ЛЕКЦИЯ №2 «ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ»

Плоские электромагнитные волны существуют в однородных безграничных средах. В случае полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, комплексные амплитуды **E** и **H** удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{E} + \gamma^2 \dot{E} = 0,$$
$$\nabla^2 \dot{H} + \gamma^2 \dot{H} = 0. \tag{5.1}$$

где $\gamma = \omega\sqrt{\widetilde{\varepsilon_a}\widetilde{\mu_a}} = \beta - j\alpha$ – комплексный коэффициент распространения, β - коэффициент фазы, *или волновое число*; α – коэффициент ослабления.

Так как исходные уравнения Максвелла дают однозначную связь между **E** и **H**, достаточно найти решение лишь одного из этих уравнений.

Частное решение уравнения Гельмгольца описывает однородную плоскую волну. Если последняя распространяется вдоль оси z декартовой системы координат, то указанное решение имеет вид:

$$\dot{E}(z) = \dot{E}_1(0)e^{-j\gamma z} + \dot{E}_2(0)e^{j\gamma z}. \tag{5.2}$$

Первое слагаемое соответствует прямой (падающей) волне, распространяющейся в направлении положительных значений z, второе слагаемое - обратной (отраженной) волне, распространяющейся в направлении отрицательных значений.

Если величины $\widetilde{\varepsilon_a}$ и $\widetilde{\mu_a}$ известны, то β и α можно найти с помощью выражения для корня квадратного из комплексного числа:

$$\sqrt{a \pm jb} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm j\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right).$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа; квадратные корни $\sqrt{r+a}$ и $\sqrt{r-a}$ следует считать положительными.

На высоких частотах магнитные свойства большинства сред выражены слабо. Поэтому с достаточной для практических целей степенью точности можно считать

$$\mu_a = \mu_0$$

Поскольку

$$\tilde{\varepsilon_a} = \varepsilon'_a - \varepsilon''_a = \varepsilon\varepsilon_0(1 - j\,tg\,\delta_э),$$

комплексный коэффициент распространения

$$\gamma = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'_a}\sqrt{1 - j\,tg\,\delta_э}. \qquad (5.3)$$

Коэффициент фазы β характеризует изменение фазы гармонических колебаний при распространении волны. Расстояние, на котором фаза изменяется на 2π рад, называется *длиной волны*:

$$\boldsymbol{\lambda = 2\pi/\beta}.$$

Плоскость равных фаз называется *фазовым фронтом волны*, а скорость перемещения этой плоскости – *фазовой скоростью*:

$$v_ф = \omega/\beta. \qquad (5.4)$$

Коэффициент фазы и коэффициент ослабления могут быть выражены следующими формулами:

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0}\left(\frac{1 + \sqrt{1 + tg^2\delta_э}}{2}\right)^{1/2}, \qquad (5.5)$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0}\left(\frac{\sqrt{1 + tg^2\delta_э} - 1}{2}\right)^{1/2}. \qquad (5.6)$$

Таким образом, между ними существует соотношение

$$\alpha = \beta\,tg(\delta_э/2). \qquad (5.7)$$

Фазовая скорость

$$v_ф = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \sqrt{1 + tg^2\delta_э}\right)^{1/2}}. \qquad (5.8)$$

длина волны

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}\left(1+\sqrt{1+tg^2\delta_э}\right)^{1/2}}.$$

Отношение фазовой скорости в среде к скорости света называют *коэффициентом преломления*:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Из уравнений Максвелла следует, что в случае плоской волны комплексные амплитуды векторов **E** и **H** связаны *характеристическим сопротивлением среды*:

$$Z_c \ = \ \omega\mu_a/\,\gamma \ = \ \sqrt{\widetilde{\mu_a}/\varepsilon_a}\,, \tag{5.9}$$

так что

$$\dot{E} \ = \ Z_c\dot{H}\ .$$

Характеристическое сопротивление для немагнитных сред $\mu_a \ = \ \mu_0$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}(1-j\ tg\delta_э)^{-\frac{1}{2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}(1+tg^2\delta_э)^{-\frac{1}{4}}e^{j\frac{\delta_э}{2}}\ \text{Ом}.$$

Аргумент принимает значения от нуля (диэлектрики без потерь) до π/4 (идеальный металл).

Характеристическое сопротивление для вакуума

$$Z_0 \ = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \ = \ 120\pi \ = \ 376{,}991\ \text{Ом}.$$

Векторные уравнения (5.1) означают, что любая координатная составляющая векторов поля удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\dot{U} + \gamma^2\dot{U} \ = \ 0,$$

имеющему в декартовой системе координат частное решение

$$\dot{U} \ = \ \text{C}\exp[-\,j\gamma(\aleph_x x \ + \ \aleph_y y \ + \ \aleph_z z)]. \tag{5.10}$$

Здесь С - константа; $\aleph_x, \aleph_y, \aleph_z$ - комплексные постоянные, удовлетворяющие условию

$$\aleph_x{}^2 \ + \ \aleph_y{}^2 \ + \ \aleph_z{}^2 \ = \ 1 \tag{5.11}$$

Если $\aleph_x, \aleph_y, \aleph_z$ - вещественные числа, то выражение (5.10) описывает *однородную плоскую волну*, распространяющуюся в произвольном относительно исходной системы координат направлении. Эту волну удобно выразить формулой

$$\dot{U} \ = \ C\exp[-\,j\gamma(\aleph r)]. \tag{5.12}$$

Числа $\aleph_x, \aleph_y, \aleph_z$ имеют смысл направляющих косинусов, фиксирующих направление распространения волны, а **r** есть радиус-вектор точки *(x, y, z)*. Если хотя бы одно из чисел $\aleph_x, \aleph_y, \aleph_z$ комплексное, то выражение (5.10) будет описывать *неоднородную плоскую волну:*

$$\dot{U} = C\exp\{-j\operatorname{Re}[\gamma(\aleph_x x + \aleph_y y + \aleph_z z)] - \operatorname{Im}[\gamma(\aleph_x x + \aleph_y y + \aleph_z z)]\}, \quad (5.13)$$

