# Тема 2. Электромагнитные волны в направляющих системах

## **Лекция 10.** Волноводы прямоугольного сечения.

### 1. Электромагнитное поле произвольной линии передачи СВЧ

Прежде чем приступить к анализу частных случаев волноводных линий, наиболее часто встречающихся на практике, изучим распространение волн по произвольной линии передачи.

Рассмотрим однородную (размеры сечения и параметры по всей длине неизменны) линию передачи, состоящую из любого числа проводников (рис.2). Пространство между ними заполнено изотропным диэлектриком с параметрами $\varepsilon_a$, $\mu_a$ и удельной проводимостью σ, т. е. будем считать, что между проводниками нет свободных носителей зарядов. Требуется найти выражения для составляющих поля в такой линии.

В данном случае уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле внутри линии, имеют вид

$$rot\vec{H} = i\omega\varepsilon_a\vec{E} + \vec{j}\,, \tag{1}$$

$$rot\vec{E} = -i\omega\mu_a\vec{H}\,, \tag{2}$$

$$div\vec{j} = -i\omega\rho, \tag{3}$$

$$\vec{j} = \sigma\,\vec{E}\,. \tag{4}$$

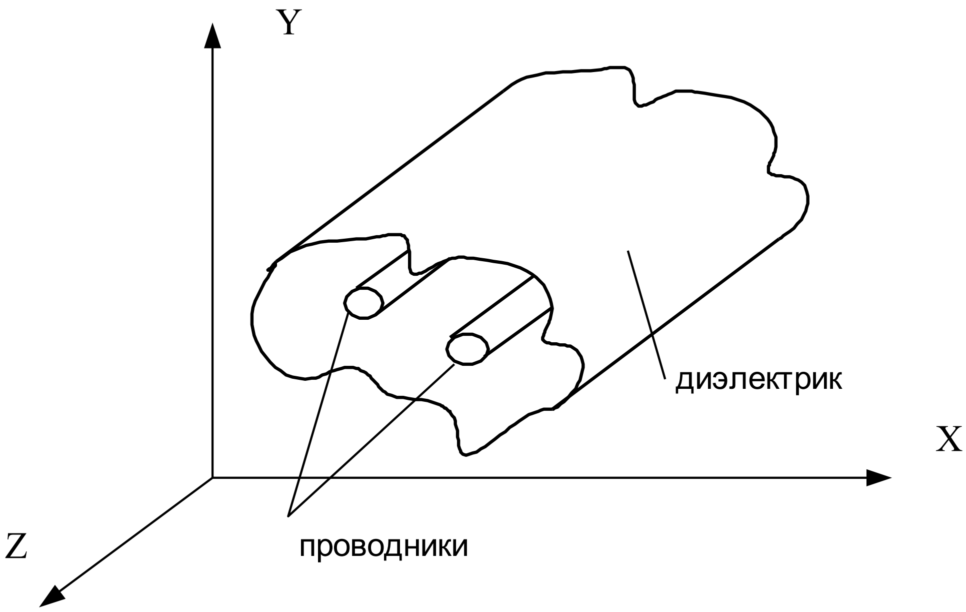


Рис. 2

Поскольку чаще всего используются поля, изменяющиеся по гармоническому закону, эти уравнения представим в волновой форме, как было показано ранее

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0, \tag{5}$$

$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0, \tag{6}$$

где ***k***- волновое число.

В общем случае векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеют три составляющих в прямоугольной системе координат:

$$\vec{E}=E_x\vec{x}_o+E_y\vec{y}_o+E_z\vec{z}_o, \tag{7}$$

$$\vec{H}=H_x\vec{x}_o+H_y\vec{y}_o+H_z\vec{z}_o, \tag{8}$$

где $\vec{x}_o$, $\vec{y}_o$, $\vec{z}_o$ - единичные орты.

Если формулы (7) и (8) подставить в выражения (5) и (6), то последние преобразуются в 6 независимых скалярных уравнений:

$$\nabla^2E_x+k^2E_x=0,$$

$$\nabla^2E_y+k^2E_y=0,$$

$$\nabla^2E_z+k^2E_z=0,$$

$$\nabla^2H_x+k^2H_x=0,$$

$$\nabla^2H_y+k^2H_y=0,$$

$$\nabla^2H_z+k^2H_z=0.$$

Все уравнения имеют одинаковую форму, поэтому для нахождения общих выражений составляющих поля достаточно решить одно уравнение вида

$$\nabla^2 L + k^2 L = 0.$$

Преобразуем его, развернув операцию $\nabla^2$ в прямоугольной системе координат

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} + k^2 L = 0, \tag{9}$$

где $L$ - одна из составляющих поля, т.е. $E_x$, $E_y$, $E_z$, $H_x$, $H_y$, $H_z$.

