Soutien pour le cours de probabilités

Partie I: Introduction. Conceptes basiques.

Anna Melnykova

Ensimag

2020-2021

Organisation

Responsable :

- **Nom :** Anna Melnykova, ATER à ENSIMAG, chercheur au Laboratoire Jean Kuntzmann
- **Q& A :** anna.melnykova@univ-grenoble-alpes.fr
- **Télécharger ces slides :** `http://amelnykova.com/teaching`

Cours :

- 6 seances $\times$ 1.5h
- Examen écrit à la fin (si les conditions sanitaires le permet)
- + **BONUS** : la note pour soutien compte vers "Probabilités Appliquées" (un peu) !

Acknowledgement : *ce support utilise des parties des cours de Modibo Diabaté, ainsi que les polycopiés/transparents d'Olivier François et d'Hervé Guiol*

Programme

- **Cours 1 : Langage probabiliste pour la modelisation d'une expérience aléatoire**
  - Expérience aléatoire, issues, évènements
  - Ensemble fondamental, tribu, loi de probabilité
  - Règles de calcul, probabilités conditionnelles et indépendance
- **Cours 2 : Variables aléatoires discrètes**
  - Fonction de répartition, fonction de masse, espérance, variance
  - Lois usueles discrètes : Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson
- **Cours 3 : Variables aléatoires continues**
  - Fonction de répartition, quantile, densité de probabilité, espérance, variance
  - Lois usueles continues : Uniforme, Exponentielle, Normale

Expérience aléatoire : exemples

Expérience aléatoire : exemples

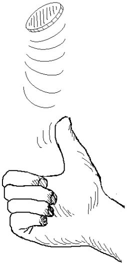
Expérience aléatoire : exemples

Vocabulaire probabiliste pour la Modélisation du Hasard

1. **Expérience aléatoire (ou épreuve) :** une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat, et qui, renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas forcément le même résultat à chaque renouvellement.
2. **Issue (ou éventualité) :** Chacun des résultats possibles de l'expérience.
3. **Espace Fondamental Ω :** un ensemble, regroupant l'ensemble des issues.
4. **Événement :** un ensemble d'issues correspondants à différents résultats possibles de l'expérience aléatoire. Chaque événement fait donc une partie de Ω.
5. **Tribu $\mathcal{P}(\Omega)$:** un ensemble de *tout* événements.

Exemple : lancer d'une piéce

1. **Expérience aléatoire (ou épreuve) :** lancer d'une piéce
2. **Issues (ou éventualités) :**
   - Pile (1) 
   - Face (0) 
3. **Espace Fondamental :** $\Omega = \{0, 1\}$
4. **Evenements :**
   - obtenir pile : $\{1\}$
   - obtenir face : $\{0\}$
   - obtenir ni pile, ni face : $\emptyset$
   - obtenir soit pile, soit face : Ω
5. **Tribu** $\mathcal{P}(\Omega)$ **:** $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$



Évènements : propriétes, operations, règles de calcul

- On appelle **événement élémentaire** un événement qui ne contient qu'une seule issue.
- Un **événement certain** est toujours réalisé : il contient toutes les issues.
- Un **événement impossible** n'est jamais réalisé : il ne contient aucune issue.
- Deux **événements** sont **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsqu'ils ne peuvent être réalisés en même temps.

Exercice : lancer d'un dé !

Expérience : lancer un dé à 6 faces.

1. Definir l'espace fondamental Ω
2. Donner un exemple d'événement élémentaire
3. Donner un exemple d'événement qui est pas élémentaire
4. Donner un exemple de deux événements compatibles
5. Donner un exemple de deux événements incompatibles

Exercice : lancer d'un dé !

Expérience : lancer un dé à 6 faces.

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Événement élémentaire : le nombre sur face est égal à 4 ($\{4\}$)
3. Événement qui est pas élémentaire : le nombre sur face est unpair ($\{1, 3, 5\}$)
4. Deux événements compatibles :
   - Le nombre sur face est moins de 4, donc $A = \{1, 2, 3\}$.
   - Le nombre sur face est pair, donc $B = \{2, 4, 6\}$.
5. Deux événements incompatibles :
   - Le nombre sur face est égal à 1, donc $A = \{1\}$.
   - Le nombre sur face est pair, donc $B = \{2, 4, 6\}$.

