Тема 1. Электромагнитные волны

Лекция 4. Сферические и цилиндрические электромагнитные волны в однородных средах.

1. Соотношение для векторов напряженностей электрического и магнитного полей сферической волны

2. Основные свойства сферических волн в изотропной среде

3. Понятие о поле цилиндрических волн в однородной изотропной среде

1. Соотношение для векторов напряженностей электрического и магнитного полей сферической волны

Рассмотрим гармоническое электромагнитное поле с радиально симметричным распределением электрического вектора Герца $\vec{\Pi}^e$ (заранее заданное свойство). Это означает, что в таком поле можно представить множество концентрических сфер, на каждой из которых вектор $\vec{\Pi}^e$ в фиксированный момент времени постоянен (рис. 1). Центр О множества концентрических сфер является центром симметрии распределения вектора $\vec{\Pi}^e$.

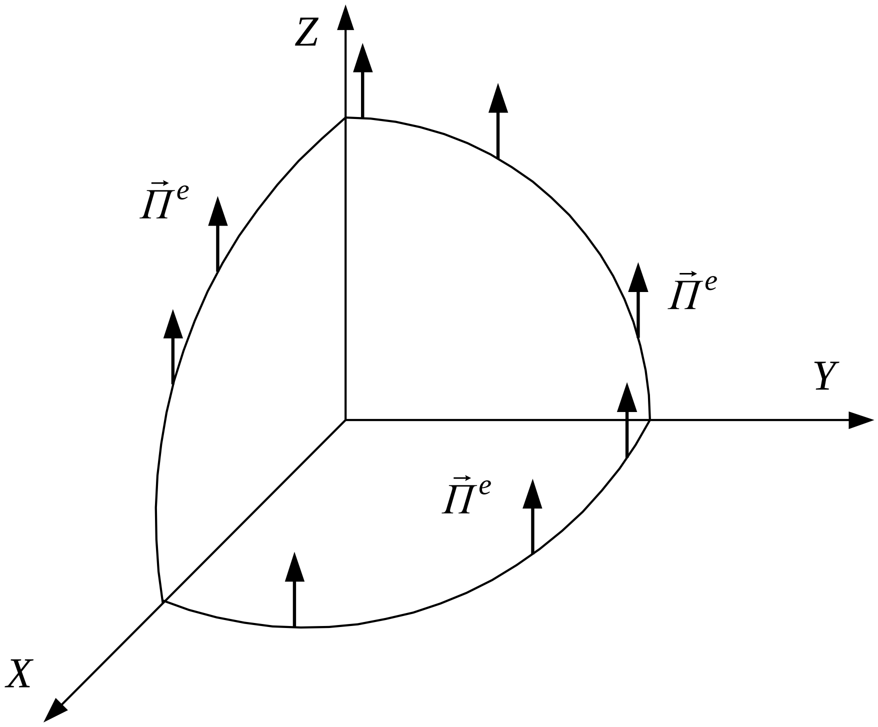

Рис. 1

Будем считать, что среда, находящаяся в поле, не проводящая ($\sigma = 0$), а плотность сторонних токов $\vec{j}^{\,cm}$ везде кроме начала координат равна нулю.

Будем решать задачу по тому же алгоритму, что и для случая распространения плоской волны.

Решение задачи

1. Выберем две системы координат (рис. 2): прямоугольную - с ортами $\vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o$ и сферическую - с ортами $\vec{r}_o, \vec{\theta}_o, \vec{\varphi}_o$.

2. Опишем математически заранее заданные свойства поля в выбранных системах координат.

Так как вектор $\vec{\Pi}^e$ параллелен оси OZ, то отличной от нуля будет только составляющая $\vec{\Pi}^e$, т. е.

$$\dot{\vec{\Pi}}^e = \dot{\Pi}^e \vec{z}_o. \tag{1}$$

Кроме того, в силу радиально-симметричного распределения вектора $\vec{\Pi}^e$ его модуль, равный $\vec{\Pi}^e$, зависит только от расстояния между центром О и точкой наблюдения, следовательно,

$$\frac{\partial \dot{\Pi}_z^e}{\partial \theta} = \frac{\partial \dot{\Pi}_z^e}{\partial \varphi} = 0. \tag{2}$$

