## ЛЕКЦИЯ №8 «ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

С математической точки зрения задачи о возбуждении электромагнитных волн заданными источниками сводятся к решению системы неоднородных уравнений Максвелла:

$$rot\dot{H} = j\omega\varepsilon_a\dot{E} + \dot{J}_{\text{ст.э.}}\,,$$

$$rot\dot{E} = -j\omega\mu_a\dot{H} - \dot{J}_{\text{ст.м.}}\,. \qquad (11.1)$$

Здесь $J_{\text{ст.э.}}$ и $J_{\text{ст.м.}}$ — векторы плотностей сторонних электрического и магнитного токов.

Система (11.1) должна быть дополнена соответствующими граничными условиями, что делает ее решение единственным.

### Возбуждение свободного пространства

При решении системы уравнений (11.1) оказывается полезным введение векторных потенциалов $A_э$ и $A_м$. связанных с векторами полей E и H соотношениями:

$$\dot{E} = -j\omega\dot{A}_э - j\frac{1}{\omega\varepsilon_a\mu_a}grad\ div\dot{A}_э - \frac{1}{\varepsilon_a}rot\dot{A}_м\,, \qquad (11.2)$$

$$\dot{H} = -j\omega\dot{A}_м - j\frac{1}{\omega\varepsilon_a\mu_a}grad\ div\dot{A}_м - \frac{1}{\mu_a}rot\dot{A}_э\,. \qquad (11.3)$$

Векторные потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют неоднородным уравнениям Гельмгольца:

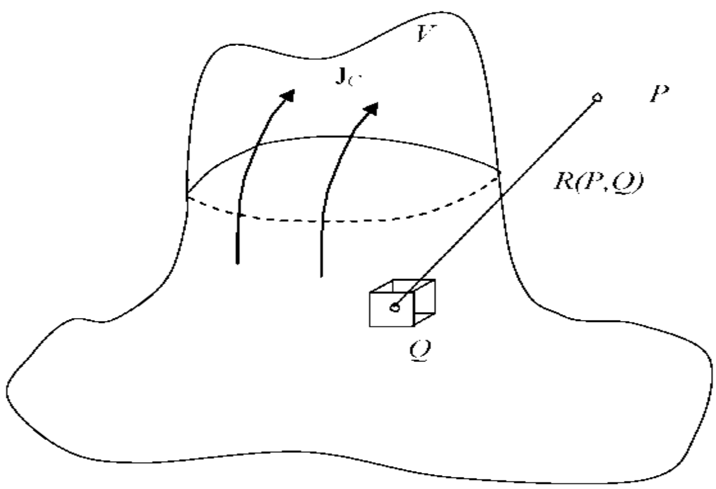
$$\nabla^2\dot{A}_э + \gamma^2\dot{A}_э = -\mu_a\dot{J}_{\text{ст.э.}}\,, \qquad (11.4)$$

$$\nabla^2\dot{A}_м + \gamma^2\dot{A}_м = -\varepsilon_a\dot{J}_{\text{ст.м.}}\,. \qquad (11.5)$$

Интегральные представления решений уравнений (11.4) и (11.5) имеют вид

$$\dot{A}_э = \frac{\mu_a}{4\pi}\int_V \frac{\dot{J}_{\text{ст.э.}}e^{-j\gamma R}}{R}dV\,, \qquad (11.6)$$

$$\dot{A}_м = \frac{\varepsilon_a}{4\pi}\int_V \frac{\dot{J}_{\text{ст.м.}}e^{-j\gamma R}}{R}dV\,. \qquad (11.7)$$




Здесь R — текущее значение модуля радиуса-вектора, соединяющего точки наблюдения $P$ и точки источника $Q$ (рис. 11.1).

Рассмотрим основные характеристики элементарных излучателей.

**Элементарный электрический излучатель**

Элементарным электрическим излучателем (диполем Герца) называется отрезок проводника, по которому протекает переменный электрический ток $I_{ст.э}$, причем длина проводника $l_д$ значительно меньше длины волны в вакууме (рис. 11.2). Произведение $I_{ст.э.}l_Д$ называют *моментом излучателя.*

