École Nationale
Supérieure
de l'Électronique
et de ses Applications

Analyse complexe 1A

Responsable du cours : Bastien Faucard
bastien.faucard@ensea.fr

E.N.S.E.A. 2025 – 2026, Semestre 5

Travaux dirigés

Table des matières

1 Fonctions holomorphes 2

2 Joukovski et Bessel 3

3 Théorème de Cauchy 4

4 Théorème des résidus 6

5 Transformée en z : TZ 7

1

Fonctions holomorphes

Exercice 1.1 – Conditions de Cauchy-Riemann

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $f(z) = x + iy^2$.

Question 1. — Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, déterminer sa différentielle df.

Question 2. — En quels points f est-elle holomorphe ? Existe t'il un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ tel que la restriction de f à Ω soit holomorphe ?

Exercice 1.2 – Holomorphe et harmonique

Une application

$$\phi \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$$

de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est dite **harmonique** lorsque $\Delta\phi(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \Omega$. Rappelons que $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est l'opérateur laplacien. Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que P et Q sont harmoniques sur Ω.

Exercice 1.3 – Partie réelle fixée

Soit $(x, y) \neq (0, 0)$. On pose $P(x, y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$.

Question 1. — Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f définie sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ dont la partie réelle est P et telle que $f(1) = 2$.

Question 2. — Pour $z \neq 0$, déterminer l'expression de $f(z)$ en fonction de z.

Exercice 1.4 – Transformation conforme

On note

$$V = \mathbb{C}\backslash(]-\infty, -1]\cup]1, +\infty[); \quad W = \left\{z \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Question 1. — Montrer que $\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow z \notin V$. En déduire que $f(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ est holomorphe sur V où Log désigne la détermination principale du logarithme complexe.

Question 2. — Justifier que si $z \in V$, alors $f(z) \in W$. Montrer que f est injective sur V.

Question 3. — Montrer que $f \colon V \to W$ est un biholomorphisme (une fonction holomorphe bijective d'application réciproque également holomorphe).

2

Joukovski et Bessel

Exercice 2.1 – Transformation de Joukovski

Soit

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big) \end{aligned}$$

Considérons de plus, pour tout $R>0$ et tout $m\in\mathbb{R}^*$ les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants.

$$C_R=\{z\in\mathbb{C}, |z|=R\};\quad D_m=\{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Im}(z)=m\mathrm{Re}(z)\}$$

Question 1. — Rappelons que l'équation cartésienne d'une ellipse de demi-grand axe $A>0$ et de demi-petit axe $B>0$ centrée en l'origine est

$$\Big(\frac{x}{A}\Big)^2+\Big(\frac{y}{B}\Big)^2=1$$

Montrer que $f(C_R)$ est une ellipse de demi-grand axe $A_R=\frac{1}{2}\Big(R+\frac{1}{R}\Big)$ et de demi-petit axe $B_R=\frac{1}{2}\Big(R-\frac{1}{R}\Big)$.

Question 2. — Montrer que $f(D_m)=\{w\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(w)^2-\Big(\frac{\mathrm{Im}(w)}{m}\Big)^2=\frac{1}{1+m^2}\}$ si $m\neq 0$ et $f(D_0)=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. Interpréter géométriquement.

Question 3. — Que peut-on dire quant à la conservations des angles via f ? Est-ce une transformation conforme en tout point de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$?

Exercice 2.2 – Équation de Bessel

Soit l'équation de Bessel d'indice λ :

$$(B)_\lambda\colon x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\lambda^2)y(x)=0$$

Question 1. — Supposons que $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Déterminer les solutions de $(B)_\lambda$ de la forme

$$y(x)=x^\alpha\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nx^n$$

avec $a_0\neq 0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.
Indication : montrer que $\alpha=\pm\lambda$ puis déterminer les a_n en précisant le rayon de convergence de la série obtenue. Soit Γ la fonction gamma d'Euler, pour $a_0=\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$, on obtient les fonctions de Bessel $J_\lambda(x)$ et $J_{-\lambda}(x)$.

Question 2. — Toujours avec $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, vérifier que J_λ et $J_{-\lambda}$ forment une $\mathbb{R}$-base de solutions de $(B)_\lambda$.

3

Théorème de Cauchy

Exercice 3.1 – Transformées de Fourier

Soit $A > 0$ et $\nu \geq 0$ des réels. On note $\Gamma_{A,\nu}$ le lacet définit comme la réunion des segments $[-A, A], [A, A+i\nu], [A+i\nu, -A+i\nu]$ et $[-A+i\nu, -A]$ dont le sens de parcours est trigonométrique. Rappelons également que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$.

Question 1. — Justifier que $\int_{\Gamma_{A,\nu}} e^{-\pi z^2} dz = 0$.

Question 2. — Montrer que la limite, lorsque $A \to +\infty$, de $\int_{[A,A+i\nu]} e^{-\pi z^2} dz$ est nulle, tout comme celle de $\int_{[-A+i\nu,-A]} e^{-\pi z^2} dz$.

Question 3. — En faisant tendre A vers $+\infty$, en déduire la valeur de $\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu t} e^{-\pi t^2} dt$.

Exercice 3.2 – Intégrales de Fresnel

On se propose de déduire la valeur de $I = \int_0^\infty e^{ix^2} dx$ de celle de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour cela, on pose $f(z) = e^{-z^2}$ et on définit, pour tout $R > 0$, le lacet Γ_R comme la réunion des segments $[0, R]$ et $\left[Re^{i\frac{\pi}{4}}, 0\right]$ et de l'arc de cercle de centre l'origine et de rayon R correspondant (orienté dans le sens trigonométrique).

