

# Тема 1. Электромагнитные волны

## Лекция 1. Уравнения Максвелла.

1. Электромагнитные параметры вещества и величины, характеризующие электромагнитное поле
2. Система основных дифференциальных уравнений электродинамики и их физический смысл. Материальные уравнения

### 1. Электромагнитные параметры вещества и величины, характеризующие электромагнитное поле

Электромагнитное поле – это особый вид материи, способный распространяться в пространстве со скоростью, близкой к скорости света, и оказывающий на электрические заряды силовое воздействие.

Поле можно считать полностью определенным, если в каждой точке пространства в заданный момент времени известны величины и направления следующих векторов:

$\vec{E}(M', t)$  - напряженности электрического поля [В/м];

$\vec{D}(M', t)$  - электрической индукции [Кл/м<sup>2</sup>];

$\vec{B}(M', t)$  - магнитной индукции [В с/м<sup>2</sup>];

$\vec{H}(M', t)$  - напряженности магнитного поля [А/м].

С электромагнитным полем неразрывно связаны заряды и токи, которые характеризуются двумя величинами:

$\vec{j}(M', t)$  - вектором плотности электрического тока [А/м<sup>2</sup>];

$\rho(M', t)$  - объемной плотностью электрического заряда [Кл/м<sup>3</sup>].

Перечисленные выше физические величины известны из курса физики, однако для удобства пользования учебником и для облегчения понимания физического смысла явлений, происходящих в электромагнитном поле, ниже даны некоторые определения.

Напряженностью электрического поля в данной точке пространства называется предел отношения силы, с которой поле действует на пробный точечный заряд, помещенный в эту точку, к величине заряда, когда последняя стремится к нулю.

$$\vec{E}(M') = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta q} = \frac{dF}{dq} \left[ \frac{B}{M} \right], \quad (1)$$

По направлению напряженность электрического поля совпадает с направлением силы, действующей на заряд.

Модулем вектора магнитной индукции в данной точке называют предел отношения силы, с которой поле действует на пробный элемент линейного тока, помещенного в эту точку, к произведению силы тока в элементе на его длину, когда последняя стремится к нулю и элемент ориентирован так, что действующая на него сила имеет наибольшее значение

$$B(M') = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{I \cdot \Delta l} \left[ \frac{B \cdot c}{M^2} \right] \quad (2)$$

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  считают перпендикулярным к силе  $\vec{F}$  и единичному вектору  $\vec{l}_0$ , ориентированному вдоль тока в элементе, если он расположен так, что действующая на него сила наибольшая, и направленным вдоль перемещения правого винта при вращении его от силы  $\Delta \vec{F}$  к вектору  $\vec{l}_0$ . Взаимная ориентация векторов  $\Delta \vec{F}$  и  $\vec{l}_0$  показана на рис. 2.

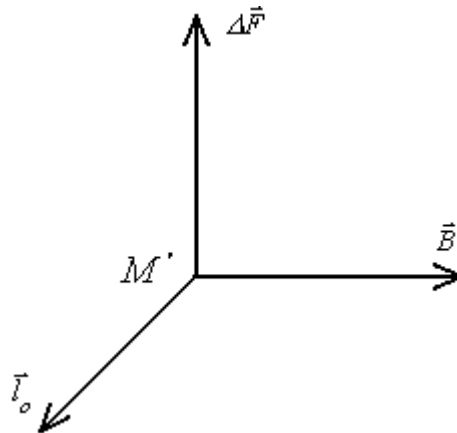


Рис. 2

При таком понимании смысла вектора  $\vec{B}$  действующая на элемент линейного тока сила  $I$  определяется соотношением:

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \cdot \vec{B} \quad (3)$$

где  $d\vec{l}$  - длина элемента линейного тока, рассматриваемая как вектор, совпадающий по направлению с током в нем.

