colorida no Apêndice A. Configuração deformada da placa e panorama de tensões para as condições anteriormente especificadas. A figura representa a distribuição de tensões na face inferior da placa. De modo análogo, a representação das tensões na face superior da placa poderia ser efetuada.

RESULTS: 2- B.C. 1,STRESS_2,LOAD SET 1
 STRESS - Z MIN: 0.00E+00 MAX: 0.00E+00
 DEFORMATION: 1- B.C. 1,DISPLACEMENT_1,LOAD SET 1
 DISPLACEMENT - MAG MIN: 0.00E+00 MAX: 5.10E+00
 FRAME OF REF: PART



VALUE	OPTION:ACTUAL	SHELL SURFACE: MIDDLE
0.00E+00		

Figura 5.21 – Continuação - As tensões normais decorrentes da flexão da placa são nulas no seu plano médio – “Middle”, como já discutido no texto teórico.

Já sabemos que o grau do polinômio de interpolação é definido a partir do conhecimento do número de graus de liberdade do elemento.



Porém, em qualquer problema de Placa, o deslocamento de qualquer ponto é definido pelo componente w , na direção z . Deve-se notar que o deslocamento de um ponto depende da posição em que esse ponto se encontra na chapa. Ou seja, em um problema bidimensional, o deslocamento w depende da posição (x,y) em que o ponto se encontra. Como temos um componente de deslocamento em cada ponto, teremos uma função escolhida para representar o campo de deslocamentos. Note que as inclinações da chapa em cada ponto são dadas pelas derivadas da função w . Estas funções deverão, a partir dos deslocamentos nodais, calcular o deslocamento de qualquer ponto P dentro do elemento. Como a função depende de x e y , será, portanto, de duas variáveis, respeitando que nenhuma preferência deve ser dada a nenhuma das variáveis x e y . Assim:

$$w(x, y) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y + C_5 \cdot x^2 + C_6 \cdot y^2 + C_7 \cdot x^2 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y^2 + C_9 \cdot x^3 + C_{10} \cdot y^3 + C_{11} \cdot x^3 \cdot y + C_{12} \cdot x \cdot y^3 \quad (5.60)$$

Para um nó i qualquer da placa retangular ($i = 1, 2, 3, 4$), podemos escrever:

$$w_i = (w)_{x_i, y_i}$$

$$\theta_i^x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i, y_i}$$

$$\theta_i^y = \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i, y_i}$$

$$\theta^x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i, y_i} = C_3 + C_4 \cdot x + 2 \cdot C_6 \cdot y + C_7 \cdot x^2 + 2 \cdot C_8 \cdot x \cdot y + 3 \cdot C_{10} \cdot y^2 + C_{11} \cdot x^3 + 3 \cdot C_{12} \cdot x \cdot y^2 \quad (5.61)$$

$$\theta^y = \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i, y_i} = -(C_2 + C_4 \cdot y + 2 \cdot C_5 \cdot x + 2 \cdot C_7 \cdot x \cdot y + C_8 \cdot y^2 + 3 \cdot C_9 \cdot x^2 + 3 \cdot C_{11} \cdot x^2 \cdot y + C_{12} \cdot y^3) \quad (5.62)$$

As equações 5.61 representam o deslocamento w em um nó i da placa, e os ângulos de inclinação nas duas direções perpendiculares x e y . As equações 5.62 representam esses ângulos para um ponto qualquer da placa de coordenadas x e y .

b) Cálculo das Deformações e Tensões

Do Quadro X, em que fizemos uma breve revisão da Teoria de Placas, podemos calcular as deformações em qualquer ponto dentro do elemento finito, dentro das hipóteses das Funções de Interpolação adotadas. Para uma placa sob flexão, as deformações estão associadas à segunda derivada do deslocamento. Assim, derivando as expressões 5.62, obteremos as derivadas parciais do deslocamento e, portanto:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 2 \cdot C_6 + 2 \cdot C_8 \cdot x + 6 \cdot C_{10} \cdot y + 6 \cdot C_{12} \cdot x \cdot y$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 2 \cdot C_5 + 2 \cdot C_7 \cdot y + 6 \cdot C_9 \cdot x + 6 \cdot C_{11} \cdot x \cdot y$$

A partir do conhecimento das segundas derivadas do deslocamento, poderemos calcular as deformações a partir das relações revisadas no Quadro X, a saber:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\varepsilon_y = -z \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Observamos que as deformações são máximas para $z = z_{\text{máximo}} = \frac{t}{2}$, em que t é a espessura da chapa. Assim, conhecendo ϵ_x e ϵ_y para um ponto da chapa, poderemos calcular as tensões σ_x e σ_y a partir das relações constitutivas estudadas anteriormente na breve revisão da Teoria da Elasticidade, efetuada no Quadro VIII.

À Teoria de Placas, à semelhança da Teoria de Vigas, podem-se calcular as tensões de cisalhamento em um ponto. Pode-se demonstrar que as "distorções" neste caso estão associadas à seguinte derivada dos deslocamentos:

$$\left(2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 2 \cdot C_4 + 4 \cdot C_7 \cdot x + 4 \cdot C_8 \cdot y + 6 \cdot C_{11} \cdot x^2 + 6 \cdot C_{12} \cdot y^2$$

Observações Adicionais em relação ao Elemento de Placa Formulado

- Elemento ora formulado foi um dos primeiros elementos de placa desenvolvidos. Nas aplicações práticas por intermédio dos "softwares" de análise já se dispõe, em suas bibliotecas, de elementos finitos que apresentam melhorias em relação ao elemento ora proposto, permitindo o cálculo mais acurado das deformações e tensões dentro do elemento. A técnica de geração das funções de interpolação é um pouco diferente daquela que foi já utilizada na geração dos elementos parabólicos estudados anteriormente, e considera modos de deslocamentos incompatíveis do elemento. Tais implementações efetuadas, de modo a obter resultados mais acurados, sem a necessidade de utilizar elementos extremamente pequenos, serão estudadas adiante, após o estudo de todos os elementos mais utilizados nas aplicações do dia-a-dia da Mecânica Estrutural. Assim, as limitações observadas no Elemento Retangular Linear de Estado Plano de Tensões, no Elemento Sólido Hexédrico Linear e no próprio Elemento de Placa ora estudado poderão ser satisfatoriamente superadas utilizando essas técnicas.
- Embora nossa discussão esteja dirigida para os aspectos básicos do Método dos Elementos Finitos, alguns comentários adicionais devem ser feitos em relação à formulação dos elementos de placa. À semelhança da Teoria de Vigas, em que foi contabilizada a deformação por cisalhamento no elemento, podemos também levar em conta esse efeito na Teoria de Placas e, como consequência, na formulação do elemento. Na Teoria de Kirchhoff são desconsideradas as deformações por cisalhamento no Elemento, como já comentado no Quadro X. É, entretanto, possível incluir as deformações por cisalhamento na formulação do elemento de placa. Esta última possibilidade é considerada na Teoria de Mindlin, e as linhas retas perpendiculares à superfície média do elemento, em geral, não se mantêm perpendiculares na condição deformada.

5.10. FORMULAR O ELEMENTO DE CASCA RETANGULAR LINEAR

5.10.1. INTRODUÇÃO

A figura 5.22 estabelece a comparação entre os comportamentos estruturais de uma viga e uma chapa. O Elemento de Casca mais simples pode ser formulado a partir da idéia da superposição de comportamentos físicos independentes em um mesmo elemento, e a contabilização destes também de forma independente na montagem da sua matriz de rigidez, tal como já havíamos mencionado. As tensões normais resultantes são a soma das tensões normais correspondentes de cada tipo de comportamento.

Poderemos então tratar a formulação do elemento que representa o comportamento físico do trabalho da chapa em flexão juntamente com a ação de forças atuantes no seu plano médio, por intermédio do estudo de dois fenômenos independentes, que estarão associados aos componentes de rigidez que o elemento apresenta: Rigidez à ação de Forças agindo paralelamente ao seu plano médio, isto é, Estado Plano de Tensões, e rigidez à ação das Cargas Laterais, traduzido pelo Comportamento de Placa. Estas

características do Elemento já foram estudadas isoladamente, já que são independentes entre si, e definirão as matrizes de rigidez que traduzem esses comportamentos isolados.

No caso do comportamento de uma viga, a rigidez axial já foi estudada no elemento de treliça. Fazendo uma analogia, o correspondente comportamento "axial" da chapa seria traduzido pelo Elemento de Estado Plano de Tensões. De forma semelhante, o comportamento quanto à rigidez à flexão de uma Viga já foi estudado no elemento de viga com somente rigidez à flexão. O correspondente comportamento à flexão de uma chapa foi formulado por intermédio do Elemento de Placa.

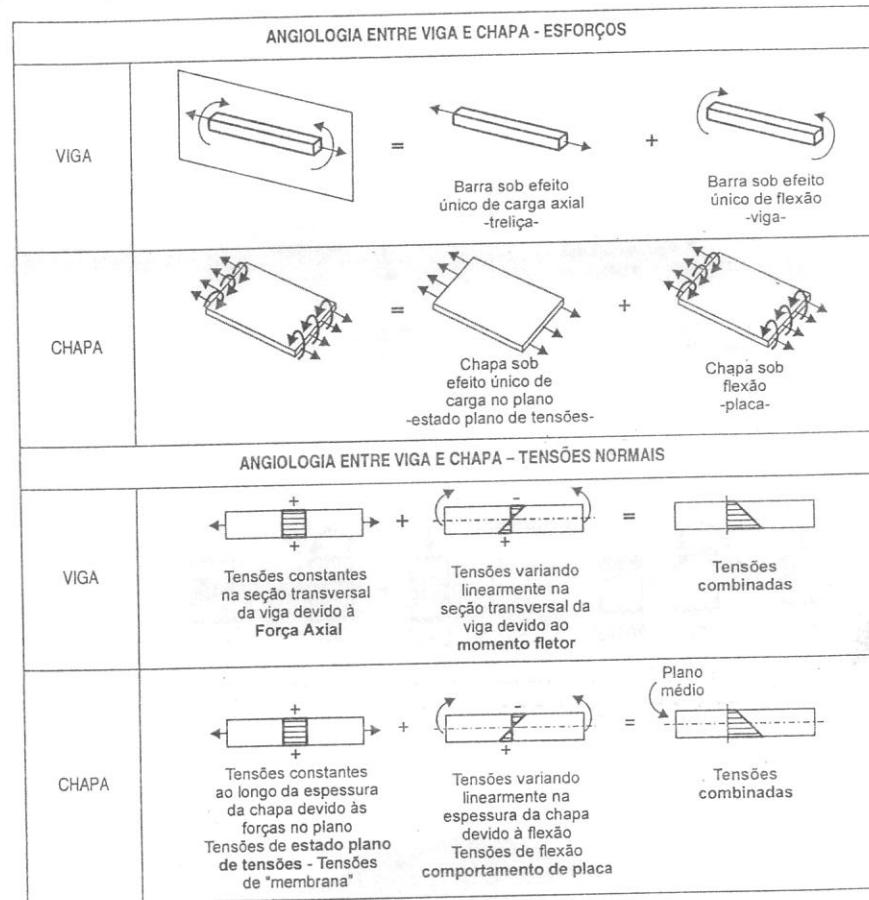


Figura 5.22 - Comparação entre os comportamentos estruturais de uma viga e uma chapa, quanto às Tensões Normais.

Uma aplicação prática, em que podemos visualizar a idéia da superposição dos dois comportamentos em uma chapa, e a comparação com o comportamento de uma viga são dadas na figura 5.23. Foi tomado o exemplo da figura 4.5, em que um pórtico é representado. Uma figura semelhante representando o comportamento de uma chapa é tomada para comparação. À semelhança do procedimento de superposição das tensões normais na viga, em que são considerados os efeitos das tensões de flexão juntamente com os efeitos das tensões decorrentes da Força Axial em uma dada seção transversal, pode-se visualizar em uma chapa a ação conjunta das tensões normais decorrentes do Estado Plano de Tensões, juntamente com os efeitos das tensões devido ao comportamento de placa da chapa.

Assim, um Elemento de Casca Plano, mais simples, pode ser obtido pela **Superposição do Comportamento de Flexão da Placa e do Comportamento de Estado Plano de Tensões**, considerados como comportamentos independentes. A figura 5.24 representa essa idéia, mostrando para um nó do elemento os graus de liberdade correspondentes, e a contribuição de cada comportamento isolado. Dessa forma, podemos observar que o Elemento de Casca assim formulado apresenta 5 graus de liberdade por nó. Como apresenta 5 nós, ele terá 20 graus de liberdade.

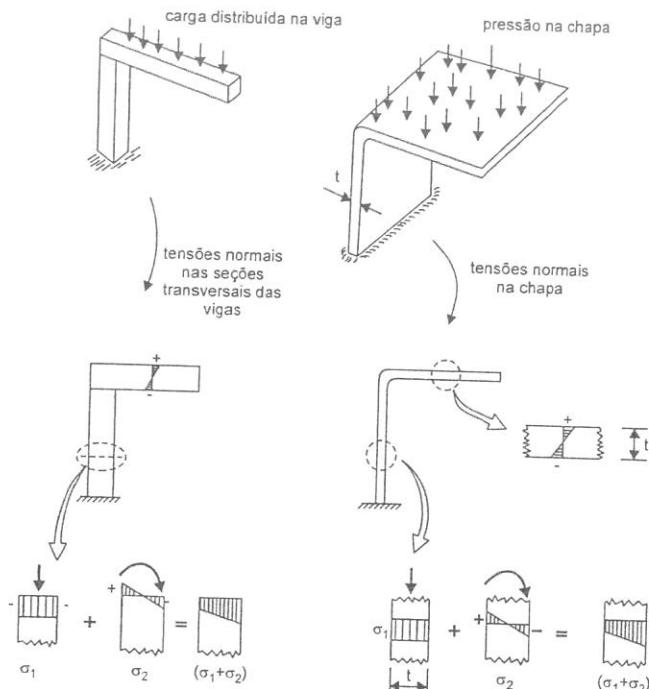


Figura 5.23 – Exemplo de Estruturas constituídas por chapas e vigas. Tensões Normais.

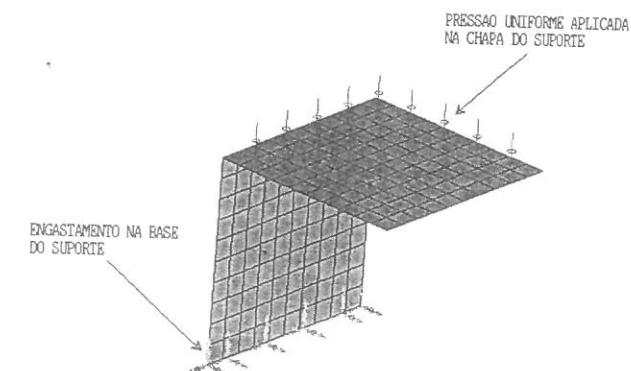


Figura 5.23 – Continuação – Aplicação prática de modelo com Elementos de Casca.

RESULTS: 2- B.C. 1, STRESS_2, LOAD SET 1
STRESS - MAX PRIN MIN: 1.70E-02 MAX: 5.08E+00
DEFORMATION: 1- B.C. 1,DISPLACEMENT_1,LOAD SET 1
DISPLACEMENT - MAG MIN: 0.00E+00 MAX: 1.08E+01
FRAME OF REF: PART

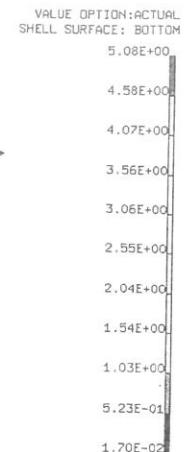
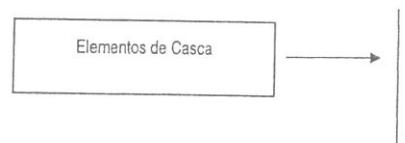


Figura 5.23 – Continuação – Veja esta figura colorida no Apêndice A. Exemplo de Suporte constituído por chapa dobrada na forma de trecho de cantoneira, discretizado por intermédio de Elementos de Casca Retangulares Lineares. A chapa superior horizontal sofre flexão, apresentando comportamento de placa. Os esforços são transmitidos à chapa vertical, na forma de cargas agindo no plano vertical da chapa e na forma de flexão. Na chapa são superpostos os comportamentos de Estado Plano de Tensões e de Placa, que são representados pelo elemento de Casca. A formulação dos elementos retangulares lineares de casca, que representam a superposição dos dois efeitos anteriores, foi desenvolvida no texto.

A montagem da Matriz de Rígidez do Elemento de Casca ora formulado segue também a mesma idéia da montagem da matriz de rigidez do elemento de viga, ou seja, no caso da viga, contém os termos das matrizes da barra de treliça, que contabiliza somente rigidez axial, e da viga com somente rigidez à flexão, tratada como uma montagem de matrizes independentes. Assim ocorre também na montagem da Matriz de Rígidez do Elemento de Casca. Esta contém os termos da matriz de rigidez de Estado Plano de Tensões, e da matriz de rigidez do elemento de placa, tratada também como uma montagem de matrizes independentes. O desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento de casca não será efetuado, já que o procedimento é semelhante ao procedimento geral já estabelecido nos exemplos anteriores. As formulações que definem as funções de interpolação do campo de deslocamentos são as mesmas já estudadas no caso do Estado Plano de Tensões e da Placa.

Os comportamentos simultâneos de ações de flexão e de forças no plano da chapa, sugerem a utilização dos Elementos de Casca em diversas aplicações práticas. Assim, resumindo:



São adequados para Análise Detalhada de Estruturas metálicas de chapa. Inúmeras aplicações utilizam modelos com esses tipos de elementos: Análise Detalhada de chassis e travessas, para choques, caixa estrutural completa de ônibus, trens, aviões, etc.

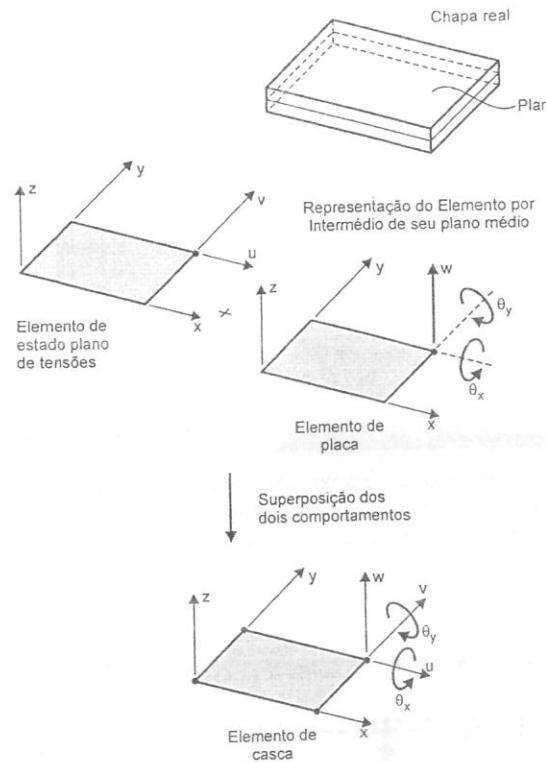


Figura 5.24 – Elemento de Casca Retangular Linear.

5.5.11. CONVERGÊNCIA DE RESULTADOS

5.5.11.1 CRITÉRIOS

Anteriormente, no Quadro IX, tivemos a oportunidade de efetuar um *Teste de Convergência*, cuja resposta obtida por intermédio da utilização do Elemento Triangular Linear de Estado Plano de Tensões foi comparada com a resposta exata dada pela Teoria da Elasticidade. A função de interpolação assumida para representar o campo de deslocamentos dentro do Elemento Finito, neste caso, impôs sérias limitações na obtenção dos resultados, como já sabemos. Os resultados obtidos foram progressivamente melhores à medida que se efetuou o refinamento da malha.

Posteriormente, a utilização de elementos finitos com funções de interpolação "mais ricas", como, por exemplo, os elementos parabólicos, permitiu a obtenção de resultados mais acurados nos cálculos de deformações e tensões. Entretanto, pela própria natureza do problema discreto, ao representar os infinitos graus de liberdade do contínuo, por um número finito ou discreto de graus de liberdade, a solução obtida será sempre uma aproximação, independente do refinamento da malha efetuado. Evidentemente, de acordo com a formulação escolhida para o elemento, e com o tamanho da malha adotado, a aproximação obtida será satisfatória, podendo estar muito próxima do resultado exato, e o desvio tornar-se desprezível.

A questão da Convergência obtida na utilização dos elementos finitos em geral será abordada em duas etapas:

- na presente oportunidade, de forma mais direta, utilizaremos os conceitos matemáticos até aqui introduzidos, dando ênfase à interpretação do comportamento físico que o elemento finito se propõe a representar, e,
- posteriormente, será discutida a *Condição de Equilíbrio*, a partir da identificação da Energia Potencial Total da Estrutura. Esse conceito está associado à *Formulação Variacional do Método dos Elementos Finitos*, que aborda a Formulação Geral do Método. Em particular, no caso do regime elástico, pode ser mostrado que a Energia Potencial Total atinge um mínimo na condição de equilíbrio. O conceito de Energia Potencial Total é abordado normalmente nos cursos de Resistência dos Materiais, e será relembrado e "importado" no momento oportuno.

Assim, de forma mais direta, a questão da convergência está associada à função de interpolação escolhida. Esta deveria ter a capacidade de representar o campo de deslocamentos em cada trecho do modelo, o mais próximo possível do deslocamento real da estrutura. Em consequência, as deformações contabilizadas pelo elemento deveriam atender a esse critério também. Como as deformações são matematicamente expressas por alguma espécie de derivada da função de deslocamentos, como já sabemos, alguns cuidados devem ser tomados ao eleger as funções de interpolação com vistas a representar a condição deformada de um dado elemento.

Por exemplo, nos problemas de Elasticidade bidimensional e tridimensional, as deformações são contabilizadas pela primeira derivada dos deslocamentos. Nos problemas de flexão de vigas e placas, as deformações estão associadas às segundas derivadas dos deslocamentos. Dessa forma, é óbvio que as funções de interpolação escolhidas devam ser definidas matematicamente de modo a permitir o cálculo dessas derivadas. Ou seja, o elemento finito deve ser muito bem definido neste aspecto, e as funções de interpolação escolhidas estão sujeitas a algumas "Restrições" adicionais em relação àquelas já discutidas até o presente momento. Assim, podemos enunciar alguns *Critérios* que procuram cobrir a definição das funções de interpolação, de sorte que sejam obtidos resultados mais próximos possíveis dos resultados exatos, a saber:

Se a estrutura sofrer deslocamentos, porém uma parte desta deslocar-se sem apresentar deformações, a formulação do elemento deve ter condição de representar essa situação física. Ou seja, o elemento não deve contabilizar deformações decorrentes de movimentos de corpo rígido.

Desse critério surge naturalmente uma importante questão: Se as deformações dentro do elemento finito são obtidas a partir das derivadas dos deslocamentos, por que não atribuir às funções de deslocamentos um grau maior, respeitando evidentemente o número de coeficientes a se utilizar em função do número de graus de liberdade? Isto é, ao formular o elemento finito, por que não começarmos a representação do polinômio a partir já do segundo grau, dispensando a constante do polinômio e o termo do 1º grau, portanto "queimando etapas", de modo que as derivadas sejam também de grau maior? Assim, as deformações seriam representadas de forma mais rica, superando as dificuldades levantadas para os elementos mais simples quanto ao cálculo das deformações. Esta questão é de fundamental importância na formulação de todos os tipos de elementos.

Antes de discutirmos a formulação dos elementos finitos, fixemos a nossa atenção em um caso de solução analítica já conhecida da Teoria de Vigas, com o intuito inicial de discutir alguns conceitos que serão estendidos às aplicações de elementos finitos. A viga em balanço representada na figura 5.25, sob ação de uma carga concentrada, sofre flexão. Do estudo da Resistência dos Materiais, são conhecidas as expressões analíticas exatas que permitem o cálculo das deflexões e Momentos Fletores na viga. No trecho da viga entre o ponto de aplicação da carga e a extremidade livre, não ocorre a presença de momentos fletores. Dessa forma, as tensões normais nesse trecho são nulas. As expressões analíticas são dadas em seguida. O objetivo no presente momento não é demonstrá-las, mas observarmos algumas características importantes dessa representação matemática, e que nos fornecerão subsídios na formulação dos elementos finitos.

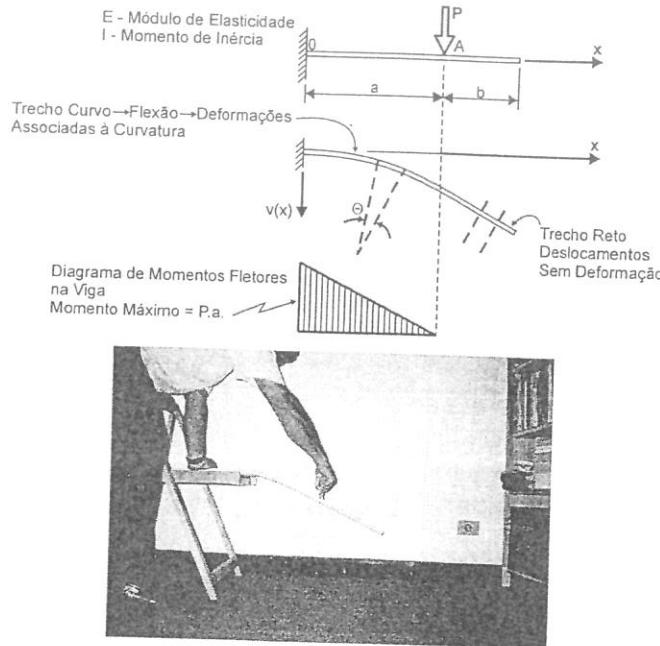


Figura 5.25 – Deslocamentos em uma viga, com trechos com deformação e sem deformação.

■ Para $0 \leq x \leq a$ → $v(x) = \frac{P \cdot a}{2EI} x^2 - \frac{P \cdot x^3}{6EI}$ (5.65)

Neste trecho, os deslocamentos são dados por uma função do 3º grau, representando o trecho curvo sob flexão. As deformações por flexão estão associadas à segunda derivada dos deslocamentos. Assim, calculando as derivadas, temos:

$$v'(x) = \frac{P \cdot a}{EI} \cdot x - \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot EI} \quad \text{e} \quad v''(x) = \frac{P \cdot a}{EI} - \frac{P \cdot x}{EI} \quad (5.66)$$

Neste trecho, a viga está sob ação de momentos fletores.

■ Para $a \leq x \leq L$ → $v(x) = \frac{P \cdot a^2}{2EI} \cdot x - \frac{P \cdot a^3}{6EI}$ (5.67)

Neste trecho, os deslocamento são dados por uma função do 1º grau, representando um Trecho Reto, no qual não ocorre ação de Momentos Fletores e, consequentemente, sem deformações. As deformações são calculadas a partir da segunda derivada dos deslocamentos. Assim:

$$v'(x) = \frac{P \cdot a^2}{2 \cdot EI} = \text{Constante} \rightarrow v''(x) = 0 \quad (5.68)$$

A expressão (5.67) representa, portanto, a condição de a Viga se deslocar sem se deformar.

- Os deslocamentos na estrutura real variam continuamente de ponto a ponto. Em particular, no ponto A, as equações (5.65) e (5.67) devem traduzir essa COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS. Assim:

$$\text{Para } x = a, \text{ de 5.66} \rightarrow v(x) = \frac{P \cdot a \cdot a^2}{2 \cdot EI} - \frac{P \cdot a^3}{6 \cdot EI} = \frac{P \cdot a^3}{3 \cdot EI}$$

$$\text{Para } x = a, \text{ de 5.67} \rightarrow v(x) = \frac{P \cdot a^2 \cdot a}{2 \cdot EI} - \frac{P \cdot a^3}{6 \cdot EI} = \frac{P \cdot a^3}{3 \cdot EI}$$

Note que o deslocamento em A é o mesmo obtido pelas duas funções.

- No ponto A, as equações (5.66) e (5.68) permitem o cálculo das Deformações. Assim:

$$\text{Para } x = a, \text{ de 5.66} \rightarrow v''(x) = \frac{P \cdot a}{EI} - \frac{P \cdot a}{EI} = 0$$

$$\text{Para } x = a, \text{ de 5.68} \rightarrow v''(x) = 0$$

Note que a deformação nula em A pode ser obtida pelas duas funções.

Pensando na estrutura idealizada como uma montagem de elementos finitos, como mostra a figura 5.26, a formulação do elemento deve garantir que os trechos que se deslocam sem o efeito de momentos fletores possam ser representados com deformação nula. Da mesma forma, a chapa sob ação de carga agindo no seu próprio plano, representando um Estado Plano de Tensões na mesma figura, ao ser idealizada por uma montagem de elementos triangulares, deve permitir que os deslocamentos da região entre a aplicação da Carga e a extremidade livre estejam isentos de deformações.