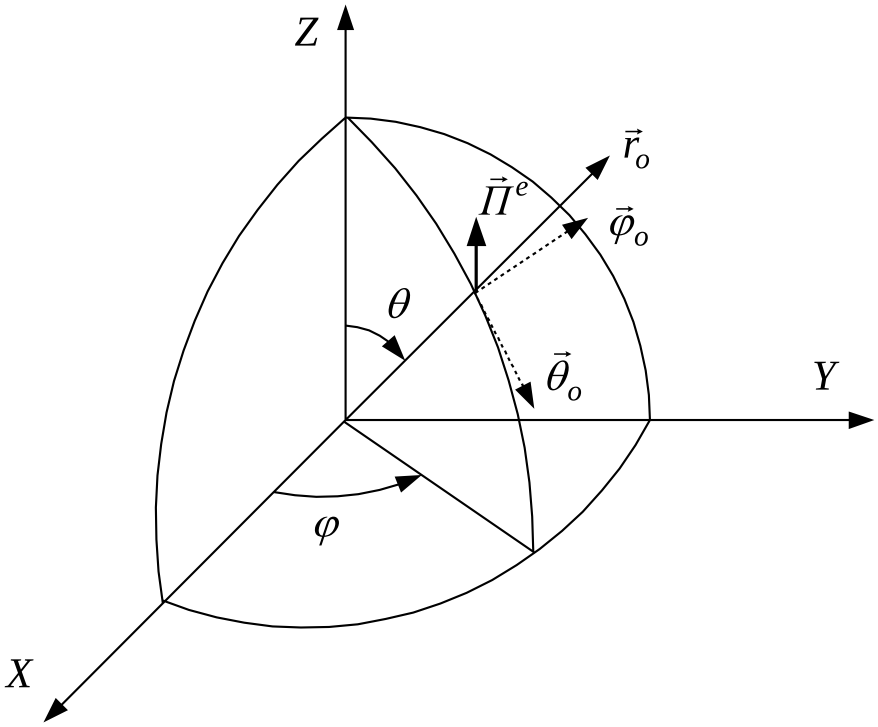

Рис. 2

3. Выберем уравнение для нахождения неизвестной величины $\vec{\Pi}^e$ и упростим его. Для этого целесообразно воспользоваться волновым уравнением для электрического вектора Герца

$$\nabla^2 \dot{\vec{\Pi}}^e + k^2 \dot{\vec{\Pi}}^e = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_a} \dot{\vec{j}}^{cm} \tag{3}$$

Учитывая заранее заданные признаки поля, т. е. $\vec{j}^{cm} = 0$ и $\dot{\Pi}_x^e = \dot{\Pi}_y^e = 0$, получим

$$\nabla^2 \dot{\vec{\Pi}}^e + k^2 \dot{\vec{\Pi}}^e = 0 \tag{4}$$

В сферической системе координат это уравнение примет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \dot{\Pi}_z^e}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \dot{\Pi}_z^e}{\partial \theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \dot{\Pi}_z^e}{\partial \varphi^2} + k^2 \dot{\Pi}_z^e = 0.$$

В силу равенств (4) второе и третье слагаемые в этом уравнении оказываются равными нулю, и оно упрощается

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \dot{\Pi}_z^e}{\partial r}\right) + k^2 \dot{\Pi}_z^e = 0. \tag{5}$$

Решим упрощенное уравнение (5). С этой целью введем новую вспомогательную функцию

$$\dot{\Pi}_z^e = \frac{\psi}{r}. \tag{6}$$

Подставляя выражение для неизвестной функции $\dot{\Pi}_z^e$ в уравнение (5), получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r}\right)\right)+k^2\frac{\psi}{r}=0. \tag{7}$$

После дифференцирования и приведения подобных членов уравнение (7) примет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+k^2\psi=0,$$

интеграл которого известен

$$\psi=C_1e^{ikr}+C_2e^{-ikr},$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные интегрирования.