Реально создать элемент линейного тока невозможно, справедливость этого понятия устанавливается опытной проверкой следствий, вытекающих из соотношения (3).

Таким образом, величины  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  характеризуют силовое воздействие электромагнитного поля на неподвижные заряды и токи, находящиеся в нем.

Расчет электромагнитного поля с помощью векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  встречает трудности, поскольку действие поля на заряженные тела существенно зависит от свойств среды. Введение векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ , как функций источников поля, позволяет связать его характеристики непосредственно с источниками, его создающими, независимо от свойств среды.

Вектор электрической индукции  $\vec{D}$  характеризует связь электрического заряда с собственным электрическим полем. Так, заряд  $\Delta q$  создает на расстоянии  $r$  электрическое поле, вектор электрической индукции которого равен

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{r}_o \left[ \frac{K\lambda}{m^2} \right]. \quad (4)$$

Из этого выражения видно, что вектор  $\vec{D}$  не зависит от параметров окружающей среды.

Вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  характеризует связь электрического тока с собственным магнитным полем. Так, например, прямолинейный проводник с током  $I$  создает на расстоянии  $r$  от оси провода напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{\phi}_o \left[ \frac{A}{m} \right]. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что напряженность магнитного поля не зависит от параметров среды.

Для наглядного представления и лучшего понимания электромагнитных процессов пользуются графическим изображением поля. Каждому вектору в некоторой области в рассматриваемый момент времени соответствует семейство линий. Линии проводятся так, чтобы касательные к ним указывали направление вектора поля, а их густота была прямо пропорциональна его абсолютному значению.

Макроскопическая теория электромагнитного поля предполагает непрерывное распределение сред и зарядов. Эта идеализация приемлема для величин, усредненных по объемам, размеры которых намного превышают размеры молекул. Распределение зарядов в пространстве в этом случае характеризуется объемной плотностью электрического заряда.

Объемной плотностью электрического заряда в данной точке называют отношение величины заряда к величине элемента объема, в котором он сосредоточен, если элемент объема охватывает эту точку, а величина его стремится к нулю

$$\rho(M') = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \left[ \frac{K\lambda}{m^3} \right], \quad (6)$$

Чтобы получить формулу для величины заряда в конечном объеме  $V$  с плотностью заряда  $\rho(M')$ , нужно обе части равенства (6) умножить на  $dV$  и затем проинтегрировать его по объему  $V$

$$q = \int_V \rho(M') dV \text{ [Кл]}, \quad (7)$$

Явление движения зарядов вещества под воздействием на них электромагнитного поля называется электрическим током. Графически ток удобно изображать "линиями тока", вдоль которых движутся заряды, его образующие (рис. 3). Электрический ток характеризуется величиной и плотностью.

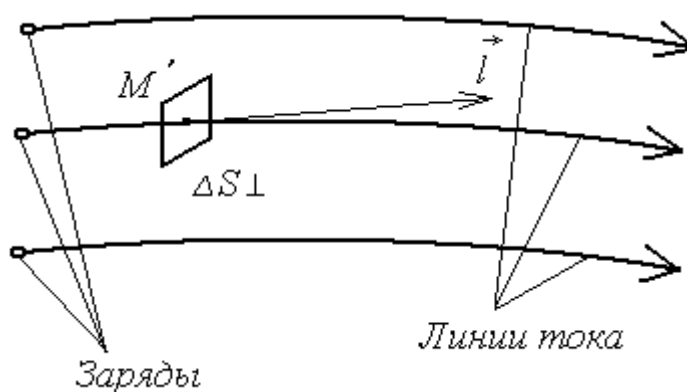


Рис. 3

Величина тока, протекающего через данную поверхность, есть предел отношения величины заряда, прошедшего через эту поверхность в течение некоторого промежутка времени, к величине этого промежутка, когда она стремится к нулю