Relembrando as funções de interpolação adotadas para o Elemento de Viga e o Elemento de Estado Plano de Tensões, independentemente da localização do elemento na montagem, podemos estabelecer algumas propriedades de caráter geral. Para o elemento de viga, temos:

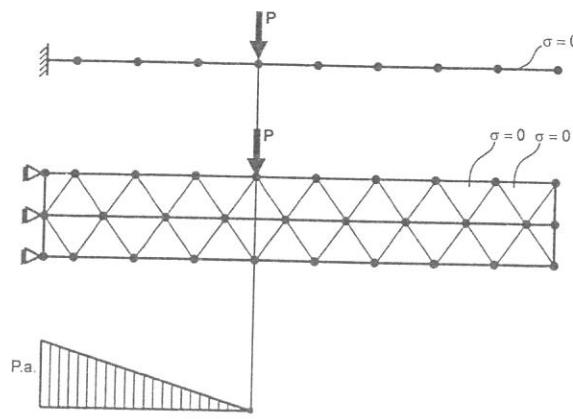


Figura 5.26 – Viga e chapa representadas por montagem de elementos finitos. Identificação de região sob tensão e região sob tensão nula.

$$v(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3$$

Função Linear

Equação de uma Reta

a função de interpolação $v(x)$, o termo $C_1 + C_2 \cdot x$ representa componentes de deslocamento cuja segunda derivada é zero. Esse termo da equação não contribui com deformações por flexão da viga. Ou seja, o polinômio que representa o Campo de Deslocamentos foi representado de forma COMPLETA, desde o coeficiente C_1 até o maior grau. Se esses termos que envolvem C_1 e C_2 não fizessem parte da função $v(x)$, a formulação do elemento não teria a capacidade de representar deslocamentos isentos de deformações.

e forma análoga, vale para o elemento triangular de Estado Plano de Tensões, em que as funções de interpolação são:

$$u(x,y) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y$$

$$v(x,y) = C_4 + C_5 \cdot x + C_6 \cdot y$$

como $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, no cálculo de ϵ_x , por exemplo, o deslocamento $C_1 + C_3 \cdot y$ não contribui com deformações em x , isto é, ex. Essa característica do polinômio que representa o campo de deslocamentos, isto é, ser COMPLETO, pode ser visualizada na formulação dos demais elementos formulados até o presente momento.

O Critério ora discutido constitui, a rigor, um caso particular do seguinte Critério:

A função de interpolação deve permitir a representação de uma Condição de Deformações Constantes, caso os deslocamentos nodais presentes sejam representativos dessa situação física.

Um caso particular do critério ora apresentado constitui o caso em que a deformação é uma constante e igual a zero, como discutido anteriormente.

5.5.11.2 GRAU DE CONTINUIDADE C^m

Para que os deslocamentos calculados pelos elementos finitos converjam para o valor exato, como foi efetuado, por exemplo, para o elemento triangular linear de estado plano de tensões no Teste de Convergência, o **Campo de Deslocamentos proposto como uma aproximação**, como uma **Função Tentativa** por intermédio de um polinômio, deve ser **Completo**. Uma **série polinomial completa** se tem alto grau suficiente e se nenhum termo é omitido; dessa forma, todos os termos de baixa ordem devem ser considerados. Um outro exemplo de série completa é a Série de Fourier, que será abordada na Análise Dinâmica pelo Método dos Elementos Finitos, objeto do próximo volume.

Outra característica importante do polinômio que representa o Campo de Deslocamentos dentro do elemento é o seu **Grau de Continuidade**, e a sua interpretação à luz do problema físico descrito pelo elemento. O Campo de deslocamentos dentro do elemento traduz uma **variação contínua dos deslocamentos** ponto a ponto. Evidentemente que a função adotada para fazer essa representação deve, portanto, ser contínua. Dentro de um elemento, as **deformações variam continuamente**. Como as deformações são calculadas pelas derivadas dos deslocamentos, essas **derivadas devem também ser contínuas**. Assim, a escolha das funções de interpolação merece cuidados adicionais em relação àqueles já tratados até agora.

Em problemas de elasticidade plana e tridimensional, as deformações são calculadas pelas primeiras derivadas dos deslocamentos dessa forma, essas derivadas devem ser funções contínuas. Isto quer dizer que as funções escolhidas para representar o campo

de deslocamentos dentro do elemento devem ter primeiras derivadas contínuas. Em problemas de flexão de vigas e comportamento de chapas em flexão, as deformações estão associadas às segundas derivadas dos deslocamentos. Dessa forma a função escolhida para representar o campo de deslocamentos dentro do elemento finito deve ser de tal sorte que tenha primeira e segunda derivadas contínuas.

A figura 5.27 representa alguns exemplos de funções que são contínuas, e as suas derivadas primeira e segunda. O fato de a função ser contínua não garante que suas derivadas também sejam. Dessa forma, a função de interpolação, eleita como tentativa de representar o campo de deslocamentos dentro do elemento finito, deve ser escolhida cuidadosamente, respeitando as questões de continuidade dela própria, e também de suas derivadas.

Em termos matemáticos, costuma-se referir ao **Grau de Continuidade de uma Função** por intermédio de uma convenção. Um Campo, em particular um **Campo de Deslocamentos**, é dito ter **Continuidade C^m** , se as **derivadas até ordem m** desse campo **são contínuas**.

Na figura 5.27, no caso (a) temos uma **Função de Grau de Continuidade C^0** , pois só a própria função é contínua. No caso (b), temos uma **Função de Grau de Continuidade C^1** , pois a derivada primeira é contínua.

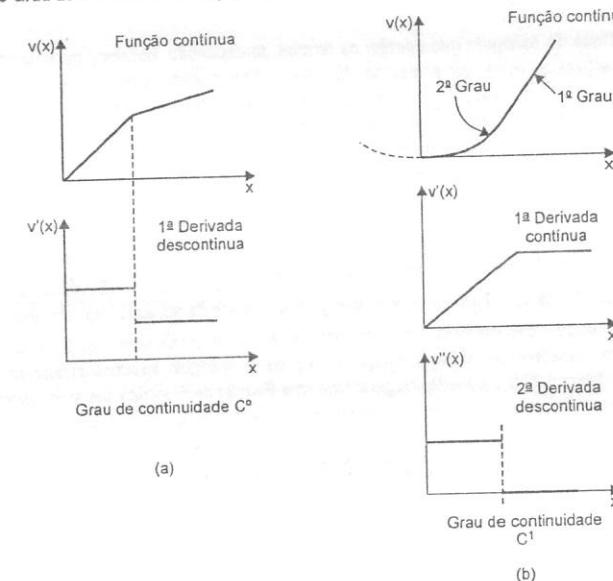


Figura 5.27 – Graus de Continuidade de uma Função.

Passemos agora da abordagem de um elemento isolado para a abordagem da Montagem de Elementos Finitos, e o estudo da consequente continuidade, não mais das funções no âmbito isolado de um elemento, mas do modelo como um todo.

Pensando agora no **Campo de Deslocamentos ao longo da montagem completa de Elementos**, e estendendo os conceitos anteriormente discutidos de Grau de Continuidade, dizemos que um **Elemento C^0** garante continuidade do campo de deslocamentos entre elementos, mas não garante continuidade das primeiras derivadas do campo. Assim, em uma **Malha de Elementos Finitos C^0** , as funções que representam as **primeiras derivadas dos deslocamentos apresentam descontinuidades ao passar de um elemento para outro**, isto é, dão "saltos". Somente a continuidade das incógnitas, isto é, dos deslocamentos, deve ocorrer. A continuidade das inclinações, isto é, das primeiras derivadas não é requerida. É o caso das funções utilizadas nas formulações dos campos de deslocamentos de problemas de elasticidade.

No Caso da **Flexão de Placas Finais**, cujos elementos já foram formulados anteriormente, tornando como base a Teoria Clássica de Placas, temos um **Problema de Continuidade C¹**. O estado de deformação de uma placa é descrito somente por uma grandeza que é o deslocamento lateral w do plano médio da placa. A **condição de continuidade** neste caso deve ser **imposta não apenas para os deslocamentos, mas também para as suas primeiras derivadas**, que representam fisicamente as inclinações, e variam continuamente ao longo de toda a placa.

5.5.11.3. A FAMÍLIA TETRAÉDRICA

Um recurso auxiliar bastante útil na geração das funções de interpolação dos elementos finitos para aplicações tridimensionais é a chamada **Família Tetraédrica**. A ideia desse recurso pode ser visualizada no caso de um problema plano, que constitui um caso particular das aplicações mais gerais. Posteriormente, estabeleceremos as devidas generalizações.

Já sabemos que a taxa de convergência apresentada por um elemento finito depende da **Função Tentativa** adotada para representar o Campo de deslocamentos dentro do elemento; esta deve ser **Completa**. A figura 5.28a representa os termos da expansão polinomial em um problema bidimensional, que tem como variáveis x e y . Nesta expansão obtém-se sempre um polinômio completo e estão presentes todos os possíveis termos na forma $x^\alpha \cdot y^\beta$. Para esta expansão temos $\alpha + \beta = \gamma$, em que γ é o grau segundo o qual o polinômio é completo.

A partir da **representação geométrica do triângulo que contém os termos da expansão**, podemos gerar as formulações de elementos que são espacialmente isotrópicos, isto é, que apresentam funções de interpolação representadas por polinômios iguais em todas as direções. Assim, “descendo” no triângulo, iremos multiplicando os coeficientes desconhecidos, adotados para representar o campo de deslocamentos, pelos termos da expansão polinomial. Por exemplo, o **Elemento Triangular Linear** de **Estado Plano de Tensões** tem 6 graus de liberdade, portanto, 6 Coeficientes desconhecidos são utilizados. Como temos dois C_2 multiplica x e o coeficiente C_3 multiplica y , gerando a equação $u = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y$.

O **Elemento Retangular Linear de Estado Plano de Tensões** utiliza como já sabemos, 4 coeficientes em cada função u e v . Assim, teremos analogamente: o coeficiente C_1 multiplica o número 1, o coeficiente C_2 multiplica x o coeficiente C_3 multiplica y e o coeficiente C_4 multiplica $x \cdot y$. Note que C_4 “desceu” mais um nível no triângulo dos termos da equação, mas manteve-se “centrado” no triângulo, sem dar preferência a qualquer das variáveis x e y . No caso de uma análise tridimensional, poderíamos utilizar os mesmos recursos dando origem a uma representação espacial, em que, em vez de um triângulo, teríamos a figura de um Tetraédro, incluindo a variável z , como mostra a figura 5.28.b, e poderíamos gerar toda uma **Família de Funções** que seria representativa das **Família Tetraédrica**, exibe propriedades similares àquelas da Família gerada com o auxílio dos triângulos, ou seja, os elementos gerados dessa forma apresentam **polinômios que são completos** ao atingir um cada estágio do Tetraedro, e têm a **condição de compatibilidade assegurada**.

a)

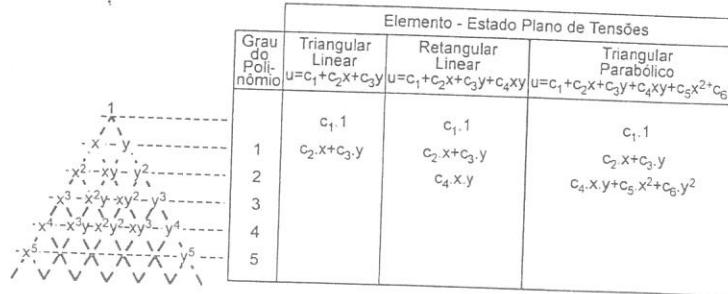


Figura 5.28A – Expansão Polinomial em Problema Bidimensional.

b)

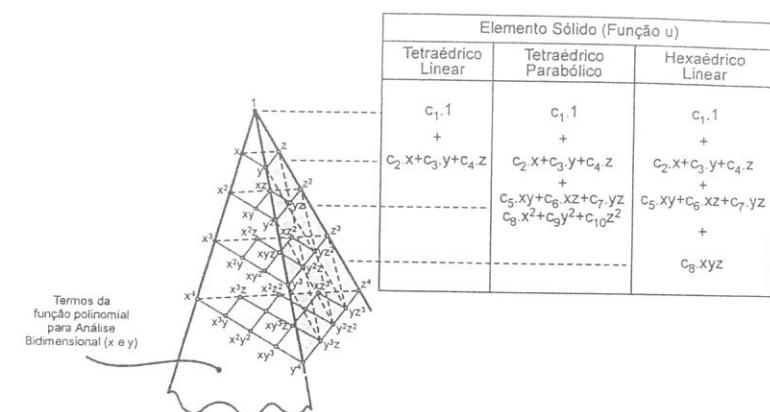


Figura 5.28b – Família Tetraédrica.

5.5.12. ELEMENTOS COM MODOS DE DESLOCAMENTOS INCOMPATÍVEIS

5.5.12.1. INTRODUÇÃO

Citarmos anteriormente que nas aplicações práticas por intermédio dos “softwares” de análise, estes já dispõem em suas bibliotecas de elementos finitos que apresentam melhorias em relação aos elementos anteriormente formulados, permitindo o cálculo mais acurado das deformações e tensões dentro do elemento. A técnica de geração das funções de interpolação é um pouco diferente daquela que foi já utilizada na geração dos elementos parabólicos estudados anteriormente. Ela considera **modos de deslocamentos incompatíveis** do elemento. Tais implementações efetuadas, de modo a obter resultados mais acurados, sem a necessidade de utilizar elementos extremamente pequenos, serão introduzidas agora. Assim, as limitações observadas no Elemento Retangular Linear de Estado Plano de Tensões, no Elemento Sólido Hexaédrico Linear e no próprio Elemento de Placa anteriormente estudados poderão ser satisfatoriamente superadas utilizando-se essa técnica.

Embora a introdução desse conceito seja normalmente abordada no estudo da **Formulação Isoparamétrica dos Elementos Finitos**, que focalizaremos no próximo capítulo, faremos a discussão inicial desta formulação utilizando como “pano de fundo” o **Elemento Retangular de Tensão de Cisalhamento Constante**. Este elemento, um dos mais antigos a serem formulados, foi introduzido em um Trabalho (“Paper”) desenvolvido por Turner, Clough, Martin e Topp, em 1956 e constituiu uma referência para o desenvolvimento dos **elementos com modos de deslocamentos incompatíveis** (“Stiffness and Deflexion Analysis of Complex Structures”). Esta mesma abordagem foi posteriormente utilizada por Wilson e outros na Formulação dos Elementos com Modos Incompatíveis, introduzidos no Trabalho “Incompatible Displacement Models” de 1973, abordando a Formulação isoparamétrica. Introduziremos então o elemento proposto por Turner, pois poderemos entender esse conceito de forma mais didática, sem a necessidade do recurso matemático adicional da Formulação Isoparamétrica, que estudaremos adiante.

5.5.12.2. ELEMENTO RETANGULAR DE TENSÃO DE CISALHAMENTO CONSTANTE – ESTADO PLANO DE TENSÕES “CSSR – CONSTANT SHEAR STRESS RECTANGLE ELEMENT”

A formulação do **Elemento Retangular de Tensão de Cisalhamento Constante** segue a rigor uma ideia simples e bastante interessante. Os cinco passos definidos como um procedimento geral para a formulação de qualquer elemento finito, e que repetimos diversas vezes na formulação de todos os elementos até aqui estudados, não sofrerão qualquer modificação. Vale lembrar que neste procedimento geral, o primeiro passo consiste na **definição de um campo de deslocamentos**, que constitui um modelo matemático por intermédio do qual o campo de deslocamentos dentro do elemento é assumido.

e modelo matemático constitui uma *Função Tentativa* para representar a condição deformada do elemento. A partir desta tentativa de representar da forma mais adequada possível o campo de deslocamentos, serão calculadas as deformações e tensões dentro do elemento finito. Ou seja, a representação das tensões, que normalmente é objetivo final do cálculo, estará condicionada por limitações que o campo de deslocamentos introduziu. Se este último representa de forma adequada o fenômeno físico objeto de ilustração, as tensões serão bem calculadas e terão correspondência com a realidade física da estrutura.

As deformações são calculadas pelas derivadas das funções que representam os deslocamentos. A partir das deformações assim determinadas, podem-se determinar as tensões por intermédio das relações constitutivas. Se o modelo proposto para o cálculo dos deslocamentos, não nos conduziu a um modelo de cálculo de tensões que traduzade adequadamente o fenômeno que queremos representar, então devemos formular um campo de deslocamentos mais adequado para as nossas necessidades. Assim, foi feito na geração de todos os elementos finitos até aqui desenvolvidos.

Uma vez então, uma outra idéia: Por que em vez de utilizar uma função de deslocamentos para definir o comportamento interno do elemento, não especificamos o Campo de Tensões dentro do elemento finito, e que represente o comportamento que sejam? Evidentemente, para aplicarmos os cinco passos gerais na determinação da matriz de rigidez de qualquer elemento necessitaremos do campo de deslocamentos admitido por esse elemento. Mas essa questão pode ser resolvida de forma melhante àquela já aplicada aos demais elementos até aqui estudados, isto é, percorrendo o "caminho inverso".

Assim estipulamos o campo de tensões que gostaríamos que o elemento representasse, por intermédio das relações constitutivas que determinam as deformações. De posse das deformações, teremos condições de determinar o campo de deslocamentos que deu origem a essas deformações. Essas deformações serão expressas pelas *derivadas dos deslocamentos*. O procedimento inverso, que nos permite *passar das funções derivadas para a função que originou essas funções derivadas*, é a *Função Primitiva*, é a *Integral*. Assim, conseguiremos determinar qual é a função de deslocamentos que irá gerar o tipo de tensões que nos interessa.

Alguns detalhes merecem cuidados nesse procedimento. Ao efetuarmos a derivada de uma função, as *constantes têm derivadas nulas*. Então, no procedimento inverso, isto é, durante a *Integração de uma Função*, surgirá uma *Constante de Integração* que verá ser determinada. Em particular, no problema de Estado Plano de Tensões, nas *derivadas em relação a x*, os *termos em y* serão considerados constantes e terão derivadas nulas. Na *integração de uma função em x*, será gerada uma *constante de integração*, e que genericamente será uma *função de y*, pois esta tem derivada em x igual a zero. Estabelecidas essas condições, podemos então à formulação do *Elemento Retangular de Tensão de Cisalhamento Constante*. Esquematicamente, a idéia anteriormente pode ser representada da seguinte forma:



Assim, então à especificação do Campo de Tensões dentro do elemento finito.

Figura 5.29 representa o Elemento Finito Retangular de Estado Plano de Tensões e a distribuição de Tensões assumida para esse elemento. Nesse caso as *Tensões Normais σ variam linearmente* e as *Tensões de Cisalhamento τ são constantes*. Para esta distribuição de tensões temos:

$$\sigma_x = C_1 + C_2 \cdot y$$

$$\sigma_y = C_3 + C_4 \cdot x$$

$$\tau = C_5 = \text{Constante}$$

(5.69)

Vamos tentar descobrir então qual Campo de Deslocamentos deve ser atribuído ao elemento, de sorte que satisfaça esse Campo de Tensões. Descoberto isso, os passos necessários para definir a Matriz de Rigidez do Elemento seguirão o mesmo padrão já utilizado para todos os elementos finitos definidos até agora. A partir da definição de deformação e das relações constitutivas teremos:

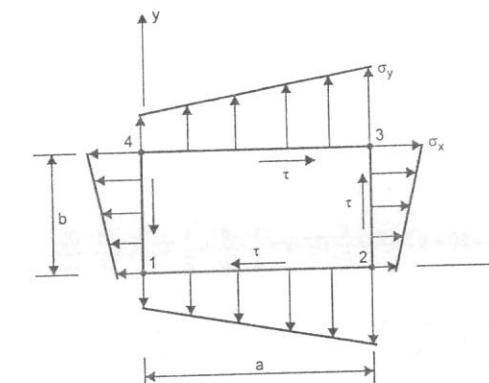


Figura 5.29 – Distribuição de Tensões no Elemento Retangular de Estado Plano de Tensões de Tensão de Cisalhamento Constante.

■ $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} - v \frac{\sigma_y}{E}$, e substituindo σ_x e σ_y das equações 5.69, temos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [C_1 + C_2 \cdot y - v \cdot C_3 - v \cdot C_4 \cdot x] \rightarrow$$

$$\partial u = \frac{1}{E} [C_1 + C_2 \cdot y - v \cdot C_3 - v \cdot C_4 \cdot x] \cdot \partial x \text{ e integrando ambos os lados, teremos:}$$

$$u = \frac{1}{E} \left\{ \left[C_1 \cdot x + C_2 \cdot x \cdot y - v \cdot C_3 \cdot x - v \cdot C_4 \cdot \frac{x^2}{2} \right] + f(y) \right\} \quad (5.70)$$

em que $f(y)$ é uma constante de Integração, pois ao calcularmos $\frac{\partial u}{\partial x}$ a função $f(y)$ terá derivada nula.

■ $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_y}{E} - v \cdot \frac{\sigma_x}{E}$, e substituindo σ_x e σ_y das equações 5.69, temos:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [C_3 + C_4 \cdot x - v \cdot C_1 - v \cdot C_2 \cdot y] \rightarrow$$

$$\partial v = \frac{1}{E} [C_3 + C_4 \cdot x - v \cdot C_1 - v \cdot C_2 \cdot y] \cdot \partial y \text{ e integrando ambos os lados, teremos:}$$

$$v = \frac{1}{E} \left\{ \left[C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y - v \cdot C_1 \cdot y - v \cdot C_2 \cdot \frac{y^2}{2} \right] + g(x) \right\} \quad (5.71)$$

em que $g(x)$ é uma Constante de Integração, pois ao calcularmos $\frac{\partial v}{\partial x}$ a função $g(x)$ terá derivada nula.

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau}{E} = \frac{C_5}{E} = \frac{2(1+v) \cdot C_5}{2(1+v)} = C_5$$

pois $\tau = C_5 = \text{Constante}$

Calculando $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$ e substituindo na equação anterior:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{E} \cdot C_2 \cdot x + \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{E} \cdot C_4 \cdot y + \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2(1+v) \cdot \frac{C_5}{E} = \frac{1}{E} \cdot C_2 \cdot x + \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{E} \cdot C_4 \cdot y + \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial y} + C_4 \cdot y = 2(1+v) \cdot C_5 - \left[\frac{\partial g}{\partial x} + C_2 \cdot x \right] = C_6 \quad (5.72)$$

Na equação (5.72) temos de um lado só uma função de y e no outro uma função de x . Assim, essa equação só poderá ser satisfeita quando os dois lados forem iguais a uma constante C_6 .

Integrandas duas equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} + C_4 \cdot y &= C_6 \quad \text{e} \\ 2(1+v)C_5 - \left[\frac{\partial g}{\partial x} + C_2 \cdot x \right] &= C_6\end{aligned}$$

e introduzindo as constantes de integração, teremos:

$$\begin{aligned}f(y) &= -\frac{C_4 \cdot y^2}{2} + [(1+v)C_5 + C_6] \cdot y + C_7 \\ g(x) &= -\frac{C_2 \cdot x^2}{2} + [(1+v)C_5 - C_6] \cdot x + C_8\end{aligned}$$

As funções de Deslocamentos serão então:

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{E} \left[\left(C_1 \cdot x + C_2 \cdot x \cdot y - v \cdot C_3 \cdot x - v \cdot C_4 \cdot \frac{x^2}{2} \right) - \frac{C_4 \cdot y^2}{2} + [(1+v)C_5 + C_6] \cdot y + C_7 \right] \\ v &= \frac{1}{E} \left[\left(C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y - v \cdot C_1 \cdot y - v \cdot C_2 \cdot \frac{y^2}{2} \right) - \frac{C_2 \cdot x^2}{2} + [(1+v)C_5 - C_6] \cdot x + C_8 \right] \quad (5.73)\end{aligned}$$

A partir das expressões 5.73, que estabelecem as FUNÇÕES DE DESLOCAMENTOS PARA O ELEMENTO, pode-se iniciar o Procedimento Padrão de Geração da Matriz de Rígidez.

Assim o primeiro passo já foi dado, portanto:

$$\{C\} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$[H] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} x & xy & -vx & -\frac{1}{2}(vx^2 + y^2) & ((1+v)y) & y & 1 & 0 \\ -vy & -\frac{1}{2}(vx^2 + y^2) & y & xy & (1+v)x & -x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação $\{\delta(x, y)\} = [H(x, y)] \cdot \{C\}$ é a função de deslocamentos que resulta da distribuição de tensões escolhidas e satisfaz os requisitos de compatibilidade geométrica dentro do elemento. Esse tipo de abordagem constitui um método alternativo ao passo I na montagem da matriz de rigidez de um elemento ($[k]$).

RELACIONE OS DESLOCAMENTOS GERAIS DENTRO DO ELEMENTO AOS DESCOLAMENTOS NODAIS

$$\{\delta\} = [A] \cdot \{C\}$$

em que:

$$[A] = \begin{bmatrix} [H(0,0)] \\ [H(a,0)] \\ [H(a,b)] \\ [H(0,b)] \end{bmatrix}$$

$\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$ e procedendo à inversão, temos:

$$[A]^{-1} = \frac{E}{a} \begin{bmatrix} -C & -A \cdot \alpha & C & -A \cdot \alpha & v \cdot A & A \cdot \alpha & -v \cdot A & A \cdot \alpha \\ \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} & 0 \\ -A & -C \cdot \alpha & A & -v \cdot A \cdot \alpha & A & v \cdot A \cdot \alpha & -A & C \cdot \alpha \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} \\ -B \cdot \alpha & -B & -B \cdot \alpha & B & B \cdot \alpha & B & B \cdot \alpha & -B \\ -\frac{3}{4} \cdot \alpha & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \cdot \alpha & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \cdot \alpha & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \cdot \alpha & -\frac{1}{4} \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que:

$$A = \frac{v}{2(1-v^2)} \quad B = \frac{v}{4(1+v)}$$

$$C = \frac{2-v^2}{2(1-v^2)} \quad \alpha = \frac{a}{b}$$

Observações

O deslocamento v das faces inferior e superior do elemento é uma EXPRESSÃO QUADRÁTICA, representando a Curvatura da Chapa (figura 5.30).

São necessários três coeficientes para definir unicamente a função v , porém só dispomos de dois valores nodais v ao longo de cada face.

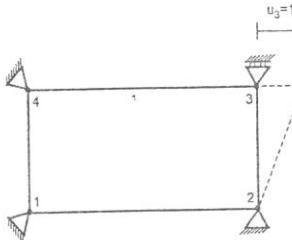
A função quadrática neste caso não é definida unicamente, portanto a compatibilidade entre elementos não é satisfeita inteiramente. → MODOS INCOMPATÍVEIS

É possível ter os deslocamentos variando quadraticamente e também satisfazer a compatibilidade entre elementos. → ADICIONAR NÓS NO MEIO DOS LADOS → Esta abordagem foi utilizada na definição dos elementos parabólicos, aumentando, porém, excessivamente, o número de graus de liberdade do modelo.

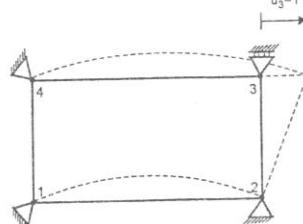
Como $\{\delta(x,y)\} = [H(x,y)] \cdot \{C\}$ e $\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$

Então: $\{\delta(x,y)\} = [H(x,y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$

Substituindo $[A]^{-1}$ e efetuando o produto matricial, teremos a relação entre os deslocamentos nodais e os deslocamentos dentro do Elemento.



Elemento Retangular Linear do Estado Plano de Tensões



Elemento de Tensão de Cisalhamento Constante

Nesse Elemento, o campo de Deslocamentos é bastante simples, satisfazendo a compatibilidade entre Elementos. Essa simplicidade introduz uma condição informada no Elemento diferente da realidade. Esse tipo de Elemento com Modos Compatíveis superestima a rigidez da Estrutura. A flexão no próprio lado do Elemento não é Representada.

Como o Deslocamento v é uma expressão quadrática, esse elemento representa as Curvaturas das Faces Superior e Inferior do Elemento. Esse contorno representa mais adequadamente a situação física real, evitando as altas deformações por cisalhamento ao redor dos nós 2 e 3, do Elemento Retangular Linear.

Figura 5.30 – Campo de Deslocamentos no Elemento CSSR e comparação com o Elemento Retangular Linear de Estado Plano de Tensões.

