Лекция №1 «УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА»

Классическая теория электромагнетизма базируется на уравнениях Максвелла, описывающих совокупность эмпирических сведений об электромагнитном поле. Для вакуума вводят два основных векторных объекта – *напряженность электрического поля* **E** *и напряженность магнитного поля* **H**. Кроме того, определяют скалярное поле *объемной плотности электрического заряда* ρ и векторное поле *объемной плотности электрического тока* **J**$_э$, связанного с движением носителей заряда в пространстве. Система уравнений Максвелла для вакуума относительно перечисленных величин записывается в виде

$$\begin{gathered} rot\, H = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + J_э\,, \\ rot\, E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}\,, \\ div\, E = \rho/\varepsilon_0\,, \\ div\, H = 0\,. \end{gathered} \qquad (2.1)$$

В эти уравнения входят две фундаментальные физические константы: $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ *Ф/м* — электрическая постоянная и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м* — магнитная постоянная.

К основным принципам электродинамики относится также закон сохранения электрического заряда, находящий свое отражение в уравнении непрерывности тока:

$$div\, J_э + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,. \qquad (2.2)$$

Первое уравнение системы (2.1) представляет собой дифференциальную форму записи известного закона Ампера, дополненную вектором *плотности тока смещения:*

$$J_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}.$$

Иногда бывает удобно выделять плотность *стороннего* электрического тока $\mathbf{J}_{\text{ст.э}}$, возникающего в пространстве под действием сил неэлектромагнитного происхождения. Сумму тока смещения, тока проводимости, а также стороннего тока в электродинамике называют *полным током*.

Второе уравнение системы (2.1) описывает закон электромагнитной индукции Фарадея. Два остальных уравнения, строго говоря, зависят, от первых двух уравнений Максвелла. Из третьего уравнения системы (2.1) следует, что силовые линии электрического поля могут начинаться и оканчиваться только на электрических зарядах. Четвертое уравнение указывает на то, что в вакууме силовые линии магнитного поля всегда замкнуты (магнитное поле не имеет источников).

В присутствии материальных сред теория Максвелла должна быть дополнена рядом новых представлений, учитывающих микроскопическую структуру вещества. Под действием приложенного электрического поля **E** в среде возникает *ток проводимости* с объемной плотностью:

$$J_{\text{э}} = \sigma E\ . \tag{2.3}$$

Здесь σ — удельная объемная проводимость вещества.

Соотношение (2.3) есть дифференциальная форма записи закона Ома; пропорциональность между, $\mathbf{J}_{\text{э}}$ и **E** в сильных электрических полях может нарушаться.

Молекулы или атомы вещества в электрическом поле испытывают поляризацию, что отображается в теории введением векторного поля *электрической поляризованности* **P**. Данный вектор в каждой точке характеризует дипольный момент единицы объема вещества. Если электромагнитное поле переменно во времени, то в среде возникает электрический ток поляризации с объемной плотностью

$$J_{\text{пол}} = \partial P / \partial t\ .$$

В каждой точке среды принято вводить вектор электрического смещения (индукции)

$$D = \varepsilon_0 E + \mathrm{P}. \tag{2.4}$$

В результате первое уравнение Максвелла приобретает вид

$$rot\ H = \partial D/\partial t + \sigma E + J_{\text{ст.э.}} \tag{2.5}$$

Магнетизм материальных сред имеет квантовую природу. В рамках классических представлений определяют *вектор намагниченности* **M**, являющийся магнитным моментом единицы объема вещества, и вектор магнитной индукции **B**, связанный с **H** и **M** соотношением

$$B = \mu_0\ (H + M).$$

Второе уравнение Максвелла в материальной среде имеет вид

$$\mathrm{rot\,E} = -\ \partial\mathrm{B}/\ \partial\mathrm{t} \tag{2.6}$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла записываются так:

$$\mathrm{div\,D} = \rho, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{div\,B} = 0. \tag{2.8}$$

В не слишком сильных полях как поляризованность, так и намагниченность линейно связаны с напряженностями полей:

$$\mathrm{P} = \chi_{\text{э}}\mathrm{E}, \quad \mathrm{M} = \chi_{\text{м}}\mathrm{H}, \tag{2.9}$$

где $\chi_{\text{э}}$, $\chi_{\text{м}}$ — диэлектрическая и магнитная восприимчивости вещества.

