

ЛЕКЦИЯ №7 «ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ»

Объемный резонатор представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой существуют электромагнитные колебания.

Конфигурация объемного резонатора может быть любой, однако наибольшее практическое применение находят прямоугольный (рис. 10.1), цилиндрический (рис. 10.2), коаксиальный (рис. 10.3) и квазистационарный торовидный (рис. 10.4) объемные резонаторы. Все они, кроме последнего, являются по существу закороченными на концах отрезками волноводов.

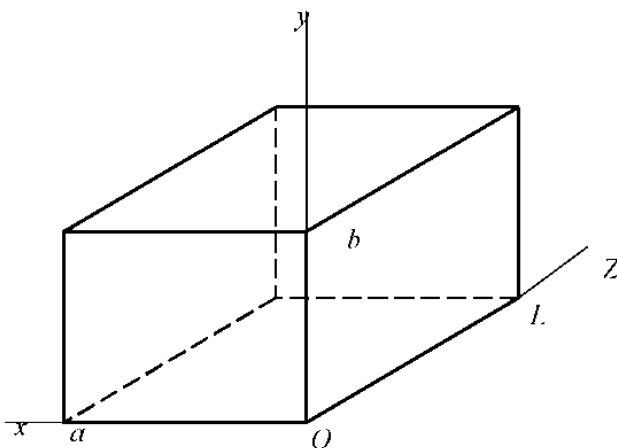


Рис. 10.1

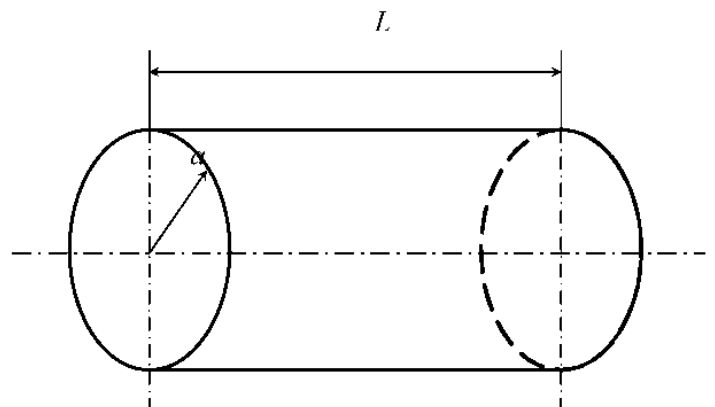


Рис. 10.2

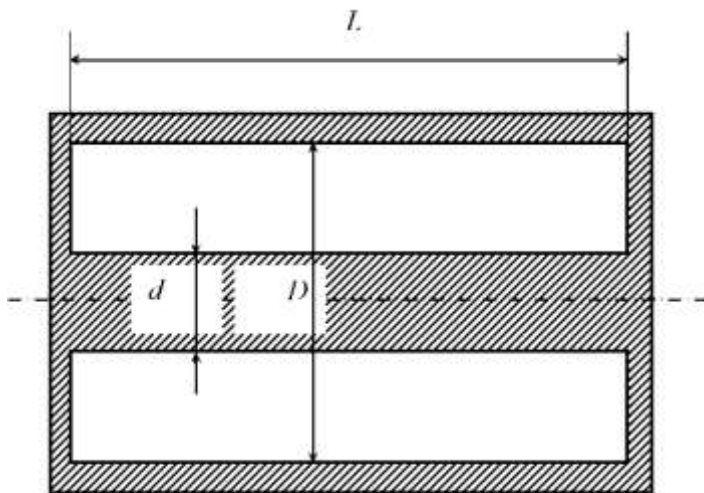


Рис. 10.3

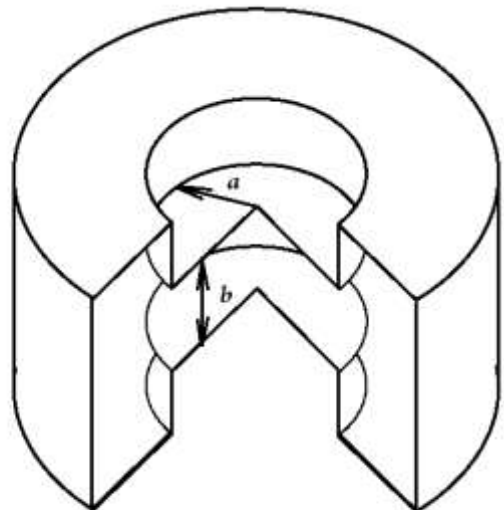


Рис. 10.4

В таких резонаторах могут существовать колебания типа Е, у которых $H_z = 0$, и колебания типа Н, у которых $E_z = 0$. Анализ полей в резонаторах производят посредством решения уравнения Гельмгольца для составляющих E_z и H_z при равенстве нулю тангенциальной составляющей электрического поля на стенках резонатора.