Os passos seguintes na determinação de $[k]^e$ para o elemento CSSR são os mesmos que para o elemento retangular linear de Estado Plano de Tensões, portanto apresentaremos somente os resultados.

$$[k]^e = \frac{E \cdot t}{4(1-v^2)} \begin{bmatrix} A \cdot \alpha + \frac{D}{\alpha} & B & A \cdot \alpha - \frac{D}{\alpha} & C & A \cdot \alpha + \frac{D}{\alpha} \\ B & \frac{A}{\alpha} + D \cdot \alpha & -C & -\frac{A}{\alpha} + E \cdot \alpha & -B & \frac{A}{\alpha} + D \cdot \alpha \\ A \cdot \alpha - \frac{D}{\alpha} & -C & -A \cdot \alpha - \frac{E}{\alpha} & -B & -A \cdot \alpha + \frac{E}{\alpha} & C & A \cdot \alpha + \frac{D}{\alpha} \\ -C & -\frac{A}{\alpha} + E \cdot \alpha & -B & -A \cdot \alpha + \frac{E}{\alpha} & C & A \cdot \alpha + \frac{D}{\alpha} \\ -A \cdot \alpha - \frac{E}{\alpha} & -B & -A \cdot \alpha - \frac{E}{\alpha} & -C & \frac{A}{\alpha} - D \cdot \alpha & B & \frac{A}{\alpha} + D \cdot \alpha \\ -B & -A \cdot \alpha - \frac{E}{\alpha} & -C & -A \cdot \alpha - \frac{E}{\alpha} & B & A \cdot \alpha - \frac{D}{\alpha} & C & A \cdot \alpha + \frac{D}{\alpha} \\ -A \cdot \alpha + \frac{E}{\alpha} & -C & -A \cdot \alpha - \frac{E}{\alpha} & -B & A \cdot \alpha - \frac{D}{\alpha} & C & A \cdot \alpha + \frac{D}{\alpha} \\ C & \frac{A}{\alpha} - D \cdot \alpha & B & -\frac{A}{\alpha} - E \cdot \alpha & -C & -\frac{A}{\alpha} + E \cdot \alpha & -B & \frac{A}{\alpha} + D \cdot \alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{Em que: } A = \frac{1-v}{2}; B = \frac{1+v}{2}; C = \frac{1-3v}{2}; D = \frac{4-v^2}{3}; E = \frac{2+v^2}{3}; \alpha = \frac{a}{b}$$

A comparação dos Elementos CSSR e o Elemento Retangular Linear pode ser observada a partir dos resultados de testes efetuados com esses elementos, como indica a figura 5.30 que será discutida em seguida.

5.5.12.3. TESTES COMPARATIVOS ENTRE ELEMENTOS COM MODOS INCOMPATÍVEIS E MODOS COMPATÍVEIS

Nesses testes foram resolvidas diversas malhas em elementos finitos, referentes a uma chapa cujo comprimento é quatro vezes maior que a sua largura. A chapa com uma extremidade engastada foi submetida a uma carga aplicada em sua extremidade livre. Foram contabilizados os deslocamentos na extremidade livre dos diversos modelos em elementos finitos, e as tensões máximas no ponto A do engastamento. Neste caso a solução dada pela teoria da elasticidade é conhecida, correspondendo ao valor exato.

O objetivo deste teste foi verificar o erro relativo ao calcular a estrutura pelo método dos elementos finitos, e verificar a importância da formulação do elemento nas respostas obtidas ao utilizar o Método. Como sabemos, mais importante que a própria subdivisão da estrutura em elementos, a característica fundamental do Método dos Elementos Finitos está no estabelecimento das propriedades do elemento por intermédio de sua formulação. Como o Elemento Retangular de Tensão de Cisalhamento Constante para Estado Plano de Tensões é melhor formulado que o Elemento Retangular Linear, as Respostas obtidas pelo primeiro elemento estarão muito mais próximas do resultado exato utilizando uma malha com um número menor de elementos.

O **Erro Relativo** é definido por $e = \frac{\text{Valor Computado} - \text{Valor Exato}}{\text{Valor Exato}}$. Este pode ser calculado tanto para os deslocamentos

máximos na extremidade da chapa como para as tensões máximas no engastamento. Esses erros no cálculo de deslocamentos e tensões foram representados no eixo vertical dos diagramas da figura 5.31, em que no eixo horizontal foi representada a subdivisão de elementos na direção longitudinal da chapa. Nesses diagramas, então foram representados os gráficos correspondentes à relação entre os erros obtidos e a malha utilizada. (referência 26)

Fica evidente na figura (a), que quando utilizamos *um só elemento para representar a malha da chapa*, o que corresponderia $m=1$ e $n=1$, o *erro relativo no Cálculo dos Deslocamentos para o Elemento CSSR é aproximadamente -0,25*, ou seja, *aproximadamente -25%*. Significa que o Cálculo dos Deslocamentos resultou em deslocamentos menores que os reais, e o erro foi

de 25%. Note que no mesmo diagrama, para o gráfico correspondente ao *Elemento Retangular Linear*, a Malha com somente um elemento, acarretou um erro de aproximadamente 85%, resultando em uma estrutura muito mais rígida que a real. Assim, o elemento Retangular Linear torna a estrutura muito rígida, como já sabíamos.

Observando os sucessivos refinamentos da malha, podemos notar que para o Elemento CSSR com $m=4$ já estamos bem próximos do resultado exato, e $m=8$ a resposta já é bastante satisfatória, enquanto para o Elemento Retangular Linear uma subdivisão longitudinal de elementos bem maior é requerida para atingir o resultado adequado. É mais uma vez a comprovação da mais importante característica do Método dos Elementos Finitos: a Formulação do Elemento e a sua repercussão nos resultados obtidos ao efetuar uma malha com a finalidade de discretizar um problema contínuo.

No caso da figura (b), observa-se a mesma tendência para o cálculo das tensões normais. Deve-se, entretanto, notar que para o cálculo das tensões, os erros são maiores do que aqueles observados no cálculo dos deslocamentos. Isso pode ser explicado pelo fato de o método calcular em um primeiro estágio os deslocamentos, associando-os diretamente à rigidez atribuída ao elemento finito. O cálculo das tensões é efetuado em um segundo estágio, a partir do cálculo das deformações que são contabilizadas pelas derivadas dos deslocamentos. Evidentemente, tais derivadas de uma função que já foi aproximada conterão mais aproximações, explicando assim, o comportamento observado.

Outro aspecto conceitual que os resultados dos testes nos mostram e já era de nosso conhecimento é quanto à importância da subdivisão dos elementos na direção da largura da chapa, especificada por n . Podemos observar que para as diversas malhas efetuadas, o valor de n não influencia tanto a taxa de convergência dos resultados, como a subdivisão longitudinal m . O motivo disto já foi discutido ao formularmos o Elemento Retangular Linear de Estado Plano de Tensões. A grande limitação deste elemento não estava na representação da variação da deformação ao longo da largura da chapa, que era linear, podendo representar a flexão da chapa no seu próprio plano. A limitação estava na determinação das deformações ao longo da direção longitudinal da chapa. Nessa direção, as deformações eram constantes para uma dada altura da chapa. Daí as limitações deste elemento, tornando-o excessivamente rígido. Tais limitações foram, portanto, superadas com a definição do Elemento CSSR.

Do ponto de vista prático, nas aplicações do dia-a-dia com a utilização de programas de computador para Análise pelo Método dos Elementos Finitos, são disponíveis em geral esses dois tipos de elementos nas bibliotecas dos programas: os *Elementos com Modos de Deslocamentos Incompatíveis* e os *Elementos com Modos de Deslocamentos Compatíveis*. Os primeiros, que fornecem melhores resultados, são a rigor os elementos definidos de forma semelhante ao elemento CSSR. Essa técnica pode ser aplicada também ao Elemento Sólido Hexaédrico Linear, permitindo uma melhoria em seus resultados.

Normalmente, esses elementos são formulados de forma *isoparamétrica*, como veremos adiante, utilizando um recurso matemático adicional ainda não abordado por nós. A rigor, do ponto de vista físico, essa nova definição isoparamétrica corresponde a mesma condição da definição do elemento CSSR, apenas que com recursos matemáticos mais sofisticados, que envolvem a definição de um novo sistema de coordenadas em vez do *Sistema x, y, z* com o qual já estamos acostumados a operar.

Todos os elementos que definirmos até o presente momento foram estabelecidos em *coordenadas x, y e z*, com as quais estamos mais familiarizados. Como didaticamente foi mais conveniente trabalhar nesse sistema, acarretando em ganhos de entendimento físico do comportamento dos elementos e na manipulação das equações, o motivo da definição isoparamétrica dos elementos e os ganhos dessa representação serão discutidos adiante. Vale, porém, ressaltar que todos os aspectos conceituais até aqui discutidos quanto à definição dos elementos finitos não serão alterados.

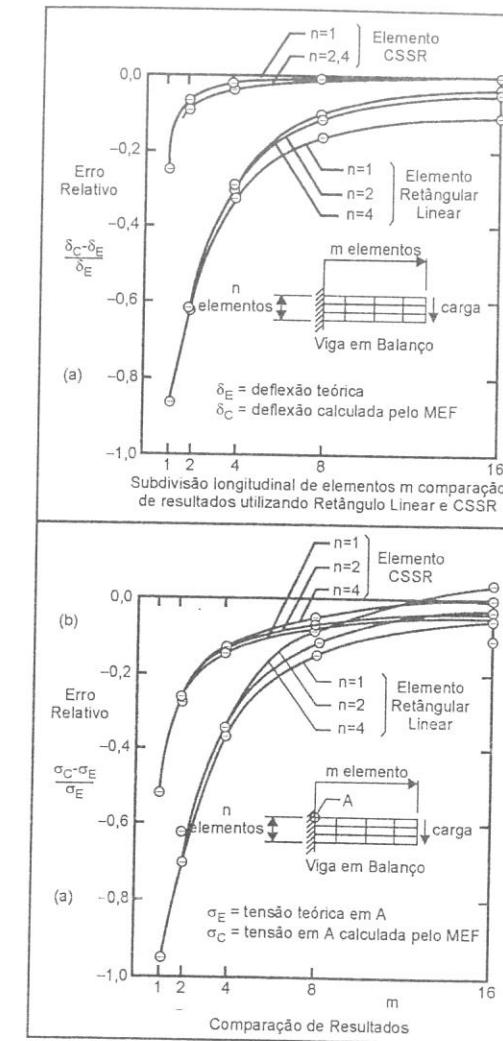


Figura 5.31 – Comparação de resultados obtidos com os Elementos Retangulares Lineares de Estado Plano de Tensões e o Elemento CSSR.

5.6. COMPLEMENTO DO ELEMENTO DE ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES E O ELEMENTO SÓLIDO AXISIMÉTRICO

a) Elemento de Estado Plano de Deformações

Já estudamos anteriormente o problema do *Estado Plano de Tensões*. Foi considerado o caso de uma chapa fina sob ação de cargas atuando apenas no plano da chapa, e para a representação deste comportamento estrutural formulamos o *Elemento de*

Estado Plano de Tensões. Para uma chapa cuja geometria era definida no plano xy , as tensões perpendiculares ao seu plano eram nulas, isto é, $\sigma_z = 0$.

O comportamento estrutural de alguns corpos sólidos, sob determinadas condições, pode ser simplificado e ser tratado como um problema plano, que guarda algumas semelhanças com o problema de Estado Plano de Tensões. É o caso de um corpo prismático de seção plana, que guarda algumas semelhanças com o problema de Estado Plano de Tensões. É o caso de um corpo prismático de seção plana, que guarda algumas semelhanças com o problema de Estado Plano de Tensões. Neste caso, o carregamento longo, como mostra a figura 5.32, em que é representada uma barragem submetida à pressão lateral. Neste caso, o carregamento longo, como mostra a figura 5.32, em que é representada uma barragem submetida à pressão lateral. Neste caso, o carregamento longo, como mostra a figura 5.32, em que é representada uma barragem submetida à pressão lateral. Neste caso, o carregamento longo, como mostra a figura 5.32, em que é representada uma barragem submetida à pressão lateral.

É, entretanto, importante observar que se considerarmos uma fatia isolada, como mostra a figura 5.32, sob a ação do carregamento de pressão, esta deveria se comportar como uma chapa sob cargas no seu plano. Se a fatia estivesse então trabalhando isolada, tal como uma chapa, apresentaria expansão lateral decorrente do efeito do coeficiente de Poisson. Estas deformações ocorreriam na direção z . Entretanto, as diversas faias do sólido estão “coladas”umas às outras, impedindo as deformações na direção z . Esse impedimento às deformações em z geram tensões nessa direção. Assim, ao contrário da condição de estado plano de tensões, surgem tensões normais $\sigma_z \neq 0$ perpendiculares ao plano da fatia, responsáveis por manter nulas as deformações nessa direção, isto é $\varepsilon_z = 0$, atendendo a essa condição de compatibilidade.

Assim, as deformações ocorrem apenas no plano xy , sendo caracterizado então o *Estado Plano de Deformações*. Os componentes de deslocamentos de um ponto da fatia estão também no plano xy , e são u na direção x , e v na direção y , que à semelhança do Estado Plano de Tensões são funções de x e y , e independem de z .

Recordando a equação que fornece as deformações na direção z em um ponto de um corpo sólido, do Quadro VIII (equações r), temos:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - v \cdot \frac{\sigma_x}{E} - v \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

Considerando a condição $\varepsilon_z = 0$ para os pontos da fatia em estudo, teremos:

$$0 = \frac{\sigma_z}{E} - v \cdot \frac{\sigma_x}{E} - v \cdot \frac{\sigma_y}{E}, \text{ o que resultará: } \sigma_z = v \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \quad (5.74)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - v \cdot \frac{\sigma_y}{E} - v \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - v \cdot \frac{\sigma_x}{E} - v \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_y - v(\sigma_x + \sigma_z)] \end{cases}$$

E substituindo a relação 5.74 nos valores de σ_z acima, teremos:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - v(\sigma_y + v(\sigma_x + \sigma_y))] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - v(\sigma_x + v(\sigma_x + \sigma_y))] \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1-v^2)\sigma_x - v(1+v)\cdot\sigma_y] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1-v^2)\sigma_y - v(1+v)\cdot\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+v)}{E} \cdot \tau_{xy} \end{cases} \quad (5.75)$$

Assim, a relação tensão-deformação para material isotrópico sob condição de Estado Plano de Deformações será:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2v}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.76)$$

Dessa forma, o estudo do Corpo Sólido, nas condições definidas como *Estado Plano de Deformações*, é feito de forma semejante ao Estado Plano de Tensões. Considera-se uma fatia unitária do corpo, valendo as equações 5.75 e 5.76 para o cálculo das deformações e tensões nas direções x e y . Porém, neste caso, além das Tensões σ_x e σ_y atuam as Tensões σ_z , que são dadas ponto a ponto da fatia pela relação (5.74).

Com base nestas hipóteses, podemos formular o *Elemento Finito de Estado Plano de Deformações*. A rigor, apesar de se tratar da discretização de um problema de Estado Triaxial de Tensões em um sólido, o elemento tem natureza bidimensional. Os componentes de deslocamentos de um ponto do elemento estão no plano xy , e são u na direção x , e v na direção y , que à semelhança do Estado Plano de Tensões são funções de x e y , e independentes de z . As *Funções de interpolação ou Funções de Deslocamentos* são as mesmas do Estado Plano de Tensões. A partir da resolução de uma fatia unitária, determinando as Tensões σ_x e σ_y , pode-se determinar por uma relação simples a tensão σ_z .

Os elementos finitos formulados para a resolução do problema de Estado Plano de Deformações limitam-se ao cálculo de σ_x , σ_y e τ_{xy} como funções somente de x e y , e que já são de nosso conhecimento, e à semelhança dos elementos de estado de plano de tensões, podem ser Triangulares, Retangulares, Lineares ou Parabólicos. A figura 5.32 representa uma malha de elementos quadrilaterais lineares para aplicações de Estado Plano de Deformações.

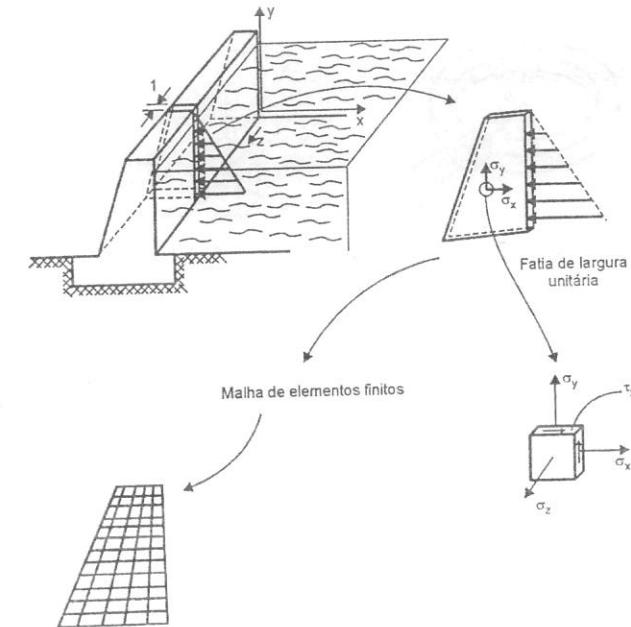


Figura 5.32 – Estado Plano de Deformações. Embora seja um problema tridimensional, o estudo de uma fatia permite analisar a estrutura como um problema bidimensional, pois todas as faias unitárias do corpo estão na mesma condição. Do ponto de vista prático, a tarefa de geração da malha em elementos finitos é efetuada sobre uma figura geométrica plana.

b) Elemento Sólido Axisimétrico

Os **Elementos Sólidos Axisimétricos** são utilizados na **Análise de Corpos Sólidos de Revolução**, isto é, que têm geometria axialmente simétrica, e sujeitos a **carregamentos também axisimétricos**. O problema matemático do elemento axisimétrico é como já vimos, o comportamento de cada fatia unitária se repete ao longo das diversas seções do corpo ao longo do eixo z . Em um comportamento de cada setor é idêntico. À semelhança do Estado Plano de Deformações, em que as deformações estão confinadas na fatia unitária, e apenas esta é estudada, no Caso do Comportamento do Sólido Axisimétrico, as deformações estão confinadas ao setor, e podemos estudar simplificadamente o comportamento do sólido, estudando o comportamento de um setor de ângulo unitário.

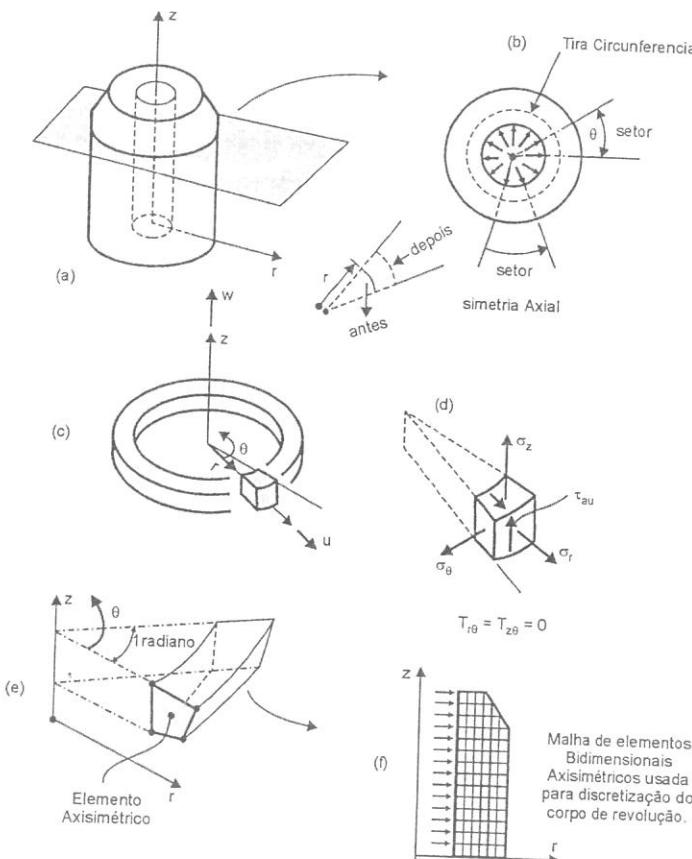


Figura 5.33 – Elemento Sólido Axisimétrico.

Normalmente, devido a interesses de facilidade na representação matemática do fenômeno, o comportamento dos sólidos que têm geometria axialmente simétrica é descrito em **coordenadas cilíndricas**, em que a posição de um ponto é definida pelas coordenadas r, θ e z , como mostra a figura 5.33. Além de a geometria ser axialmente simétrica, também as propriedades do material e o carregamento o são, daí o problema ter natureza bidimensional, e independente do ângulo θ . O **deslocamento circunferencial é nulo ($v = 0$) e os pontos do sólido se deslocam radialmente (u) e axialmente (w)**.

Dessas considerações anteriores, justifica-se a adoção do sistema de coordenadas cilíndricas. Do ponto de vista prático, a identificação da existência das condições de axisimetria em um problema de Elasticidade Tridimensional, como conceituado anteriormente, permite efetuar a resolução do problema pelo Método dos Elementos Finitos, sem a necessidade de efetuar um Modelo Tridimensional, ou seja, sem a necessidade da utilização de um número muito grande de graus de liberdade, tornando a solução muito mais rápida em comparação ao Modelo Estrutural Tridimensional do Sólido. As mesmas observações valem para o caso do Estado Plano de Deformações. Prova-se na Teoria da Elasticidade que para o caso de material isotrópico, na condição de axisimetria, temos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \frac{(1-v)E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

Sendo u o componente de deslocamento em r e w o componente de deslocamento em z , as deformações são calculadas pelas primeiras derivadas dos deslocamentos. A deformação ϵ_θ é determinada considerando uma tira circunferencial, como mostra a figura 5.33.b.

Antes da deformação o comprimento da tira pode ser calculado em função do raio r , e vale $2\pi r$. Como os deslocamentos radiais valem u , após a deformação os pontos dessa tira passam a se situar em uma circunferência de raio $(r+u)$ e de comprimento $2\pi(r+u)$. Assim, pela definição de deformação:

$$\epsilon_\theta = \frac{\text{comprimento final} - \text{comprimento inicial}}{\text{comprimento inicial}} = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

A distorção é dada por:

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

Note que as deformações anteriormente definidas são aplicações dos conceitos já revisados da Teoria da Elasticidade, apenas que neste caso em Coordenadas Cilíndricas.

Portanto, para formular o ELEMENTO SÓLIDO AXISIMÉTRICO, podemos aplicar o Procedimento Padrão, definindo as funções de Interpolação para o Campo de Deslocamentos. A figura 5.34 estabelece a comparação entre os elementos de estado Plano de Deformações e o Elemento Sólido Axisimétrico, ambos com características bidimensionais. As formulações são semelhantes, e ambos são problemas de natureza bidimensional. Não desenvolvemos os demais passos para a obtenção da matriz de rigidez do elemento, já que não apresenta nenhuma novidade em relação a todos os casos estudados anteriormente, e corresponde à aplicação do procedimento padrão já conhecido.

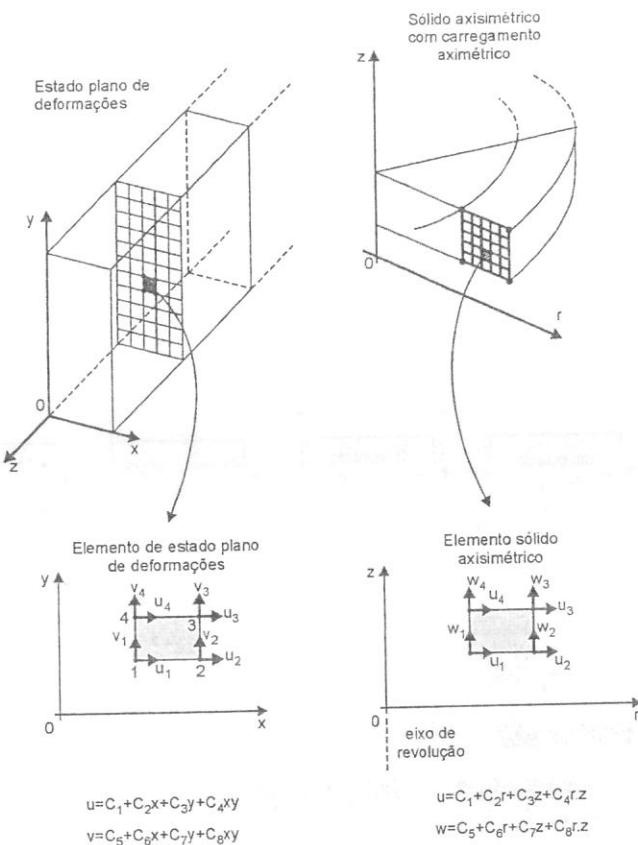
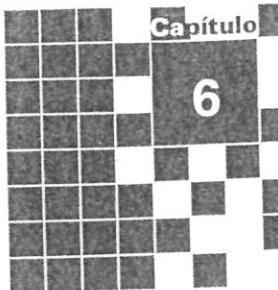


Figura 5.34 - Comparação entre Elemento de Estado Plano de Deformações e Elemento Sólido Axisimétrico.



Formulação Isoparamétrica e Complementos

A formulação isoparamétrica em elementos finitos, representando os elementos já estudados por intermédio do sistema de coordenadas natural.

Formulação geral do método.

6.1. INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, formulamos os diversos elementos finitos que são utilizados na maioria das aplicações de Análise Estrutural. A utilização das Funções de Interpolação para estabelecimento do Campo de Deslocamentos e a consequente determinação das Matrizes de Rígidez dos diversos Elementos Finitos constituíram o ponto central da nossa discussão. Algumas regras foram estabelecidas, de modo a permitir a resolução do problema com aproximação satisfatória. O Procedimento de Geração da Formulação de qualquer Elemento Finito foi padronizado e permitiu uma abordagem geral adotada para todos os elementos.

Os recursos matemáticos utilizados para formular os diversos elementos finitos eram nossos conhecidos desde os cursos básicos de matemática, envolvendo também os conceitos de derivação e integração de funções. A especificação das propriedades do elemento finito, por intermédio da linguagem matemática, não nos liberava do entendimento físico do modelo proposto. O seu entendimento era fundamental para dar subsídios ao processo de geração de uma malha.

A escolha do tipo de elemento guardava uma relação íntima com o fenômeno físico que este se propunha a representar. Entendida esta questão, vários elementos poderiam representar um mesmo comportamento desejado, porém a eficiência com que cada qual o fazia, estava condicionada à formulação matemática escolhida. Assim, por exemplo, para o Estado Plano de Tensões, tínhamos definido os elementos triangular linear, retangular linear, os elementos parabólicos, etc. A discussão matemática das diversas formulações forneceu-nos subsídios para estabelecermos as comparações entre os diversos elementos.

Ao discutirmos as *formulações propostas para os diversos elementos finitos*, utilizamos até então a representação das funções em *Coordenadas Cartesianas*. O tratamento matemático das funções propostas em coordenadas cartesianas apresentava comodidades para nós, acostumados que fomos desde os primeiros estudos da matemática a trabalhar com as variáveis *x*, *y* e *z*. Os processos de derivação e integração de funções estabelecidos nessas variáveis nos deixavam mais confortáveis.

Entretanto, como o *Método dos Elementos Finitos deve ser implementado computacionalmente*, a manipulação das Funções de Interpolação em notação matricial deve ser efetuada do modo mais eficiente possível, e nem sempre a representação no

Sistema Cartesiano oferece-nos essa possibilidade, como veremos. Surge então a necessidade de introduzir uma nova forma de representar as mesmas *Funções de Interpolação dos elementos*, por intermédio do chamado *Sistema de Coordenadas Naturais*, que introduziremos no próximo item. Nesta representação, embora a relação com o fenômeno físico não seja tão óbvia como no sistema cartesiano, muitos ganhos no tratamento numérico das funções são obtidos.

Vale lembrar, porém, que esta nova forma de representar o elemento não anulará todo o desenvolvimento efetuado até agora. O trabalho com as formulações dos elementos no sistema cartesiano é para nós mais adequado, no sentido de traduzir um dado comportamento físico e enxergá-lo nessa notação matemática, e deve ser sempre utilizado em nossas discussões que não necessitam de operações matriciais. Estas últimas são atribuições do computador. É exatamente por este motivo que só será discutida a *Formulação Isoparamétrica em Elementos Finitos* neste último capítulo.