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \text{ [А]}. \quad (8)$$

Плотностью тока в данной точке называется векторная величина, равная по модулю пределу отношения тока, протекающего через элемент поверхности, к его площади, если элемент охватывает эту точку, перпендикулярен к линии тока в ней и площадь элемента стремится к нулю. По направлению вектор плотности тока с линией тока в рассматриваемой точке совпадают

$$\vec{j}(M') = \lim_{\Delta S_{\perp} \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S_{\perp}} \vec{l}_o \left[ \frac{\text{А}}{\text{М}^2} \right]. \quad (9)$$

Можно показать, что величина тока  $I$ , протекающего через все элементы поверхности  $S$  определяется выражением

$$I = \int_S \vec{j}(M') dS \text{ [А]}. \quad (10)$$

Электромагнитные взаимодействия между зарядами, токами и полями зависят от свойств среды. Макроскопические электромагнитные параметры

среды в каждой точке поля входят в так называемые материальные уравнения, связывающие попарно векторы электромагнитного поля

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (11)$$

где  $\varepsilon_a$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость;

$\mu_a$  - абсолютная магнитная проницаемость;

$\sigma$  - удельная проводимость.

Таким образом,  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  являются коэффициентами пропорциональности, характеризующими степень связи пар векторов в уравнениях (9). Эти величины называют параметрами среды. Для абсолютного вакуума (свободного пространства) они имеют следующие значения

$$\varepsilon_a = \varepsilon_o = \frac{10^{-9}}{36 \cdot \pi} \frac{\Phi}{M}; \quad \mu_a = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{ГН}{M}. \quad (12)$$

На практике часто пользуются относительными проницаемостями сред, которые определяются соотношениями

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_o} \text{ - относительная диэлектрическая проницаемость;}$$

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_o} \text{ - относительная магнитная проницаемость.}$$

В зависимости от характера связей, существующих между парами векторов электромагнитного поля ( $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$ ), среды делятся на изотропные и анизотропные, линейные и нелинейные.

Среда называется изотропной, если в каждой из пар векторы электромагнитного поля параллельны, а отношение их модулей не зависит от ориентации векторов по отношению к среде.

Параметры изотропной среды ( $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma$ ) представляют собой скалярные величины. Поэтому для нахождения одного из векторов ( $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ) по заданному ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ) достаточно знать одну скалярную величину ( $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ ).

Среда называется анизотропной, если хотя бы в одной из пар векторов отношение их модулей зависит от ориентации векторов по отношению к среде. Векторы этой пары в данном случае не параллельны. Для описания связей между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  в таких случаях применяют совокупности из девяти чисел, объединенных в матрицу, которая называется тензором диэлектрической (магнитной) проницаемости

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Тензор позволяет удобно и просто описать связь между векторами, например,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  для анизотропной среды. Формула остается той же, что и для изотропной, но меняются физический смысл величины  $\mu$ .

Подавляющее большинство сред, представляющих интерес для радиотехники и электроники, являются изотропными. Магнитной анизотропией обладают ферриты, намагниченные постоянным магнитным полем и имеющие тензорную магнитную проницаемость.

Электрической анизотропией обладает плазма в постоянном магнитном поле, имеющая тензорную диэлектрическую проницаемость.

Среды, у которых два параметра одновременно представляют тензоры, в природе до сих пор не обнаружены.

Среда называется линейной, если ее электрические параметры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  не зависят от значения модулей векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{j}$  соответственно. В случае линейных сред материальные уравнения (9) будут линейными.

Среда называется нелинейной, если хотя бы один из электрических параметров зависит от значения модуля соответствующего вектора  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{j}$ . Большинство сред в обычных условиях линейны. К нелинейным средам следует отнести ферромагнетики, у которых магнитная проницаемость является функцией напряженности магнитного поля, и сегнетоэлектрики, у которых диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности электрического поля  $\vec{E}$ .

Кроме того, среды делятся на однородные и неоднородные. Параметры однородных сред не зависят от положения точки наблюдения ее координат), а у неоднородных хотя бы один из параметров  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{j}$  зависит от положения точки наблюдения внутри среды.