В результате получаются выражения для резонансной частоты для составляющих векторов поля в резонаторе.

Прямоугольный объемный резонатор.

Резонансная частота колебаний типа H_{mnp} или E_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2}, \quad (10.1)$$

где a, b, l — геометрические размеры резонатора (см. рис. 10.1).

Составляющие векторов поля для колебаний типа H_{mnp} :

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= j\omega\mu_a C \frac{\pi n}{b} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a C \frac{\pi m}{a} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= -C \frac{\pi m}{a} \frac{\pi p}{l} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_y &= C \frac{\pi y}{b} \frac{\pi p}{l} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_z &= C \left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \right] \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right). \end{aligned} \quad (10.2)$$

где C — произвольный амплитудный множитель.

Составляющие векторов поля для колебаний типа E_{mnp} :

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= j\omega\varepsilon_a C \frac{\pi n}{b} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_y &= -j\omega\varepsilon_a C \frac{\pi m}{a} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_z &= 0, \\ \dot{E}_x &= -C \frac{\pi m}{a} \frac{\pi p}{l} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_y &= C \frac{\pi y}{b} \frac{\pi p}{l} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_z &= C \left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Индексы m, n, p означают число вариаций поля в резонаторе по осям x, y и z соответственно.

Основным типом колебаний в прямоугольном резонаторе, имеющим минимальную резонансную частоту, в зависимости от соотношения размеров a ,

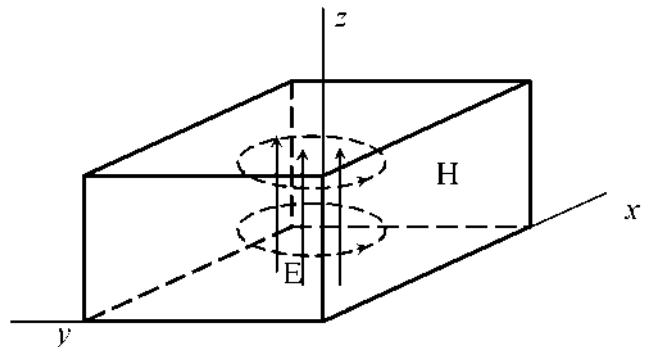


Рис. 10.5

b , и l могут быть H_{101} , H_{011} или E_{110} . Например, при $b < a$ и, $b < l$ основным типом колебаний является H_{101} , картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.5, а составляющие векторов поля описываются выражениями

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= 0, \\ \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a C \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= -C \frac{\pi^2}{al} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\ \dot{H}_y &= 0, \\ \dot{H}_z &= C \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right).\end{aligned}\tag{10.4}$$

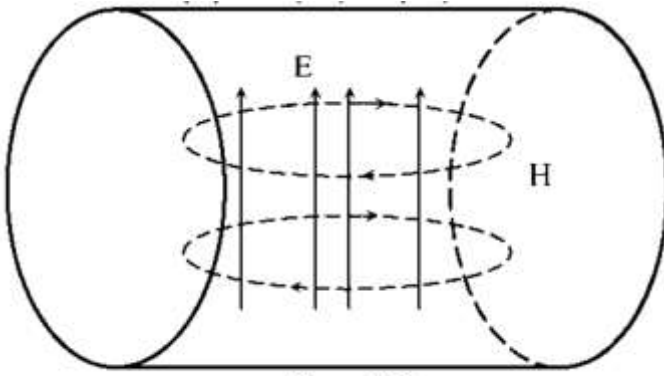


Рис. 10.6

Картина силовых линий поля колебаний H_{011} и E_{110} отличается лишь ориентацией векторов. Например, вектор E у колебания H_{011} ориентирован в направлении оси y , а у колебания E_{110} , — в направлении оси x . В резонаторе кубической формы резонансные частоты этих трех типов колебаний совпадают

(явление вырождения).

Цилиндрический объемный резонатор.

Резонансная частота колебаний типа H_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2},\tag{10.5}$$

где ε_a , μ_a — абсолютные диэлектрические проницаемости вещества, заполняющего резонатор; μ_{mn} - n -й корень уравнения $J'_m(x) = 0$.

Индекс p , определяющий число вариаций поля вдоль оси z , принимает целочисленные значения, не равные нулю.