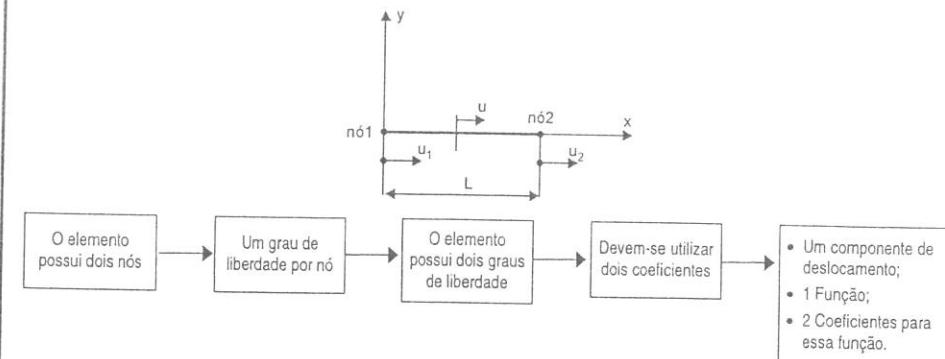
6.2. SISTEMA DE COORDENADAS NATURAIS – FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA EM ELEMENTOS FINITOS

Por intermédio de um exemplo simples, podemos introduzir a principal idéia contida na Formulação Isoparamétrica em Elementos Finitos. A Função de Interpolação de um dado elemento finito permite-nos, a partir dos Deslocamentos Nodais, calcular os Deslocamentos dentro do Elemento. Ao atribuirmos as Funções de Deslocamentos ao Elemento, a determinação dos coeficientes desconhecidos dessa função envolve o trabalho de substituição de valores da função nos pontos nodais e o trabalho de inversão da Matriz Geométrica [A]. O Quadro XI sintetiza esse procedimento para o elemento de treliça. Neste, a Matriz Geométrica [A] tem dimensão 2x2, pois o elemento finito tem 2 graus de liberdade. Analogamente, em um elemento sólido hexaédrico, a Matriz [A] tem dimensão 24x24, pois este tem 24 graus de liberdade. Note que a expressão III do Quadro XI permite determinar o Deslocamento em qualquer ponto do Elemento Finito em função dos deslocamentos nodais.

Quadro XI – Determinação dos Deslocamentos dentro de um Elemento Finito a partir dos Deslocamentos Nodais

Elemento de Treliça

Função de Interpolação



Assim:

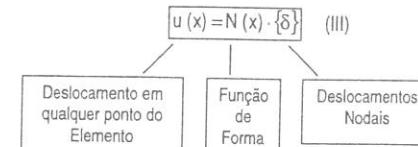
$$u(x) = C_1 + C_2 \cdot x \quad \text{ou} \quad u(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}}_{H(x)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \rightarrow u(x) = H(x) \cdot \{C\} \quad (\text{I})$$

Cálculos dos Coeficientes Desconhecidos

$$\begin{aligned} \text{Para } x=0 &\rightarrow u=u_1 \rightarrow u_1 = C_1 + C_2 \cdot 0 \rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\ \text{Para } x=L &\rightarrow u=u_2 \rightarrow u_2 = C_1 + C_2 \cdot L \end{aligned}$$

$$\text{Assim: } \{\delta\} = [A] \cdot \{C\} \Rightarrow \{C\} = [A]^{-1} \{\delta\} \quad (\text{II})$$

$$\text{Substituindo II em I, temos: } u(x) = \underbrace{H(x) \cdot [A]^{-1}}_{N(x)} \cdot \{\delta\}$$



Da expressão II do quadro XI podemos verificar sem dificuldade que $C_1 = u_1$ e $C_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}$ e a função de interpolação para o elemento Treliça será:

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot x \quad (6.1)$$

a equação 6.1 podemos observar que:

$$\begin{array}{ll} \text{ara } x=0 \rightarrow u(0) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot 0 & \rightarrow u(0) = u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \text{ara } x=L \rightarrow u(L) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot L & \rightarrow u(L) = u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 \\ \text{ara } x=\frac{L}{2} \rightarrow u\left(\frac{L}{2}\right) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot \frac{L}{2} & \rightarrow u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot u_1 + \frac{1}{2} \cdot u_2 \\ \text{ara } x=\frac{L}{4} \rightarrow u\left(\frac{L}{4}\right) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot \frac{L}{4} & \rightarrow u\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot u_1 + \frac{1}{4} \cdot u_2 \\ \text{ara } x=\frac{3}{4}L \rightarrow u\left(\frac{3}{4}L\right) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot \frac{3L}{4} & \rightarrow u\left(\frac{3}{4}L\right) = \frac{1}{2} \cdot u_1 + \frac{3}{4} \cdot u_2 \end{array}$$

interessante observar a partir dos valores anteriormente calculados, que os deslocamentos dentro do elemento são calculados a partir dos deslocamentos nodais, e cada um dos deslocamentos nodais contribui com um "peso" nesse cálculo. Ou seja, o cálculo de deslocamentos pode ser entendido como uma "média ponderada" dos deslocamentos nodais. Em particular, para o caso da formulação Linear, um ponto localizado no centro do elemento tem deslocamento que é a média aritmética de u_1 e u_2 , e assim por diante para os outros pontos, considerando a contribuição de u_1 e u_2 ponderadamente, em função da distância que o ponto se encontra dos nós 1 e 2. Note que essa idéia de obtenção dos deslocamentos dentro do elemento, a partir dos deslocamentos nodais, independe da dimensão física do elemento, enfim, do seu comprimento L .

A interpolação neste caso é obtida diretamente, sem a necessidade de inversão da matriz geométrica [A]. Assim, é possível estabelecer todo o procedimento de geração do campo de deslocamento dentro de um elemento finito, com base em um sistema dimensional, cuja interpolação é feita diretamente como no exemplo anterior. Evidentemente, os passos seguintes do procedimento Padrão já conhecidos para a determinação da Matriz de Rígidez do Elemento serão efetuados nesse novo sistema.

A formulação de rigidez do elemento é desenvolvida essencialmente da mesma forma, exceto que um novo sistema de coordenadas é utilizado, que é chamado de SISTEMA DE COORDENADAS NATURAIS. Nesse novo sistema, a localização de um ponto para o qual se deseja determinar o deslocamento não é referida ao tamanho físico dele, mas sim à sua posição relativa, isto é, se o ponto se encontra no "Meio" do elemento, nas extremidades, etc. No Sistema de Coordenadas Naturais, representado na figura 6.1, a idéia de posicionamento de um ponto de forma adimensional é feita por intermédio do parâmetro r .

- $r=0 \rightarrow$ Localiza o ponto no centro do elemento
- $r=+1 \rightarrow$ Localiza o ponto na extremidade (nó 2)
- $r=-1 \rightarrow$ Localiza o ponto na extremidade (nó 1)
- $r=+\frac{1}{2} \rightarrow$ Localiza o ponto a meia distância entre o centro e o nó 2 etc.

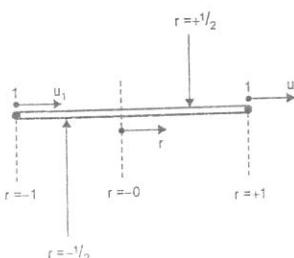


Figura 6.1 – Sistema Natural de Coordenadas. Por intermédio da coordenada natural r , localizamos qualquer ponto do elemento.

Dessa forma, o campo de deslocamentos dentro do elemento finito poderia ser formulado em função de r . Por exemplo:

$$u(x) = \left(\frac{1-r}{2} \right) \cdot u_1 + \left(\frac{1+r}{2} \right) \cdot u_2 \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} r=0 \rightarrow u = \frac{u_1 + u_2}{2} \\ r=+1 \rightarrow u = u_2 \\ r=-1 \rightarrow u = u_1 \\ \text{etc} \\ \vdots \end{cases}$$

As funções $h_1 = \frac{1-r}{2}$ e $h_2 = \frac{1+r}{2}$ são chamadas de FUNÇÕES DE FORMA, expressas em Coordenadas Naturais. Assim:

$$u(x) = h_1 \cdot u_1 + h_2 \cdot u_2 = \sum_{i=1}^2 h_i \cdot u_i \quad (6.3)$$

Note que estas funções de forma poderão ser armazenadas na Biblioteca de Elementos do Programa de Elemento Finito, estabelecendo a forma com a qual serão interpolados os deslocamentos, independente do tamanho que o elemento terá em uma dada malha.

Podemos observar adicionalmente que as funções h_1 e h_2 que interpolam os deslocamentos estão associadas à localização dos pontos do elemento, ou seja, à definição da geometria do Elemento representada no Sistema Natural e Coordenadas. A partir dessa idéia surgiu o desenvolvimento da Família de Elementos Isoparamétricos, que são amplamente utilizados nas aplicações do Método por intermédio dos "softwares" de Análise.

Nos Elementos Isoparamétricos, a mesma função que interpola o campo de deslocamentos entre os nós do elemento interpola também a geometria do elemento entre os nós, isto é, define a geometria do elemento. Na figura 6.2 é representado o mesmo elemento de treliça anteriormente analisado, definindo os pontos do elemento por intermédio da sua coordenada x , tal coordenada obtida a partir das coordenadas dos nós.

Assim, o procedimento para o tratamento geométrico do elemento seria estabelecido com o uso das mesmas funções de interpolação dos deslocamentos e à semelhança da equação (6.3), teremos:

$$x = \left(\frac{1-r}{2} \right) \cdot x_1 + \left(\frac{1+r}{2} \right) \cdot x_2$$

$$x = h_1 \cdot x_1 + h_2 \cdot x_2 = \sum_{i=1}^2 h_i \cdot x_i \quad (6.4)$$

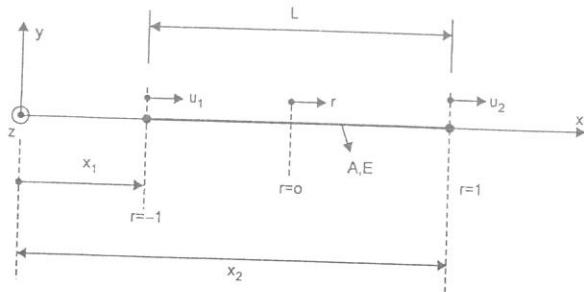


Figura 6.2 – Correspondência entre o Sistema Natural de Coordenadas e o Sistema Cartesiano para treliça de área A e material de Módulo de Elasticidade E.

Em resumo:

Formulação Isoparamétrica em Elementos Finitos

A mesma função de forma definida no Sistema Natural de Coordenadas interpola o Campo de Deslocamentos e as Coordenadas dos pontos do Elemento.

Façamos a determinação da Matriz de Rígidez do Elemento de Treliça para posteriormente estabelecermos algumas generalizações. Já sabemos que para o Cálculo Matriz de Rígidez do Elemento necessitamos da Matriz Deslocamento-Deformação [B], pois:

$$[k]^e = \int_{\text{vol}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d\text{vol} \quad (6.5)$$

em que [D] é a Matriz Elasticidade.

A Matriz Deslocamento – Deformação permite passar dos Deslocamentos Nodais para as Deformações dentro do Elemento. Como as deformações são calculadas pelas derivadas dos deslocamentos, a Matriz [B] contém derivadas, contabilizadas em relação ao Sistema Cartesiano Local. Porém, como o Elemento será formulado no Sistema Natural de Coordenadas, nós necessitamos de relacionar as derivadas obtidas no sistema Local com as derivadas no Sistema Natural. Em se tratando de duas variáveis diferentes, nesse caso x e r, podemos utilizar a Regra Cadeia do Cálculo de Derivadas. Assim:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{deformação na barra de treliça})$$

Regra da Cadeia:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \quad (6.6)$$

Como:

$$\begin{cases} u = \frac{1-r}{2} \cdot u_1 + \frac{1+r}{2} \cdot u_2 \\ x = \frac{1-r}{2} \cdot x_1 + \frac{1+r}{2} \cdot x_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

teremos para as derivadas:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} = \frac{u_2 - u_1}{2} \\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{-\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}} = \frac{1}{\frac{(x_2 - x_1)}{2}} = \frac{2}{L}, \text{ pois } x_2 - x_1 = L \end{cases} \quad (6.8)$$

Assim:

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{2} \cdot \frac{2}{L}, \text{ ou na forma Matricial.}$$

$$\begin{array}{c} \text{Deslocamentos Nodais} \\ \epsilon = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \text{Deformação} \\ \text{Matriz Deslocamento Deformação } [B] \end{array} \quad (6.9)$$

com $[B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix}$ e $[B]^T = \begin{bmatrix} -\chi & \chi \end{bmatrix}$ podemos calcular

$$[k]^e = \int_{\text{vol}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d\text{vol}$$

$$[k]^e = \int_{x_1}^{x_2} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot A \cdot dx$$

$$\begin{array}{l} \text{em que:} \\ d\text{vol} = A \cdot dx \\ [D] = E \quad (\text{estado uniaxial de tensões}) \\ \text{e de 6.8} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{L} \therefore \partial x = \frac{L}{2} \cdot \partial r \end{array}$$

A expressão $\partial x = \frac{L}{2} \cdot \partial r$ relaciona o comprimento ∂x medido no Sistema Cartesiano ao Comprimento ∂r medido no Sistema de Coordenadas Naturais. Nos problemas bidimensionais e tridimensionais essa relação é mais complexa e genericamente efetuada pelo Jacobiano simbolizado por J. Assim neste caso particular da Treliça:

$$\partial x = J \cdot \partial r \quad (6.10)$$

em que:

$$J = \frac{L}{2}$$

Vamos calcular integral 6.5. Em coordenadas cartesianas, o domínio dessa integração seria de x_1 a x_2 , porém no Sistema Natural em coordenadas naturais o domínio da integração será de -1 a +1.

$$[k]^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\chi \\ \chi \end{bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \cdot A \cdot \frac{L}{2} \cdot \partial r$$

A integração da expressão anterior resultará:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} AE & -AE \\ -AE & AE \end{bmatrix}$$

que já conhecímos do estudo do Elemento de Treliça.

6.3. GENERALIZANDO OS CONCEITOS ANTERIORES

Vimos no capítulo 5 que, por intermédio dos polinômios de alta ordem, podemos aumentar o número de graus de liberdade do elemento, obtendo uma formulação mais rica para o campo de deslocamentos. Como os elementos isoparamétricos são baseados na mesma função de forma para definir a geometria e o campo de deslocamentos, por intermédio da definição de nós ao longo dos lados do elemento podemos representar a configuração geométrica da estrutura da forma mais acurada possível, considerado o "contorno curvilíneo" da estrutura, pois as funções de alta ordem permitem essa representação.

Assim, por exemplo, quando as funções de forma representando o campo deslocamentos são polinômios quadráticos, as faces do elemento são descritas pelas mesmas funções quadráticas.

A idéia da formulação isoparamétrica, aplicada inicialmente ao elemento de Treliça por facilidades didáticas, pode ser expandida para os demais elementos finitos já estudados. Da mesma forma que no problema unidimensional, à coordenada cartesiana x corresponde a coordenada natural r , para as outras dimensões serão estabelecidas as devidas correspondências entre o sistema Cartesiano e o Sistema Natural. Assim, teremos:

Sistema Cartesiano Coordenadas	Sistema Natural Coordenadas
x, y, z	r, s, t

A figura 6.3 representa um elemento bidimensional e um elemento tridimensional, e os Sistemas Cartesiano e Natural.

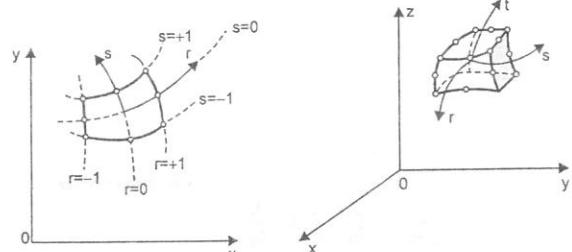


Figura 6.3 – Elementos Isoparamétricos Sistema Cartesiano e Sistema Natural de Coordenadas.

À semelhança das expressões 6.3 e 6.4 em que são interpolados o campo deslocamentos e a geometria do Elemento, o mesmo procedimento pode ser utilizado para formular os elementos bidimensionais. A interpolação é feita considerando separadamente os componentes de deslocamentos u , v e w e as coordenadas x , y e z . Assim, de forma mais geral, temos:

Deslocamento	Coordenadas
$u = \sum_{i=1}^p h_i \cdot u_i$	$x = \sum_{i=1}^p h_i \cdot x_i$
$v = \sum_{i=1}^p h_i \cdot v_i$	$y = \sum_{i=1}^p h_i \cdot y_i$
$w = \sum_{i=1}^p h_i \cdot w_i$	$z = \sum_{i=1}^p h_i \cdot z_i$
(6.12)	(6.13)

em que:

x, y, z – coordenadas de qualquer ponto do elemento.

x_i, y_i, z_i – coordenadas de um nó i do elemento.

p – número de nós do elemento.

Como ilustra a figura 6.4.

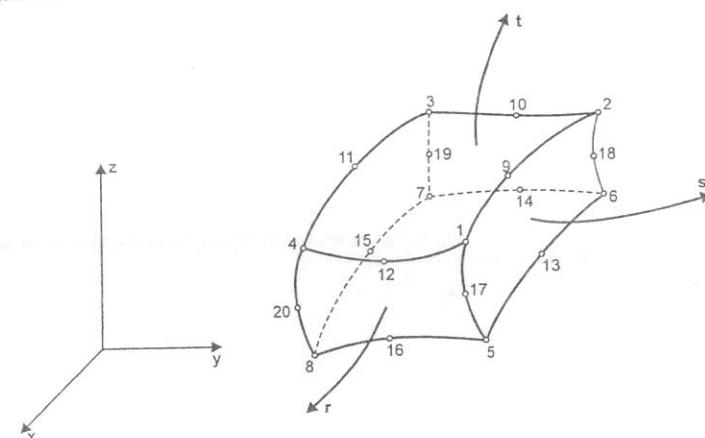


Figura 6.4 – Elemento Sólido Isoparamétrico com 20 nós.

A figura 6.5 representa um Elemento de Estado Plano de Tensão Isoparamétrico. São apresentados os Elementos Linear e Parabólico, juntamente com as respectivas funções de Interpolação. Neste exemplo, a idéia da definição Isoparamétrica do elemento segue a mesma filosofia adotada para o elemento de treliça, porém, neste caso, em duas dimensões.

No elemento linear são adotadas as funções de interpolação h_1 a h_4 . No elemento parabólico são utilizadas, além das funções h_1 a h_4 , as funções h_5 a h_9 , representando a geometria e os deslocamentos de forma quadrática.

Vamos fixar a nossa atenção no caso do elemento linear, e aplicar os mesmos passos desenvolvidos para o elemento de treliça. Essa idéia valerá para a abordagem dos demais elementos finitos. Assim:

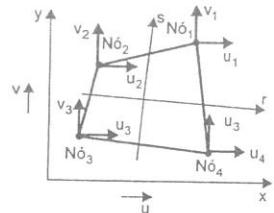
INTERPOLAÇÃO DA GEOMETRIA DO ELEMENTO

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)x_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4 \\ y = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)y_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4 \end{cases} \quad (6.14)$$

Sendo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , etc. as coordenadas dos nós do elemento.

INTERPOLAÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)u_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)u_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)u_4 \\ v = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)v_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)v_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)v_4 \end{cases} \quad (6.15)$$



$$\begin{aligned} u &= h_1 \cdot u_1 + h_2 \cdot u_2 + h_3 \cdot u_3 + h_4 \cdot u_4 \\ v &= h_1 \cdot v_1 + h_2 \cdot v_2 + h_3 \cdot v_3 + h_4 \cdot v_4 \end{aligned}$$

em que:

$$h_1 = \frac{1}{4} (1+r) (1+s)$$

$$h_2 = \frac{1}{4} (1-r) (1+s)$$

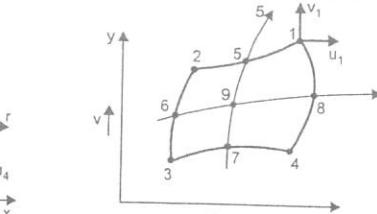
$$h_3 = \frac{1}{4} (1-r) (1-s)$$

$$h_4 = \frac{1}{4} (1+r) (1-s)$$

ou

$$u = \sum_{i=1}^4 h_i \cdot u_i \quad (4 \text{ nós})$$

$$v = \sum_{i=1}^4 h_i \cdot v_i$$



$$\begin{aligned} u &= h_1 \cdot u_1 + h_2 \cdot u_2 + h_3 \cdot u_3 + h_4 \cdot u_4 + h_5 \cdot u_5 + h_6 \cdot u_6 + h_7 \cdot u_7 + h_8 \cdot u_8 + h_9 \cdot u_9 \\ v &= h_1 \cdot v_1 + h_2 \cdot v_2 + h_3 \cdot v_3 + h_4 \cdot v_4 + h_5 \cdot v_5 + h_6 \cdot v_6 + h_7 \cdot v_7 + h_8 \cdot v_8 + h_9 \cdot v_9 \end{aligned}$$

h_1, h_2, h_3 e h_4 são as mesmas funções do Elemento Linear ao Lado, e

$$h_5 = \frac{1}{2} (1-r^2) (1+s)$$

$$h_6 = \frac{1}{2} (1-s^2) (1-r)$$

$$h_7 = \frac{1}{2} (1-r^2) (1-s)$$

$$h_8 = \frac{1}{2} (1-s^2) (1+r)$$

$$h_9 = \frac{1}{2} (1-r^2) (1-s^2)$$

ou

$$u = \sum_{i=1}^9 h_i \cdot u_i \quad (9 \text{ nós})$$

$$v = \sum_{i=1}^9 h_i \cdot v_i$$

Figura 6.5 – Elementos Isoparamétricos de Estudo Plano de Tensões, Linear e Parabólico.

Das expressões 6.14 e 6.15 podemos observar que o campo de deslocamentos é interpolado linearmente e geometria também, daí os lados do elemento constituírem segmentos de reta.

$$\begin{cases} u(r, s) = \sum_i h_i(r, s) \cdot u_i = h_1 \cdot u_1 + h_2 \cdot u_2 + h_3 \cdot u_3 + h_4 \cdot u_4 \\ v(r, s) = \sum_i h_i(r, s) \cdot v_i = h_1 \cdot v_1 + h_2 \cdot v_2 + h_3 \cdot v_3 + h_4 \cdot v_4 \end{cases} \quad (6.16)$$

Derivando as expressões anteriores em relação a x e y , teremos:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial h_1}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial h_2}{\partial x} \cdot u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial x} \cdot u_3 + \frac{\partial h_4}{\partial x} \cdot u_4 \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial h_1}{\partial y} \cdot v_1 + \frac{\partial h_2}{\partial y} \cdot v_2 + \frac{\partial h_3}{\partial y} \cdot v_3 + \frac{\partial h_4}{\partial y} \cdot v_4 \end{cases} \quad (6.17)$$

É importante observar que as expressões 6.17 permitem calcular deformações em função dos deslocamentos nodais, desempenhando, portanto, papel fundamental na definição da matriz de Rigidez do Elemento Finito, pois a determinação de $[k]^e$ depende fundamentalmente do conhecimento da relação Deslocamento Deformação no âmbito do Elemento. Do ponto de vista matricial, já sabemos que essa relação é expressa pela Matriz $[B]$.

É interessante relembrar que as funções h_1, h_2, h_3, h_4 de (6.16), e representadas na figura 6.5, são dadas no sistema Natural de Coordenadas, por intermédio das variáveis r e s . Dessa forma, o cálculo das derivadas $\frac{\partial h_1}{\partial x}, \frac{\partial h_2}{\partial x}$, ou genericamente $\frac{\partial h_i}{\partial x}, \frac{\partial h_i}{\partial y}$, em relação às variáveis x e y , necessita de alguns cuidados, pois essas funções não são conhecidas explicitamente. A correspondência de coordenadas naturais e cartesianas pode ser estabelecida utilizando a regra da cadeia do cálculo Diferencial. Assim, na matemática prova-se que:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial r} = \frac{\partial h_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial h_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} = \frac{\partial h_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial h_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \end{cases} \quad (6.18)$$

Representando matricialmente as equações anteriores, teremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{cases} \quad (6.19)$$

Na expressão 6.19, o membro à esquerda contém derivadas das funções h_i em relação às variáveis r e s . Como essas funções são dadas nessas variáveis, as derivadas serão facilmente calculadas. A matriz da expressão 6.19 contém as derivadas $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial r}$ e $\frac{\partial y}{\partial s}$. Como x e y são dadas explicitamente em função de r e s , os termos dessa matriz quadrada poderão também ser determinados. A matriz quadrada citada, relaciona as derivadas no Sistema Local, às derivadas no Sistema Natural, e constitui portanto o Operador Jacobiano $[J]$ citado anteriormente. Assim:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{cases} = [J] \cdot \begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{cases} \quad (6.20)$$

em que:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

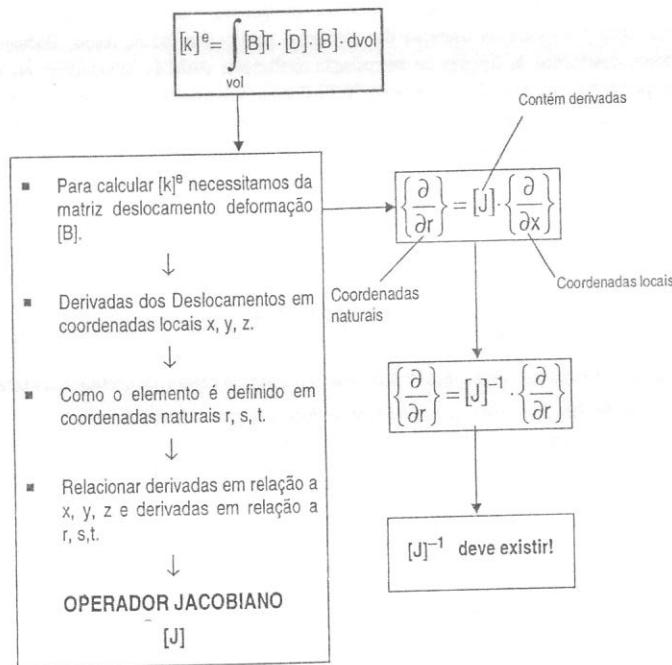
Como temos interesse nas derivadas $\frac{\partial h_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial h_i}{\partial y}$ para o cálculo das deformações em 6.17, devemos inverter a matriz $[J]$. Assim:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

A partir da expressão 6.22 poderemos proceder ao cálculo as deformações em 6.17.

Aqui surge então a questão central, relacionada ao uso dos elementos isoparamétricos, e as consequentes transformações entre os Sistemas de Coordenadas Natural e Local. A equação 6.22 só terá solução se $[J]^{-1}$ existir, ou seja, a matriz $[J]$ deverá possuir inversa, não podendo ser singular.

A interpretação dessa condição e suas consequências práticas veremos adiante. De forma esquemática, podemos resumir:



Observações

1) Observações em relação às expressões desenvolvidas anteriormente

Foi discutida neste item a idéia principal que norteia a determinação das **deformações dentro do elemento em função dos deslocamentos nodais no Sistema Natural de Coordenadas**. Do ponto de vista prático, isso significa que essa relação é obtida também diretamente, por intermédio das derivadas das funções de interpolação definidas diretamente no sistema natural de coordenadas. Já sabemos que a representação do cálculo das deformações dentro do elemento finito a partir dos deslocamentos nodais se faz, matricialmente, por intermédio da **Matriz Deslocamento-Deformação** $[B]$. Como o Elemento Finito foi definido no Sistema Natural de Coordenadas, a Matriz $[B]$ será também expressa nesse sistema e, como consequência, a Matriz de Rigidez do Elemento $[k]^e$ calculada pela expressão 6.5 também o será.

Assim, o próximo passo seria procedermos ao cálculo de todas as derivadas representadas nas equações 6.15, o que permitiria identificar a matriz $[B]$ e, posteriormente, calcularmos a integral dada por 6.5, obtendo a **Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Natural de Coordenadas**. Esse procedimento, como vemos, é idêntico ao que aplicamos anteriormente na definição da Matriz de Rigidez de qualquer elemento finito, apenas que agora estamos trabalhando no sistema de coordenadas naturais.

Dessa forma, as matrizes de rigidez contidas na biblioteca de elementos de um programa em elementos finitos são definidas no Sistema Natural, e as formulações dos elementos nessas matrizes utilizam, de forma mais geral, os parâmetros r, s e t adimensionais. Como o desenvolvimento de todos os cálculos anteriormente definidos envolverá a manipulação de um grande número de derivadas e posterior cálculo de uma integral no domínio do elemento, não efetuaremos aqui este trabalho, que seria semelhante ao caso da treliça anteriormente formulada no sistema natural. Porém, de forma mais importante, abordaremos os aspectos conceituais envolvidos na representação da matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas naturais.