На основании этого материальные уравнения электромагнитного поля можно записать в форме

$$D = \varepsilon_{\text{a}} E, \quad B = \mu_{\text{a}} H \tag{2.10}$$

Коэффициентами пропорциональности между напряженностями и индукциями являются *абсолютная диэлектрическая проницаемость* ε_{a} и *абсолютная магнитная проницаемость* μ_{a}. В расчетах часто используют *относительные проницаемости*

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{a}}\ /\ \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_{\text{a}}/\ \mu_0 \tag{2.11}$$

Соотношения вида (2.10) справедливы лишь при условии, что взаимодействие поля и вещества происходит практически безынерционно. На очень высоких частотах, в диапазоне СВЧ и оптическом диапазоне приходится учитывать эффекты, связанные с конечным временем установления состояния вещества. При этом можно говорить о диэлектрической и магнитной проницаемостях, зависящих от частоты.

Все сказанное ранее относилось к изотропным средам. Если вещество обладает анизотропией электродинамических свойств (различные кристаллы, а также плазма, находящаяся в магнитном поле), то скалярные величины $\varepsilon_{\text{а}}$ и $\mu_{\text{а}}$ следует заменить на тензоры второго ранга $(\varepsilon_{\text{а}})$ и $(\mu_{\text{а}})$. Тогда материальные уравнения (2.10) можно записать в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
D_x &= \varepsilon_{axx} E_x + \varepsilon_{axy} E_y + \varepsilon_{axz} E_z, \\
D_y &= \varepsilon_{ayx} E_x + \varepsilon_{ayy} E_y + \varepsilon_{ayz} E_z, \\
D_z &= \varepsilon_{azx} E_x + \varepsilon_{azy} E_y + \varepsilon_{azz} E_z, \qquad (2.12) \\
B_x &= \mu_{axx} H_x + \mu_{axy} H_y + \mu_{axz} H_z, \\
B_y &= \mu_{ayx} H_x + \mu_{ayy} H_y + \mu_{ayz} H_z, \\
B_z &= \mu_{azx} H_x + \mu_{azy} H_y + \mu_{azz} H_z,
\end{aligned}$$

Таким образом, в общем случае пары векторов **D** и **E**, **B** и **H** непараллельны в пространстве.

Четвертое уравнение Максвелла div **B** = 0 свидетельствует о том, что в природе не существует магнитных зарядов. Тем не менее, иногда бывает удобно воспользоваться формальным представлением о *стороннем магнитном токе*, плотность которого $\mathbf{J}_{\text{ст.м}}$ вводят в правую часть второго уравнения Максвелла.

Окончательно получаем:

уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\begin{aligned}
rot\, H &= \partial D/\partial t + \sigma E + J_{\text{ст.э.}}, \\
rot\, \mathrm{E} &= -\partial \mathrm{B}/\partial t - J_{\text{ст.м.}}, \qquad (2.13) \\
div\, D &= \rho, \\
div\, B &= 0.
\end{aligned}$$

уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L H\,dl = \int_S \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \sigma E + J_{\text{ст.э.}}\right) dS\,,$$

$$\oint_L E\,dl = -\int_S \left(\frac{\partial B}{\partial t} + J_{\text{ст.м.}}\right) dS\,, \qquad (2.14)$$

$$\oint_S D\,dS = \int_V \rho\,dV\,,$$

$$\oint_S B\,dS = 0\,.$$

Часто приходится рассматривать электромагнитные поля, изменяющиеся во времени по гармоническому закону с частотой ω. При этом уравнения Максвелла записывают относительно *комплексных амплитуд полей:*

$$rot\,\dot{H} = j\omega\widetilde{\varepsilon_a}\dot{E} + \dot{J}_{\text{ст.э.}},$$
$$rot\,\dot{E} = -j\omega\widetilde{\mu_a}\dot{H} - \dot{J}_{\text{ст.м.}}, \qquad (2.15)$$
$$div\,\dot{D} = \dot{\rho}\,,$$
$$div\,\dot{B} = 0\,.$$

