Асимптотические обозначения (O, Ω, Θ)

Оценка времени работы алгоритмов

Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

  $j \leftarrow 1$

Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

  $j \leftarrow 1$

  for $i = 1$ **to** n **do**

Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

```
j ← 1
for i = 1 to n do
    j ← j × i
```

Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

  $j \leftarrow 1$
  for $i = 1$ **to** n **do**
  $\quad j \leftarrow j \times i$

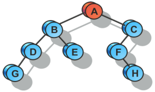
- Будем обозначать время работы алгоритма как $T(n)$

Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

```
j ← 1
for i = 1 to n do
    j ← j × i
```

- Будем обозначать время работы алгоритма как $T(n)$
- ***n — целое число, размер входных данных***



Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

$j \leftarrow 1$
for $i = 1$ **to** n **do**
    $j \leftarrow j \times i$

- Будем обозначать время работы алгоритма как $T(n)$
- ***n — целое число, размер входных данных***
- Определим время работы алгоритма из примера
  - Инициализация переменной j выполняется за постоянное время c_1

Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

  $j \leftarrow 1$
  for $i = 1$ **to** n **do**
  $\quad j \leftarrow j \times i$

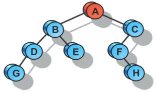
- Будем обозначать время работы алгоритма как $T(n)$
- ***n — целое число, размер входных данных***
- Определим время работы алгоритма из примера
  - Инициализация переменной j выполняется за постоянное время c_1
  - Увеличение счетчика, проверка условия цикла и обновление переменной в теле цикла выполняются за постоянное время c_2

Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

  $j \leftarrow 1$
  for $i = 1$ **to** n **do**
  $\quad j \leftarrow j \times i$

- Будем обозначать время работы алгоритма как $T(n)$
- ***n — целое число, размер входных данных***
- Определим время работы алгоритма из примера
  - Инициализация переменной j выполняется за постоянное время c_1
  - Увеличение счетчика, проверка условия цикла и обновление переменной в теле цикла выполняются за постоянное время c_2
  - Время работы алгоритма $T(n) = c_1 + c_2 n$

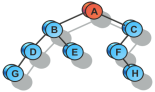


Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

```
j ← 1
for i = 1 to n do
    j ← j × i
```

- Будем обозначать время работы алгоритма как $T(n)$
- ***n — целое число, размер входных данных***
- Определим время работы алгоритма из примера
  - Инициализация переменной j выполняется за постоянное время c_1
  - Увеличение счетчика, проверка условия цикла и обновление переменной в теле цикла выполняются за постоянное время c_2
  - Время работы алгоритма $T(n) = c_1 + c_2 n$
- Говорят, что асимптотическая оценка времени работы алгоритма $T(n) = \Theta(n)$



Оценка времени работы алгоритмов

- Algorithm $A(\text{int } n)$

  $j \leftarrow 1$
  for $i = 1$ **to** n **do**
  $\quad j \leftarrow j \times i$

- Будем обозначать время работы алгоритма как $T(n)$
- ***n — целое число, размер входных данных***
- Определим время работы алгоритма из примера
  - Инициализация переменной j выполняется за постоянное время c_1
  - Увеличение счетчика, проверка условия цикла и обновление переменной в теле цикла выполняются за постоянное время c_2
  - Время работы алгоритма $T(n) = c_1 + c_2 n$
- Говорят, что асимптотическая оценка времени работы алгоритма $T(n) = \Theta(n)$
- В данной лекции изучим основные асимптотические обозначения: Θ, O, Ω

Θ: точная асимптотическая оценка

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

Θ: точная асимптотическая оценка

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n) : & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

- Принадлежность $f(n)$ множеству $\Theta(g(n))$ обозначается как $f(n) = \Theta(g(n))$

Θ: точная асимптотическая оценка

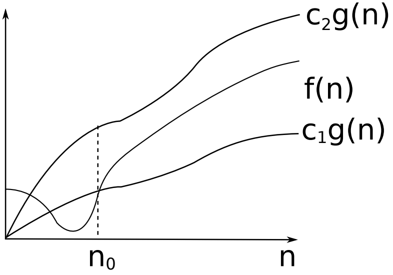
$$\Theta(g(n)) = \left\{ \begin{array}{ll} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{array} \right.$$

- Принадлежность $f(n)$ множеству $\Theta(g(n))$ обозначается как $f(n) = \Theta(g(n))$
- $g(n)$ является ***точной асимптотической оценкой*** функции $f(n)$

Θ: точная асимптотическая оценка

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

- Принадлежность $f(n)$ множеству $\Theta(g(n))$ обозначается как $f(n) = \Theta(g(n))$
- $g(n)$ является ***точной асимптотической оценкой*** функции $f(n)$



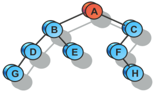
Θ: точная асимптотическая оценка (пример)

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

Θ: точная асимптотическая оценка (пример)

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

Докажем, что $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$



Θ: точная асимптотическая оценка (пример)

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

Докажем, что $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

- Для этого необходимо найти такие положительные константы c_1, c_2, n_0, что выполнено соотношение $c_1 n^2 \leqslant \frac{1}{2}n^2 - 3n \leqslant c_2 n^2$ для всех $n \geqslant n_0$.