Evidentemente a representação do elemento na forma isoparamétrica resultou em ganhos, pela forma direta que permitiu a interpolação dos deslocamentos. Porém, algumas considerações decorrentes dessa nova representação devem ser efetuadas. É importante, neste estágio, abordarmos a questão da Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez dos seus elementos, e como a definição isoparamétrica do elemento finito afeta esse procedimento por nós já conhecido.

O procedimento de Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das matrizes de rigidez dos seus elementos representa basicamente, do ponto de vista físico, uma operação de soma de forças, associada a deslocamentos unitários. Vimos anteriormente que essas forças devem estar referidas a um sistema de referência único que seja válido para a estrutura como um todo, ou seja, o Sistema Global de Coordenadas. Como os elementos eram definidos no sistema local de coordenadas, era necessário transformar as forças nodais do sistema local para o sistema global, por intermédio da matriz de transformação do elemento. Como consequência, antes de o processo de montagem da matriz de rigidez da estrutura ser efetuado, todos os elementos finitos constituintes do modelo estrutural devem ter suas matrizes de rigidez transformadas do sistema local para o sistema global.

Embora o elemento seja formulado no sistema de coordenadas natural, o procedimento de montagem da matriz de rigidez da estrutura não sofrerá alteração. Assim, a matriz de rigidez de cada elemento definida em coordenadas naturais na biblioteca de elementos deverá ser representada no sistema local, para ser submetida posteriormente à operação de Transformação para o sistema global, e então permitir o procedimento de montagem.

Como a determinação da Matriz de Rigidez do Elemento envolve o processo de integração dado pela equação 6.5, que necessita basicamente do conhecimento da Matriz Deslocamento-Deformação $[B]$, a passagem da Matriz de Rigidez do Elemento do Sistema Natural para o sistema local envolve basicamente a Transformação da Matriz $[B]$ de um sistema para outro. Como a Matriz $[B]$ contém derivadas dos deslocamentos, a passagem de $[B]$ de um sistema para outro envolve a transformação de derivadas de um sistema de coordenadas para outro, operação esta já bastante conhecida do Cálculo Diferencial. Assim, se conhecermos o **procedimento de passagem de derivadas dos deslocamentos do sistema natural para o sistema local**, poderemos facilmente estabelecer a passagem da matriz de rigidez do sistema natural para o sistema local, e seguir posteriormente o procedimento de montagem.

Podemos estabelecer uma analogia: a idéia da Transformação de um dado conjunto de grandezas de um sistema para outro já foi explorada na definição da Matriz de Rigidez dos Elementos Finitos. Em se tratando da **correspondência entre o sistema de coordenadas local e global**, a transformação dos componentes de deslocamentos era efetuada por intermédio da **Matriz de Transformação**. Estamos diante de um problema semelhante, porém que **envolve transformação de grandezas entre o Sistema Natural e o Sistema Local**, e neste caso **Transformações das Derivadas** dos deslocamentos de um sistema para outro. Essa transformação é também efetuada com o auxílio de uma Matriz. A Matriz que efetua a **Operação de Correspondência entre Derivadas nos Sistema Natural e Local** é chamada de **Operador Jacobiano**, e representada na Notação Matricial por $[J]$.

2) Observações em Relação ao Operador Jacobiano - Distorção do Elemento

- A partir da expressão 6.10, em que foi inicialmente estudado o caso unidimensional de um elemento de treliça, podemos observar que o operador Jacobiano pode ser considerado como um fator de escala que descreve a dimensão dx associada à dimensão dr.
- Uma idéia da aplicação matemática do Operador Jacobiano pode ser relembrada dos cursos de cálculo integral e diferencial. Ao efetuar uma integração no plano xy, a partir de uma área elementar dx·dy, em que as variáveis são x e y, pode-se estabelecer uma correspondência entre essa representação e a integral em coordenadas polares. Nesse caso $dx\cdot dy$ é substituído por $r\cdot dr\cdot d\theta$, sendo r e θ as variáveis, e $J = r$.
- A integração da equação (6.5) $[k]^e = \int_{vol} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dvol$ é efetuada para o caso mais geral, no domínio do volume do elemento. Essa integração pode ser efetuada no sistema local de coordenadas ou no sistema natural de coordenadas. Para um elemento diferencial de volume, na forma de um paralelepípedo, o volume dele é dado por $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Pode-se demonstrar que no sistema natural de coordenadas, a determinação desse volume elementar é feita por $dV = \det[J] \cdot dr \cdot ds \cdot dt$, em que $\det[J]$ é o determinante do operador Jacobiano.
- Já observamos anteriormente que a equação 6.22 só poderá ser resolvida se $\det[J] \neq 0$. Para os casos mais gerais de elementos formulados, a condição de singularidade do Jacobiano poderia ser investigada calculando o seu determinante, e em seguida investigando na expressão obtida a condição de $\det[J] = 0$. Embora o caminho para a obtenção desta condição tenha sido definido, o desenvolvimento matemático desse determinante foge aos objetivos deste texto introdutório. Porém, vale citar a condição de ocorrência dessa singularidade, que seria obtida a partir desse estudo:
- A Matriz Inversa do Operador Jacobiano existe, se houver uma correspondência biunívoca entre o sistema natural de coordenadas e o sistema local de coordenadas do elemento. Quando o elemento finito é muito distorcido, essa relação única entre os sistemas de coordenadas não existe, acarretando singularidade do operador Jacobiano. Por exemplo, em um elemento na forma de quadrilátero, os ângulos interiores devem ser menores que 180° para que o Jacobiano seja não singular. Os softwares de elementos finitos, que têm geradores de malha automáticos, utilizando uma geometria previamente definida como referência para gerar tais malhas, possuem critérios de avaliação que definem o grau de distorção do elemento finito gerado, verificando inclusive a situação extrema em que o ângulo entre dois lados do quadrilátero seja 180° , como indica a figura 6.6.

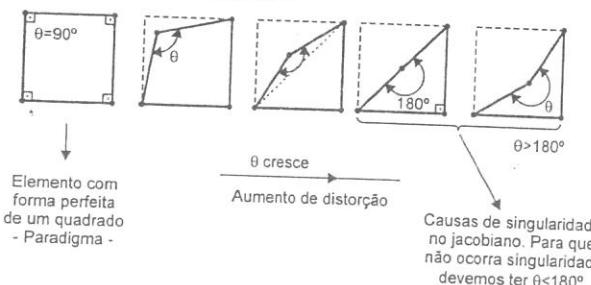


Figura 6.6 – Representação de elemento finito retangular sem distorção na forma de um quadrado, e elementos distorcidos, considerando o caso extremo de elementos que geram singularidade no operador Jacobiano.

- Por exemplo, para os elementos quadrilaterais e hexaédricos, as verificações efetuadas pelos softwares indicam, respectivamente, a medida do desvio do elemento gerado, em relação à forma perfeita de um elemento quadrado ou um elemento na forma de um cubo. Em regiões em que ocorrem altos valores de tensões, ou acentuadas variações de tensões, o cuidado do controle da distorção do elemento constitui um ponto importante.

3) Observação em relação aos Elementos com modos incompatíveis e sua formulação isoparamétrica

Já comentamos anteriormente que os conceitos físicos contidos na formulação dos diversos elementos finitos no sistema cartesiano não sofreram alterações pelo fato de esses elementos serem formulados, tomando como base o sistema natural de coordenadas. A utilização da formulação isoparamétrica introduziu uma série de vantagens do ponto de vista computacional, e, todavia, alguns requisitos tinham de ser satisfeitos. Vimos que os elementos finitos que consideram os modos incompatíveis de deslocamentos fornecem resultados mais adequados, pois os elementos lineares que consideram os modos compatíveis exageram na contabilização da rigidez dos elementos.

Estudamos o exemplo do Elemento Retangular de Estado Plano de Tensões com Tensões de Cisalhamento Constantes (CSSR), e compararmos seus resultados com o Elemento de Estado Plano de Tensões Retangular Linear. A introdução no elemento CSSR de termos quadráticos em sua formulação melhorou substancialmente o desempenho do elemento. Esta mesma idéia pode ser introduzida na formulação isoparamétrica. No caso do elemento CSSR, tínhamos que efetuar a inversão da Matriz de Geometria [A] a partir das dimensões físicas do elemento.

As vantagens da formulação isoparamétrica em termos de interpolar diretamente o campo de deslocamentos dentro do elemento estão presentes também no caso da definição dos elementos com modos incompatíveis. Podem-se adicionar explicitamente alguns termos quadráticos às funções de interpolação diretamente definidas, introduzindo em coordenadas naturais as mesmas vantagens obtidas na definição do elemento CSSR. Tomando as funções de interpolação em coordenadas naturais já definidas anteriormente para o Elemento Retangular Linear de Estado Plano de Tensões, podemos adicionar a essas funções os termos quadráticos, no sentido de melhorar o desempenho do elemento, de forma semelhante ao elemento CSSR. Assim, para um ponto qualquer pertencente ao elemento finito, dado pelas coordenadas naturais r e s , teremos para os componentes de deslocamentos u e v :

$$u = \frac{(1+r)(1+s)}{4} \cdot u_1 + \frac{(1-r)(1+s)}{4} \cdot u_2 + \frac{(1-r)(1-s)}{4} \cdot u_3 + \frac{(1+r)(1-s)}{4} \cdot u_4 + (1-r^2) \cdot a_1 + (1-s^2) \cdot a_2$$

$$v = \frac{(1+r)(1+s)}{4} \cdot v_1 + \frac{(1-r)(1+s)}{4} \cdot v_2 + \frac{(1-r)(1-s)}{4} \cdot v_3 + \frac{(1+r)(1-s)}{4} \cdot v_4 + (1-r^2) \cdot a_3 + (1-s^2) \cdot a_4$$

Os coeficientes a_1, a_2 , etc. fazem o mesmo papel dos graus de liberdade u_1, u_2 , etc., e podem ser considerados uma espécie de grau de liberdade do elemento, porém não associado ao nó, no sentido físico dos graus de liberdade dos elementos até aqui definidos. No caso do elemento sólido com oito nós, a introdução das funções associadas aos modos incompatíveis segue o mesmo procedimento, apenas introduzindo o componente de deslocamento w e o termo quadrático associado à coordenada natural t , que seria $(1-t^2)$.

6.4. INTEGRAÇÃO PARA OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO

A Matriz de Rigidez de um elemento finito pode ser obtida a partir do cálculo da integral

$$[k]^p = \int_{volume} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dvol, \text{ em que } dvol = dx \cdot dy \cdot dz. \text{ Como } dV = \det[J] \cdot dr \cdot ds \cdot dt, \text{ a integral anterior será dada por:}$$

$$[k]^p = \int_{volume} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot |J| \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (6.23), \text{ em que } |J| \text{ é o determinante do operador Jacobiano. Ou ainda, considerando que o}$$

O elemento isoparamétrico é definido no sistema natural de coordenadas no intervalo de -1 a +1, podemos escrever:

$$[k]^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] \cdot [B] \cdot |J| \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (6.24)$$

O cálculo da integral para obter a matriz de rigidez do elemento finito normalmente apresenta grandes dificuldades do ponto de vista algébrico. O desenvolvimento analítico dessas expressões é normalmente bastante difícil quando interpolações de alta ordem são utilizadas ou o elemento é muito distorcido. Integrações na forma analítica só são possíveis para elementos muito simples, nesse assim com uma enorme quantidade de manipulações matemáticas. Dessa forma, o cálculo da integral para obter a Matriz de rigidez do Elemento é efetuado por **procedimento numérico**. A **Integração Numérica** empregada utiliza os procedimentos estudados nas disciplinas de Cálculo Numérico, e a qualidade dos resultados obtidos está condicionada ao número de pontos de integração utilizados neste procedimento aproximado de cálculo.

Por exemplo, para o **Cálculo da Integral** $\int F(r) \cdot dr$ por **procedimento numérico**, considerando a função $F(r)$ definida apenas

com uma variável r , a expressão da integral obtida por procedimento numérico, aproximado, não analítico, é do tipo:

$$\int F(r) \cdot dr = \alpha_1 \cdot F(r_1) + \alpha_2 \cdot F(r_2) + \alpha_3 \cdot F(r_3) + \dots + \alpha_n \cdot F(r_n) + R_n = \sum_i \alpha_i \cdot F(r_i) + R_n \quad (6.25)$$

em que os diversos $F(r_i)$ são os **valores da função** em alguns pontos escolhidos, e os α_i são os **pesos** de cada um dos valores no somatório. Assim, multiplicando os valores da função em um dado número de pontos do intervalo de integração por pesos correspondentes, obtém-se de forma aproximada o valor da integral. O valor de R_n corresponde ao **erro** associado ao processo de integração numérica, ou seja, à diferença entre o valor exato da integral e o valor obtido pelo processo numérico aproximado. À medida que se deseja obter resultados mais acurados no processo de integração, maior número de pontos de integração devem ser utilizados.

Um procedimento numérico bastante importante é o método de **QUADRATURA DE GAUSS**, que otimiza a posição dos pontos utilizados na definição dos valores $F(r_i)$, bem como os Pesos utilizados no somatório. O desenvolvimento detalhado deste procedimento de cálculo foge aos objetivos deste texto introdutório de Elementos Finitos, mas as referências específicas sobre a teoria de elementos finitos indicadas na bibliografia poderão constituir subsídios para o leitor que quiser aprofundar-se nestes aspectos numéricos do método.

Para o caso da equação 6.24, é efetuada a integração da matriz $[F] = [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \det[J]$, o que significa que todos os seus termos devem ser integrados. Portanto, a matriz de rigidez do elemento finito será calculada por:

$$[k]^e = \int_{vol} [F] \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (6.26)$$

Assim, à semelhança do exemplo da função de uma só variável anteriormente exemplificado, dever-se-ão conhecer os valores da função em alguns pontos e seus respectivos pesos. Porém, neste caso, a função corresponde à Matriz $[F]$ definida em diversos pontos do elemento finito. Os pontos escolhidos para a integração no domínio do elemento são definidos pelo seu posicionamento referido ao sistema natural de coordenadas, portanto, no caso mais geral, as coordenadas naturais r , s e t . Dessa forma, a Matriz de Rigidez do elemento finito, obtida por procedimento numérico, será obtida por um somatório de matrizes, cada qual avaliada em um dos pontos escolhidos dentro do elemento finito, e cada uma delas afetada por um peso, que poderia ser interpretada como um fator de participação da matriz na soma total.

Os pontos escolhidos para avaliar as matrizes participantes dessa soma são chamados de **Pontos de Integração**. Em particular, para o **Método de Quadratura de Gauss**, são os chamados **Pontos de Integração de Gauss** utilizados no cálculo da Matriz de Rigidez do Elemento Finito. O desenvolvimento dessa soma de matrizes, que resultará na Matriz de Rigidez do Elemento por procedimento de integração numérica, não será aqui detalhado, mas apenas a título de ilustração representamos de forma simbólica o somatório:

$$[k]^e = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} \cdot [F]_{ijk} \quad (6.27)$$

A título de ilustração, representamos na figura 6.7 a localização dos pontos de integração no sistema natural de coordenadas para um elemento triangular. Para esses pontos são calculadas as Matrizes $[F]$, de sorte que cada qual multiplicada por um peso e efetuando o somatório dado em (6.27), obtém-se a matriz de rigidez do elemento finito. Como podemos observar, para o elemento triangular pode-se utilizar um esquema de 3 pontos de integração, ou 13 pontos de integração. Evidentemente, o esquema de integração com 13 pontos calcula a integral mais acuradamente que com o uso de 3 pontos. Em consequência, a matriz de rigidez será também melhor determinada. Na mesma figura, sem entrar nos detalhes da localização dos pontos de integração, são ilustradas três possibilidades de esquemas de integração para o elemento na forma de quadrilátero.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

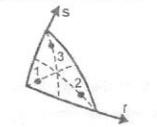
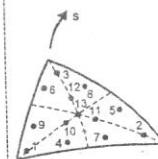
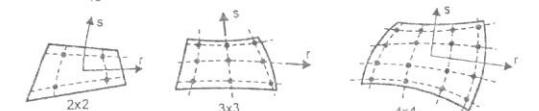
Ordem de Integração	Pontos de Integração	Coordenadas r	Coordenadas s	Pesos
3 pontos		$r_1=0,16666\ 66666\ 667$ $r_2=0,16666\ 66666\ 667$ $r_3=r_1$	$s_1=r_1$ $s_2=r_1$ $s_3=r_2$	$w_1=0,33333\ 33333\ 333$ $w_2=w_1$ $w_3=w_1$
13 pontos		$r_1=0,06513\ 01029\ 022$ $r_2=0,86973\ 97941\ 956$ $r_3=r_1$ $r_4=0,31286\ 54960\ 049$ $r_5=0,63844\ 41885\ 698$ $r_6=0,04869\ 03154\ 253$ $r_7=r_5$ $r_8=r_4$ $r_9=r_6$ $r_{10}=0,26034\ 59660\ 790$ $r_{11}=0,47930\ 80678\ 419$ $r_{12}=r_{10}$ $r_{13}=0,33333\ 33333\ 333$	$s_1=r_1$ $s_2=r_1$ $s_3=r_2$ $s_4=r_6$ $s_5=r_4$ $s_6=r_5$ $s_7=r_6$ $s_8=r_5$ $s_9=r_4$ $s_{10}=r_{10}$ $s_{11}=r_{10}$ $s_{12}=r_{11}$ $s_{13}=r_{13}$	$w_1=0,05334\ 72356\ 088$ $w_2=w_1$ $w_3=w_1$ $w_4=0,07711\ 37608\ 903$ $w_5=w_4$ $w_6=w_4$ $w_7=w_4$ $w_8=w_4$ $w_9=w_4$ $w_{10}=0,17561\ 52574\ 332$ $w_{11}=w_{10}$ $w_{12}=w_{10}$ $w_0=-0,14957\ 00444\ 677$
No domínio de um Retângulo				

Figura 6.7 – Integração Numérica de Gauss sobre o domínio de um Triângulo e de um Retângulo.

Quando desenvolvemos a formulação dos diversos elementos finitos no capítulo 5, observamos a importância do modelo matemático adotado para a definição do campo de deslocamentos dentro do elemento. No presente capítulo, novos conceitos foram abordados com a introdução da formulação isoparamétrica em elementos finitos. É interessante observar, do ponto de vista prático, que ao desenvolver o modelo em elementos finitos, todas estas questões estão presentes, cada qual focalizando um aspecto conceitual importante, e que, conjuntamente, afetam a qualidade dos resultados obtidos. Vale então ressaltar cada um desses pontos, tendo em vista as aplicações práticas do Método, a saber:

- A identificação na natureza física do problema objeto de análise constitui o passo inicial para efetuar um bom modelo representativo deste problema. A escolha do elemento que melhor represente esta situação física desempenha, portanto, papel fundamental. O engenheiro de aplicação deve conhecer que tipo de comportamento cada elemento da biblioteca de elementos do programa se propõe a simular. Ou seja, a que classe de problema aquele elemento está associado. Portanto, para as aplicações no âmbito da Análise Estrutural, os conceitos da Mecânica Estrutural devem estar presentes no dia-a-dia do analista. No presente texto introdutório, à medida que foram sendo desenvolvidas as aplicações do Método, procuramos relembrar esses conceitos, em grau suficiente para atender ao nível da abordagem aqui focalizada, sem ter o leitor a necessidade de consultar uma vasta bibliografia de apoio.
- A escolha do elemento para atender aos requisitos acima especificados passa pelo conhecimento de sua formulação. Vários tipos de elementos se propõem a resolver a mesma classe de problema; alguns mais acuradamente que outros. De acordo com a escolha efetuada, a definição do tamanho adequado dos elementos em uma malha de elementos finitos está intimamente relacionada à sua formulação. Já tivemos a oportunidade de abordar detalhadamente esta questão no capítulo 5, em que foi inclusive discutida a técnica de efetuar um Teste de Convergência.
- A Formulação Isoparamétrica introduziu algumas questões adicionais relativas à forma do elemento finito gerado. Estas questões se complementam ao modelo matemático proposto para a definição do elemento. A utilização de um elemento com formulação matemática extremamente adequada para uma dada classe de problema não garante antecipadamente um bom resultado. O uso destes elementos com acentuadas distorções indesejáveis, como já sabemos pelo estudo do Operador Jacobiano, podendo no limite até gerar singularidades, pode comprometer a qualidade dos resultados obtidos. Da mesma forma, a geração de uma malha com elementos extremamente pobres, tal como o Elemento de Estado Plano de Tensões Triangular Linear, mesmo que atendendo aos critérios de distorções com elementos de formas perfeitas, apresentará sérias limitações que devem ser de conhecimento do analista.
- Todas as questões anteriores estão presentes e se complementam, devendo o analista estrutural avaliá-las e, com critério, julgar cada uma das situações. Fica claro, portanto, que o programa de análise é apenas uma ferramenta de auxílio no desenvolvimento dos trabalhos de engenharia, em que os conhecimentos a respeito dos conceitos do método são fundamentais.

6.5. FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES - EXPRESSÃO PARA AS APLICAÇÕES GERAIS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO ÂMBITO DA ANÁLISE ESTRUTURAL LINEAR

Os primeiros elementos finitos por nós estudados permitiram-nos identificar, por intermédio de exemplos simples, as Propriedades Gerais associadas ao Sistemas Discretos Padrão. Essa abordagem ofereceu-nos uma visão mais didática do Método, superando as dificuldades que se colocavam à medida que os elementos com maiores sofisticções em suas formulações eram definidos. Em oposição a essa idéia, muitas abordagens do Método dos Elementos Finitos introduzem os conceitos de forma mais ampla, identificando propriedades gerais que se aplicam a todos os elementos e a um vasto espectro de aplicações e, posteriormente, analisam os casos particulares objeto de interesse.

Embora absolutamente rigorosa, essa abordagem muitas vezes torna-se um tanto árida, pois o entendimento físico dos fenômenos fica, até certo ponto, dificultado. Após termos efetuado um longo caminho até aqui, e estudado as particularidades de cada um dos

elementos mais utilizados no âmbito da mecânica estrutural, podemos agora introduzir a Formulação Geral do Método dos Elementos Finitos para aplicações da Análise Estrutural.

A principal idéia utilizada na formulação geral do Método dos Elementos Finitos está no Princípio dos Trabalhos Virtuais. Já havíamos aplicado esse Princípio no âmbito isolado de um Elemento, e pela Condição de Equivalência, determinamos a sua Matriz de Rígidez. A idéia a ser desenvolvida agora é a mesma, porém no âmbito de toda a estrutura.

Vamos considerar, a título de ilustração, o exemplo de uma chapa sob ação de vários tipos de cargas, como indica a figura 6.8. O tratamento a ser dado é absolutamente geral e vale para qualquer tipo de estrutura, sujeita a vários tipos de carregamentos. O exemplo da chapa foi tomado apenas como um pretexto para focalizar os conceitos gerais em um caso prático.

As **forças externas** que agem em toda a estrutura provocam deslocamentos nela. O conceito de **Trabalho de uma Força** permite contabilizar a **energia transferida pela ação dessas forças**. A **Condição de Equivalência** estabelece que a energia introduzida na forma de trabalho das forças externas seja armazenada na forma de **energia interna de deformação** da estrutura inteira. Essa idéia de transferência de energia já foi explorada para o caso simples de uma mola no capítulo 5, em que a energia externa introduzida era armazenada na forma de energia potencial elástica. O conceito é o mesmo, porém aplicado no âmbito da estrutura inteira.

Na contabilização do Trabalho Externo, é conveniente separar as contribuições dos diversos tipos de forças que podem agir na estrutura, como indica a figura 6.8, a saber:

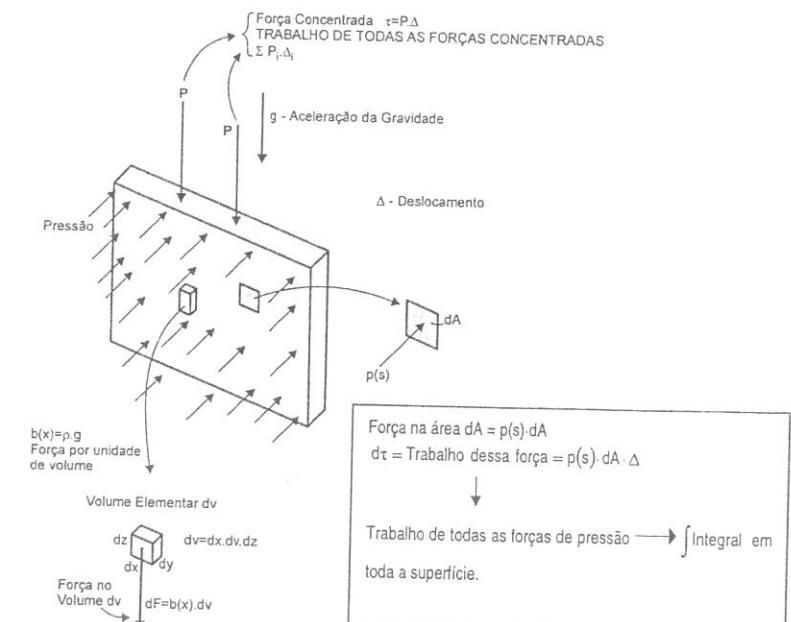


Figura 6.8 – Forças Concentradas, Forças de Volume e Forças de Superfície. As ações dessas forças com os correspondentes deslocamento, permitem, calcular o Trabalho delas. Esse trabalho total é armazenado na forma de energia de deformação na configuração deformada da estrutura.

- **Forças Concentradas** que agem em alguns pontos da estrutura. No cálculo do Trabalho dessas forças é importante identificar os componentes de Deslocamentos dos respectivos pontos de aplicação delas, na direção das forças. Todos os Trabalhos calculados individualmente serão somados e fornecerão a energia introduzida na estrutura devido à ação de todas as cargas concentradas.
 - **Forças de Volume.** Essas forças agem na forma de Forças Distribuídas ao longo do volume da estrutura inteira. Como exemplo, temos o importante caso do Peso Próprio da Estrutura. Devido à ação da Aceleração da Gravidade, ao longo de todo o volume da estrutura agem forças peso em cada elemento de massa. Por exemplo, tendo a massa por unidade de volume, isto é, a Massa específica do Material, e multiplicando-a pela aceleração da gravidade, teremos a Força por unidade de volume, que neste caso é o peso específico. A multiplicação de cada força específica pelo deslocamento correspondente gerará também um trabalho.
 - **Forças de Superfície.** Forças que agem na superfície do corpo. Como exemplo temos as Forças de Pressão que agem perpendicularmente à superfície do corpo. Multiplicando a pressão atuante pela área em que esta atua, temos a força correspondente, que em associação com o deslocamento na direção da força também fornecerá um trabalho.

Do ponto de vista geral, todas as cargas pontuais poderão ser representadas na forma de uma matriz coluna e os correspondentes deslocamentos na forma de uma matriz linha (matriz transposta dos deslocamentos), como já sabemos do estudo de um elemento isolado. A multiplicação de cada força pelo correspondente deslocamento e a soma de todas essas parcelas poderão ser representadas de forma compacta como um produto de matrizes, fornecendo o *Trabalho das Cargas Pontuais*.

e forma análoga, se considerarmos como sendo $b(x)$ a *força por unidade de volume*, em uma posição x genérica do volume do corpo, a força atuante em um volume elementar dV será $b(x) \cdot dV$. Se $\Delta(x)$ for o correspondente deslocamento, poderemos calcular o trabalho dessa força. Se quisermos calcular o trabalho devidamente a todas as forças de volume, deveremos somar a contribuição do trabalho de cada força atuando em cada volume elementar, ao longo do volume inteiro. Essa soma será obtida pela integral ao longo do volume. Para as forças por unidade de superfície, o raciocínio é o mesmo. Assim, o Trabalho de todas as forças externas agindo na estrutura poderá ser calculado. À semelhança do estudo de um elemento isolado, vamos considerar os deslocamentos virtuais, e representá-los pelo símbolo $*$. Em todos os desenvolvimentos que se seguem, embora sejam envolvidas apresentações matriciais, vamos eliminar a Notação Matricial por simplicidade. Assim, teremos:

Trabalho Externo = $\Delta^{*T} \cdot P + \int \Delta^{*T}(x) \cdot b(x) \cdot dV + \int \Delta^{*T}(s) \cdot p(s) \cdot dA$

(6.28)

Força de Volume Força de Superfície

↓

Trabalho Virtual efetuado pelas Cargas Pontuais

↓

Integral do Produto de uma **Força de Volume** pelo correspondente deslocamento, contabilizando o **TRABALHO VITAL** efetuado pelas **FORÇAS DE VOLUME**.

x representa a Coordenada indicando a localização no Volume

↓

Somatório dos Produtos das Forças Pontuais pelos correspondentes Deslocamentos. Para todos os componentes é representado por um Produto de Matrizes

Integral do Produto de uma **Força de Superfície** pelo correspondente deslocamento, contabilizando o **TRABALHO VITAL** efetuado pelas **FORÇAS DE SUPERFÍCIE**s

s representa a Coordenada indicando a localização na Superfície

Trabalho Interno pode ser contabilizado de Forma semelhante, tentando identificar internamente ao Corpo deformado os Componentes de Força e os Componentes de Deslocamentos que, por intermédio do Produto Força x Deslocamento, gerarão os trabalhos realizados. Deve-se notar que a expressão 6.28 representa o conceito simples de trabalho de uma Força, contabilizada

pelos Produtos de Forças por Deslocamentos. Como no âmbito da estrutura inteira existem muitas Forças atuantes e muitos correspondentes deslocamentos, e temos a soma de diversos produtos, a Notação Matricial é bastante conveniente para efetuar essa representação. No caso das cargas pontuais esse conceito é mais óbvio.