В электродинамике широко используются две идеализированные модели среды: идеальный диэлектрик и идеальный проводник.

Идеальным диэлектриком называется гипотетическая среда, удельная проводимость которой  $\sigma = 0$ , а идеальным проводником - среда, для которой  $\sigma \rightarrow \infty$ .

В зависимости от величины удельной проводимости вещества делят на проводники, полупроводники и диэлектрики (изоляторы). Проводники имеют удельную проводимость  $10^6$ - $10^7$  1/Ом\*м, а диэлектрики  $10^{-7}$ - $10^{-17}$  1/Ом\*м.

Для газообразных диэлектриков величина диэлектрической проницаемости близка к единице, для твердых диэлектриков она составляет

(2-3), реже (10-20) единиц. Для всех этих веществ магнитная проницаемость равна единице, а  $\sigma \ll 1$ .

Среды, для которых  $\mu > 1$ , называют парамагнитными, или ферромагнитными, а среды, для которых  $\mu < 1$  - диамагнитными.

#### **Выводы:**

1. Электромагнитное поле характеризуется шестью параметрами: напряженность электрического поля; напряженность магнитного поля; электрическая индукция; магнитная индукция; плотность тока; плотность заряда.
2. Вещество характеризуется тремя параметрами: диэлектрическая проницаемость среды; магнитная проницаемость среды; удельная проводимость.

## **2. Система основных дифференциальных уравнений электродинамики и их физический смысл. Материальные уравнения**

Система основных дифференциальных уравнений электродинамики представляет собой математическую формулировку основных закономерностей, присущих электромагнитному полю. Она состоит из следующих шести уравнений:

первое уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (14)$$

второе уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (15)$$

третье уравнение Максвелла - закон сохранения заряда в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (16)$$

четвертое уравнение максвелла - закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (17)$$

пятое и шестое уравнения Максвелла - материальные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (18)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (19)$$

Об этой системе необходимо знать следующее.

1) Дифференциальные уравнения представляют собой систему постулатов (аксиом), сформулированную Максвеллом на основе обобщения

опытных законов различных электромагнитных явлений (закон электромагнитной индукции Фарадея, закон полного тока, закон Кулона и закон Био-Савара).

2) Система является полной, т. е. с ее помощью можно описать, в основном, все свойства электромагнитного поля (определить все величины, характеризующие поле, токи и заряды).

3) Уравнения, входящие в систему, являются независимыми, т. е. любое из них не может быть выведено из остальных, так как каждое отображает какую-то сторону электромагнитного поля как явления.

4) Система основных дифференциальных уравнений применима в так называемых регулярных точках в тех случаях, когда среды, находящиеся в электромагнитном поле, неподвижны. Под регулярными понимаются такие точки, в окрестностях которых величины  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  и  $\sigma$  являются непрерывными функциями положения.

Проанализируем первое уравнение Максвелла (12). Его левая часть содержит операцию  $rot\vec{H}$ , т.е. операцию дифференцирования вектора  $\vec{H}$  по пространственным координатам. Эта часть уравнения свидетельствует о существовании магнитного поля, изменяющегося (завихряющегося) в пространстве. Правая часть уравнения описывает причины (источники) появления завихряющегося магнитного поля.

Первое слагаемое правой части соответствует скорости изменения во времени вектора электрической индукции  $\vec{D}$ . Следовательно, источником магнитного поля является изменяющееся во времени электрическое поле.

Второе слагаемое правой части представляет собой плотность тока проводимости. Следовательно, источником магнитного поля может быть также и ток проводимости. Поскольку величина  $\vec{j}$  характеризует плотность как изменяющегося во времени (переменного) тока, так и не изменяющегося во времени (постоянного) тока, то из приведенного анализа следует, что как переменный, так и постоянный электрические токи создают в пространстве завихряющееся магнитное поле.