Составляющие векторов поля колебания типа H в цилиндрическом резонаторе:

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= \frac{j\omega\omega_a}{r} m C J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi pz}{l}\right), \\ \dot{E}_\varphi &= j\omega\omega_a C \frac{\mu_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi pz}{l}\right), \\ \dot{E}_z &= 0,\end{aligned}\tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}\dot{H}_r &= C \frac{\mu_{mn}}{a} \frac{\pi p}{l} J'_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_\varphi &= -C \frac{l}{r} \frac{\pi p m}{l} J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_z &= C \left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 J_m\left(\frac{\mu_{mn} r}{a}\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right).\end{aligned}$$

Основным колебанием типа Н в цилиндрическом резонаторе является H_{111} , картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.6.

Резонансная частота колебаний типа E_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2}, \quad (10.7)$$

где ν_{mn} - n -й корень функции Бесселя $J_m(x)$.

Составляющие векторов поля колебаний типа Е в цилиндрическом резонаторе описываются выражениями:

$$\begin{aligned}\dot{H}_r &= -\frac{j\omega\omega_a}{r} m C J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_\varphi &= -j\omega\omega_a C \frac{\nu_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_z &= 0, \\ \dot{E}_r &= -C \frac{\nu_{mn}}{a} \frac{\pi p}{l} J'_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_\varphi &= C \frac{l}{r} \frac{\pi p m}{l} J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_z &= C \left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right).\end{aligned} \quad (10.8)$$

В отличие от колебаний типа Н индекс p здесь может принимать нулевое значение. Основным колебанием типа Е в цилиндрическом резонаторе является E_{010} , картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.7.

Особенностью этого колебания является то, что его резонансная частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \frac{2,4048}{a}. \quad (10.9)$$

не зависит от длины резонатора.

В общем случае, когда резонатор представляет собой закороченный с обоих концов отрезок произвольного волновода, резонансную длину волны определяют из условия

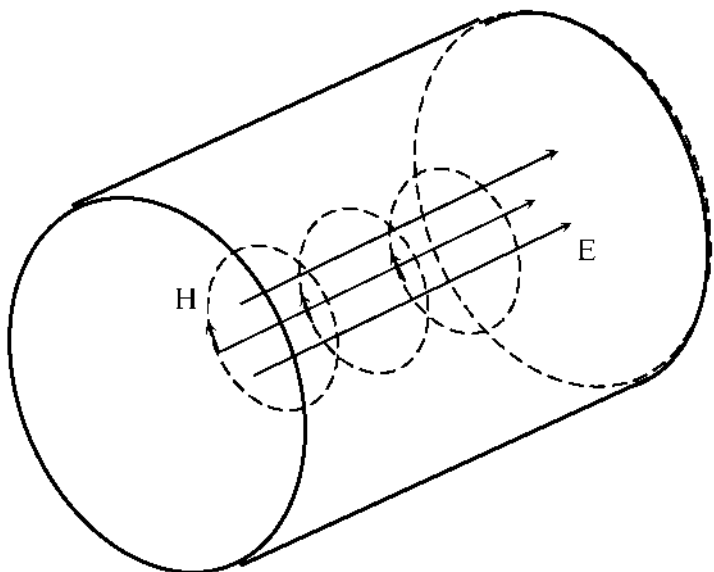


Рис.10.7

$$l = p \frac{\lambda_B}{2}, \quad (10.10)$$

где p — целое число (продольный индекс); λ_B — длина волны в волноводе (линии передачи).

Из выражения (10.10) получается формула для резонансной частоты:

$$\omega_p = \frac{\pi p v_\phi}{l}, \quad (10.11)$$

где v_ϕ — фазовая скорость волны в линии передачи, на базе которой выполнен резонатор.

В частности, для основного колебания типа T_1 объемного резонатора представляющего собой закороченный с обоих концов отрезок коаксиальной линии передачи (см. рис. 10.3),

$$\omega_p = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a l}}. \quad (10.12)$$

В диапазоне дециметровых волн находят применение коаксиальные резонаторы, нагруженные на конденсатор (рис. 10.8). Резонансные частоты такого резонатора определяют как решения уравнения

$$Z_B \operatorname{tg} \frac{\omega_p l}{c} = \frac{1}{\omega_p C_H}. \quad (10.13)$$

Здесь Z_B — волновое сопротивление коаксиальной линии передачи; c — скорость света; C_H — емкость конденсатора, на который нагружена линия.