Решение задачи

Будем считать, что решение уравнения (9) имеет вид произведения сомножителей, каждый из которых является функцией только одной координаты или времени:

$$L = X(x)Y(y)Z(z)e^{i\omega t}. \tag{10}$$

Продифференцируем выражение (10), подставим его в уравнение (9) и, разделив обе части на $L$, получим

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0. \tag{11}$$

Для того чтобы сумма в уравнении (11) была постоянной величиной, каждое из слагаемых также должно быть постоянной величиной. Приравняем слагаемые константам

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\xi^2, \tag{12}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\eta^2, \tag{13}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\gamma^2. \tag{14}$$

Причем

$$k^2 = \xi^2 + \eta^2 + \gamma^2. \tag{15}$$

Выражения (12) - (14) сводятся к линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка, решение которых имеет вид

$$X = C_1 e^{i\xi x} + C_2 e^{-i\xi x}, \tag{16}$$

$$Y = C_3 e^{i\eta y} + C_4 e^{-i\eta y}, \tag{17}$$

$$Z = C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}. \tag{18}$$

Подставим полученные решения относительно функций $X$, $Y$, $Z$ в формулу (10). Считая, что волна распространяется в линии передачи вдоль оси $Z$, сомножители $X$ и $Y$ представим в тригонометрической форме с помощью формулы Эйлера, а $Z$ оставим в показательной форме. В результате получим решение

$$L = D_1 \cos(\xi x - \varphi)\cos(\eta y - \psi)e^{i(\omega t - \gamma z)} + \\ + D_2 \cos(\xi x - \varphi)\cos(\eta y - \psi)e^{i(\omega t + \gamma z)}.$$

где $D_1$ и $D_2$ - новые постоянные интегрирования, заключающие в себе $C_1$-$C_6$ (постоянные интегрирования, учитывающие периодичность тригонометрических функций).

Полученное решение имеет два слагаемых, отличающихся только амплитудами и направлением отсчета по оси $Z$, т.е. оно описывает две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях (прямая и отраженная волны). Для упрощения ограничимся одной из этих волн.

$$L = D_1 \cos(\xi x - \varphi)\cos(\eta y - \psi)e^{i(\omega t - \gamma z)}. \tag{19}$$

В сокращенной записи это выражение имеет вид

$$L = F(x, y)e^{i(\omega t - \gamma z)}. \tag{20}$$

Константы $\xi$ и $\eta$ определяют вариации поля в поперечной плоскости. Они получили название поперечных волновых чисел. Функция $F(x, y)$ описывает распределения поля в поперечном сечении линии передачи.

Поскольку под $L$ мы условились понимать любую из составляющих $E_x$, $E_y$, $E_z$, $H_x$, $H_y$, $H_z$, полученное решение (19) в дальнейшем будем использовать для нахождения полей в волноводах.

**Выводы:**

1. Распределение поперечных составляющих поля электромагнитной волны в волноводе зависит от его поперечного сечения.
2. Константы $\xi$ и $\eta$ называются поперечные волновые числа, определяют вариации поля в поперечной плоскости.

## 2. Свойство электромагнитного поля в волноводе (фазовая и групповая скорости, длина волны в линии передачи СВЧ)

Из выражения (20) следует, что в режиме установившихся гармонических колебаний в линии передачи векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ можно представить в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_m(x,y)e^{i(\omega t - \gamma z)}, \tag{21}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m(x,y)e^{i(\omega t - \gamma z)}, \tag{22}$$

где $\gamma$ - постоянная распространения волнового процесса в линии.

Поясним физический смысл этой постоянной. В общем случае будем считать, что она комплексная

$$\gamma = \beta - i\alpha. \tag{23}$$

Тогда выражение (21) перепишем в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_m(x,y)e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z)}. \tag{24}$$

Множитель $e^{-\alpha z}$ описывает затухание волны, т. е. уменьшение амплитуды по экспоненциальному закону вдоль оси $Z$. Величина $\alpha$ называется коэффициентом затухания. Функцию постоянной распространения вдоль оси $Z$ выполняет величина $\beta$ - фазовая постоянная. При действительном значении $\gamma$, когда $\alpha = 0$, волна распространяется в линии без затухания. При мнимом значении $\beta$ распространения волны не происходит. Поле затухает вдоль оси $Z$ по экспоненциальному закону без сдвига фазы.

Одной из важнейших характеристик волны в линии передачи является фазовая скорость. Под ней понимается скорость перемещения вдоль оси $Z$ электрического или магнитного поля, начальная фаза которого постоянна.

Зафиксируем фазу в выражении (24)

$$\Phi = \omega t - \beta z = const.$$

Выразим из этой формулы $z$.

$$z = \frac{\omega t}{\beta} - \frac{\Phi}{\beta}.$$

Если зафиксировать время $t = const$, получим уравнение поверхности равных фаз

$$z = \frac{\omega t}{\beta} - \frac{\Phi}{\beta} = const$$

Это уравнение описывает плоскость, перпендикулярную оси линии передачи, следовательно, в ней распространяется плоская волна. Фазовую скорость волны найдем как производную величины $z$ по времени

$$V_\phi = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta}. \tag{25}$$

Будем считать, что фазовая скорость волны в линии передачи СВЧ не равна скорости света $C$. Ее величину можно вычислить и другим способом:

$$V_ф=\frac{\lambda_в}{T}=\lambda_в f=\lambda_в\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\omega}{\frac{2\pi}{\lambda_в}}, \tag{26}$$

где $f$ - частота в Гц;

$\lambda_в$- длина волны на данной частоте в рассматриваемой линии передачи.