Из первого уравнения следует, что векторная функция  $\partial\vec{D}/\partial t$ , выражающая скорость изменения во времени электрической индукции, играет такую же роль источника магнитного поля, что и плотность тока проводимости. Это дало основание Максвеллу ввести понятие о новом виде тока, получившего название тока смещения. Этот ток не связан с упорядоченным движением носителей зарядов, а обусловлен поляризацией молекул диэлектрика под действием электрического поля, плотность тока смещения вычисляется по формуле

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

а измеряется в тех же единицах, что и плотность тока проводимости [А/м<sup>2</sup>].



Завершая анализ первого уравнения, можно сформулировать его физический смысл следующим образом: изменяющееся во времени электрическое поле или протекающий ток проводимости создают в окружающем пространстве завихряющееся магнитное поле (рис. 4).

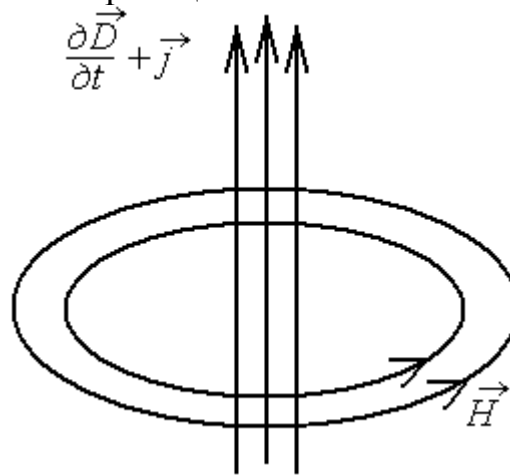


Рис. 4

Проанализируем второе уравнение Максвелла (15). В его левой части так же, как и в первом уравнении, содержится операция  $rot\vec{E}$ , что указывает на вихревой характер электрического поля в пространстве. Стоящая справа производная выражает скорость изменения во времени вектора магнитной индукции и указывает на причину появления изменяющегося электрического поля.

Таким образом, физическая сущность второго уравнения заключается в следующем: всякое изменение во времени магнитного поля вызывает появление изменяющегося в пространстве электрического поля (рис. 5).

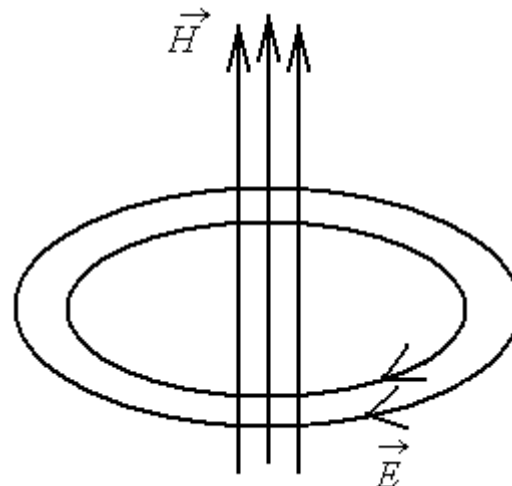


Рис. 5

Результаты анализа первого и второго уравнений Максвелла позволяют сделать вывод о связи электрической и магнитной составляющих в переменном электромагнитном поле. Эта взаимосвязь выражается в том, что созданное посторонними источниками меняющееся во времени электромагнитное поле может существовать вне этих источников, при этом

энергия электрического поля периодически преобразуется в энергию магнитного поля и наоборот.

Прежде чем перейти к третьему уравнению Максвелла, поясним понятие дивергенции и рассмотрим физический смысл уравнений, дополняющих выражения (14), (15).

Дивергенция позволяет описать меру источника поля. Например, если внутри замкнутого объема находится источник энергии (рис. 6, а), то говорят, что дивергенция положительна, т.е. энергия выходит из объема. Если внутри объема энергия полностью поглощается, то дивергенция отрицательна (рис. 6, б). В том случае, когда энергия проходит сквозь объем не изменяясь, считают дивергенцию равной нулю (рис. 6, в).