В эти уравнения входят комплексные диэлектрическая $\widetilde{\varepsilon_\text{а}}$ и магнитная $\widetilde{\mu_\text{а}}$ проницаемости:

$$\widetilde{\varepsilon_\text{а}} = \varepsilon'_a - j\varepsilon''_a\,, \quad \widetilde{\mu_\text{а}} = \mu'_a - j\mu''_a\,.$$

Наличие мнимых частей проницаемости указывает на необратимое превращение части энергии электромагнитного поля в энергию теплового движения. Выделение тепла может происходить как за счет токов проводимости, так и за счет внутреннего трения, сопровождающего процессы поляризации и перемагничивания. Если потери в среде связаны только с наличием токов проводимости, то

$$\widetilde{\varepsilon_\text{а}} = \varepsilon_a - j\sigma/\omega\,, \quad \widetilde{\mu_\text{а}} = \mu_a\,.$$

В технике различные вещества принято характеризовать с помощью *тангенсов углов диэлектрических и магнитных потерь:*

$$tg\,\delta_э = \varepsilon''_a / \varepsilon'_a\,, \quad tg\,\delta_м = \mu''_a / \mu'_a. \tag{2.16}$$

На границе раздела двух материальных сред с различными электродинамическими параметрами векторы поля должны удовлетворять определенным граничным условиям. Каждый из векторов (например, **E**) в точке границы принято разлагать на нормальную и тангенциальную (касательную) составляющие:

$$E = E_n 1_n + \mathrm{E}_\tau\, 1_\tau$$

(1_n и 1_τ — орты нормального и тангенциального направлений соответственно).

Нормальные составляющие индукций и тангенциальные составляющие напряженностей непрерывны в каждой точке границы раздела:

$$D_{1_n} = D_{2_n},\ E_{1_\tau} = E_{2_\tau};\ B_{1_n} = B_{2_n},\ H_{1_\tau} = H_{2_\tau}. \tag{2.17}$$

Если одной из сред является идеально проводящий металл, для которого $\sigma \to \infty$, то на его поверхности тангенциальная составляющая электрического вектора отсутствует:

$$\mathrm{E}_\tau = 0. \tag{2.18}$$

На поверхности металла имеется электрический ток с *поверхностной плотностью*

$$\eta = [1_n H]. \tag{2.19}$$

Электромагнитное поле является носителем энергии. Объемная плотность энергии в любой точке пространства

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\mathrm{ED} + \mathrm{HB}). \tag{2.20}$$

Закон сохранения энергии находит свое отражение в *теореме Пойнтинга:*

$$-\,div\,[EH] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(ED + HB)\right] + \sigma E^2 + J_{\text{ст.э}}E + J_{\text{ст.м}}H. \quad (2.21)$$

Вектор Пойнтннга

$$\Pi = [\mathrm{EH}] \quad (2.22)$$

характеризует плотность потока мощности излучения.

Для полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, принято вводить комплексный вектор Пойнтинга

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2}\left[\dot{E}\overset{\smile}{\widetilde{H}}\right]. \quad (2.23)$$

Действительная часть этого вектора

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{2}Re\left[\dot{E}\overset{\smile}{\widetilde{H}}\right] \quad (2.24)$$

равна среднему за период потоку мощности излучения.

Из уравнений Максвелла вытекает ряд дополнительных соотношений, которым должны удовлетворять электромагнитные поля. Так если система сторонних источников $\dot{J}_{\text{ст.1э.}}$ возбуждает в пространстве электромагнитный процесс $\dot{E}_1, \dot{H}_1$ в то время как системе $\dot{J}_{\text{ст.2э.}}$ отвечают поля $\dot{E}_2, \dot{H}_2$, то справедливо равенство

$$div[\dot{E}_1\dot{H}_2\,] - div[\dot{E}_2\dot{H}_1\,] = \dot{E}_2\,\dot{J}_{\text{ст.1э.}} - \dot{E}_1\dot{J}_{\text{ст.2э.}} \quad (2.25)$$

называемое *леммой Лоренца.*