Считая, что $\lambda\neq\lambda_в$, сравним выражения (25) и (26). В результате получим

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda_в}. \tag{27}$$

Теперь сформулируем физическое толкование введенной ранее величины $\beta$.

Фазовая постоянная представляет собой число, показывающее, на сколько радиан (градусов) отличается начальная фаза волны от фазы источника на расстоянии одного метра от него.

Величина $\gamma$ еще называется продольным волновым числом. Напомним, что волновое число вычисляется по формуле

$$k=\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{28}$$

Для вычисления фазовой скорости с помощью выражений (25) и (27) необходимо знать величину $\beta$, а для определения последней требуется найти $\lambda_в$. Решить эту задачу можно, если переписать волновое уравнение (5), подставив в него уравнение (21).

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2}-\gamma^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0,$$

где $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2}=\nabla^2{}_{x,y}$ - двухмерный лапласиан в плоскости $XOY$ поперечного сечения линии.

Тогда последнее выражение перепишем в виде

$$\nabla^2{}_{x,y}\vec{E}+\left(-\gamma^2+k^2\right)\vec{E}=0. \tag{29}$$

Аналогично

$$\nabla^2{}_{x,y}\vec{H}+\left(-\gamma^2+k^2\right)\vec{H}=0. \tag{30}$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся без затухания, для которой $\alpha=0$. Сравним ее с плоской волной в свободном пространстве, где в пределах поверхности равных фаз (в поперечной плоскости) $\nabla^2{}_{x,y}\vec{E}=0$. Поэтому в выражении (29), при ненулевом поле $E\neq 0,\ \left(k^2-\beta^2\right)=0,\ k=\beta$. В линии передачи СВЧ, где $\lambda_в=\lambda,\ k\neq\beta$, для сохранения равенства в уравнении (29) необходимо, чтобы $\nabla^2{}_{x,y}\vec{E}\neq 0$ и $\left(k^2-\beta^2\right)\neq 0$.

Обозначим

$$k^2-\gamma^2=k_{кр}^2. \tag{31}$$

Из соображений обеспечения размерности введем обозначение

$$k_{кр}=\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}. \tag{32}$$

Если в выражение (31) подставить формулы (27, 28,32) и решить его относительно $\lambda_в$, получим

$$\lambda_в=\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon\mu-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \tag{33}$$

Для случая диэлектрика, представляющего собой сухой воздух или вакуум, $\varepsilon=\mu=1$. Тогда уравнение примет вид

$$\lambda_в=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \tag{34}$$

Теперь возвратимся к вычислению фазовой скорости волны, распространяющейся в линии.

$$V_ф=\frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \tag{35}$$

При вакуумном (воздушном) заполнении

$$V_ф=\frac{C}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \tag{36}$$

Полученные уравнения показывают, что в общем случае фазовая скорость электромагнитных волн в линии передачи может отличаться от скорости света $C$. Она зависит от частоты колебаний. Это явление получило название дисперсии.

Характерно, что при вакуумном (воздушном) заполнении линии фазовая скорость всегда превышает $V_{ф} \rangle C$.

Согласно релятивистским принципам скорость передачи информации или скорость передачи энергии в линии не должна превышать скорость света в свободном пространстве. Однако для передачи информации, рассмотренные выше монохроматические колебания использовать нельзя. Для этого их нужно промодулировать, что приводит к появлению в спектре множества гармонических составляющих, каждая из которых распространяется со своей фазовой скоростью. В результате интерференции в линии распространяется волновой "пакет" - максимум поля, получившийся за счет синфазного сложения волн. Скорость его перемещения называется групповой. Она и характеризует скорость передачи информации.

Рассмотрим упрощенный случай передачи информации с помощью двух колебаний с близкими частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. Найдем скорость передачи информации.

Электрическое поле этих волн представим в виде

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1m} e^{i(\omega_1 t - \gamma_1 z)}; \ \vec{E}_2 = \vec{E}_{2m} e^{i(\omega_2 t - \gamma_2 z)}. \qquad (37)$$

Будем считать, что амплитуды волн одинаковы и равны:

$$E_{1m} = E_{2m} = E_m.$$

Найдем суммарное поле распространяющихся волн

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega_1 t - \gamma_1 z)} \left[1 + e^{i(\omega_2 - \omega_1)t - i(\gamma_2 - \gamma_1)z}\right].$$

Обозначим

$$\omega_2 - \omega_1 = \delta\omega, \ \gamma_2 - \gamma_1 = \delta\gamma$$

Рассмотрим незатухающие волны:

$$\gamma_2 = \beta_2; \ \gamma_1 = \beta_1; \ \delta\gamma = \delta\beta.$$

Тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega_1 t - \beta_1 z)} \left[1 + e^{i\delta\omega t - i\delta\beta z}\right] = \vec{E}'_m e^{i(\omega_1 t - \beta_1 z)},$$

где $\vec{E}'_m$ - амплитудный множитель, изменяющийся от 0 до 2 (медленно меняющийся).