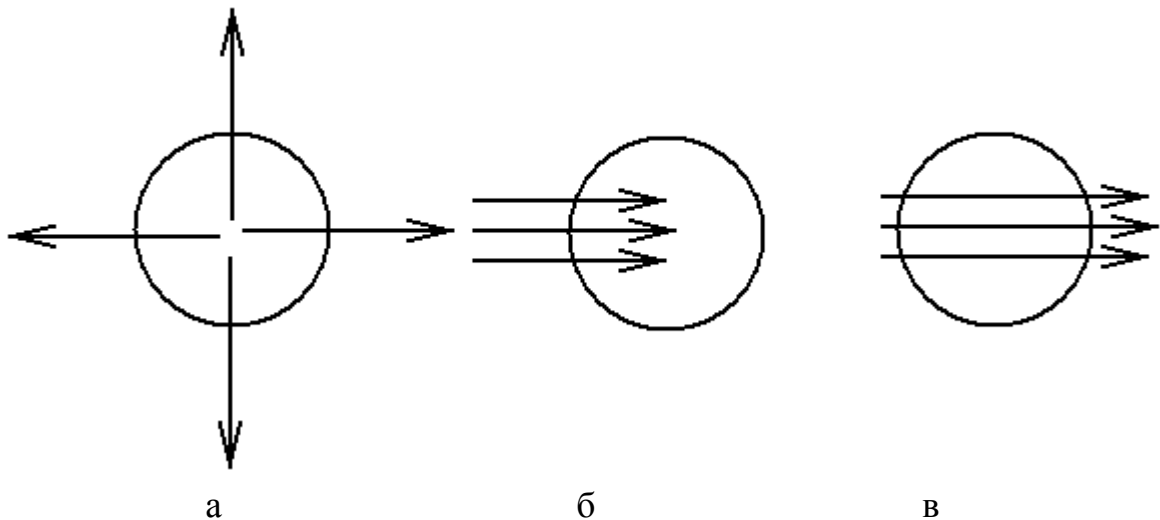


Рис.6

Так как векторы электромагнитного поля по заданному "завихрению" ( $rot\vec{H}$ ,  $rot\vec{E}$ ) однозначно не определяется, то для нахождения  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  уравнения (12) и (13) необходимо дополнить еще двумя уравнениями, учитывающими расхожимости векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

$$div \vec{D} = \rho, \quad div \vec{B} = 0. \quad (18)$$

Эти уравнения получены в результате операции  $rot$  от уравнений (14) и (15). Физический смысл полученных уравнений заключается в следующем:

силовые линии электрического поля начинаются и оканчиваются на зарядах, объемная плотность которых равна  $\rho$ ;

магнитные силовые линии замкнуты сами на себе.

Теперь можно обратиться к третьему уравнению Максвелла - закону сохранения заряда, смысл которого заключается в том, что изменяющийся в некотором объеме заряд является причиной возникновения тока, вытекающего через поверхность, ограничивающую этот объем.

Четвертое уравнение - закон Ома в дифференциальной форме отражает связь между плотностью тока  $\vec{j}$  и напряженностью электрического

поля  $\vec{E}$  в каждой точке проводящей среды. Величина  $\sigma$  в данном случае есть удельная электрическая проводимость среды.

Известный из электротехники закон Ома для постоянного тока в интегральной форме является следствием уравнения (17).

Пятое и шестое уравнения Максвелла - материальные уравнения уже рассмотрены ранее, они связывают между собой попарно векторы  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  с учетом влияния среды.

**Выводы:**

1. Электромагнитное поле описывается шестью независимыми дифференциальными уравнениями.
2. Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты.
3. Силовые линии электрического поля могут быть разомкнутыми или замкнутыми.