Fonctions holomorphes

Exercice 1.1

Question 1) soit $z \in \mathbb{C}$ $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x+iy$.

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\,dy$$

$$= 1 + 2iy$$

(donc f est differentiable)

posons: $P : (x,y) \longmapsto x$

$Q : (x,y) \longmapsto y^2$

Question 2) f est differentiable.

Dans ce cas:

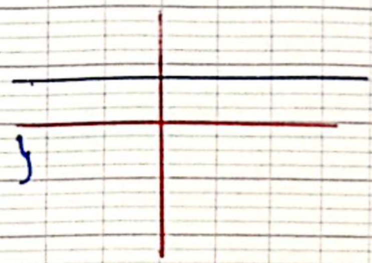
$\forall z \in \mathbb{C}$,

f est holomorphe $\iff \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) = \dfrac{\partial}{\partial y} Q(z) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(z) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) \end{cases}$

$z = x+iy$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\iff \begin{cases} \forall z \in \mathbb{C} & 1 = 2y \\ & 0 = -0 \end{cases}$

$\iff \forall z \in \mathbb{C}$ $\{ y = \frac{1}{2}$.



f est differentiable sur $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid y = 1/2 \}$

$= \{ x + \frac{1}{2} i \mid x \in \mathbb{R} \}$

Exercice 1.2

f est holomorphe sur Ω

$\iff$ f satisfait les conditions de Cauchy Riemann et est differentiable

$\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, z = x+iy$ $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) = \dfrac{\partial}{\partial y} Q(z) \quad (1) \\ \dfrac{\partial}{\partial y} P(z) = -\dfrac{\partial}{\partial x} Q(z) \end{cases}$

$\forall z \in \mathbb{C}$

(1) $\iff$ $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} P(z) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y} Q(z)\right)$

$\forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} P(z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial}{\partial y} P(z)\right)$

$\forall z \in \mathbb{C}$

$\iff \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} P(z) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} P(z) = 0$

$\iff \forall z \in \mathbb{C}, \quad \Delta f(z) = 0$.

Lemme de Schwarz

(*) puisque f est holomorphe

$\Rightarrow$ f analytique

$\Rightarrow$ infiniment $\mathbb{C}$ derivable

$\Rightarrow P, Q \; C^\infty$

[on peut dériver par rapport à y (2) et on obtient le même résultat]

Exercice 1.3

Analyse : Supposons qu'il existe une fonct° holomorphe f définie sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ dont la partie réelle est P et $f(1)=2$.

Puisque f est holomorphe elle satisfait les conditions de Riemann i.e :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} \dfrac{\partial P(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y} Q(z) \\ \dfrac{\partial P(z)}{\partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial x} Q(z) \end{cases}$$

~~Noto~~ puisque $z\in\mathbb{C}$, $\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $z=x+iy$.

$$f \text{ est holomorphe} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y} Q(x,y) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial}{\partial x} Q(x,y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial}{\partial y} Q(z) \\ + \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial}{\partial x} Q(x,y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 + \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial}{\partial y} Q(z) & (1) \\ 2xy \times (x^2+y^2)^{-2} = \dfrac{\partial}{\partial x} Q(x,y) & (2) \end{cases}$$

$\alpha u' u^{\alpha-1}$

u^{α}

(2) $\iff Q(x,y) = -y\,(x^2+y^2)^{-1} + C(y)$ ~~où~~ où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

de plus,

$$(1) \iff 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = C'(y) \times 1 \qquad \frac{-1x\,(x^2+y^2)+y\,2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\iff (x^2+y^2)^2 + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} = (x^2+y^2)^2\, C'(y) \; \cancel{-x^2} + \cancel{y^2}$$

$$\iff (x^2+y^2)^2 \,(1 - C'(y)) = 0 \qquad \text{(car } x\neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ par hypothèse)}$$

$$\iff C'(y) = 1$$

$$\iff C(y) = y + c \quad \text{où } c\in\mathbb{R}$$

De plus, on souhait

$f(1) = 2$

$\Leftrightarrow f(1, 0) = (2, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P(1,0) = 2 \\ Q(1,0) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{1} = 2 \checkmark \\ c = 0 \end{cases}$

Ainsi, $Q : (x,y) \longmapsto \frac{-y}{(x^2+y^2)} + y.$

<u>Synthese</u> posons :

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$Q : (x,y) \longmapsto \frac{-y}{(x^2+y^2)} + y$ et $f : (x,y) \longmapsto P(x,y) + i\,Q(x,y)$

il sagit de verifier

(1) $f(1) = 2$ ✓ (on a tout fait pour)

(2) P est la partie reelle de f ✓ (on l'a definie ainsi)

(3) f est holomorphe car differentiable et respecte les conditions de cauchy Riemann (on a tout fait pour)

Question 2 : soit $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x+iy$

$$f(z) = +x + \frac{x}{x^2+y^2} + iy - \frac{iy}{(x^2+y^2)}$$

$$= x+iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= z + \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$= z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

$$\boxed{= z + \frac{1}{z}}$$

$(1-x-iy)(1-x+iy)$

$(1-x)^2 + iy(\cancel{1-x}) - iy(\cancel{1-x}) + y^2$

Exercice 1.4.