Ограничимся частным случаем, когда $C_1=0$ (распространяется только прямая волна, а отраженная отсутствует), тогда последнее равенство упростится

$$\psi=C_2e^{-ikr}.$$

Подставляя найденное значение ψ в формулу (6), получим

$$\dot{\Pi}_z^e=C_2\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{8}$$

Напомним, что $\dot{\Pi}_x^e=\dot{\Pi}_y^e=0$

5. Найдем искомые векторы напряженностей поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Начнем с определения составляющих магнитного поля $\vec{H}$, для чего воспользуемся уравнениями связи

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{H}}&=i\omega\varepsilon_a rot\dot{\vec{\Pi}}^e,\\ \dot{H}_r&=i\omega\varepsilon_a rot_r\dot{\vec{\Pi}}^e,\\ \dot{H}_\theta&=i\omega\varepsilon_a rot_\theta\dot{\vec{\Pi}}^e,\\ \dot{H}_\varphi&=i\omega\varepsilon_a rot_\varphi\dot{\vec{\Pi}}^e.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Поскольку $\dot{\Pi}_z^e$ является лишь функцией r, то $\vec{H}$ удобнее вычислить, используя сферическую систему координат. Найдем составляющие $\vec{\Pi}^e$ в этой системе. Из рис. 2 видно, что

$$\dot{\Pi}_r^e=\dot{\Pi}_z^e\cos\theta,\quad \dot{\Pi}_\theta^e=-\dot{\Pi}_z^e\sin\theta,\quad \dot{\Pi}_\varphi^e=0.$$

С учетом уравнения (8) эти равенства принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{\Pi}_r^e&=C_2\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\theta,\\ \dot{\Pi}_\theta^e&=-C_2\frac{e^{-ikr}}{r}\sin\theta,\\ \dot{\Pi}_\varphi^e&=0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для того чтобы воспользоваться уравнениями связи (9), необходимо разложить операцию ротора вектора $\vec{\Pi}^e$ по ортам сферической системы координат и учесть, что

$$\frac{\partial \dot{\Pi}_r^e}{\partial \varphi} = \frac{\partial \dot{\Pi}_\theta^e}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\Pi}_\varphi^e = 0.$$

В результате получим следующие выражения

$$rot_r \dot{\vec{\Pi}}^e = 0, \quad rot_\theta \dot{\vec{\Pi}}^e = 0,$$

$$rot_\varphi \dot{\vec{\Pi}}^e = \frac{C_2}{2}\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-ikr}\sin\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(e^{-ikr}\cos\theta\right)\right] =$$

$$= \frac{C_2}{2}\left(ik + \frac{1}{r}\right)e^{-ikr}\sin\theta.$$

Используя найденные значения проекций $rot_\varphi \dot{\vec{\Pi}}^e$, из системы уравнений (9) определим составляющие вектора

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_r &= 0, \\ \dot{H}_\theta &= 0, \\ \dot{H}_\varphi &= i\omega\varepsilon_a C_2\left(ik + \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

По известным составляющим вектора $\vec{H}$ из первого уравнения Максвелла найдем вектор $\vec{E}$

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_k} rot\dot{\vec{H}},$$

$$\dot{E}_r = \frac{1}{i\omega\varepsilon_k} rot_r \dot{\vec{H}},$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{1}{i\omega\varepsilon_k} rot_\theta \dot{\vec{H}},$$

$$\dot{E}_\varphi = \frac{1}{i\omega\varepsilon_k} rot_\varphi \dot{\vec{H}}.$$

Если разложить операцию $rot\dot{\vec{H}}$ по ортам сферической системы координат и учесть выражения (11) получим систему уравнений, описывающих составляющие вектора

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_r &= 2C_2\left(ik + \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r^2}\cos\theta, \\ \dot{E}_\theta &= C_2\left(-k^2 + \frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\sin\theta, \\ \dot{E}_\varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Таким образом, системы уравнений (11) и (12) являются решением поставленной задачи.

Выводы:

1.) Выражения (11), (12) описывают поле сферической волны типа Е;
2.) Так как решение осуществлялось через электрический вектор Герца, получили волну типа Е;
3.) Если решение проводить через магнитный вектор Герца, то получим волну типа Н.

2. Основные свойства сферических волн в изотропной среде

С целью выявления свойств сферических волн в изотропной среде введем понятия ближней и дальней зон и проанализируем полученные решения - уравнения (11) и (12).

Ближней зоной называется геометрическое место точек, удаление r которых от фазового центра О (рис. 2) удовлетворяет неравенству $\beta r << 1$ или

$$\frac{2\pi}{\lambda} r << 1.$$

Дальней зоной называется геометрическое место точек, удаление которых от фазового центра удовлетворяет неравенству $\beta r >> 1$, или

$$\frac{2\pi}{\lambda} r >> 1.$$

Таким образом, дальняя зона - это все неограниченное пространство, за исключением радиуса $r \approx \lambda$ с, центром в точке О (рис. 2).