у которой фазовый фронт задается уравнением

$$\operatorname{Re}[\gamma(\aleph_x x + \aleph_y y + \aleph_z z)] = const,$$

а плоскость равных амплитуд - уравнением

$$\operatorname{Im}[\gamma(\aleph_x x + \aleph_y y + \aleph_z z)] = const.$$

В общем случае фазовый фронт и плоскость равных амплитуд образуют между собой произвольный угол.

Поскольку уравнения Максвелла линейны, любая комбинация их решений также является решением. В частности, если $\dot{E}_x 1_x$ и $\dot{E}_y 1_y$ – решения исходных уравнений, то

$$\dot{E} = \dot{E}_x 1_x + \dot{E}_y 1_y. \quad (5.14)$$

также есть решение уравнений Максвелла и, следовательно, оно описывает распространение в пространстве некоторой волны. В зависимости от соотношения между фазами и амплитудами $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ в каждой точке пространства конец вектора E будет перемещаться по эллипсу с различным отношением и ориентацией его полуосей. Такая волна называется волной с *эллиптической поляризацией*. При произвольном значении амплитуд и фаз в выражении (5.14) путем поворота осей вокруг оси z всегда можно ввести новую систему координат *(x', y', z')*, в которой сдвиг фаз между координатными составляющими будет равен ±90°, а полуоси эллипса - совпадать с направлением осей системы. Угол поворота, обеспечивающий такое преобразование системы координат, будет определять ориентацию осей эллипса в системе (x, y, z). Отношение малой полуоси эллипса к большой называют *коэффициентом эллиптичности* $k_{эл}$.

Линейно поляризованная волна представляет собой один из предельных случаев эллиптически поляризованной волны. Второй предельный случай имеет место при равенстве амплитуд исходных полей и сдвиге фаз между ними, равном 90°. Здесь конец вектора E перемещается по окружности, и волна называется волной с *круговой поляризацией*. Поле такой волны можно представить выражением

$$\dot{E}_{\pm} = \dot{E}(1_x \pm j1_y). \quad (5.15)$$

Знак минус соответствует волне с правой круговой поляризацией, у которой вектор Е вращается по часовой стрелке (если смотреть в направлении распространения), а знак плюс - волне с левой круговой поляризацией (направление вращения обратное). Любая волна с линейной поляризацией может быть представлена суммой двух волн с круговой поляризацией, например

$$\dot{E} = \dot{E}_x 1_x = \dot{E}_+ + \dot{E}_-, \quad (5.16)$$

где

$$\dot{E}_+ = \dot{E}_x/2\,(1_x + j1_y),\ \dot{E}_- = \dot{E}_x/2\,(1_x - j1_y), \quad (5.17)$$

Плоская волна переносит энергию в направлении распространения. Для гармонических полей этот процесс описывается средним значением вектора Пойнтинга:

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{2} Re\left[\dot{E}\breve{\dot{H}}\right] \quad (5.18)$$

Часто $\mathbf{\Pi}_{\text{ср}}$ удобно выражать только через напряженность электрического или магнитного поля:

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{|\dot{E}|^2}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{Z_c}\right]1_z = \frac{|\dot{H}|^2}{2}\mathrm{Re}[Z_c]1_z \quad (5.19)$$

В средах без потерь $\mathbf{\Pi}_{\text{ср}}$ не зависит от координаты *z*. Если же среда обладает потерями, то плотность потока мощности плоской электромагнитной волны убывает при распространении по экспоненциальному закону:

$$\Pi_{\text{ср}} = \Pi_{\text{ср}}(0)\exp(-2\alpha z). \quad (5.20)$$

Величину потерь в среде характеризуют *погонным затуханием* Δ в дБ/м:

$$\Delta = 20\lg\left[\frac{\mathrm{E}(0)}{\mathrm{E}(1)}\right] = 10\lg\left[\frac{\Pi(0)}{\Pi(1)}\right]$$

связанным с коэффициентом ослабления соотношением Δ = 8,69α.

Фазовая скорость плоской электромагнитной волны в среде с зависящими от частоты параметрами ε' и ε'' также является функцией частоты. Такое явление называют *дисперсией* фазовой скорости. При распространении сложных сигналов в этом случае будут нарушаться исходные амплитудные и фазовые соотношения между отдельными составляющими спектра и, как следствие, будет изменяться форма сигнала в процессе его распространения.

Для нахождения вида сигнала необходимо пользоваться спектральным или операторным методом, Например, полагая, что

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$$

есть Фурье-преобразование сигнала в плоскости $z = 0$, можно найти сигнал для любых значений z, используя обратное преобразование

$$s(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{-j\gamma z}e^{j\omega t}d\omega \ . \qquad (5.21)$$

Пренебрегая потерями в среде и полагая, что сигналы $s(t,z)$ являются узкополосными, можно показать, что их огибающая в средах с дисперсией распространяется с *групповой скоростью*

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{d\omega}{d\beta}. \qquad (5.22)$$

Если условие узкополосности сигнала не выполняется, то понятие групповой скорости, строго говоря, перестает адекватно описывать трансформацию формы такого сигнала.