Question 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $z=x+iy$

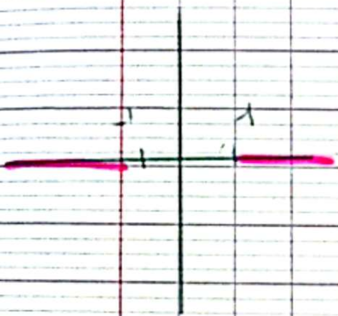
$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}_- \iff \frac{1+x+iy}{1-x-iy} \in \mathbb{R}_-$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{Im}\left(\dfrac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+(y)^2}\right)=0 \\ \mathrm{Re}\left(\qquad \right)\leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \left\{ \cancel{\mathrm{Im}\left(1-x+iy+x-x^2-y^2+iy-ixy\right.} \right.$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{Im}\left(\dfrac{1-x+iy+x-x^2+iyx+iy-iyx-y^2}{(1-x)^2+(y)^2}\right)=0 \\ \mathrm{Re}\left(\quad \ldots \quad \right)\leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y+\cancel{yx}+y-\cancel{yx}=0 \\ 1-\cancel{x}+\cancel{x}-x^2-y^2\leq 0 \end{cases}$$



$$\iff \begin{cases} y=0 \\ 1\leq x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=0 \\ x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\end{cases}$$

$\iff z\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

$\iff z\notin V$

- La fonction $g: z\longmapsto \frac{1+z}{1-z}$ est holomorphe sur V comme quotient de fonctions holomorphes sur V (et le dénominateur ne s'y annule pas)

$z\in V \Rightarrow \frac{1+z}{1-z}\notin\mathbb{R}_-$

$g(V)\subset \mathbb{C}\setminus(]-\infty,0])$

$\Rightarrow \frac{1+z}{1-z}\in\mathbb{C}\setminus\{$

- La fonction log est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,0])$

Par composition, f est holomorphe sur V.

Question 2) Soit $z \in V$

~~MQ~~ Dq $f(z) \in W$:

- i.e $-\pi/2 < \mathrm{Im}\, f(z) < \pi/2$

puisque

$$f(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\left|\frac{1+z}{1-z}\right|\right) + i \operatorname*{Arg}_{]-\pi,\pi[}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right)$$

donc: $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2} \operatorname*{Arg}_{]-\pi,\pi[} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

or: $-\pi < \operatorname*{Arg}_{]-\pi,\pi[}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) < \pi$

donc $-\pi/2 < \frac{1}{2} \operatorname*{Arg}_{]-\pi,\pi[} \left(\frac{1+z}{1-z}\right) < \pi/2$

donc $-\pi/2 < \mathrm{Im}(f(z)) < \pi/2$

donc $f(z) \in W$

- Soit $(z, \tilde{z}) \in V^2$

Supposons: $f(z) = f(\tilde{z})$

donc $\begin{cases} \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(f(\tilde{z})) \\ \mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(f(\tilde{z})) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} e^{\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|} = e^{\ln\left|\frac{1+\tilde{z}}{1-\tilde{z}}\right|} \\ \operatorname*{Arg}_{]-\pi,\pi[}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname*{Arg}_{]-\pi,\pi[}\left(\quad \right) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \left|\frac{1+\tilde{z}}{1-\tilde{z}}\right| \\ \mathrm{Arg}(\quad) = \mathrm{Arg}(\quad) \end{cases}$ (m̂ module et m̂ argument)

$\iff \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\tilde{z}}{1-\tilde{z}}$

$\iff (1+z)(1-\tilde{z}) = (1+\tilde{z})(1-z)$

$\iff z = \tilde{z}$

Question 3. Montrons que f est bijective :

soit $z \in V$

$$f(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$2f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{2f(z)} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2f(z)} - 1 = z\left(e^{2f(z)} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{e^{2f(z)} - 1}{e^{2f(z)} + 1}$$

posons :

$$f^{-1} : \omega \longmapsto \frac{e^{2\omega} - 1}{e^{2\omega} + 1}$$

Reste à verifier :

- $\forall \omega \in W, \quad f \circ f^{-1}(\omega) = \omega$ (on aura tout fait pour)
- f^{-1} est holomorphe sur V.