Проанализируем распределение фаз составляющих векторов напряженностей поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Если величины, стоящие в правых частях равенств (11) и (12), представим в показательной форме и учтем, что в нашем случае $k = \beta$ ($\alpha = 0$, так как $\sigma = 0$), то выражение для любой составляющей можно представить в виде

$$U(M) = U_o e^{-i(\beta r - \psi)},$$

где M - точка наблюдения составляющей поля;

U_o - амплитуда соответствующей составляющей;

$(\beta r - \psi)$- начальная фаза.

Текущая фаза для любой составляющей в точке наблюдения вычисляется с помощью выражения

$$\varphi = \omega t - \beta r + \psi. \tag{13}$$

Как и в случае плоской волны, для фиксированного момента времени и при заданной фазе последнее выражение преобразуется в уравнение поверхности равных фаз (уравнение сферы).

$$r = \frac{\omega}{\beta}t - \frac{\varphi}{\beta} + \frac{\psi}{\beta}. \tag{14}$$

Таким образом, уравнения (11) и (12) описывают сферическую волну с фазовым центром в точке О (рис. 2).

С увеличением времени t радиус r увеличивается, следовательно, волна распространяется в пространстве во все стороны. Лучи волны совпадают с направлением орта $\vec{r}_o$.

Как видно из уравнений (11) и (12), рассматриваемая волна имеет только одну продольную составляющую E_r, отличную от нуля. Следовательно, сферическая волна является волной типа E как в ближней, так и в дальней зонах.

Учитывая особенности решения прикладных задач распространения радиоволн, анализа и синтеза антенных систем, ограничимся рассмотрением свойств сферической волны в дальней зоне. Действительно, применительно к радиолокации, воздушная цель обычно находится на большом удалении от источника волн - радиолокационной станции. В связи с этим найдем приближенные выражения для составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в дальней зоне.

В формулах (11) и (12) присутствуют множители $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$. С увеличением расстояния r функции $1/r^2$, $1/r^3$ убывают значительно быстрее по сравнению с $1/r$, поэтому ими можно пренебречь. С учетом этого, выражения, описывающие поле сферической волны, в дальней зоне примут вид

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_r &= \frac{i2C_2 k\cos\theta}{r^2}e^{-ikr} \approx 0,\\
\dot{E}_\theta &= \frac{-C_2 k^2 \sin\theta}{r}e^{-ikr},\\
\dot{H}_\varphi &= \frac{-C_2 k\omega\varepsilon_a \sin\theta}{r}e^{-ikr},\\
\dot{E}_\varphi &= \dot{H}_r = \dot{H}_\varphi = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Составляющая $\dot{E}_r$ приближенно равна нулю, так как

$$\frac{\left|\dot{E}_r\right|}{\left|\dot{E}_\theta\right|} = \frac{2}{kr} << 1.$$

Таким образом, сферическая волна в дальней зоне имеет только поперечные составляющие поля, подобно плоской волне, а ее фронт, по мере увеличения r, все более приближается к плоскому.

Характерной особенностью сферической волны является естественное убывание амплитуды, обратно пропорциональное пройденному расстоянию. На это обстоятельство указывает наличие в уравнениях (15) множителя $1/r$.

Для нахождения фазовой скорости волны продифференцируем выражение (14).

$$V_{\phi} = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Сравнивая полученное выражение с аналогичным, для плоской волны видим, что они совпадают.

Подводя итог изучению свойств сферической электромагнитной волны, следует отметить следующие закономерности:

1) Плоская и сферическая волны распространяются в заданной среде с одинаковой фазовой скоростью, которая определяется параметрами среды.

2) Обе волны в дальней зоне имеют одинаково поперечный характер электромагнитного поля. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения.

3) В идеальной среде амплитуда сферической волны, по сравнению с плоской, убывает обратно пропорционально пройденному расстоянию.