Если линию передачи свернуть в кольцо, то образуется *резонатор бегущей волны*. Резонанс здесь наблюдается при условии, что длина резонатора l равна целому числу длин волн в линии, откуда

$$\omega_p = n \frac{2\pi p v_\phi}{l}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (10.14)$$

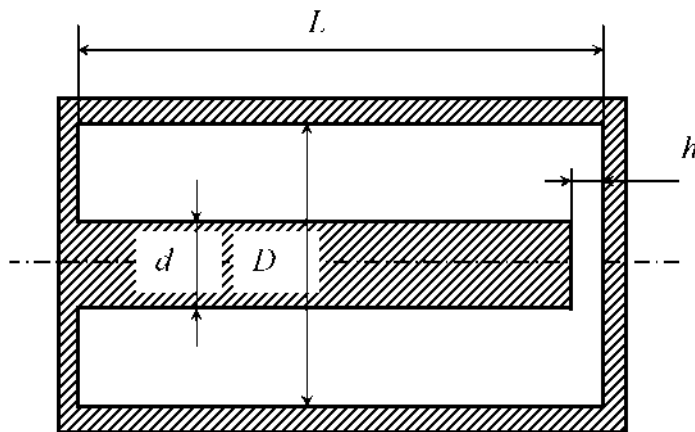


Рис. 10.8

В некоторых электронных приборах СВЧ используют квазистационарные торовидные резонаторы (рис. 10.4); их расчет обычно проводят приближенно. Среднюю часть резонатора, образованную двумя параллельными дисками, рассматривают как конденсатор с емкостью

$$C = \varepsilon_a \frac{\pi a^2}{d}. \quad (10.15)$$

Параллельно ему включена индуктивность L , образованная стенками резонатора.

Для резонатора, изображенного на рис. 10.4:

$$L = \frac{\mu_a h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (10.16)$$

где h — высота зазора.

Таким образом, считается, что квазистационарный торовидный резонатор эквивалентен колебательному контуру с резонансной частотой

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0 h a^2}{2} \ln \frac{b}{a}}}. \quad (10.17)$$

Энергия, запасенная в объемном резонаторе любого типа,

$$W = \int_V \varepsilon_a \frac{E^2}{2} dV = \int_V \mu_a \frac{H^2}{2} dV, \quad (10.18)$$

где E и H — амплитудные значения напряженности электрического и магнитного полей; интегрирование ведется по объему резонатора.

В частности, для колебаний типов H_{101} , H_{011} , E_{110} в прямоугольном объемном резонаторе

$$W = \varepsilon_a \frac{E_{max}^2}{8} abl, \quad (10.19)$$

где E_{max} — максимальная амплитуда напряженности электрического поля в резонаторе.

В цилиндрическом объемном резонаторе энергию, запасенную колебаниями различных типов, вычисляют по следующим формулам:

колебание типа E_{010}

$$W = 0,423 \varepsilon_a E_{max}^2 a^2 l; \quad (10.20)$$

колебание типа E_{011}

$$W = \frac{\varepsilon_a E_{max}^2 a^2 l}{4} \left[\frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\nu_{01}}{a}\right)^2}{\left(\frac{\nu_{01}}{a}\right)^2} \right]; \quad (10.21)$$

колебание типа H_{101}

$$W = 0,316 \varepsilon_a E_{max}^2 a^2 l; \quad (10.22)$$

колебание типа H_{111}

$$W = 0,749 \varepsilon_a E_{max}^2 a^2 l. \quad (10.23)$$

Добротность объемного резонатора определяют как отношение энергии электромагнитного поля, запасенной в резонаторе, к энергии, теряемой за период собственных колебаний:

$$Q = \frac{\omega_p \int_V \mu_a |H|^2 dV}{R_S \oint_S |H_\tau|^2 dS}. \quad (10.24)$$

Для колебаний типа H_{101} в прямоугольном резонаторе

$$Q = \frac{\mu_a \omega_p}{2R_S} \frac{abl(a^2 + l^2)}{a^3(l + 2b) + l^3(a + 2b)}. \quad (10.25)$$

Добротность важнейших типов колебаний в цилиндрическом резонаторе рассчитывают по формулам:

колебание типа E_{010}

$$Q = \frac{\mu_a \omega_p}{2R_S} \frac{al}{a+l}; \quad (10.26)$$

колебание типа E_{011}

$$Q = \frac{\mu_a \omega_p}{2R_S} \frac{al}{2a+l}; \quad (10.27)$$

колебание типа H_{011}

$$Q = \frac{\mu_a \omega_p}{2R_S} \frac{\varepsilon_a \mu_a \omega_p a^2 l}{\frac{a^2}{l^2} \pi^2 + \frac{l}{a} \mu_0^2}; \quad (10.28)$$