Opérations sur les événements

- **L'union** d'événements est un événement
- **L'intersection** d'événements est un événement
- **Le complémentaire d'un événement** est un événement
- *En consequence*, $\emptyset$ et Ω sont des événements !

Exemple : lancer d'un dé

- Considerons $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $A \cap B = \{2\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
- $\bar{A} \equiv A^c = \Omega \setminus A = \{4, 5, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Mesure de Probabilité : definition intuitive

La probabilité $\mathbb{P}$ d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus *le risque*, ou *la chance*, que l'événement se produise est grand.

Exemple : lancer d'une piéce

Question : comment calculer la probabilité $\boldsymbol{p}$ d'obtenir pile (nous ne savons pas si la piéce est bien équilibré) ?

Mesure de Probabilité : definition intuitive

La probabilité $\mathbb{P}$ d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus *le risque*, ou *la chance*, que l'événement se produise est grand.

Exemple : lancer d'une piéce

Question : comment calculer la probabilité $\boldsymbol{p}$ d'obtenir pile (nous ne savons pas si la piéce est bien équilibré) ?
Réponse : lancer la piéce une infinité des fois !

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{n_p}{n},$$

ou n - nombre d'expérience totale, n_p - nombre de cas ou on a eu une pile.

Tribu : formalisation

Definition

Une tribu $\mathcal{F}$ (ou "**sigma-algebra**" en anglais) sur un espace fondamental Ω est une collection non vide de sous ensembles de Ω vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $\forall A \in \mathcal{F}, \quad \bar{A} \equiv A^c \in \mathcal{F}$

(ii) Pour toute suite $A_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Tribu : formalisation

- Une tribu contient toujours $\emptyset$ et Ω
- Lorsqu'un événement est dans une tribu, son complémentaire y est aussi
- Lorsque deux événements sont dans une tribu, leur réunion et ler intersection y sont aussi **(prouver !)**
- Plusiers tribus peuvent être defini sur un espace fondamental Ω. La plus petite (ou *triviale*) tribu est $\{\emptyset, \Omega\}$. La plus grande c'est l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$. **Prouver que $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont les tribus.**

Mesure de Probabilité : formalisation

Definition

Une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, notée $\mathbb{P}$ est une fonction de $\mathcal{F} \to [0,1]$ vérifiant

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- Pour toute suite $A_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$ d'événements disjoints ($A_j \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Mesure de Probabilité : formalisation

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Pour toute suite d'événements croissants $A_1 \subset A_2 \ldots$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Mesure de Probabilité : formalisation

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Pour toute suite d'événements croissants $A_1 \subset A_2 \dots$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exercice : prouver les proprietés par definition !

Probabilités conditionelles. Indépendance.

Definition

Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant B la grandeur

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{P(B)}$$

Definition

Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, les événements A et B sont dits **indépendants**.

Probabilités conditionelles. Exemple.

Exemple : lancer d'un dé

Quelqu'un a lancé un dé (équilibré), et il nous a informés que le valeur sur face est pair. Comment calculer la probabilité que la valeur sur face est inférieure de 4 ?

Probabilités conditionelles. Exemple.

Exemple : lancer d'un dé

Quelqu'un a lancé un dé (équilibré), et il nous a informés que le valeur sur face est pair. Comment calculer la probabilité que la valeur sur face est inférieure de 4 ?

- Considerons $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. Notons que $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{6}$
- Par la formule de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Probabilités conditionelles. Propriétés.

Soient $B_1, B_2, \ldots$ une suite d'événements mutuellement exclusifs $(B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j)$ tels que $\forall n \geq 1,\ \mathbb{P}(B_n) \neq 0$ et $\bigcup_{n\geq 1} B_n = \Omega$.
Alors :

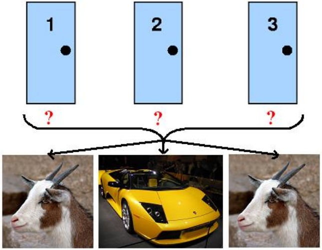
- **Formule des probabilités totales** :

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

- **Formule de Bayes** :

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)}$$

Exemple : problème de Monty Hall



Soient trois portes cachant soit une chèvre soit une superbe voiture, l'automobile étant derrière une seule porte et deux (superbs) chèvres se cachant derrière les deux autres portes.