Выводы:

1.) Фазовая скорость сферической волны зависит только от параметров среды;
2.) Сферические волны могут быть только E или H;
3.) В дальней зоне сферическую волну можно считать плоской, т.е. можно пренебречь продольной составляющей поля;
4.) Амплитуда поля сферической волны пропорциональна $1/r$, это признак сферической волны;
5.) В дальней зоне электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны;
6.) Векторное произведение электрического и магнитного полей дают вектор Умова-Пойтинга.

3. Понятие о поле цилиндрических волн в однородной изотропной среде

При решении задачи нахождения поля цилиндрической электромагнитной волны потребуем, чтобы вектор Герца, в отличие от сферической волны, имел единственную, отличную от нуля составляющую Π_z^e с аксиально-симметричным распределением (рис. 3). Это означает, что вектор $\vec{\Pi}_z^e$ (или $\vec{\Pi}_z^h$) зависит только от координаты в цилиндрической системе координат.

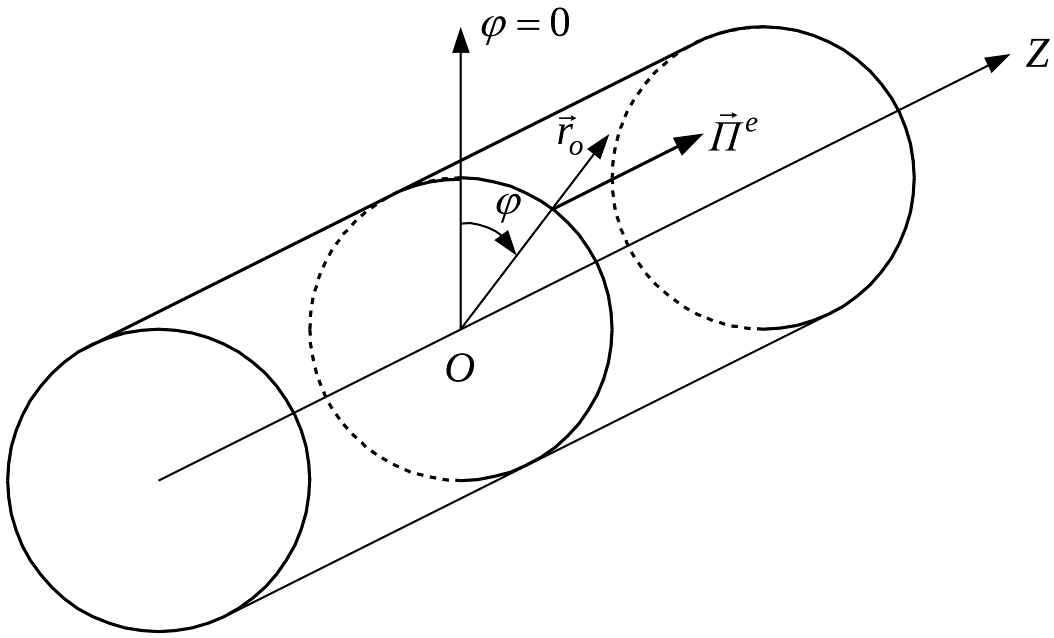

Рис. 3

Если провести математические преобразования, аналогичные проделанным при решении задачи для сферической волне, то получим соотношения, которые вычислить величины составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Анализ полученных соотношений позволяет сделать следующие выводы:

1. Любая составляющая напряженности поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в дальней зоне может быть записана в виде

$$U = U_o \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}.$$

2. Цилиндрическая волна распространяется с фазовой скоростью

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta}.$$

3. В дальней зоне амплитуды векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ убывают обратно пропорционально $\sqrt{r}$.

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в дальней зоне взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к направлению распространения (рис. 3).

При решении задач распространения плоских, сферических и цилиндрических волн мы не задавались вопросом о том, что явилось причиной их возникновения. Такой подход позволял упростить решение. Теперь, когда изучены закономерности распространения, можно приступать к исследованию вопросов излучения электромагнитных волн.

Выводы:

1.) Фазовая скорость цилиндрической волны зависит только от параметров среды;
2.) Цилиндрические волны могут быть только E или H;
3.) В дальней зоне цилиндрическую волну можно считать плоской, т.е. можно пренебречь продольной составляющей поля;

4.) Амплитуда поля сферической волны пропорциональна $1/\sqrt{r}$, это признак цилиндрической волны;
5.) В дальней зоне электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны;
6.) Векторное произведение электрического и магнитного полей дают вектор Умова-Пойтинга.