Таким образом, по линии перемещается волновой пакет (набор гармоник). Скорость перемещения "гребня" этого пакета найдем из условий постоянства выбранной точки наблюдения "гребня"

$$\delta\omega t - \delta\beta z = const.$$

В результате дифференцирования этого выражения получим общую формулу для вычисления групповой скорости - скорости перемещения волнового "пакета"

$$V_{гр} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\delta\omega}{\delta\beta}.$$

Если перейти к случаю, когда спектр модулированного колебания непрерывен, величину групповой скорости можно найти из выражения

$$V_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}. \qquad (38)$$

Сравнивая формулы (25) и (38) видим, что $V_{ф}$ и $V_{гр}$ не совпадают по величине. Выражение для определения групповой скорости можно получить из формулы (38) с помощью уравнений (25) и (35)

$$\frac{1}{V_{гр}} = \frac{\partial\beta}{\partial\omega},$$

$$V_{гр} = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)^2}. \qquad (39)$$

Таким образом, из равенства (39) следует, что групповая скорость меньше скорости света $V_{гр} \langle C$.

**Выводы:**

1. Фазовая скорость электромагнитных волн в линии передачи при вакуумном (воздушном) заполнении всегда превышает скорость света
2. Фазовая скорость зависит от частоты колебаний. Это явление называется дисперсией.
3. Длина волны в волноводе при вакуумном (воздушном) заполнении всегда превышает длину волны в свободном пространстве и зависит от частоты колебаний.
4. Групповая скорость электромагнитных волн в линии передачи при вакуумном (воздушном) заполнении всегда меньше скорости света.

## 3. Условие распространения электромагнитных волн в линии передачи СВЧ

С целью выяснения условий распространения электромагнитных волн в любой линии передачи (волноводе) проанализируем уравнения для вычисления длины волны в волноводе и фазовой скорости.

Из выражений для $\lambda_{в}$ и $V_{ф}$ следует, что при $\lambda << \lambda_{кр}$ длина волны в волноводе стремится к длине волны в свободном пространстве ($\lambda_{в} \to \lambda$), а фазовая скорость стремиться к скорости света $(V_{ф} \to C)$. Волна в волноводе при этом распространяется.

В случае, когда $\lambda = \lambda_{кр}$, знаменатели в формулах для $\lambda_в$ и $V_ф$ стремятся к нулю, тогда

$$\lambda_в \to \infty,\ V_ф \to \infty.$$

Распространения волны не происходит.

При $\lambda > \lambda_{кр}$ выражения для $\lambda_в$ и $V_ф$ становятся мнимыми. В этом случае

$$\lambda_в = \pm i\lambda',\ V_ф = \pm iV'_ф,\ \beta = \mp i\beta'$$

Тогда формула для вычисления напряженности электрического поля приобретает вид

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y)e^{-\alpha z}e^{i\omega t}e^{-\beta' z}.$$

Поле волны в волноводе затухает по экспоненциальному закону, а изменений фазы вдоль волновода не наблюдается, т.е. волна не распространяется, даже если коэффициент затухания равен нулю.

Таким образом, $\lambda_{кр}$ имеет определенный физический смысл. Это предельная длина волны, измеренная в свободном пространстве, при которой прекращается передача волн по линии в случае ее вакуумного (воздушного) заполнения.

Из приведенных рассуждений следует, что условиями распространения волн во всякой линии передачи являются неравенства:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &< \lambda_{кр}, \\ f &> f_{кр}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Диапазон волн, где $\lambda > \lambda_{кр}$ или $f < f_{кр}$ называется областью отсечки. В его пределах линия не может использоваться для передачи электромагнитной энергии.

Величина $\lambda_{кр}$ зависит только от конструкции линии передачи (волновода) и не зависит от частоты генератора. Задача о расчете этого параметра будет рассмотрена в дальнейшем при изучении соответствующих волноводов.

**Выводы:**

1. При $\lambda > \lambda_{кр}$ в волноводе прекращается распространение электромагнитной волны, хотя есть колебания поля во времени $e^{i\omega t}$. Амплитуда поля убывает вдоль линии передачи по экспоненциальному закону $e^{-\alpha z}e^{-\beta' z}$
2. При $\lambda = \lambda_{кр}$ фазовая постоянная $\beta = 0$, волна в волноводе не распространяется, хотя есть колебания поля во времени $e^{i\omega t}$. Амплитуда поля убывает вдоль линии передачи по экспоненциальному закону $e^{-\alpha z}$
3. При $\lambda < \lambda_{кр}$ в волноводе распространяется электромагнитная волна.

## 4. Типы волн, распространяющихся в волноводах

Ранее предполагалось, что существуют все шесть составляющих электромагнитного поля в линии передачи. Однако следует учесть, что в обычных двухпроводных линиях и в свободном пространстве поля имеют часто поперечный характер (волны типа ТЕМ), продольные составляющие $E_z$ и $H_z$ в них отсутствуют. Необходимо выяснить, какие типы волн могут распространяться в волноводах?