Question 1. — Que vaut $\int_{\Gamma_R} f$? Justifier.

Question 2. — Montrer que sur l'arc de cercle considéré, $|f(Re^{i\theta})| = e^{-R^2\cos(2\theta)} \leq e^{-R^2(1-4\theta/\pi)}$.

Question 3. — En déduire que l'intégrale de f le long de l'arc tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.

Question 4. — Déduire des questions précédentes la valeur de I.

Exercice 3.3 – Fonction Gamma d'Euler

Soit $0 < s < 1$, $0 < r < R$ trois réels. Soit $f(z) = z^{s-1} e^{iz} = e^{(s-1)\mathrm{Log}(z)} e^{iz}$ où Log est la détermination principale du logarithme complexe. On définit le lacet $\Gamma_{r,R}$ comme la réunion des segments $\gamma_1 = [r, R]$ et $\gamma_2 = [iR, ir]$ et des quarts de cercles de centre l'origine, γ_R de rayon R, γ_r de rayon r (orienté dans le sens trigonométrique).

Question 1. — Que vaut l'intégrale $\int_{\Gamma_{r,R}} f$? Justifier.

Question 2. — Montrer que $\int_{\gamma_1} f = \int_r^R x^{s-1} e^{ix} dx$ et $\int_{\gamma_2} f = -e^{\frac{i\pi}{2}s} \int_r^R u^{s-1} e^{-u} du$.

Question 3. — Montrer que $\left|\int_{\gamma_r} f\right|$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

Question 4. — Montrer de même que dans la question précédente que $\left|\int_{\gamma_R} f\right| \leq R^s \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin(u)}du$ et en déduire que $\int_{\gamma_R} f$ tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.
Indication : vous pouvez utiliser le fait que $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$ *pour* x *bien choisi.*

Question 5. — En déduire finalement que $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{ix}dx = e^{s\frac{i\pi}{2}}\Gamma(s)$.

4

Théorème des résidus

Exercice 4.1 – Intégrales classiques

Appliquer le théorème des résidus pour calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4 + 8\sin^2(t)} dt$$
$$\widehat{k}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi\nu t}}{(t^2 + a^2)^2} dt \ \ (a \in \mathbb{R}_{>0})$$
$$M_a = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^a}{(x+b)(x+c)} dx \ (0 < b < c, \ -1 < \mathrm{Re}(a) < 1)$$

Exercice 4.2 – Formule des compléments

Soit $p \in \mathbb{C}$ un complexe vérifiant $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$. Notons $J_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$.

Question 1. — Vérifier que $J_p = B(p, 1-p)$.
Indication : poser $u = \frac{1}{1+e^t}$.

Question 2. — En appliquant le théorème des résidus à $f(z) = \frac{e^{pz}}{1+e^z}$ dans le rectangle Γ_A de sommets $-A, A, A + 2i\pi$ et $-A + 2i\pi$ parcouru dans le sens trigonométrique, puis en faisant tendre A vers l'infini, calculer J_p.

Question 3. — En déduire la formule des compléments :

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

5

Transformée en z : TZ

Exercice 5.1 – TZ et équation de récurrence

Soit a et b deux réels vérifiant $a \notin \{0,1\}$ et $b+1 \neq ab$.

QUESTION 1. — Soit $x = (x_n)_n$ une suite causale de TZ $X(z)$. Exprimer à l'aide de $X(z)$ et de ses dérivées la TZ de la suite $(nx_n)_n$.

QUESTION 2. — Calculer la TZ de la suite $y = (y_n)_n$ où $y_n = (n-b)w_n$. La suite $w = (w_n)_n$ désignant l'échelon unité discret.

QUESTION 3. — Résoudre l'équation de récurrence

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + y_n & n \geq 0 \\ u_n = 0 & n < 0 \end{cases}$$

Exercice 5.2 – TZ et équation de convolution

On considère l'équation de récurrence suivante pour $n \geq 0$.

$$\begin{cases} \nu_0 & = 1 \\ \nu_{n+1} & = b_0\nu_n + b_1\nu_{n-1} + \cdots + b_{n-1}\nu_1 + b_n \end{cases}$$

où $b = (b_n)_n$ est la suite définie par $b_{2p} = \alpha\gamma^p$ et $b_{2p+1} = \beta\gamma^p$ pour tout $p \geq 0$ avec $\alpha, \gamma > 0$, $\beta > 1/4$ trois réels strictement positifs de somme 1 : $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

QUESTION 1. — Résoudre l'équation de récurrence par TZ.

QUESTION 2. — Déterminer la limite de ν_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5.3 – Filtre $\mathrm{ARMA}(2,1)$

Soit a un réel différent de $1/10$ et $-1/2$. Soit le filtre ARMA causal $\mathcal{H}\colon x = (x_n)_n \mapsto y = (y_n)_n$ défini par la relation de récurrence

$$20y_n + 8y_{n-1} - y_{n-2} = x_n - ax_{n-1}.$$

QUESTION 1. — Écrire le transfert $H(z)$ et en déduire la réponse impulsionnelle $h = (h_n)_n$.

QUESTION 2. — Le filtre est-il stable ?

QUESTION 3. — Déterminer y dans les cas suivants :

1. $x_n = b^n$ avec $b \neq a$ puis avec $b = a$.
2. x_n de période 2 avec $x_0 = \alpha$ et $x_1 = \beta$.