Θ: точная асимптотическая оценка (пример)

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

Докажем, что $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

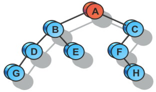
- Для этого необходимо найти такие положительные константы c_1, c_2, n_0, что выполнено соотношение $c_1 n^2 \leqslant \frac{1}{2}n^2 - 3n \leqslant c_2 n^2$ для всех $n \geqslant n_0$.
- Преобразуем двойное неравенство в $c_1 \leqslant \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leqslant c_2$

Θ: точная асимптотическая оценка (пример)

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

Докажем, что $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

- Для этого необходимо найти такие положительные константы c_1, c_2, n_0, что выполнено соотношение $c_1 n^2 \leqslant \frac{1}{2}n^2 - 3n \leqslant c_2 n^2$ для всех $n \geqslant n_0$.
- Преобразуем двойное неравенство в $c_1 \leqslant \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leqslant c_2$
- Левое неравенство верно для всех $n \geqslant 7$ при $c_1 = \frac{1}{14}$



Θ: точная асимптотическая оценка (пример)

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

Докажем, что $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

- Для этого необходимо найти такие положительные константы c_1, c_2, n_0, что выполнено соотношение $c_1 n^2 \leqslant \frac{1}{2}n^2 - 3n \leqslant c_2 n^2$ для всех $n \geqslant n_0$.
- Преобразуем двойное неравенство в $c_1 \leqslant \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leqslant c_2$
- Левое неравенство верно для всех $n \geqslant 7$ при $c_1 = \frac{1}{14}$
- Правое неравенство верно для всех $n \geqslant 1$ при $c_2 = \frac{1}{2}$

Θ: точная асимптотическая оценка (пример)

$$\Theta(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

Докажем, что $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

- Для этого необходимо найти такие положительные константы c_1, c_2, n_0, что выполнено соотношение $c_1 n^2 \leqslant \frac{1}{2}n^2 - 3n \leqslant c_2 n^2$ для всех $n \geqslant n_0$.
- Преобразуем двойное неравенство в $c_1 \leqslant \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leqslant c_2$
- Левое неравенство верно для всех $n \geqslant 7$ при $c_1 = \frac{1}{14}$
- Правое неравенство верно для всех $n \geqslant 1$ при $c_2 = \frac{1}{2}$
- Итого, искомые значения констант $c_1 = \frac{1}{14}, c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 7$

O: верхняя асимптотическая оценка

$$O(g(n)) = \left\{ \begin{array}{ll} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n), \forall n \geqslant n_0 \end{array} \right.$$

O: верхняя асимптотическая оценка

$$O(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

- $g(n)$ является ***верхней асимптотической оценкой*** функции $f(n)$

O: верхняя асимптотическая оценка

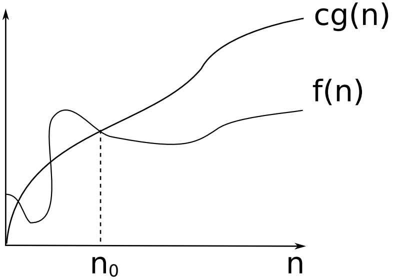
$$O(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

- $g(n)$ является ***верхней асимптотической оценкой*** функции $f(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

O: верхняя асимптотическая оценка

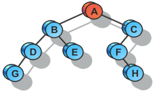
$$O(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$

- $g(n)$ является ***верхней асимптотической оценкой*** функции $f(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$



Ω: нижняя асимптотическая оценка

$$\Omega(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_0 \end{cases}$$



Ω: нижняя асимптотическая оценка

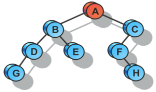
$$\Omega(g(n)) = \left\{ \begin{array}{ll} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_0 \end{array} \right.$$

- $g(n)$ является ***нижней асимптотической оценкой*** функции $f(n)$

Ω: нижняя асимптотическая оценка

$$\Omega(g(n)) = \left\{ \begin{array}{ll} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_0 \end{array} \right.$$

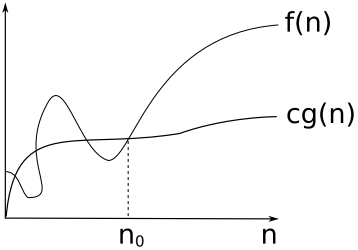
- $g(n)$ является ***нижней асимптотической оценкой*** функции $f(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$