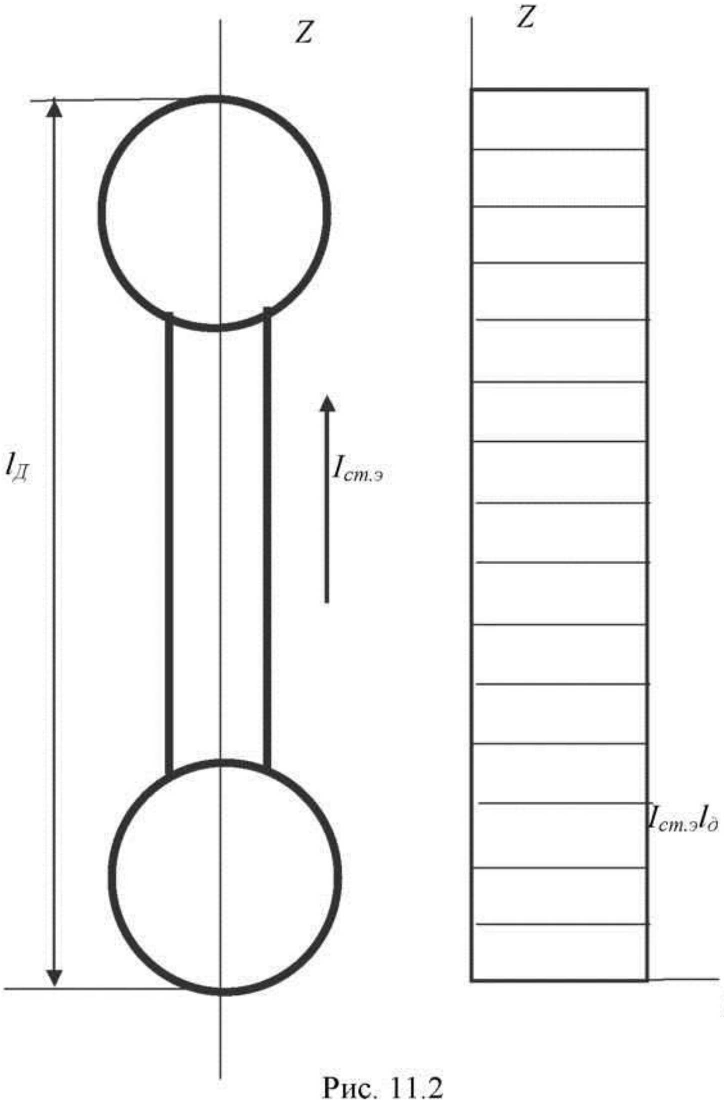



Рис. 11.2

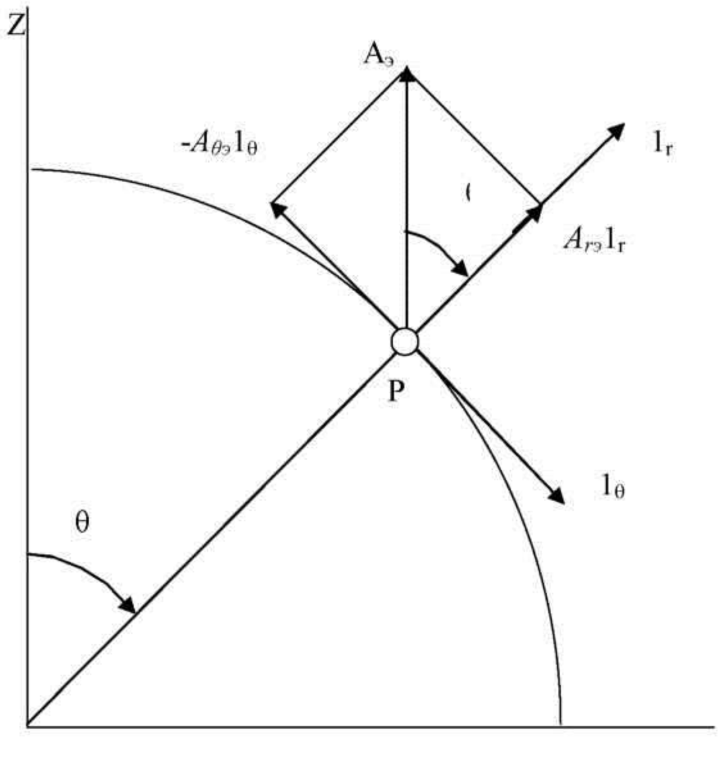



Рис. 11.3

Поле такого излучателя, помещенного в начале координат, описывается векторным потенциалом:

$$-\dot{A}_э = -\frac{\mu_a}{4\pi}\dot{I}_{ст.э.}l_\partial\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\cdot 1_z \qquad (11.8)$$