С этой целью обратимся к исходным уравнениям Максвелла для гармонически меняющихся полей:

$$\left.\begin{aligned} rot\vec{H} &= i\omega\varepsilon_a\vec{E}, \\ rot\vec{E} &= -i\omega\mu_a\vec{H}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Выразим из них векторы электромагнитного поля

$$\vec{E} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_a} rot\vec{H},$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{i\omega\mu_a} rot\vec{E}.$$

Развертывая выражения $rot\vec{H}$ и $rot\vec{E}$ в прямоугольной системе координат, получим шесть уравнений, в которые подставим уравнения для векторов поля $\vec{E} = \vec{E}_m(x,y)e^{i(\omega t-\gamma z)}$, и $\vec{H} = \vec{H}_m(x,y)e^{i(\omega t-\gamma z)}$.

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -i\frac{1}{\omega\varepsilon_a}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + i\gamma H_y\right), \\ E_y &= i\frac{1}{\omega\varepsilon_a}\left(i\gamma H_x + \frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \\ E_z &= -i\frac{1}{\omega\varepsilon_a}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right), \\ H_x &= i\frac{1}{\omega\mu_a}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\gamma E_y\right), \\ H_y &= -i\frac{1}{\omega\mu_a}\left(i\gamma E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \\ H_z &= i\frac{1}{\omega\mu_a}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

В приведенных выражениях опущены множители $e^{i(\omega t-\gamma z)}$, поэтому они описывают комплексные амплитуды.

Выразим поперечные составляющие поля $E_x$, $E_y$, $H_x$, $H_y$, через продольные $E_z$, $H_z$, получим

$$\left.\begin{aligned}
H_x &= \frac{i}{k^2-\gamma^2}\left(\omega\varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x}\right),\\
H_y &= \frac{-i}{k^2-\gamma^2}\left(\omega\varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}\right),\\
E_x &= \frac{-i}{k^2-\gamma^2}\left(\omega\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x}\right),\\
E_y &= \frac{i}{k^2-\gamma^2}\left(\omega\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Проверим версию о том, что в волноводе способны распространяться волны типа ТЕМ, у которых $V_ф = C$ и $\lambda_в = \lambda$.

Из выражений (4) следует, что при равенстве нулю продольных составляющих $E_z = 0$ и $H_z = 0$ поперечные составляющие могут быть отличными от нуля только при условии:

$$k^2 - \gamma^2 = 0$$

Будем рассматривать незатухающие волны, когда $\alpha = 0$, $\gamma = \beta$. Подставив в последнее выражение формулы для $k$ и $\beta$, получим

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda_в}.$$

Из этого уравнения найдем $\lambda_в$

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Для случая воздушного заполнения волновода $\varepsilon = \mu = 1$, тогда

$$\lambda_в = \lambda,\ V_ф = C,$$

т.е. волны должны распространяться в таком волноводе без дисперсии и понятие $\lambda_{кр}$ для них теряет смысл.

Из вышеизложенных рассуждений можно сделать следующие выводы:

1. Волны, не имеющие продольных составляющих (типа ТЕМ), распространяются в линии передачи без дисперсии и не имеют $\lambda_{кр}$.

2. Волны, имеющие хотя бы одну продольную составляющую (типа Е или Н), обладают дисперсией.

Продольные составляющие в волноводе отсутствуют только в том случае, когда внутри его имеется продольный, идеально проводящий стержень или провод. К таким относится коаксиальный волновод. Следовательно, в нем распространяется волна типа ТЕМ, не обладающая дисперсией. Во всех остальных волноводах - волны типа Е или Н, обладающие дисперсией.

Из выражений (4) путем приравнивая $E_z = 0$ и $H_z = 0$, получим уравнения для волны типа ***TEM***.

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a} H_y, \\ E_y &= \frac{-\gamma}{\omega\varepsilon_a} H_x, \\ H_x &= \frac{-\gamma}{\omega\mu_a} E_y, \\ H_y &= \frac{\gamma}{\omega\mu_a} E_x. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Действуя аналогичным образом, воспользуемся выражениями (4) и, положив в них $E_z = 0$, получим систему уравнений для волны типа ***H***

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -i\frac{\omega\mu_a}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_y &= i\frac{\omega\mu_a}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_x &= -i\frac{\gamma}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_y &= -i\frac{\gamma}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Для волны типа ***E*** в тех же уравнениях следует считать $H_z = 0$.

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -i\frac{\gamma}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ E_y &= -i\frac{\gamma}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= i\frac{\omega\varepsilon_a}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_y &= -i\frac{\omega\varepsilon_a}{k^2-\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

**Вводы:**

1. В волноводах могут распространяться волны типа $E, H, TEM$ .
2. При $k^2-\gamma^2=0$ $\lambda_{кр}=\infty$, в волноводе распространяется волна $TEM$ , у которой $\lambda_в=\lambda,\ \ V_ф=C=V_{гр}$.
3. При $k^2-\gamma^2\neq 0$ $\lambda_{кр}<<\infty$ в волноводе распространяются волны $E, H$ , у которой $\lambda_в>\lambda,\ \ V_ф>C,\ V_{гр}<C$ и $\lambda_в,\ \ V_ф, V_{гр}$ зависят от частоты.