Ω: нижняя асимптотическая оценка

$$\Omega(g(n)) = \left\{ f(n) : \begin{array}{l} \text{существуют константы } c > 0, n_0 > 0, \\ \text{такие что } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_0 \end{array} \right.$$

- $g(n)$ является ***нижней асимптотической оценкой*** функции $f(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$



Теорема о связи Ω, Θ, O

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Теорема о связи Ω, Θ, O

Доказательство:

- $\Rightarrow$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Теорема о связи Ω, Θ, O

Доказательство:

- $\Rightarrow$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Теорема о связи Ω, Θ, O

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Доказательство:

- $\Rightarrow$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

Теорема о связи Ω, Θ, O

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Доказательство:

- $\Rightarrow$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
- $\Leftarrow$
  - Необходимо подобрать такие константы c_1, c_2, n_0, что $0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0$

Теорема о связи Ω, Θ, O

Доказательство:

- $\Rightarrow$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

- $\Leftarrow$
  - Необходимо подобрать такие константы c_1, c_2, n_0, что $0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0$
  - $$\Omega(g(n)) = \begin{cases} f(n) : & \text{существуют константы } c > 0, n_1 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_1 \end{cases}$$

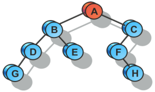
Теорема о связи Ω, Θ, O

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Доказательство:

- $\Rightarrow$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
- $\Leftarrow$
  - Необходимо подобрать такие константы c_1, c_2, n_0, что $0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0$
  - $$\Omega(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_1 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_1 \end{cases}$$

    $$O(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c' > 0, n_2 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant f(n) \leqslant c'g(n), \forall n \geqslant n_2 \end{cases}$$



Теорема о связи Ω, Θ, O

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Доказательство:

- $\Rightarrow$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$
- $\Leftarrow$
  - Необходимо подобрать такие константы c_1, c_2, n_0, что $0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0$
  - $$\Omega(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_1 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_1 \end{cases}$$
    $$O(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c' > 0, n_2 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant f(n) \leqslant c'g(n), \forall n \geqslant n_2 \end{cases}$$
  - $cg(n) \leqslant f(n) \leqslant c'g(n), \forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$

Теорема о связи Ω, Θ, O

Доказательство:

- $\Rightarrow$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

- $\Leftarrow$
  - Необходимо подобрать такие константы c_1, c_2, n_0, что $0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n), \forall n \geqslant n_0$
  - $$\Omega(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c > 0, n_1 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n), \forall n \geqslant n_1 \end{cases}$$
    $$O(g(n)) = \begin{cases} f(n): & \text{существуют константы } c' > 0, n_2 > 0, \\ & \text{такие что } 0 \leqslant f(n) \leqslant c'g(n), \forall n \geqslant n_2 \end{cases}$$
  - $cg(n) \leqslant f(n) \leqslant c'g(n), \forall n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$
  - Искомые значения констант $c_1 = c, c_2 = c', n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Свойства верхней асимптотической оценки

Пусть $f_1(n) = O(g_1(n))$, $f_2(n) = O(g_2(n))$. Тогда верны следующие правила:

Свойства верхней асимптотической оценки

Пусть $f_1(n) = O(g_1(n))$, $f_2(n) = O(g_2(n))$. Тогда верны следующие правила:

- правило сумм: $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$

Свойства верхней асимптотической оценки

Пусть $f_1(n) = O(g_1(n))$, $f_2(n) = O(g_2(n))$. Тогда верны следующие правила:

- правило сумм: $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$
- правило произведений: $f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n)g_2(n))$

Свойства верхней асимптотической оценки

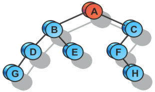
Пусть $f_1(n) = O(g_1(n))$, $f_2(n) = O(g_2(n))$. Тогда верны следующие правила:

- правило сумм: $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$
- правило произведений: $f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n)g_2(n))$
- $cf_1(n) = O(f_1(n))$

Свойства верхней асимптотической оценки

Пусть $f_1(n) = O(g_1(n))$, $f_2(n) = O(g_2(n))$. Тогда верны следующие правила:

- правило сумм: $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$
- правило произведений: $f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n)g_2(n))$
- $cf_1(n) = O(f_1(n))$
- $f_1(n) + c = O(f_1(n))$



Свойства верхней асимптотической оценки

Пусть $f_1(n) = O(g_1(n))$, $f_2(n) = O(g_2(n))$. Тогда верны следующие правила:

- правило сумм: $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$
- правило произведений: $f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n)g_2(n))$
- $cf_1(n) = O(f_1(n))$
- $f_1(n) + c = O(f_1(n))$

Спасибо за внимание!