Para o caso das cargas atuantes por unidade de volume e superfície, o conceito é absolutamente o mesmo. Portanto, deve-se identificar a Força que age em uma unidade de volume, e o correspondente deslocamento dessa unidade de volume. O produto deles gera o trabalho efetuado pela Força atuante naquela unidade de volume. Evidentemente, para o volume inteiro, o Trabalho devido a todas as forças de volume também será dado pela soma desse produtos. Como essa soma se estende ao longo de toda a estrutura contínua, a contabilização dessa soma é dada pela Integral, como representada na equação 6.28.

O mesmo raciocínio se aplica para a integral que contabiliza o trabalho das forças de superfície. Ou seja, a expressão que tem caráter geral. Em cada caso, dever-se-á identificar a geometria, de modo a se estabelecer matematicamente o domínio em que as integrais são calculadas.

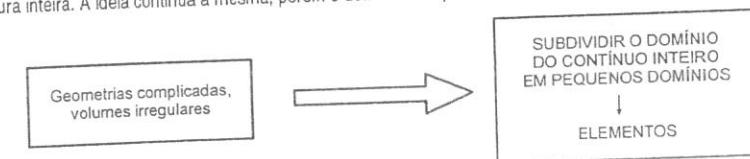
A identificação das Forças e Deslocamentos para o Cálculo do Trabalho Interno torna como base o conceito de Energia de Deformação utilizado no estudo da Resistência dos Materiais. Se identificarmos como se calcula a Energia de Deformação por unidade de Volume da Estrutura, a soma de todas essas energias irá gerar o Trabalho Interno. Como este se estende no domínio de todo o corpo contínuo, teremos também o cálculo de uma integral. O *Quadro XII* revisa brevemente o *Cálculo da Energia de Deformação por Unidade de Volume*. Fazendo uma analogia, da mesma forma que o Trabalho é dado pelo produto de uma força por um deslocamento, no âmbito interno o trabalho é dado pelo produto de uma tensão pela correspondente deformação. Em termos mais gerais, deveremos contabilizar a soma de todos esses produtos no âmbito da estrutura inteira por intermédio da Integral.

$$\text{Trabalho Interno} = \int \varepsilon^{\star T}(x) \cdot \sigma(x) \cdot dV \quad (6.29)$$

igualando as expressões 6.28 e 6.29, teremos a expressão geral do Princípio dos Trabalhos Virtuais para a Estrutura inteira.

$$\Delta^{*\top} \cdot P + \int \Delta^{*\top}(x) \cdot b(x) \cdot dV + \int \Delta^{*\top}(s) \cdot p(s) \cdot dA = \int \varepsilon^{*\top}(x) \cdot \sigma(x) \cdot dV \quad (6.30)$$

A resolução da equação 6.30 em casos de geometria bastante simples, em que o domínio no qual se estende a integração é bem definido, pode ser efetuada com sucesso. Em geometrias mais complicadas, como os corpos contínuos que constituem as estruturas reais, com volumes sólidos extremamente irregulares, essa tarefa praticamente torna-se impossível. A partir da constatação dessa dificuldade, surge a idéia central do **método dos elementos finitos**: subdividir o domínio do contínuo inteiro da estrutura em pequenos domínios, de geometria bem definida em cada trecho, de sorte que as integrais acima representadas sejam efetuadas por trechos e não para o contínuo inteiro. Em resumo, as integrações que foram definidas para toda a extensão da estrutura agora serão feitas por pequenos trechos. A soma das integrais (**somatório**) definidas em cada trecho fornecerá a integral para a estrutura inteira. A idéia continua a mesma, porém o domínio em que se estende a integração é que foi alterado. Assim:



QUADRO XII – ENERGIA DE DEFORMAÇÃO POR UNIDADE DE VOLUME

Lembrando que: ENERGIA DE DEFORMAÇÃO é a energia gasta para deformar um corpo Elástico sob ação de Forças Externas → TRABALHO.

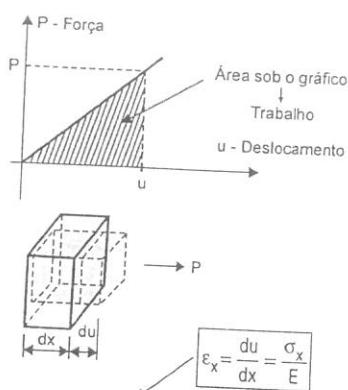
$$\text{Energia} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot u = E$$

Para o CUBO ELEMENTAR AO LADO SUJEITO SOMENTE A σ_x :

$$dE = \frac{1}{2} \cdot P \cdot du = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot A) \cdot (\varepsilon_x \cdot dx)$$

$$dE = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot Adx \rightarrow$$

Energia de deformação elástica total absorvida pelo elemento.



ou

$$\frac{dE}{A \cdot dx} = \frac{\text{ENERGIA DE DEFORMAÇÃO}}{\text{POR UNIDADE DE VOLUME}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_x^2}{E} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_x^2 \cdot E$$

Vamos então SUBDIVIDIR A ESTRUTURA EM ELEMENTOS, conectados em pontos discretos chamados de NÓS, e REPRESENTAR OS DESLOCAMENTOS $\Delta(x)$ DENTRO DE CADA ELEMENTO EM FUNÇÃO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS Δ , por intermédio de uma FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO $N(x)$, que é a chamada FUNÇÃO DE FORMA DO ELEMENTO, pois define a forma com a qual os deslocamentos são interpolados dentro do elemento, ou nesse trecho da estrutura. Assim:

$$\Delta(x) = N(x) \cdot \Delta \quad (6.31)$$

e lembrando que as deformações dentro do elemento são calculadas a partir dos Deslocamentos Nodais por intermédio da Matriz Deslocamento-Deformação, temos:

$$\varepsilon = B \cdot \Delta \quad (6.32)$$

e pela equação (m) do Quadro VIII, temos:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (6.33)$$

Fazendo as substituições na equação 6.30 e introduzindo os somatórios, teremos:

$$\Delta^T \cdot P + \sum_e \left[\int_{V^e} (N \Delta)^T \cdot b(x) \cdot dV^e + \int_{A^e} (N \Delta)^T \cdot p(s) \cdot dA^e \right] = \sum_e \int_{V^e} (B \cdot \Delta^*)^T \cdot D \cdot B \cdot \Delta \cdot dV^e \quad (6.34)$$

As integrais da equação 6.34 estabelecem os mesmos cálculos de energia da equação 6.30, apenas que agora no domínio de um elemento. Por intermédio dos somatórios, estendemos esse conceito para a estrutura inteira, estabelecendo a Condição de Equivalência.

Podemos simplificar a equação anterior, utilizando as propriedades das matrizes, em que a Transposta de um produto de matrizes é o produto das transpostas, e retirar das integrais os termos constantes.

Assim:

$$\Delta^T \cdot \left[P + \sum_e \int_{V^e} N^T \cdot b(x) \cdot dV^e + \sum_e \int_{A^e} N^T \cdot p(s) \cdot dA^e \right] = \Delta^T \cdot \left[\sum_e \int_{V^e} B^T \cdot D \cdot B \cdot dV^e \right] \cdot \Delta$$

eliminando Δ^T dos dois membros, teremos:

$$\left[P + \sum_e \int_{V^e} N^T \cdot b(x) \cdot dV^e + \sum_e \int_{A^e} N^T \cdot p(s) \cdot dA^e \right] = \left[\sum_e \int_{V^e} B^T \cdot D \cdot B \cdot dV^e \right]$$

Forças Nodais que podem ser consideradas equivalentes às Forças Distribuídas ao longo de todos os elementos.

Δ
Deslocamentos Nodais para toda a estrutura.

Cada uma das integrais calculadas no domínio de cada elemento permite calcular a sua matriz de rigidez.

O Somatório permite calcular a matriz de rigidez da estrutura a partir da matriz de rigidez de cada elemento por processo direto de montagem ou soma de matrizes.

$$\{F_{\text{NODAIS}}\} = [K_{\text{ESTRUTURA}}] \cdot \{\Delta_{\text{NODAIS}}\}$$

Assim, temos definida a expressão geral (6.35) que permite, a partir da estrutura contínua, definir o **Modelo Discreto**, considerando as **Cargas atuando somente nos nós**, na forma de **Cargas Nodais Equivalentes**. Essas cargas Nodais equivalentes produzem os mesmos deslocamentos nodais que as cargas distribuídas. De posse dessas Cargas Nodais Equivalentes e da Matriz de Rigidize da Estrutura, podemos determinar os Deslocamentos Nodais. As Cargas Nodais equivalentes são calculadas para cada elemento isolado e, posteriormente, as Matrizes representativas destas são somadas, gerando as Cargas Nodais Equivalentes para a Estrutura Inteira. Assim, para um elemento isolado podemos escrever:

$$\left\{ F_{\text{Nodais Equivalentes Volume}} \right\}_e = \int_{V^e} [N^T \cdot b(x) \cdot dV^e] \longrightarrow$$

Forças Nodais Equivalentes (Discretas), representando as Forças de Volume

$$\left\{ F_{\text{Nodais Equivalentes Superfície}} \right\}_e = \int_{A^e} [N^T \cdot p(s) \cdot dA^e] \longrightarrow$$

Forças Nodais Equivalentes (Discretas), representando as Forças de Superfície

VOTA COMPLEMENTAR - APLICAÇÃO PRÁTICA DO CÁLCULO DAS CARGAS NODAIS

EQUIVALENTES PARA OS ELEMENTOS DE VIGA

Vimos no estudo do Método dos Elementos Finitos, que o cálculo dos deslocamentos de uma estrutura por intermédio de um modelo discretizado considera apenas os deslocamentos dos nós do modelo, para a representação da configuração deformada da estrutura inteira. Na montagem do sistema de equações de equilíbrio, utilizando a linguagem matricial, as cargas devem atuar somente nos nós do modelo, ou seja, também de forma discreta.

Vimos que as Cargas Nodais Equivalentes são as que, atuando somente nos nós do modelo, produzem os mesmos deslocamentos nodais que as correspondentes cargas distribuídas. Do ponto de vista prático, quando o usuário de um software de elementos finitos fornece o carregamento atuante na estrutura na forma de carga distribuída no vão das vigas, pressão atuante nas faces dos elementos bi e tridimensionais ou qualquer carga não nodal, o programa de análise transforma esse carregamento em **Cargas Nodais Equivalentes**. O procedimento para essa transformação é estabelecido pela equação 6.35, que tivemos a oportunidade de demonstrar para as aplicações mais gerais.

Assim, o carregamento atuante no modelo discretizado será definido pela **combinação das Cargas Nodais Equivalentes e das cargas que já atuam nos nós do modelo**, que obviamente não necessitam ser transformadas. As cargas que já são nodais também são representadas na equação 6.35. Operacionalmente, poderíamos considerar essas duas classes de carregamentos atuando juntas, resultando nas chamadas **Cargas Combinadas**, que devem produzir no modelo os mesmos deslocamentos nodais que seriam produzidos pelas cargas reais.

Uma aplicação do conceito de Carga Nodal Equivalente pode ser feita para o caso particular dos Elementos de Viga. Embora não façamos aqui a demonstração analítica do procedimento aplicado para esse caso, que constituiria um caso particular do estudo já desenvolvido, é interessante observarmos a técnica utilizada a título de ilustração, que traduz em um caso simples o objetivo final da equação 6.35. A demonstração desse procedimento pode ser encontrada na referência (5).

A figura 6.9 representa uma estrutura constituída por apenas um elemento de viga, engastado em uma extremidade e livre em outra, sob a ação de carga distribuída no seu vão. São representadas na mesma figura, as soluções já conhecidas da Resistência dos Materiais, para os diagramas de momentos fletores e forças cortantes, bem como o deslocamento angular na extremidade livre. Vamos determinar esses esforços e o deslocamento angular, utilizando o Método Matricial, aplicando o conceito de Carga Nodal Equivalente, e verificando a sua coerência com os valores já conhecidos.

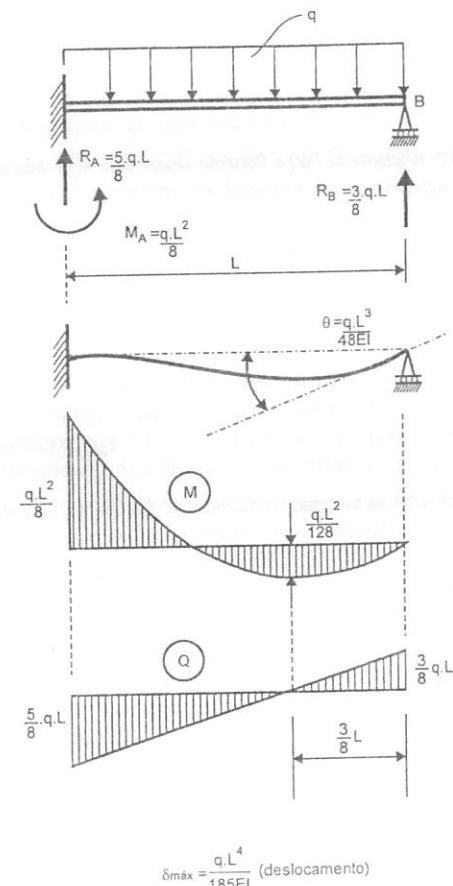


Figura 6.9 – Viga engastada em uma extremidade e apoiada na outra, com carregamento uniformemente distribuído.

O procedimento de Transformação das Cargas não Nodais considera o conceito de **Estrutura Bloqueada**. É basicamente a Estrutura Real à qual se impõem **Vínculos Fictícios** a todos os graus de liberdade existentes. Dessa forma, a Estrutura Bloqueada fica sob efeito das cargas não nodais, e como os deslocamentos nodais estão impedidos nessa condição, surgirão **Reações Fictícias na Estrutura**.

Na figura 6.10a é representada a estrutura objeto de análise, a Estrutura Real. O único grau de liberdade dessa estrutura é o ângulo em B. Na figura 6.10b esse grau de liberdade de rotação está bloqueado. A estrutura bloqueada sob o efeito do carregamento externo distribuído no vão da viga desenvolverá uma Reação Fictícia em B, que corresponde ao Momento em B de intensidade

igual a $-\frac{qL^2}{12}$ (no sentido horário, daí o sinal negativo), e as demais Reações representadas nessa mesma figura. O vínculo fictício introduzido impedi, portanto, o deslocamento nodal em B.

Na figura 6.10c, as Reações Fictícias calculadas em B são aplicadas aos Nós da Estrutura Real com o sentido contrário, ou seja, a Estrutura Real, e deverão produzir nela os mesmos deslocamentos nodais que as cargas reais.

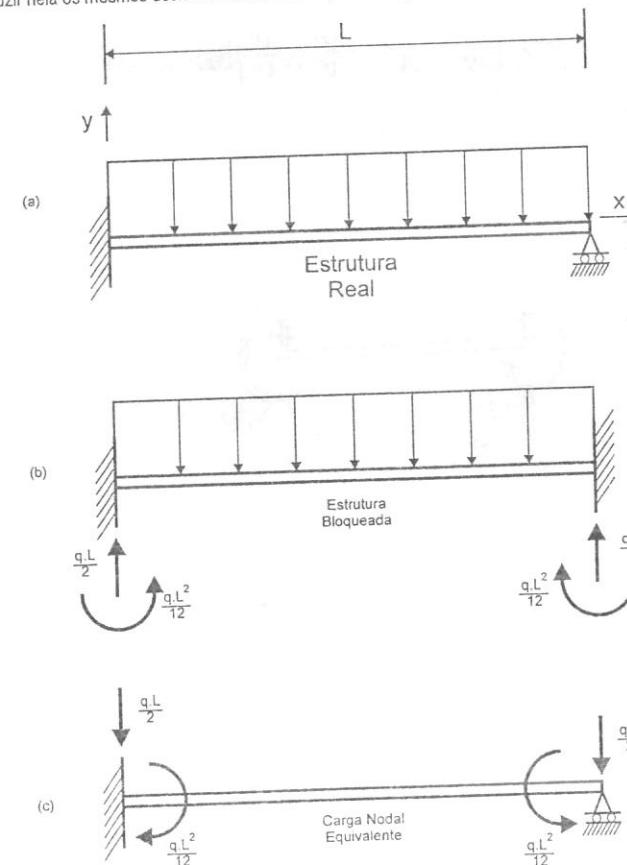


Figura 6.10 – Obtenção das Cargas Nodais Equivalentes em uma estrutura, constituída por um elemento de viga.

Considerando a Estrutura Real sob a ação das Cargas Nodais Equivalentes representada na figura 6.10c, vamos calcular os Deslocamentos Nodais (nesse caso é apenas um, o ângulo θ_B). A figura 6.11 representa para a viga objeto de análise os graus de liberdade dela, e a correspondente matriz de rigidez já conhecida do estudo dos elementos de viga.

Como o único grau de liberdade que pode se movimentar é o grau de liberdade correspondente ao ângulo $\theta_B = \theta_2$, apenas a parte da matriz de rigidez associada ao deslocamento θ_2 deve ser considerada. Assim, particionando a matriz de rigidez adequadamente, considerando a força nodal associada à rotação em B e resolvendo a equação matricial resultante dessa operação, temos:

$$\begin{Bmatrix} f_{y_1} \\ M_1 \\ f_{y_2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12EI & 6EI & -12EI & 6EI \\ \frac{L^3}{12} & \frac{L^2}{2} & -\frac{L^3}{12} & \frac{L^2}{2} \\ 6EI & 4EI & -6EI & 2EI \\ \frac{L^2}{2} & L & -\frac{L^2}{2} & L \\ -12EI & -6EI & 12EI & -6EI \\ -\frac{L^3}{12} & -\frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{12} & -\frac{L^2}{2} \\ 6EI & 2EI & -6EI & 4EI \\ \frac{L^2}{2} & L & -\frac{L^2}{2} & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{M_2\} = \left[\frac{4EI}{L} \right] \{\theta_2\}, \text{ e considerando a Força nesse grau de liberdade:}$$

$$\frac{qL^2}{12} = \frac{4EI}{L} \cdot \theta_2 \rightarrow \theta_2 = \frac{qL^3}{48EI}$$

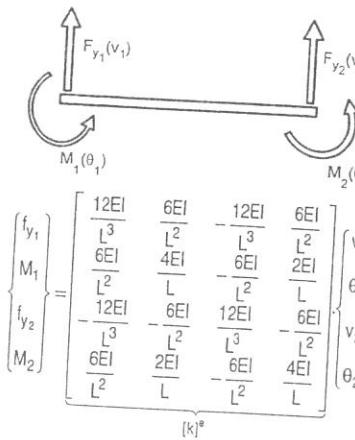


Figura 6.11 – Graus de Liberdade e matriz de rigidez do elemento de viga.

Assim, o deslocamento nodal θ_2 obtido por intermédio do conceito de Carga Nodal Equivalente coincide com o correto já conhecido da Resistência dos Materiais.

Nos casos práticos de estruturas constituídas por uma quantidade enorme de elementos, o procedimento seria o mesmo. Dever-se-ia bloquear cada viga da estrutura e considerar as Reações Fictícias decorrentes da ação das cargas distribuídas nos vãos das vigas. Em seguida, a estrutura é desbloqueada e submetida apenas à ação das Cargas Nodais, que são as reações fictícias em sentido contrário, isto é, com os seus sinais trocados. A estrutura calculada dessa forma produzirá os mesmos deslocamentos

nodais, que aqueles produzidos pelas cargas distribuídas. Evidentemente, o trabalho será muito maior que este exemplo de apenas um grau de liberdade. É tarefa para o computador.

Após o cálculo dos deslocamentos, merece discussão o cálculo das forças internas no elemento. Vamos nos socorrer para essa discussão nas relações conhecidas da Resistência dos Materiais, que envolvem o Carregamento Atuante, a Força Cortante e o Momento Fletor em uma Viga, a saber:

$Q = \frac{dM}{dx}$, $q = -\frac{dQ}{dx}$, ou seja, a Força Cortante é obtida pela derivada do Momento Fletor, e o carregamento atuante é dado pela derivada da Força Cortante.

Interpretando essas relações que envolvem derivadas, podemos concluir que:

- Um carregamento uniformemente distribuído em uma viga apresenta diagrama de Força Cortante Linear, pois a derivada deste deve ser constante e igual ao carregamento.
- Um diagrama de Força Cortante Linear deve estar associado a um diagrama de Momentos Fletores parabólico do segundo grau, pois a derivada deste deve ser igual à Força Cortante.

No nosso exemplo em discussão, o carregamento é uniformemente distribuído e, portanto, o diagrama de momentos fletores deverá ser parabólico. Porém, ao transformarmos a carga distribuída em Cargas Nodais Equivalentes, não haverá mais carregamento distribuído no vão das vigas. Como esse carregamento é nulo, a Força Cortante que deu origem ao carregamento nulo deverá ter derivada zero, portanto deverá ser constante. Pelo mesmo raciocínio, o Momento Fletor terá um diagrama linear e não parabólico.

Ou seja, a técnica das Cargas Nodais Equivalentes resolveu o problema do cálculo dos deslocamentos nodais, porém merece cuidados quanto ao cálculo das forças internas. Na estrutura real, o carregamento no vão das vigas é transferido para os apoios. Nesse processo cada elemento se deforma e trabalha internamente para transferir essas cargas. As cargas que agem na estrutura inteira fazem esta se deformar como um todo. Então temos dois tipos de trabalho: o Trabalho Global da Estrutura que afeta todos os seus elementos, e a deformação local de cada um desses elementos devido à ação local das cargas.

Quando transferimos as cargas do vão das vigas para os nós, esse efeito local não está sendo considerado no modelo (é como se depois que a viga transferiu a carga para os apoios, ela não precisasse trabalhar mais!), pois só estamos trabalhando com cargas nodais. Então ao voltarmos para calcular as forças internas, devemos considerar o problema interno da viga. Assim, a distribuição de esforços internos na viga poderá ser obtida, somando os esforços internos em cada elemento decorrente de a estrutura estar bloqueada com os efeitos das cargas nodais equivalentes aplicados em toda a estrutura, como mostra a figura 6.12 para o diagrama de Momentos Fletores ao longo da viga. Como vemos, o resultado obtido é o mesmo daquele apresentado na figura 6.9, de acordo com a Resistência dos Materiais.

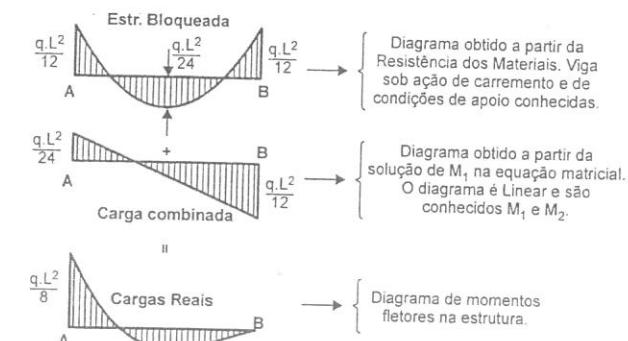


Figura 6.12 – Obtenção dos esforços internos a partir da estrutura bloqueada e das cargas combinadas.

6. GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

6.1. INTRODUÇÃO

omentamos no capítulo 1 que as técnicas de discretização de sistemas contínuos, que são amplamente utilizadas nas Aplicações estruturais, são mais gerais e podem ser aplicadas em outras áreas de engenharia e análise. Problemas de Transferência de Calor, escoamento de Fluidos, Ondas Eletromagnéticas, Hidrodinâmica podem ser resolvidos por intermédio dessas técnicas. Dessa forma, o Método dos Elementos Finitos constitui uma poderosa ferramenta para solução de problemas que transcendem o âmbito da análise estrutural. Esses fenômenos, tratados de forma ampla, são descritos por Princípios mais gerais.

As equações de equilíbrio que representam o comportamento de diversos sistemas, traduzindo diversos comportamentos físicos diferentes, e descritos pelas variáveis de estado associadas ao problema em estudo, podem ser obtidas por intermédio de os *rincípios Variacionais*. Por exemplo, nos *problemas estruturais* até agora estudados, as *variáveis de estado* eram os *deslocamentos Nodais*. Na configuração de Equilíbrio da Estrutura, os Deslocamentos assumiam um dado conjunto de valores, que caracterizava a configuração deformada da estrutura nessa condição. É objetivo do Método dos Elementos Finitos determinar esse conjunto de valores, e isso pode ser feito a partir do conhecimento das equações de equilíbrio que governam o comportamento do sistema. A questão importante é como investigar quais as equações que governam o comportamento de um dado sistema.

Formulação Variacional ou Extrema consiste na localização de um Conjunto de Valores, as *Variáveis de Estado* $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, de sorte que para esse conjunto de valores um dado *FUNCIONAL* π é mínimo, ou de forma mais geral, estacionário. O Funcional, no caso mais geral, é uma função integral, que é uma função de funções desconhecidas. Para não perdermos o sentido físico desta discussão, vamos utilizar um exemplo que já é nosso conhecido, dentro do âmbito da Análise estrutural Linear. Neste caso as *variáveis de estado* são os *deslocamentos*, e o *Funcional* π é a *Energia Potencial Total da Estrutura*, que é dada pela *diferença entre a Energia de Deformação* (E) e o *Potencial das Cargas Aplicadas* (τ). O *Potencial das Cargas* é calculado pelo *Trabalho das Forças Aplicadas*, considerando-as constantes durante o deslocamento da estrutura, desde a condição inicial até a condição final de equilíbrio. Assim:

$$\boxed{\pi = E - \tau} \quad (6.36)$$

Condição de Mínimo do Funcional pode ser obtida por intermédio de sua derivada igual a zero. Assim:

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial U_i} = 0} \quad (6.37)$$

6.2. APPLICAÇÃO

Podemos investigar quais são as equações que governam o comportamento de um sistema estrutural, já analisado por nós anteriormente, pelo processo direto de montagem, e representado na figura 6.13.

Formulação Variacional ou Extrema permitirá localizar o *Conjunto de Deslocamentos (Variáveis de Estado)*, de sorte que para esse conjunto de valores a Estrutura encontra-se em Equilíbrio. Ou seja, vamos determinar quais são as equações de equilíbrio que permitem determinar esses deslocamentos. Essas equações serão determinadas a partir do conhecimento do *FUNCIONAL* π que governa o problema.

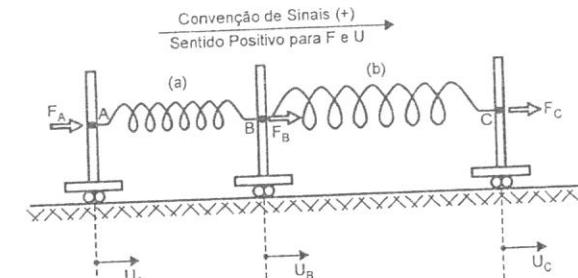


Figura 6.13 – Estrutura constituída por dois elementos de mola.