## 5. Уравнения составляющих поля в прямоугольном волноводе

Изучив общие вопросы распространения электромагнитных волн в линиях передачи СВЧ, перейдем к конкретным типам волноводов. Рассмотрим волновод прямоугольного сечения (рис. 1). Будем считать, что он заполнен однородным изотропным диэлектриком без потерь, т.е. $\sigma = 0$, а проводимость стенок $\sigma_{cm} = \infty$.

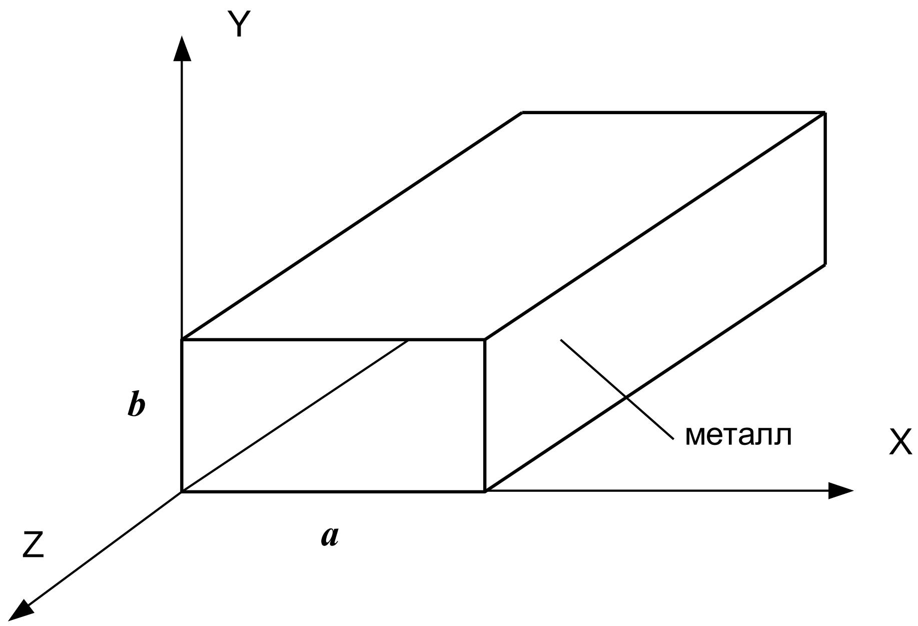


Рис. 1

Найдем составляющие поля в волноводе при волне типа Е. Для этого воспользуемся методом расчета поперечных составляющих через продольные, в частности, через $E_z$.

Возьмем полученные ранее уравнениями для волны типа Е (7), а составляющую $E_z$ выразим с учетом формулы для произвольной составляющей поля:

$$E_z = D_1 \cos(\xi x - \varphi)\cos(\eta y - \psi)e^{i(\omega t - \gamma z)}, \tag{8}$$

где $D_1$ - амплитудный множитель.

Подставим выражение (8) в формулы (7) и введем обозначение

$$D = \frac{D_1}{k^2 - \gamma^2},$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= iD\gamma\xi \sin(\xi x - \varphi)\cos(\eta y - \psi),\\
E_y &= iD\gamma\eta \cos(\xi x - \varphi)\sin(\eta y - \psi),\\
E_z &= D(k^2 - \gamma^2)\cos(\xi x - \varphi)\cos(\eta y - \psi),\\
H_x &= -iD\omega\varepsilon_a\eta \cos(\xi x - \varphi)\sin(\eta y - \psi),\\
H_y &= iD\omega\varepsilon_a\xi \sin(\xi x - \varphi)\cos(\eta y - \psi),\\
H_z &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

В этих уравнениях, как и ранее, опущен множитель $e^{i(\omega t-\gamma z)}$, поэтому они описывают комплексные амплитуды составляющих поля.

Выражение ($k^2-\gamma^2$), входящее в формулу (9) для $E_z$, заменим с учетом соотношения

$$k^2-\gamma^2=\xi^2+\eta^2. \tag{10}$$

В полученные уравнения входят пять постоянных интегрирования $\xi$, $\eta$, $\varphi$, $\psi$, $D$. Последняя из них $D$ может быть определена только через мощность, переносимую по волноводу, что будет сделано в последующем. Для нахождения остальных неизвестных величин применим граничными условиями.

По условию задачи стенки волновода идеально проводящие, следовательно, касательная составляющая электрического поля на них должна быть равна нулю. В связи с этим запишем граничные условия в виде

$$E_x=0 \text{ при } y=0,\ y=b. \tag{11}$$

$$E_y=0 \text{ при } x=0,\ x=a. \tag{12}$$

$$E_z=0 \text{ при } y=0,\ x=0,\ x=a,\ y=b. \tag{13}$$

В силу условия (11) составляющая $E_x=0$ при любых значениях $x$, если

$$\cos(\eta y-\psi)=0.$$

При $y=0,\ \cos(\psi)=0$, откуда $\psi=\dfrac{\pi}{2}+p\pi,\ p=0,1,2,\ldots$.

В дальнейшем будем использовать только значение $p=0$, тогда

$$\psi=\frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

При $p\neq 0$ происходит лишь одновременное изменение знака при всех остальных составляющих поля.