- Vous avez choisi la porte 1. Le présentateur ouvre la porte 3 et montre qu'il y a un chèvre **(le présentateur sait où est la voiture)**.
- On vous propose de changer l'avis et changer la porte. Est-ce que vous avez plus de chances de gagner la voiture si vous changer l'avis ?

Exemple : problème de Monty Hall

Utilisons la formule des probabilités totales ! Notons que la probabilité de gagner en changeant l'avis (GCA) :

$$\begin{cases} 0, & \text{si vous avez choisi la bonne porte dès debut (bonne),} \\ 1, & \text{si vous n'avez pas choisi la bonne porte dès debut (pas bonne).} \end{cases}$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\text{GCA}\right) = \\ \mathbb{P}\left(\text{GCA}|\text{bonne}\right)\mathbb{P}\left(\text{bonne}\right) + \mathbb{P}\left(\text{GCA}|\text{pas bonne}\right)\mathbb{P}\left(\text{pas bonne}\right) \\ = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Variable aléatoire

Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. L'ensemble $\mathbb{R}$ sera muni de sa tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (i.e. la plus petite tribu sur $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles).

- Toute application mesurable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ s'appelle **variable aléatoire réelle**. X est mesurable si

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ si } X \in B, \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

- La **variable aléatoire** X est dite **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est fini ou infini dénombrable.

Lancer d'un dé : exemple formel

1. Considerons **un espace fondamental *abstrait*** Ω qui modélise toutes les éventualités du hasard. On ne sait rien de cet ensemble hormis que les événements sont susceptibles de se produire : ça veut dire qu'on suppose que Ω est muni d'une tribu $\mathcal{F}$.
2. Lorsqu'on jette le dé, une certaine éventualité $\omega \in \Omega$ se réalise, et le résultat du jet est une fonction de cette éventualité. Autrement dit, $X : \Omega \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. Notons que par definition, $\forall k \in \{1, \dots, 6\}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\} = X^{-1}(\{k\})$ est un événement, autrement dit, $X^{-1}(\{k\})$ est **mésurable** ($X^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{F}$).
4. Tout les événements sont disjoints, donc **la plus petite tribu** $\mathcal{F}'$ qui contient tous les événements est de cardinal fini 2^6, elle est constituée de l'ensemble de toutes les unions possibles de ces événements.
5. Finalement, on définit la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}')$ en posant $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}$.
6. Donc, $X(\omega)$ c'est **une variable aléatoire** qui est defini sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}', \mathbb{P})$.

Exercices

1. Un événement A a trois chances sur dix de ne pas se réaliser. Déterminer $\mathbb{P}(A)$.
2. On considère une urne contenant quatre boules rouges et trois boules bleues (toutes indiscernables au toucher). On tire une boule au hasard et on regarde sa couleur.
   - Quelles sont les éventualités de cette expérience ? Existe-t-il une issue qui a plus de chances de se réaliser ? Si oui, laquelle ?
   - S'agit-il d'une situation d'équiprobabilité ?
3. On lance deux dés à six faces et on calcule la somme des nombres inscrits sur leur face supérieure.
   - Quelles sont les éventualités de cette expérience ?
   - S'agit-il d'une situation d'équiprobabilité ? Si oui, donner un exemple de deux issues telles qu'une a plus de chances de se réaliser qu'une autre.
4. On lance deux dés à six faces. Quelle est la probabilité d'avoir la valeur pair sur la face du première dé sachant que la valeur sur la face de deuxième est plut petite que 4 ?

Exercices

1. Soit X un nombre positif mesuré à l'issue d'une expérience aléatoire. On suppose que

$$\forall 0 \leq a \leq b,\ \mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b e^{-x} dx.$$

   - Calculer $\mathbb{P}(X \geq t)$ pour tout $t \geq 0$.
   - Calculer $\mathbb{P}(\sin(X) \geq 0)$.

2. On note N le résultat du lancer d'un de équilibré à six faces, puis X le résultat du lancer d'un de équilibré à N faces. Nous souhaitons déterminer les probabilités $\mathbb{P}(X = k), \quad \forall k = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.