Para escrever o funcional que governa o problema neste caso, temos de escrever as expressões da Energia de Deformação do sistema de molas (E), e o Potencial das Cargas (τ), que é dado pelo trabalho das forças externas, desde a condição indeformada até a configuração deformada na condição de equilíbrio, e supondo essas forças constantes. A Energia de Deformação da estrutura é dada pela soma das energias de deformação de cada uma das molas, que basicamente são suas energias potenciais elásticas dadas por expressões do tipo $\frac{k \cdot (\text{deformação da Mola})^2}{2}$. A condição real de deformação de cada mola é fornecida pela diferença dos deslocamentos. Assim:

$$E = \frac{k_A \cdot (U_B - U_A)^2}{2} + \frac{k_B \cdot (U_C - U_B)^2}{2} \quad (6.38)$$

Os Trabalhos das Forças Externas são dados pelos produtos das forças e os correspondentes deslocamentos, portanto:

$$\tau = F_A \cdot U_A + F_B \cdot U_B + F_C \cdot U_C \quad (6.39)$$

Sendo o Funcional dado por:

$$\pi = E - \tau = \frac{k_A \cdot (U_B - U_A)^2}{2} + \frac{k_B \cdot (U_C - U_B)^2}{2} - F_A \cdot U_A - F_B \cdot U_B - F_C \cdot U_C \quad (6.40)$$

desenvolvendo a expressão 6.40, teremos:

$$\tau = \frac{k_A \cdot U_A^2}{2} + \frac{k_A \cdot U_B^2}{2} + \frac{k_B \cdot U_B^2}{2} + \frac{k_B \cdot U_C^2}{2} - k_A \cdot U_A \cdot U_B - k_B \cdot U_B \cdot U_C - F_A \cdot U_A - F_B \cdot U_B - F_C \cdot U_C \quad (6.41)$$

As equações de equilíbrio serão geradas a partir da condição do mínimo do Funcional, que é obtida fazendo as derivadas parciais nulas em relação às variáveis de estado U_A, U_B, U_C , que são os deslocamentos. Assim:

genericamente

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial U_i} = 0} \quad (6.42)$$

Particularizando para as variáveis de estado U_A, U_B, U_C , e igualando o zero às derivadas na condição de mínimo, teremos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial U_A} = K_A \cdot U_A - K_A \cdot U_B - F_A = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial U_B} = -K_A \cdot U_A + K_A \cdot U_B + K_B \cdot U_B - K_B \cdot U_C - F_B = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial U_C} = -K_B \cdot U_B + K_B \cdot U_C - F_C = 0$$

rearranjando as equações anteriores, teremos:

$$\begin{cases} F_A = K_A \cdot U_A - K_A \cdot U_B + 0 \cdot U_C \\ F_B = -K_A \cdot U_A + (K_A + K_B) \cdot U_B - K_B \cdot U_C \\ F_C = 0 \cdot U_A - K_B \cdot U_B + K_B \cdot U_C \end{cases} \quad (6.43)$$

O sistema de equações 6.43 é idêntico ao sistema de equações (2.12) gerado no capítulo 2. Assim, a partir do Funcional π foram geradas equações de equilíbrio da estrutura.

6.6.3. OBSERVAÇÕES FINAIS

O exemplo anterior introduziu de forma simples a idéia da *Minimização da Energia Potencial Total* do sistema em termos do campo de deslocamentos. Essa idéia, para os casos mais complexos, utiliza a Formulação Integral, em que os Trabalhos das Forças Externa e Interna (Energia de Deformação) vêm expressos por intermédio de integrais, como já discutido anteriormente na aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais. A idéia da minimização da Energia potencial total é equivalente ao *Método de Ritz* estrutura inteira. Já na aplicação do Método dos Elementos Finitos, essa limitação se restringe ao domínio de um elemento, que tem geometria bem definida. O conceito de Energia Potencial Total anteriormente formulado é aplicado ao domínio de um elemento. A energia potencial total da estrutura será a soma das contribuições de cada elemento, ou seja:

$$\Pi_{ESTRUTURA} = \sum \pi_{elementos}$$

O Princípio anteriormente estudado, de forma mais geral, estabelece que para o equilíbrio ser atingido, a *Energia Potencial Total deve ser Estacionária*, para pequenas variações do campo de deslocamentos. Pode-se demonstrar que no caso das aplicações estruturais limitadas ao *regime elástico*, a Energia Potencial Total é não somente estacionária, mas também atinge um Valor Mínimo.

Outro aspecto observado no exemplo simples das molas anteriormente discutido refere-se ao funcional que descreve o comportamento do sistema. Quando o Funcional é quadrático, ou seja, expresso por uma função do segundo grau, as Equações de Equilíbrio do Sistema são lineares, o que corresponde aos casos estudados de análise linear desenvolvidos neste volume.

O objetivo dos exemplos discutidos neste volume limitou-se a aplicações no âmbito da Análise Estrutural. Entretanto, o Método dos Elementos Finitos pode constituir-se em uma poderosa ferramenta para resolver uma ampla classe de problemas físicos, baseados na Formulação Variacional. Problemas de Condução de Calor, Escoamento de Fluidos, Ondas Eletromagnéticas e Hidrodinâmica podem ser resolvidos pelo Método dos Elementos Finitos. A questão central resume-se no conhecimento do Funcional que governa o problema. Se este estiver disponível, a solução pelo Método dos Elementos Finitos pode ser desenvolvida de forma análoga aos problemas na área da elasticidade.

Por exemplo, o fenômeno de Transferência de Calor para um corpo sólido é descrito pela conhecida Lei de Fourier:

$$q_x = -k_x \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad q_y = -k_y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad q_z = -k_z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

em que q representa os fluxos de calor por unidade de área, θ é a temperatura e k são os coeficientes de condutibilidade térmica do material. Nessas equações, x , y , e z representam as três direções principais.

Para o equilíbrio do fluxo de calor no interior do corpo é válida a equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Q = 0$$

sendo Q a taxa de calor gerada por unidade de volume.

Para o corpo tridimensional, o funcional que representa a condução do calor é:

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \left[k_x \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k_y \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + k_z \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] \cdot dV - \int_V \theta \cdot Q \cdot dV - \int_S \theta^S \cdot Q^S \cdot dS - \sum_i \theta^i \cdot Q^i$$

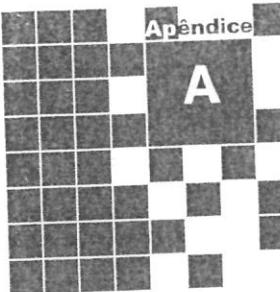
em que Q^i são quantidades concentradas de calor fornecidas, e Q^S são quantidades de calor fornecidas na superfície do corpo.

O estudo desse fenômeno pode ser desenvolvido a partir da condição de estacionaridade de Π , com o objetivo de gerar as equações de equilíbrio. O desenvolvimento dessas equações foge aos objetivos do presente texto.

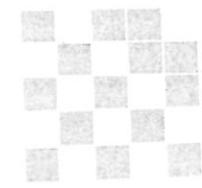
Assim, neste volume, procuramos introduzir os conceitos fundamentais do Método dos Elementos Finitos, tentando, a partir de exemplos simples, enxergar as propriedades que são válidas para a maior parte das aplicações. As formulações estudadas focalizaram as aplicações no âmbito da Análise Estrutural. Nestas últimas observações, procuramos fornecer uma breve visão das aplicações fora do âmbito da análise estrutural, em que as técnicas de discretização de sistemas contínuos podem se constituir em poderosas ferramentas na resolução de problemas.

Nos volumes seguintes, em que serão abordados alguns aspectos mais específicos do método, que transcendem uma simples visão introdutória, voltaremos a discutir essas aplicações mais gerais e as suas respectivas formulações. A título de ilustração, para o leitor que inicia suas aplicações nesta área, são apresentados em seguida no Apêndice A, alguns modelos utilizados em aplicações práticas, no campo da análise estrutural.

Anotações



Alguns Exemplos Práticos



Neste apêndice, a título de ilustração, são apresentados alguns modelos em Elementos Finitos de Aplicações Práticas. Ao concebê-los, as particularidades da estrutura objeto de análise foram motivo de discussão. O detalhamento de todas as hipóteses adotadas em cada exemplo foge aos objetivos deste texto. Porém, em caráter geral, algumas observações devem ser feitas, de modo a relacionar o estudo dos Elementos Finitos desenvolvido no livro e as consequentes aplicações.

A *escolha dos elementos* que representam cada trecho da estrutura constitui o *ponto central da elaboração de qualquer modelo*. Deve-se tentar identificar inicialmente o *comportamento físico dos trechos da estrutura*. A partir deste, surge a questão: *Qual o elemento que representa esse comportamento físico?* Está dado, portanto, o primeiro passo para a escolha do elemento finito na Biblioteca de Elementos do Software. Claro que para a mesma situação física temos algumas opções de elementos. A base para a escolha certa entre as várias opções foi estudada nos capítulos deste texto.

Em uma primeira análise, convém estabelecer uma divisão entre as classes de *comportamentos básicos estruturais*, de acordo com a sua característica espacial. Essa identificação permite-nos obter a primeira orientação da escolha do elemento, a saber:

- **Corpos Sólidos** – São corpos contínuos elásticos que preenchem as três dimensões do espaço, como certos componentes de máquinas e estruturas. Na prática, temos os exemplos: *estruturas complicadas de espessura variável ou espessuras consideráveis em relação ao tamanho da estrutura, como Eixos, Componentes de Máquinas, Suportes Fundidos, Carcaças de Embreagem e Transmissão, Blocos de Motor, Cabeçotes, Volantes, etc.* Para a representação deste comportamento, visando o cálculo das deformações e tensões, são adequados os *Elementos Sólidos*.
- **Chapas** – São corpos que contêm uma dimensão (por exemplo, a altura) muito menor que as outras duas (largura e comprimento) que, por sua vez, são da mesma ordem de grandeza. Na prática, temos os exemplos: *Chapas, Lajes Finas, Cascas de várias formas amplamente utilizadas em engenharia estrutural, aviação e construção naval, Caixa Estrutural Veicular Completa, etc.* Para a representação deste comportamento, visando o cálculo das deformações e tensões, são adequados os *Elementos de Estado Plano de Tensões, Placa e Casca*, que são indicados para análise detalhada de estruturas metálicas de chapa.
- **Vigas Sólidas** – São corpos que contêm uma dimensão (comprimento) muito maior que as duas outras (largura e altura). Os elementos de viga são indicados para a representação desse tipo de comportamento.
- **Vigas de Paredes Finas** – São corpos que apresentam três dimensões de ordem de grandeza diferentes. Por exemplo, um perfil C de uma longarina de caminhão tem espessura muito menor que a altura e largura da seção transversal que, por sua vez, é bem menor que o seu comprimento. Do ponto de vista de flexão, as vigas sólidas e as vigas de paredes delgadas apresentam comportamentos semelhantes, porém, quanto à torção, seus comportamentos são muito diferentes. As *vigas de paredes finas empenam ao sofrerem torção*, podendo resultar no aparecimento de *Tensões Normais na Torção*, fenômeno que neste não é coberto pela teoria elementar de vigas. Por isso, as longarinas e travessas do chassi de um caminhão são modeladas por Elementos de Casca, que permitem representar o comportamento detalhado das chapas que constituem a alma e as abas das longarinas e travessas, quando empenam. Os elementos de viga, formulados a partir da teoria elementar, não cobrem esse efeito. Um estudo completo desse fenômeno (Flexo-Torção/ "Warping Stresses") é desenvolvido nas referências (16) e (17).

O modelamento de vigas de paredes finas de muitas estruturas metálicas, em que os efeitos de torção não são apreciáveis pode ser feito por intermédio de elementos de viga, obtendo o cálculo de tensões nominais.

Vejamos um exemplo prático que mostra o primeiro passo dado na concepção de um modelo em elementos finitos:

A *Roda de Caminhão* representada neste apêndice foi modelada por elementos finitos. A roda apresenta um *Aro*, no qual é fixado o pneu, e um *Disco* que é fixado no cubo do eixo. Esses componentes são constituídos por *chapas*. A pressão interior do pneu é transmitida ao Aro. O Aro sofre flexão e transfere forças ao disco. O entendimento do comportamento de como as cargas "caminham" na estrutura permite identificar *chapas que estão sujeitas à ação simultânea de forças axiais e forças de flexão*. Surge naturalmente a pergunta: *Existe um elemento que traduz esse comportamento?* Sim, é o *Elemento de Casca*. Daí a escolha em uma primeira análise da representação da roda automotiva por elementos de casca, como mostrado no exemplo.

A tentativa de identificar o comportamento físico da estrutura deve ser feita em todos os casos. É um primeiro passo para obter sucesso na representação. Sugerimos observar os exemplos ilustrados, tentando praticar esse raciocínio.

O roteiro sugerido em seguida, identifica as principais macrotarefas consideradas no *Planejamento de um Trabalho de Análise Estrutural*:

Planejamento de um Trabalho de Análise Estrutural

- Estabelecer os objetivos da Análise. Que tipo de Resposta o Modelo Investiga?
- Determinar a parte da estrutura a ser modelada.
- Definir as Cargas e os Pontos de Vinculação da Estrutura.
- Avaliar as Expectativas de Comportamento, ou seja, existe algum comportamento esperado e que deva ser refletido pelo modelo ao obter os resultados?
- Definir a Malha de Elementos Finitos a ser utilizada, com Base no conhecimento dos Elementos Finitos disponíveis, e no tipo de estrutura a ser analisada. Estabelecer a correspondência entre o comportamento físico da estrutura e os elementos formulados para representar esse comportamento. Criar os dados de entrada no software de elementos finitos.
- Verificar o Modelo em Elementos Finitos construído.
- Processar a Análise pelo Método dos Elementos Finitos
- Verificar os Resultados Obtidos e avaliar a sua coerência com as expectativas de comportamento estabelecidas no início do processo de análise
- Caso a estrutura não atenda aos critérios estabelecidos, Modificar o Modelo proposto em função das alterações geométricas introduzidas na estrutura e reiniciar a Análise.

NCE - Nucleo de Calculos Especiais
 RESULTS: 2- B.C. 1,STRESS_2,LOAD SET 1
 STRESS - VON MISES MIN: 1.69E-02 MAX: 7.54E+00
 DEFORMATION: 1- B.C. 1,DISPLACEMENT_1,LOAD SET 1
 DISPLACEMENT - MAG MIN: 0.00E+00 MAX: 8.10E-01
 FRAME OF REF: ELEMENT

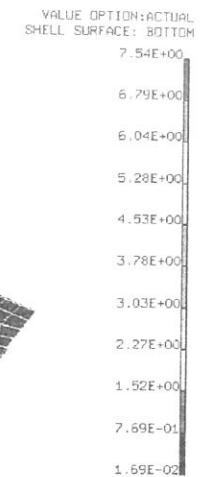


Figura 1.2a – Panorama de Tensões no conjunto de chapas fixadas por parafusos, sob carregamento de pressão.

RESULTS: 2- B.C. 4,STRESS_2,LOAD SET 1
 STRESS - X MIN:-2.81E-01 MAX: 2.90E+01
 DEFORMATION: 1- B.C. 1,DISPLACEMENT_1,LOAD SET 1
 DISPLACEMENT - MAG MIN: 5.03E-01 MAX: 1.10E+00
 FRAME OF REF: PART

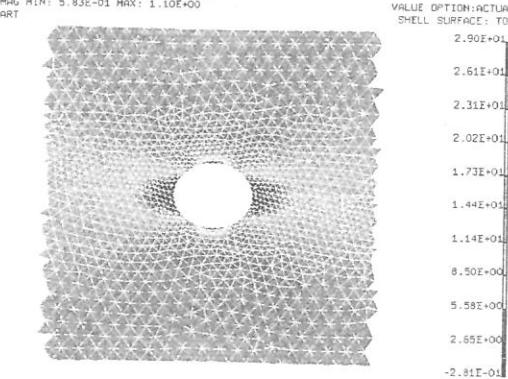


Figura do Quadro IX-d-A – Panorama de Tensões em chapa tracionada com furo central.

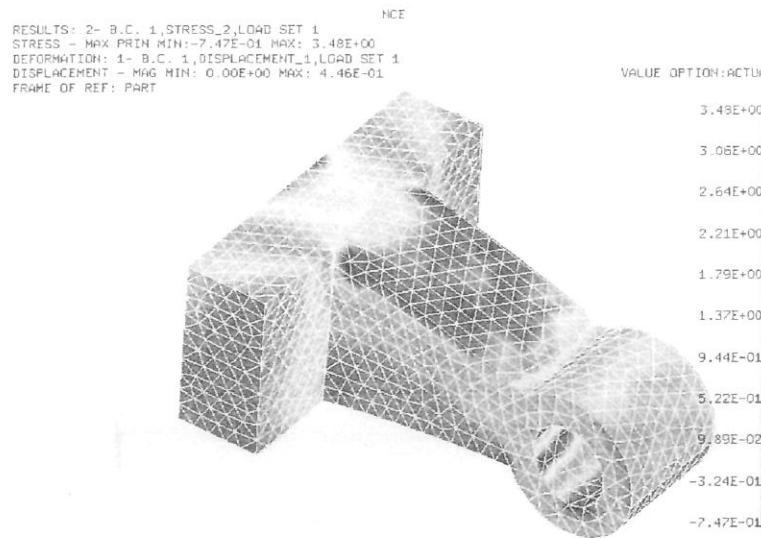


Figura 5-12A – Panorama de Tensões em Componente Mecânico, modelado por intermédio de Elementos Finitos Sólidos Tetraédricos Lineares.

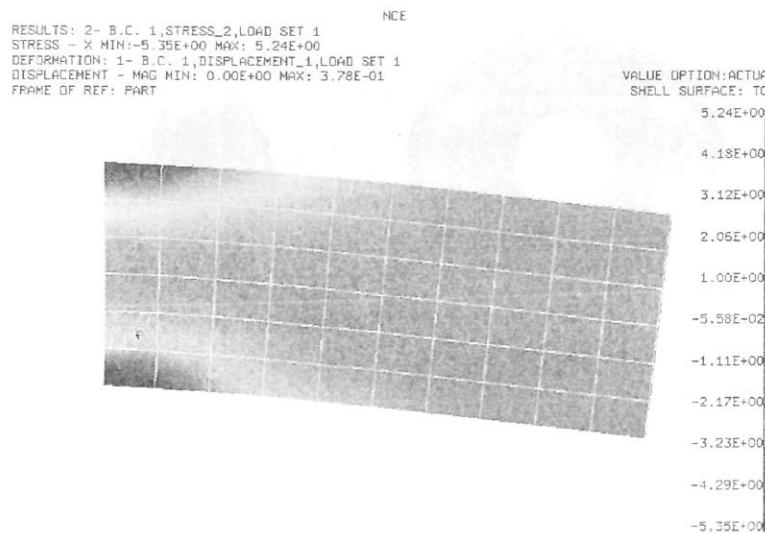


Figura 5-14A - Panorama de Tensões em Chapa sob flexão no seu próprio plano, modelada por intermédio de Elementos Finitos Retangulares Lineares de Estado Plano de Tensões.

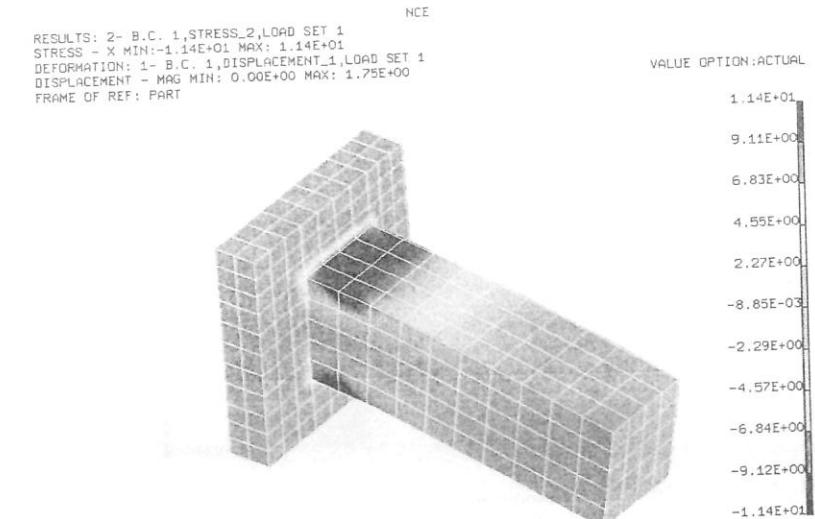


Figura 5-16A – Panorama de Tensões em Componente Mecânico, modelado por intermédio de Elementos Finitos Sólidos Hexaédricos Lineares.

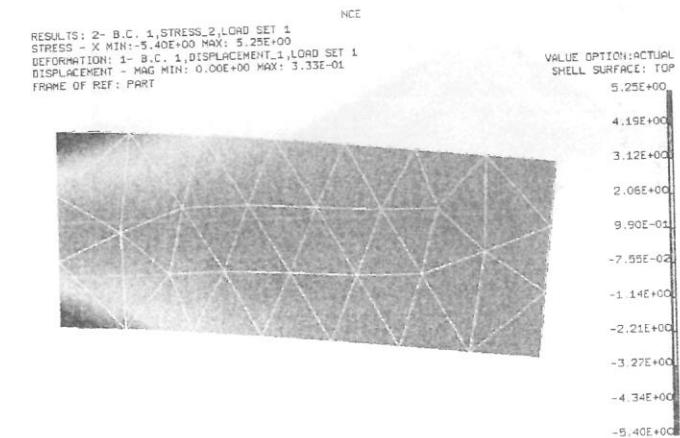


Figura 5-18A - Panorama de Tensões em Chapa sob flexão no seu próprio plano, modelada por intermédio de Elementos Finitos Triangulares Parabólicos de Estado Plano de Tensões.

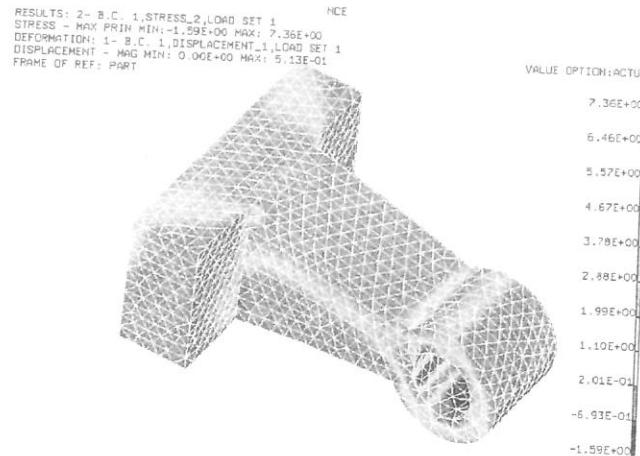


Figura 5-19A – Panorama de Tensões em Componente Mecânico, modelado por intermédio de Elementos Finitos Sólidos Tétráedricos Parabólicos.

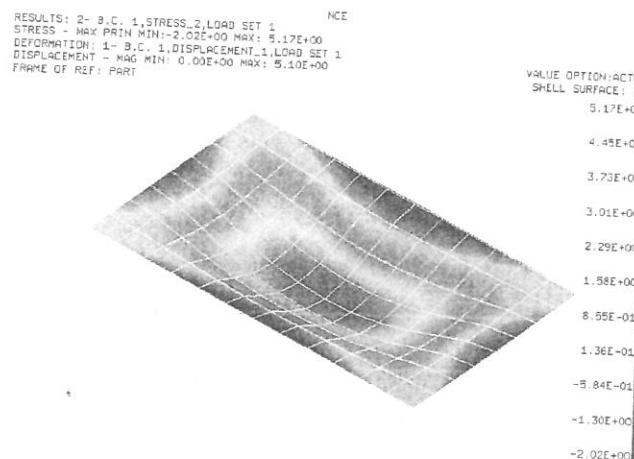


Figura 5-21A - Panorama de Tensões em Chapa sob flexão devido à carga lateral, modelada por intermédio de Elementos Finitos Retangulares Lineares de Placa.

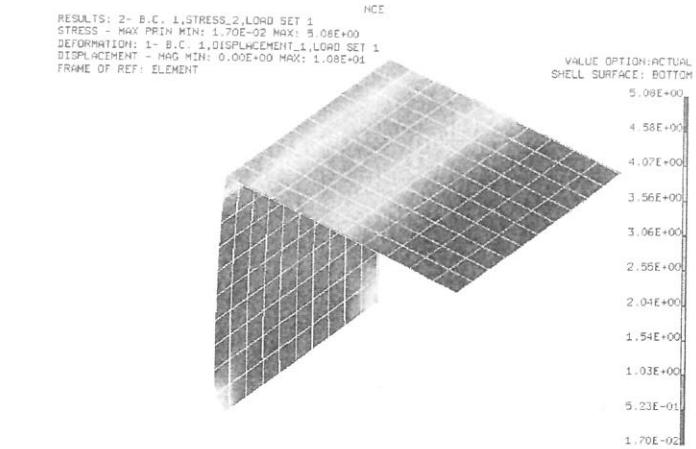
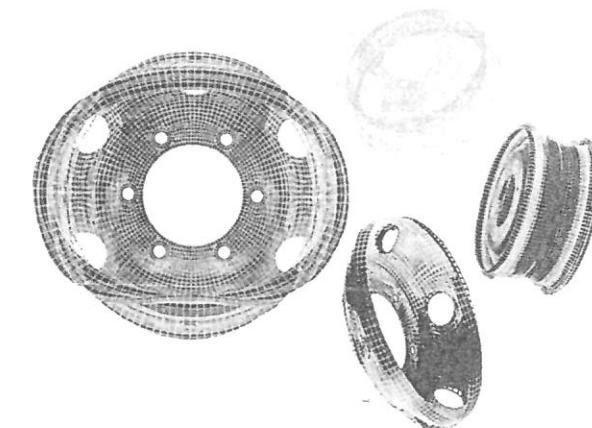
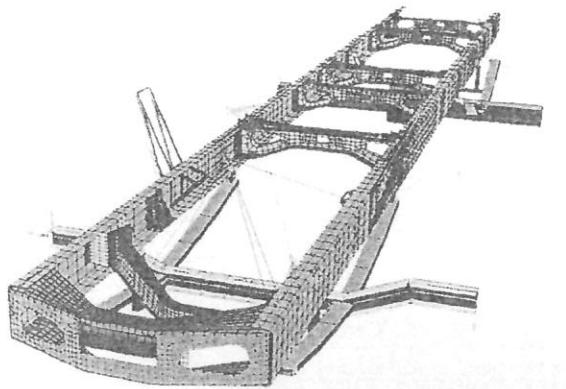


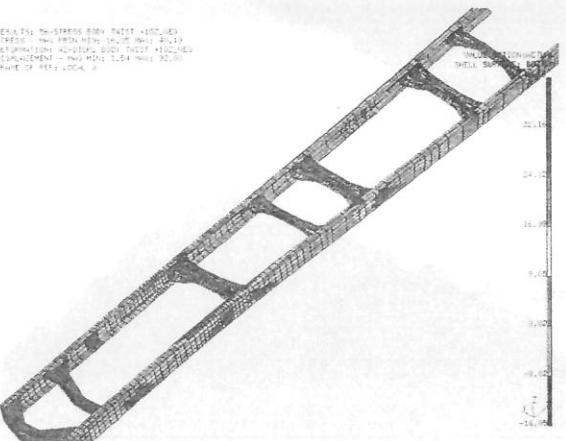
Figura 5-23A - Panorama de Tensões em Suporte sob ação de carga lateral, modelada por intermédio de Elementos Finitos Retangulares Lineares de Casca.



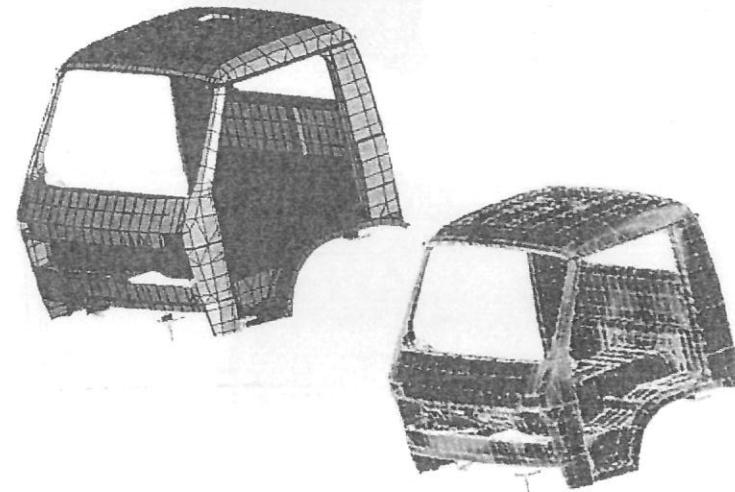
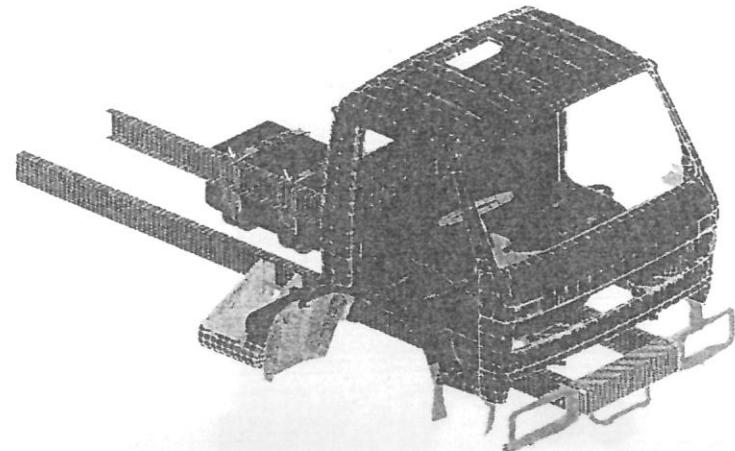
Aplicação Prática I - Modelo de Roda de Caminhão utilizando elementos finitos isoparamétricos de casca.