Вновь воспользуемся условием (11). При $y=b$ для выполнения условия $E_x=0$ и с учетом выражения (13) получим

$$\sin(\eta b)=0,\ \eta b=n\pi,$$

откуда

$$\eta=\frac{n\pi}{b},\ n=0,1,2,\ldots. \tag{15}$$

Подобным образом находятся постоянные $\xi$ и $\varphi$ из соотношения (9) для $E_y$ с учетом граничного условия (12)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad (16)$$

$$\xi = \frac{m\pi}{a}, \; m = 0, 1, 2, ... \qquad (17)$$

Постоянная распространения $\gamma$ определяется из выражения (10) с использованием найденных величин $\xi$ и $\eta$.

$$\gamma^2 = k^2 - (\xi^2 + \eta^2) = k^2 - \pi\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \qquad (18)$$

Окончательные уравнения составляющих поля в прямоугольном волноводе для волн типа Е с учетом $\gamma = \beta$ записываются в следующем виде

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= D\beta \frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\\
E_y &= D\beta \frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\\
E_z &= iD\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\\
H_x &= -D\omega\varepsilon_a \frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\\
H_y &= D\omega\varepsilon_a \frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\\
H_z &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Из полученных уравнений следует, что в прямоугольном волноводе может существовать бесконечное множество волн типа Е, отличающихся множителями $m$ и $n$. Волны обозначаются $E_{mn}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$. Случаи $m = 0$, $n = 0$ не соответствуют реальным волнам, поскольку при этом все составляющие поля обращаются в нуль.

Примерами волн типа Е могут быть: $E_{11}$, $E_{12}$, $E_{21}$ и т.д. до бесконечности.

Нахождение составляющих поля волн типа Н в методическом отношении аналогично выводу для волн типа Е. Для этого используются уравнения (6) и решение скалярного волнового уравнения

$$H_z = D_1\cos(\xi x - \varphi)\cos(\eta y - \psi)e^{i(\omega t - \gamma z)}. \qquad (20)$$

Окончательные выражения имеют вид:

$$\left.\begin{array}{c} E_x = D\omega \dfrac{n\pi}{b} cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right), \\ E_y = -D\omega \dfrac{m\pi}{a} sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right), \\ E_z = 0, \\ H_x = D\dfrac{\beta}{\mu_a}\dfrac{m\pi}{a} sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right), \\ H_y = D\dfrac{\beta}{\mu_a}\dfrac{n\pi}{b} cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right), \\ H_z = -iD\dfrac{\pi^2}{\mu_a}\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right) cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right). \end{array}\right\} \quad (21)$$

В этом случае также может существовать множество типов волн $H_{mn}$, причем $m$ и $n$ могут принимать нулевые значения, например, $H_{10}$, $H_{20}$, $H_{11}$, и т.д.

Полученные системы уравнений, описывающих составляющие электромагнитного поля в волноводе для волн типа Е и Н, в последующем будут использоваться для построения структур электромагнитных полей, что позволит понять физический смысл процессов, происходящих в волноводных устройствах.

**Вводы:**

1. В прямоугольных волноводах могут распространяться только волны типа $E, H$ .
2. У волны типа $E_{mn}$ индексы могут принимать значения $m, n = 1, 2, 3, ...$
3. У волны типа $H_{mn}$ индексы могут принимать значения $m, n = 0, 1, 2, 3, ...$

## 6. Расчет критических длин волн в прямоугольном волноводе. Волны основного и высшего типов в прямоугольном волноводе

Условием распространения электромагнитных волн (ЭМВ) в волноводе является выполнение неравенства

$$\lambda < \lambda_{кр}. \quad (1)$$

Под *критической длиной волны* ($\lambda_{кр}$) понимается длина волны, измеренная в свободном пространстве, при которой прекращается распространение волны рассматриваемого типа по волноводу, имеющему вакуумное заполнение.

Из предыдущих лекций известно выражение

$$\kappa^2 = \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 \; или \quad \kappa^2 + \gamma^2 = \xi^2 + \eta^2. \quad (2)$$

Предположим, что в прямоугольном волноводе отсутствуют потери, т.е. будем рассматривать незатухающую волну $\gamma = \beta + i\alpha = \beta(\alpha = 0)$. В критическом режиме $\lambda = \lambda_{кр}\,(\lambda_{B\to\infty})$, тогда $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda_B} \to 0,$ а волновое число $K$ приобретает критическое значение

$$K_{кр} = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

В случае вакуумного заполнения $\varepsilon = \mu = 1$ и $K_{кр} = \dfrac{2\pi}{\lambda_{кр}}$.

С другой стороны из 1-го занятия по теме 5 известно, что функцию волнового числа выполняло $\kappa^2 + \gamma^2 = K^2{}_{кр}$. Тогда $K^2{}_{кр} = \kappa^2 + \gamma^2 = \xi^2 + \eta^2$, где $\xi = \dfrac{m\pi}{a}$; $\eta = \dfrac{n\pi}{b}$;

*a* - размер широкой стенки волновода;

*b*- размер узкой стенки волновода.