колебание типа H_{111}

$$Q = \frac{\mu_a \omega_p}{2R_S} \frac{\lambda_p (1 - \frac{1}{\mu_{11}})^2 [\mu_{11}^2 + (\frac{\pi a}{l})^2]^{3/2}}{2\pi [\mu_{11}^2 + (\frac{\pi a}{l})^2 + (1 - \frac{2a}{l})(\frac{\pi a}{l \mu_{11}})^2]}. \quad (10.29)$$

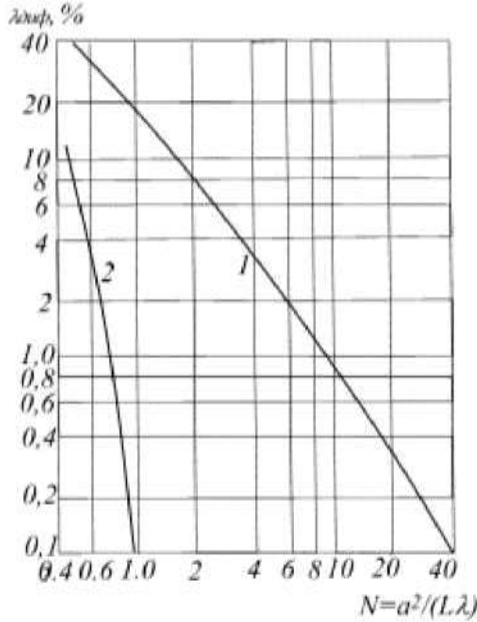


Рис. 10.9

В формулах (10.24) — (10.29) учитываются лишь потери в металлических стенках резонаторов. Если резонатор заполнен диэлектриком с потерями, то результирующая добротность

$$Q = \frac{1}{1/Q_M + \operatorname{tg} \delta_3}, \quad (10.30)$$

где Q_M — добротность резонатора, обладающего лишь потерями в металлических стенках; $\operatorname{tg} \delta_3$ — тангенс угла потерь вещества, заполняющего резонатор.

В оптическом и инфракрасном диапазонах применяют *открытые* резонаторы, образованные двумя плоскими или сферическими зеркалами. В таких резонаторах существуют собственные электромагнитные колебания (моды) T_{mnp} , где индексы m , n означают число вариаций поля в поперечных направлениях, а индекс p — число вариаций поля вдоль оси резонатора. Основной является мода T_{00p} .

Добротность открытых резонаторов определяется потерями в зеркалах и дифракционными потерями:

$$Q = \frac{2\pi l}{\lambda_p} \frac{1}{1 - R^2 + \alpha_{\text{диф}}}, \quad (10.31)$$

где R — коэффициент отражения от зеркала; $\alpha_{\text{диф}}$ — относительная потеря мощности сигнала вследствие дифракции за один проход вдоль резонатора.

Дифракционные потери характеризуются волновым параметром

$$N = a^2/(l\lambda), \quad (10.32)$$

где a — радиус зеркала; l — расстояние между зеркалами.

Благодаря меньшим дифракционным потерям наибольшее распространение получили конфокальные резонаторы, образованные зеркалами, радиус, кривизны которых равен длине резонатора.

На рис. 10.9 приведен график зависимости дифракционных потерь для основной моды в резонаторах с плоскими 1 и конфокальными 2 сферическими зеркалами. При больших N для расчета дифракционных потерь могут быть использованы приближенные выражения:

$$\alpha_{\text{диф}} \approx 0,3N^{-3} \quad (10.33)$$

-для резонатора с плоскими зеркалами,

$$\alpha_{\text{диф}} \approx 10,9 \times 10^{4,94N} \quad (10.34)$$

-для резонатора с конфокальными зеркалами.

Резонансные частоты колебаний типа T_{mnp} в конфокальных резонаторах

$$f_{mnp} = \frac{c}{4l}(1 + 2p + 2m + n), \quad (10.35)$$

где c – скорость света.

Поперечное распределение поля основной моды T_{mnp} в конфокальном резонаторе описывается гауссовой функцией:

$$E = Ae^{-r^2/\omega^2} \cos\varphi, \quad (10.36)$$

где $\omega^2 = l\lambda/\pi$ — на поверхности зеркала; $\omega^2 = l\lambda/2\pi$ — в середине резонатора (в фокальной плоскости),

Высшие моды конфокального резонатора имеют значительно большие дифракционные потери, чем основная мода, что приводит к самофилтратии основной моды.