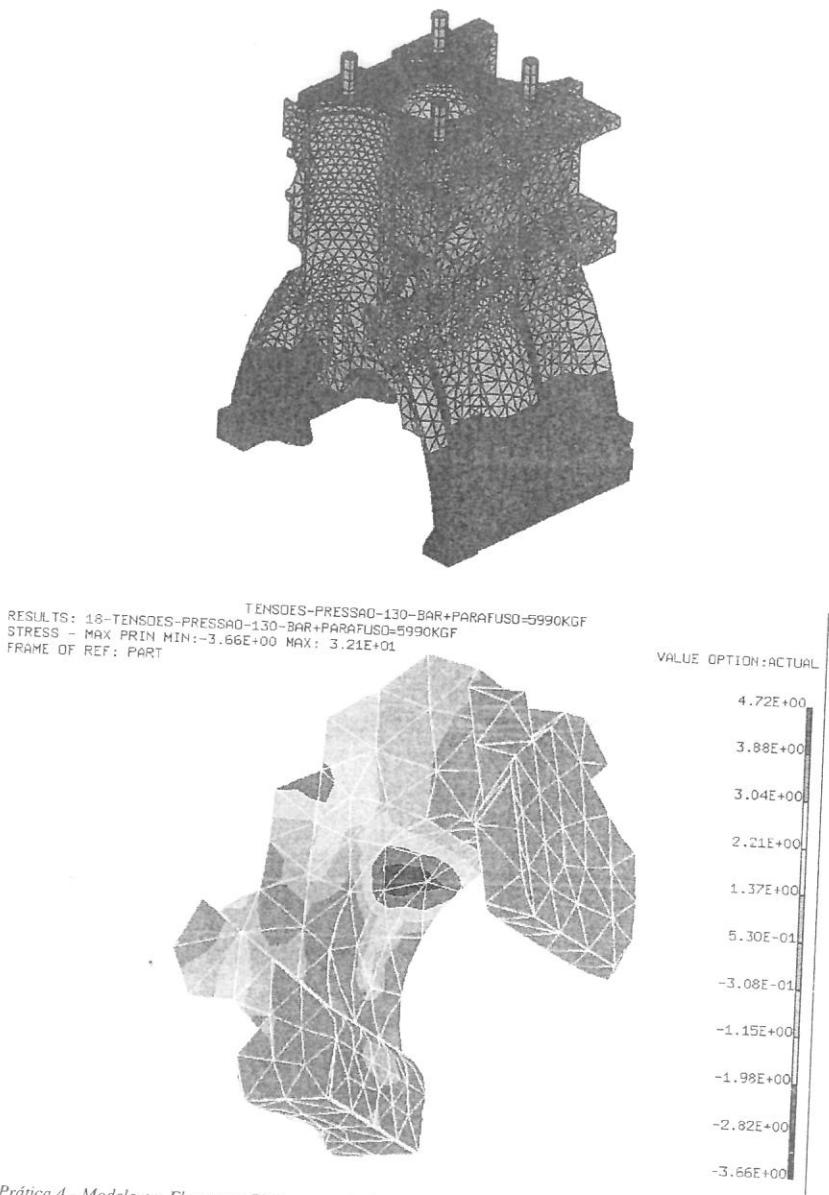
RESULTS: MAX STRESS: 8300.0000
STRESS: MAX PRIN: MIN: MAX: 41.19
DISPLACEMENT: MAX: MIN: 0.0000
DISPLACEMENT: MAX: MIN: 0.0000
TIME OF PRT: 1004.0



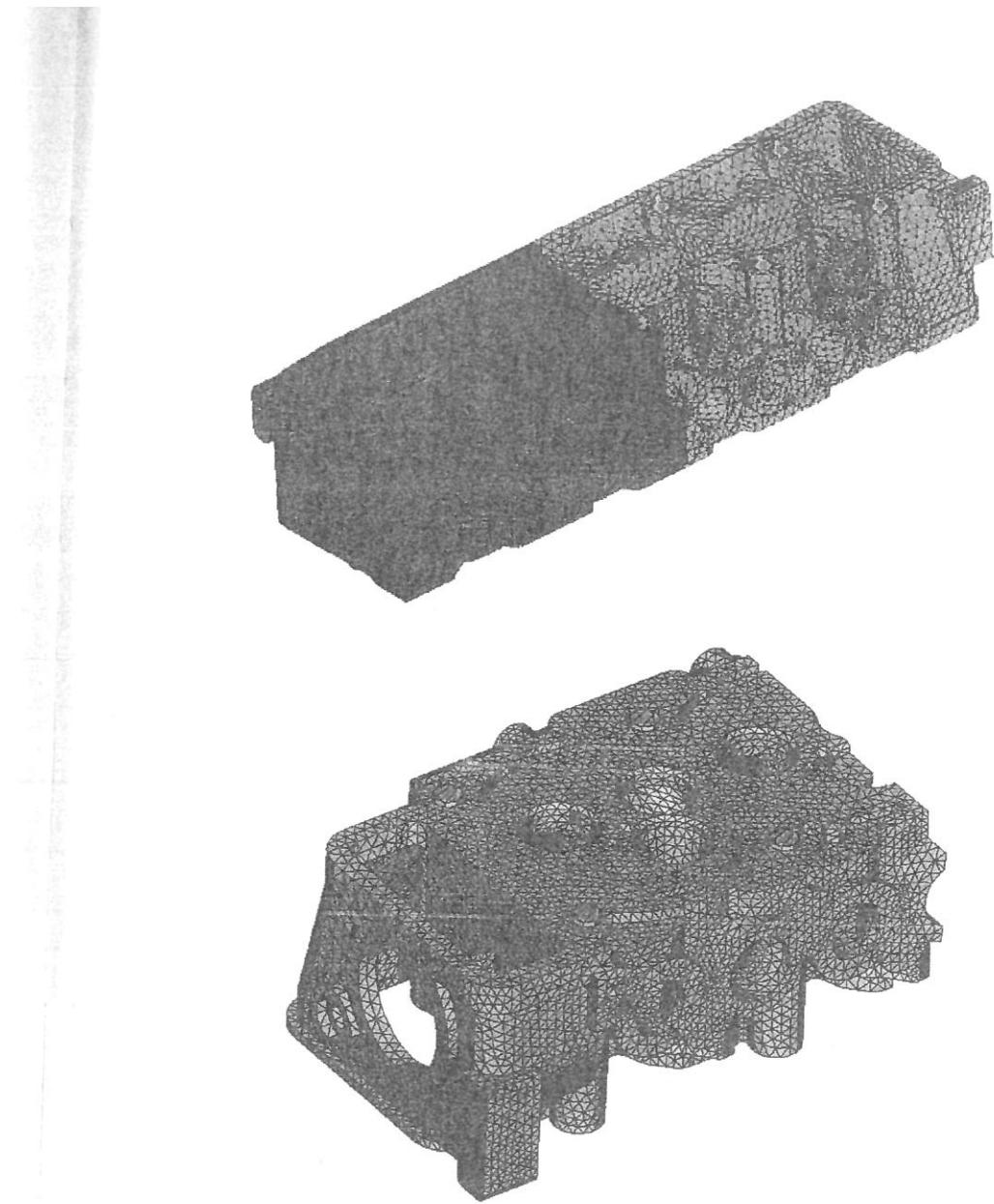
Aplicação Prática 2 - Modelo em Elementos Finitos de Estrutura de Chassi de Caminhão. As chapas das Almas e Abas das Longarinas e Travessas estão sujeitas a carregamentos que são transmitidos na forma de ações no plano dessas chapas e carregamentos locais que flexionam essas chapas. O Elemento Finito que representa esses dois comportamentos simultâneos em uma chapa é o Elemento de Casca. Então esses elementos do chassi foram modelados por Elementos Isoparamétricos de Casca. Os xos e molas foram modelados por elementos de viga, para a representação adequada da rigidez desses componentes, porém sem a necessidade de calcular as concentrações de tensões nesses itens, que não era objeto de investigação. Suportes que transportam Massas que solicitam a estrutura transferem cargas por intermédio de Elementos Rígidos ao Chassi. Após o processamento do software de análise são identificadas as regiões mais solicitadas por intermédio do panorama de tensões. Essa atividade de pós-processamento permite ao analista observar os resultados obtidos, interpretá-los e avaliar a coerência deles.



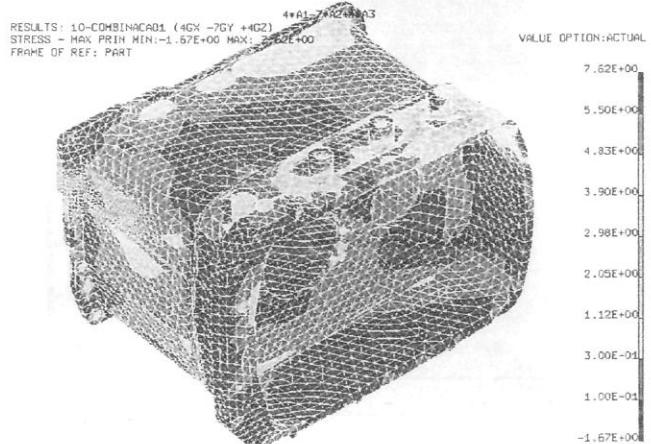
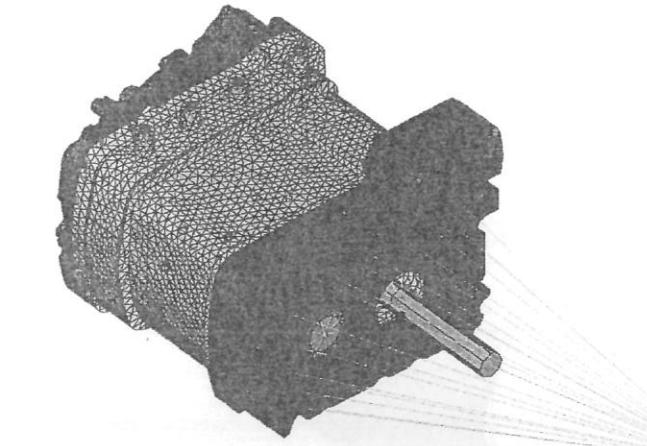
Aplicação Prática 3 - Modelo em Elementos Finitos de Estrutura de Caminhão e Componentes, utilizando Elementos Finitos Isoparamétricos de Casca. A Malha em alguns trechos do Modelo foi representada sem muito refinamento, como, por exemplo, a cabine, devido a uma questão prática já comentada anteriormente ao introduzir o *Planejamento de um Trabalho de Análise Estrutural: Estabelecer os objetivos da Análise!* Nas regiões em que não é requerida uma avaliação detalhada do panorama de Tensões, representa-se a estrutura por uma Malha mais grosseira, de sorte a contabilizar adequadamente apenas a Rigidez daquele trecho, e o efeito desta no comportamento global da estrutura. Utiliza-se uma malha mais refinada apenas na região de interesse.



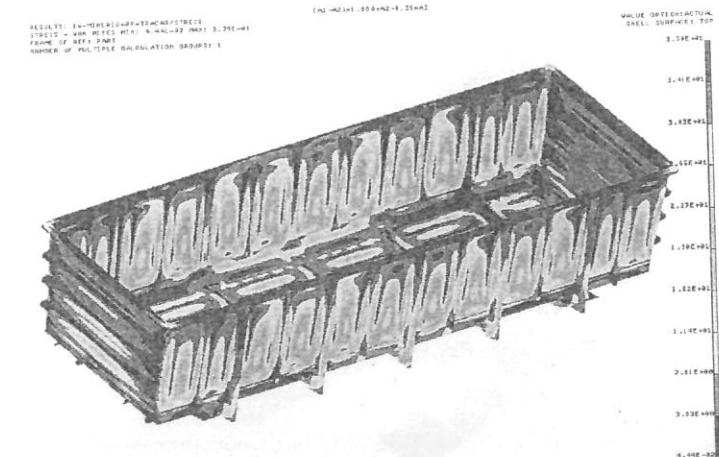
Aplicação Prática 4 - Modelo em Elementos Finitos para Análise de Região de Bloco de Motor. Como explicado no começo deste apêndice, justifica-se a Modelagem do Bloco por intermédio de Elementos Finitos Sólidos. Foram utilizados Elementos Tetraédricos Parabólicos, de modo a calcular acuradamente o panorama de Tensões na estrutura, como já justificado no texto teórico. A geometria bastante irregular do Bloco torna interessante o uso da forma tetraédrica dos elementos, pois a partir da geração da geometria em Modelamento Sólido Tridimensional (Volumes), procede-se à geração automática da malha, dentro dos padrões de distorções aceitáveis. A justificativa desse controle de distorções foi dada no texto teórico. A distribuição de tensões obtida no componente permite fazer a análise de sua Resistência Mecânica.



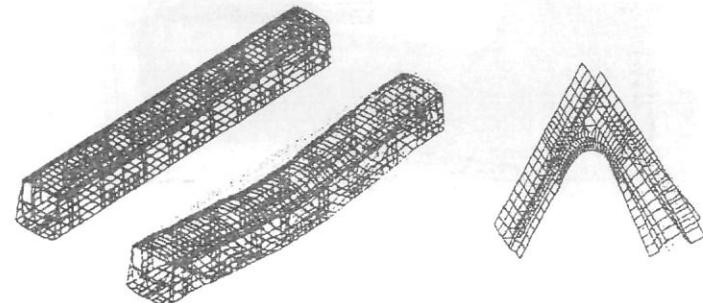
Aplicação Prática 5 - Modelo em Elementos Finitos para Análise de Região de Cabeçote de Motor de Motor. Foram utilizados, à semelhança do estudo do Bloco do Motor, Elementos Tetraédricos Parabólicos, pelos motivos já discutidos anteriormente.



Aplicação Prática 6 - *Modelo em Elementos Finitos de Carcaça de Transmissão, Carcaça de Embreagem e Tampa, com Elementos Sólidos Tetraédricos Parábólicos.* Esse conjunto é fixado no Motor. Considerando o Motor como um conjunto rígido, este é representado por intermédio de Elementos Rígidos, que unem o Centro de Massa do Motor, em que é concentrada a sua massa, aos seus pontos de fixação na carcaça e aos pontos de fixação dos suportes do motor. A distribuição de tensões obtida no componente permite fazer a análise de sua Resistência Mecânica.



Aplicação Prática 7 - *Modelo em Elementos Finitos de Vagão de Minério.* O comportamento dos Painéis de Chapa e dos Perfis Reforçadores da Estrutura foi simulado por intermédio de Elementos Isoparamétricos Retangulares de Casca. Os elementos foram representados nos planos médios de todas as chapas da estrutura, de acordo com as considerações efetuadas no texto teórico. Para os diversos carregamentos, tais como: ação da pressão do minério nas chapas, peso próprio da estrutura, compressão e tração nos engates entre vagões e para as possíveis combinações entre essas cargas, obtém-se a distribuição de tensões ao longo de toda a estrutura do vagão. São obtidas as tensões nas faces interna, externa e plano médio das chapas, que os softwares de análise denominam "bottom", "top" e "middle", de acordo com os sistemas locais de coordenadas dos elementos.



Aplicação Prática 8 - *Modelo em Elementos Finitos de Carro de Passageiros de Metrô.* O comportamento dos Painéis de Chapa foi simulado por intermédio de Elementos Isoparamétricos Retangulares de Casca, e os Reforçadores por intermédio de Elementos de Viga. O Modelo permite avaliar a Rigidize do conjunto, e uma primeira idéia das Tensões Nominais nas principais regiões da estrutura. Os resultados fornecidos por esse Modelo Global dão subsídios para avaliar localmente um canto de janela típico do carro, ou seja, constituem condições de contorno para análise detalhada de tensões, e verificar os Fatores de Concentração de Tensões nesses locais. Esse procedimento é amplamente utilizado em análise de algumas estruturas, tais como Plataformas de Petróleo, em que, a partir de um modelo global mais simples, obtém-se subsídios para análise localizada de tensões.

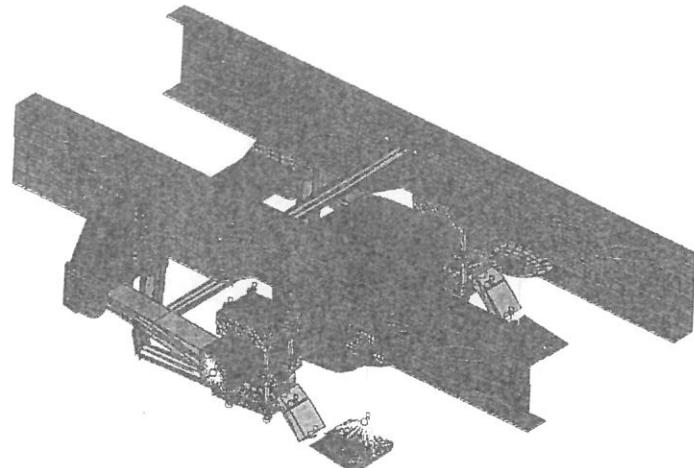
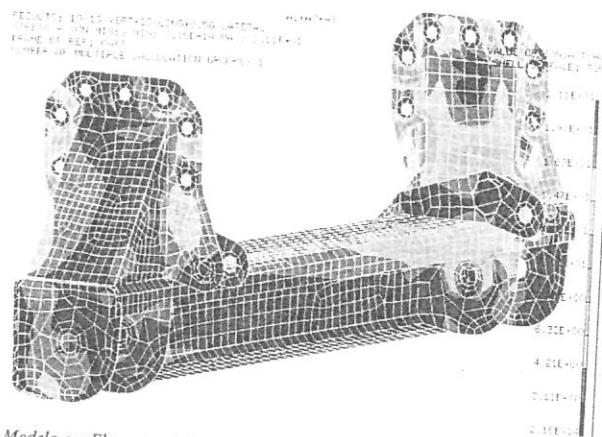
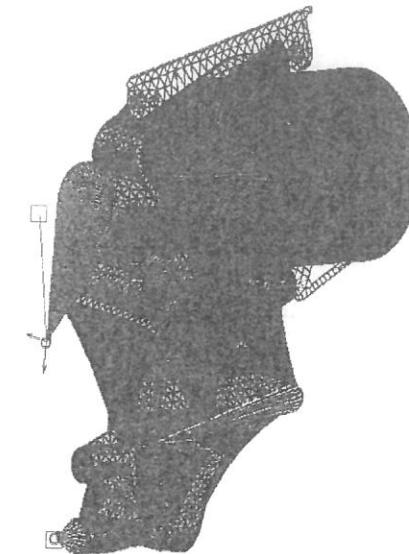


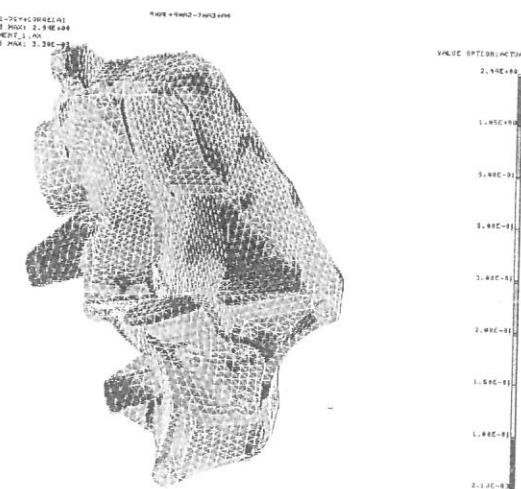
Figura 9-10 - VERTICE CONJUNTO LATERO-TRASEIRO - VERSÃO 2 - ANÁLISE DE TENSÃO E DESPLACAMENTO



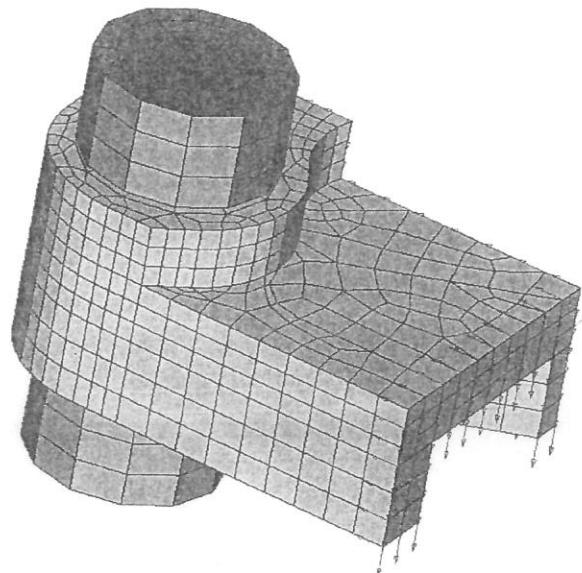
Aplicação Prática 9 - Modelo em Elementos finitos de Estrutura de Sistema de Suspensão de Ônibus, utilizando Elementos Isoparamétricos de Casca para os Elementos constituídos por Chapas, Elementos Sólidos para peças fundidas, Elementos de Viga para representação de Barras da Estrutura, Elementos de Mola e Barras Rígidas para Transmissão de Esforços.



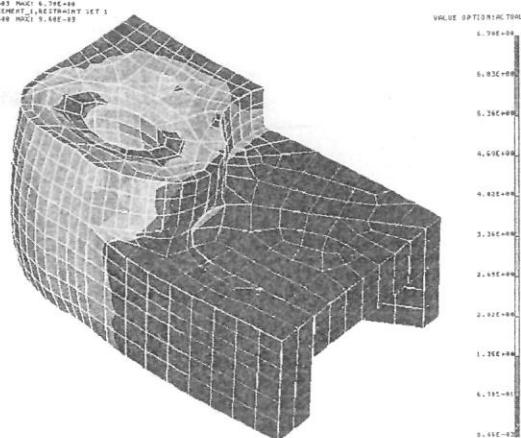
RESULTS - 24-COMBINACION-2-FCA-HCL-20-VAR0001-01
STRESS - VON MISES (MPA) 2.9E-03 MAX: 2.9E+00
DISPLACEMENT - NODE 1000 2.39E-03 MAX: 2.39E-03
FRAME OF REF: PART



Aplicação Prática 10 - Modelo em Elementos Finitos para Análise de Suporte de Tomada de Força, agregado ao bloco do motor de veículo utilitário. Foram utilizados, à semelhança do estudo do Bloco do Motor, Elementos Tétraédricos Parabólicos, pelos motivos já discutidos anteriormente. Alguns componentes agregados ao suporte foram representados simplificadamente por intermédio de elementos de casca, de modo a contabilizar a rigidez deles sem a preocupação da determinação do panorama de tensões. Alguns outros elementos foram representados por intermédio de suas massas colocadas nos seus centros de massa e ligados ao suporte por intermédio de elementos rígidos. As massas permitem sob ação de cargas gravitacionais transmitir esforços ao suporte e, além disso, utilizar o modelo para Cálculo de Freqüências Naturais e Vibrações Forçadas, cujos conceitos e procedimentos de análise serão abordados no próximo volume, dedicado à Análise Dinâmica de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos, e alguns tópicos mais avançados.



RESULTS - R.C. 1. STRESS 3. REFINEMENT SET 1
1THRES - MAX MEAS MIN: 1.44E-03 MAX: 6.78E-02
REFINEMENT - MAX MEAS MIN: 1.44E-03 MAX: 6.78E-02
DISPLACEMENT - MAX MIN: 1.44E-03 MAX: 1.44E-02
FRAME OF REFERENCE ELEMENT



Aplicação Prática II - Modelo em Elementos Finitos para Análise de Região de fixação por parafusos em componente mecânico. Foram utilizados neste caso Elementos Sólidos Hexaédricos Lineares, que também permitem a determinação acurada do campo de tensões, guardadas as observações já estabelecidas na formulação do elemento hexaédrico, como estudado no texto teórico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis". Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey: 1982.
- (2) ZIENKIEWICZ, O., C., "The Finite Element Method", 3rd ed., McGraw – Hill Book Company, New York, NY, USA: 1980.
- (3) COOK, R. D., MALKUS and D.S., PLESHA, M.E., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis". Third Edition, John Wiley & Sons, New York, USA: 1988.
- (4) BISMARCK-NASR, M.N., "Finite Elements in Applied Mechanics". ITA-CTA, São José dos Campos, SP, Brasil: 1993.
- (5) GERE, J. M., WEAVER JR., W., "Análisis de Estructuras Reticulares". Compañía Editorial Continental S.A., Mexico: 1976.
- (6) TIMOSHENKO, S. P., "Resistência dos Materiais", Volumes I e II. Livros Técnicos e Científicos Editora. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: 1981.
- (7) TIMOSHENKO, S. P. e GERE, J. E., "Mecânica dos Sólidos"- Volumes 1 e 2. Livros Técnicos e Científicos Editora. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: 1983.
- (8) FEODOSIEV, V.I., "Resistencia de Materiales". Editorial MIR. Moscou, URSS: 1980.
- (9) BELIAEV, N.M., "Strength of Materials". Mir Publishers. Moscow, URSS: 1979.
- (10) SCHODEK, Daniel L., "Structures". Prentice-Hall Inc. New Jersey, USA: 1980.
- (11) RICARDO, O . G. S., "Introdução à Resistência dos Materiais". Editora da Universidade de Campinas. Campinas, Brasil: 1977.
- (12) RICARDO, O . G. S., "Teoria das Estruturas". Editora da Universidade de São Paulo/Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda. São Paulo, Brasil: 1978.
- (13) LANGENDONCK, T. v., "Resistência dos Materiais- Tensões". Editora da Universidade de São Paulo/Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo, SP, Brasil: 1971.
- (14) TIMOSHENKO, S. P. and GOODIER, J. N., "Theory of Elasticity". McGraw – Hill Book Company, Kogakusha Company Ltd. Tokyo, Japan: 1951.
- (15) TIMOSHENKO, S. P. and KRIEGER, S. W., "Theory of Plates and Shells". McGraw Hill International Book Company. Singapore: 1970 .
- (16) ALVES FILHO, A. , "Teoria de Flexo - Torção para Perfis Abertos de Paredes Delgadas (Teoria de Vlasov)". Revista Brasileira de Engenharia - Caderno de Engenharia Naval (SOBENA – Sociedade Brasileira de Engenharia Naval), Volume 6/nº 1, página 7 a página. 65. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: 1988.
- (17) ALVES FILHO, A., "Análise de Estruturas Compostas por Perfis Abertos de Paredes Delgadas: Aplicação da Analogia Flexão - Retorção a Problemas Estruturais Estáticos e Dinâmicos" – Tese de Doutorado. São Paulo, SP, Brasil: 1995.
- (18) DIETER, G. E., "Metalurgia Mecânica". Editora Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro, RJ, Brasil: 1981.

- (19) ANAND, D.K., CUNNIF, P.F., "Engineering Mechanics – Statics and Dynamics", Houghton Mifflin Company, Boston, USA: 1973.
- (20) STRELKÓV, S., "Mecânica. Editorial Mir, Moscú, URSS: 1978.
- (21) ALVES FILHO, A., E.F.O., J.L.C.R., "Física – Mecânica"- Coleção 3 volumes, 11^a Edição. Editora Ática S.A. São Paulo, SP, Brasil: 1992.
- (22) ALVES FILHO, A., E.F.O., J.L.C.R., "Física – Mecânica - Cinemática"- Coleção 8 volumes. Editora Ática S.A. São Paulo, SP, Brasil: 1982.
- (23) KÁRMÁN, T.v., BIOT, M.A., "Mathematical Methods in Engineering". McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA: 1940.
- (24) PRESS, W.H., B.P.F.,S.A.T.,W.T.V., "Numerical Recipies-The Art of Scientific Computing". Cambridge University Press, Melbourne, Australia: 1986.
- (25) BAJPAI, A.C., L.R.M., D.W., "Matemática para a Engenharia", Hemus Livraria Editora Ltda. São Paulo, SP, Brasil: 1980.
- (26) Gallagher, R. H., etal. "A correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis." AGARDograf 69, Pergamon (distrib. By Macmillan, New York) 1964.
- (27) Melconian, Sarkis. Mecânica Técnica e Resistência dos Materiais. Editora Érica Ltda., São Paulo, SP, Brasil: 1999.
- (28) Melconian, Sarkis. Elementos de Máquinas. Editora Érica Ltda., São Paulo, SP, Brasil: 2000.
- (29) Antunes, Izildo & Freire. Marcos A. C. Elementos de Máquinas. Editora Érica Ltda., São Paulo, SP, Brasil: 1998.

MARCAS REGISTRADAS

Todas as marcas citadas neste livro pertencem a seus respectivos fabricantes.