Подставив приведенные формулы в (2), получим исходное уравнение для расчета $\lambda_{кр}$:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \qquad (3)$$

После преобразований из уравнения (3) получим

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \qquad (4)$$

Теперь на основании (4) определим $\lambda_{кр}$ методом подстановки различных индексов *"m"* и "n", соответствующих различным типам волн, и сведем результаты в таблицу

Таблица 1. *

| Тип волны | $H_{10}$ | $H_{20}$ | $H_{01}$ | $H_{11}$,$E_{11}$ | $H_{21}$,$E_{21}$ | $H_{31}$,$E_{31}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_{кр}$ | $2a$ | $a$ | $2b$ | $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ | $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+4b^2}}$ | $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+9b^2}}$ |
| $f_{кр,}$ | $\dfrac{15}{a}$ | $\dfrac{30}{a}$ | $\dfrac{15}{b}$ | $\dfrac{15}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$ | $\dfrac{15}{ab}\sqrt{a^2+4b^2}$ | $\dfrac{15}{ab}\sqrt{a^2+9b^2}$ |

Таким образом каждому типу волны соответствует свое значение критической длины волны $\lambda_{кр}$ Кроме того, критическая длина волны зависит от размеров поперечного сечения волновода.

Дадим определение длины волны низшего типа: в прямоугольном волноводе волны типа Е и Н, имеющие минимальные значения индексов *m и n*, называются **низшими.** Волны, не являющиеся низшими носят названия волн **высших** типов. К волнам низших типов в прямоугольном волноводе относятся волны типа $H_{10}$, $H_{01}$, $E_{11}$.

Волной **основного типа** называется волна, имеющая наибольшее значение $\lambda_{кр}$. Для прямоугольного волновода волной основного типа является волна $H_{10}$. Из таблицы видно, что волны $E_{11}$ и $H_{11}$, $E_{21}$ и $H_{21}$ имеют одинаковую $\lambda_{кр}$. Такие волны носят название **вырожденных.**

## 7. Построение диаграммы типов волн в прямоугольном волноводе стандартного сечения

Сначала дадим определение диаграммы типов волн. *Диаграммой типов волн* называется такая диаграмма, в которой на оси длин волн показаны положения критических длин волн различных типов при неизменных заданных размерах поперечного сечения волновода.

Приведем пример. Пусть размеры *a* и *b* поперечного сечения прямоугольного волновода состоят в пропорции $a$ / $b$ =2/1, то есть $a$ =2 $b$. Требуется вычислить и выразить через " $a$ " значения $\lambda_{кр}$ для волн разных типов. Результаты этих несложных вычислений сведем в таблицу.

| Тип волны | $H_{10}$ | $H_{20}$,$H_{01}$ | $H_{11}$,$E_{11}$ | $H_{21}$,$E_{21}$ | $H_{30}$ | $H_{02}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_{кр}$ | *2a* | *a* | *0,9a* | *0,71a* | *0,67a* | *0,5a* |

---

***Примечание:** У волн типа Е индексы *m* и *n* не могут быть равны нулю, поскольку в этом случае все составляющие поля обнуляются, то есть такая волна ($E_{10}$, $E_{01}$) не существует (см. формулы для составляющих ЭМП).

По результатам вычислений построим диаграмму типов волн для прямоугольного волновода

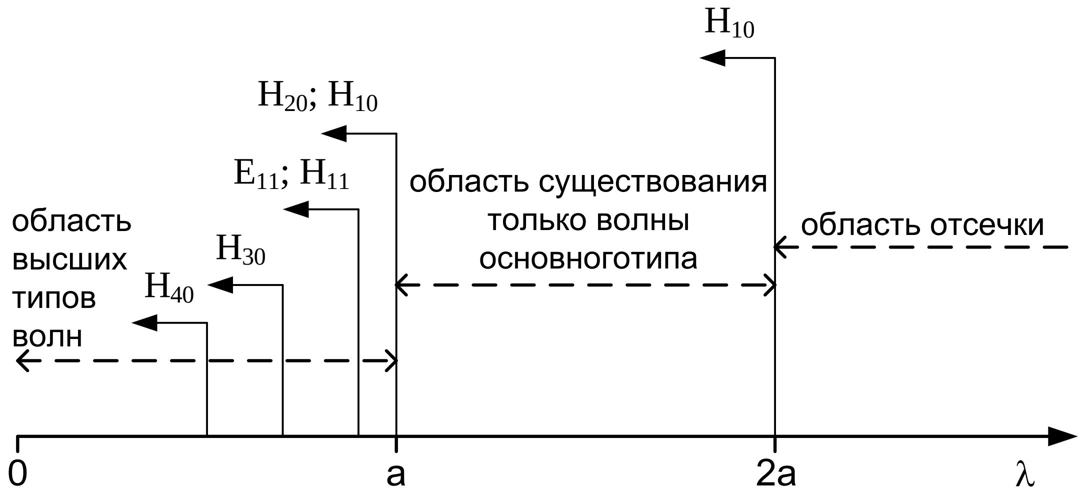


Рис. 1

На диаграмме можно выделить три характерные области:

- область отсечки;
- область существования только волны основного типа;
- область высших типов волн.