Разложение потенциала в каждой точке пространства по ортам сферической системы координат (рис. 11.3) имеет вид

$$\dot{A}_{r\text{э}} = \frac{\mu_a}{4\pi}\dot{I}_{\text{ст.э.}}l_\partial \frac{e^{-j\gamma r}}{r}\cos\theta\,, \tag{11.9}$$

$$\dot{A}_{\theta\text{э}} = -\frac{\mu_a}{4\pi}\dot{I}_{\text{ст.э.}}l_\partial \frac{e^{-j\gamma r}}{r}\sin\theta\,. \tag{11.10}$$

Используя формулы перехода (11.2), (11.3), по найденному векторному потенциалу определяем составляющие поля элементарного электрического излучателя:

$$\begin{aligned}
&\dot{H}_r = 0\,,\\
&\dot{H}_\theta = 0\,,\\
&\dot{H}_\varphi = \frac{I_{\text{ст.э.}}l_\partial}{4\pi r^2}(1 + j\gamma^2 r)\sin\theta\, e^{-j\gamma r}\,,\\
&\dot{E}_r = \frac{I_{\text{ст.э.}}l_\partial}{j2\pi\omega\varepsilon_a r^3}(1 + j\gamma^2 r)\cos\theta\, e^{-j\gamma r}\,,\\
&\dot{E}_\theta = \frac{I_{\text{ст.э.}}l_\partial}{j4\pi\omega\varepsilon_a r^3}(1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2)\sin\theta\, e^{-j\gamma r}\,,\\
&\dot{E}_\varphi = 0\,.
\end{aligned} \tag{11.11}$$

Приближенные выражения для составляющих полей имеют вид:

в ближней зоне ($r/\lambda_0 \ll 1$)

$$\begin{aligned}
&\dot{H}_\varphi = \frac{I_{\text{ст.э.}}l_\partial}{4\pi r^2}\sin\theta\,,\\
&\dot{E}_r = \frac{I_{\text{ст.э.}}l_\partial}{j2\pi\omega\varepsilon_a r^3}\cos\theta\,,\\
&\dot{E}_\theta = \frac{I_{\text{ст.э.}}l_\partial}{j4\pi\omega\varepsilon_a r^3}\sin\theta\,.
\end{aligned} \tag{11.12}$$

в дальней зоне ($r/\lambda_0 \gg 1$)

$$\begin{aligned}
&\dot{H}_\varphi = j\frac{I_{\text{ст.э.}}l_\partial}{2r\lambda_0}\sin\theta\, e^{-j\gamma r}\,,\\
&\dot{E}_\theta = j\frac{I_{\text{ст.э.}}l_\partial}{2r\lambda_0}Z_c\sin\theta\;\; e^{-j\gamma r}.
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Поле в дальней зоне носит характер локально-плоской волны, причем

$$\dot{E}_\theta/\dot{H}_\varphi = Z_c \tag{11.14}$$

Нормированная диаграмма направленности по полю определяется выражением

$$F(\theta,\varphi) = E(\theta,\varphi)/E_{max}\,, \tag{11.15}$$

где $E(\theta,\varphi)$ — амплитуда напряженности электрического поля при данных углах наблюдения; $E_{max}$ — максимальное значение амплитуды электрического поля.

Для элементарного электрического излучателя

$$F(\theta,\varphi) = \sin\theta. \tag{11.16}$$

Мощность излучения $P_\Sigma$ находят интегрированием активной части (среднего значения) вектора Пойнтинга $П_{ср}$ по произвольной поверхности S, охватывающей излучатель:

$$P_{\Sigma} = \int_S П_{ср} dS\,, \qquad (11.17)$$

где

$$П_{ср} = 1/2Re\left|\dot{E}\breve{\tilde{H}}\right|. \qquad (11.18)$$

Для элементарного электрического излучателя

$$P_{\Sigma} = \frac{\pi Z_c (I_{ст.э.} l_{\partial})^2}{3\lambda_0^2}. \qquad (11.19)$$

Излученную мощность можно рассматривать как мощность теряемую в фиктивном активном сопротивлении, которое называют сопротивлением излучения:

$$P_{\Sigma} = \frac{(I_{ст.э.})^2 R_{\Sigma}}{2}, \qquad (11.20)$$

$$P_{\Sigma} = \frac{2\pi Z_c}{3\lambda_0^2}\left(\frac{l_{\partial}}{\lambda_0}\right)^2. \qquad (11.21)$$

Для вакуума или воздуха $Z_c = Z_0 = 120\pi$ , откуда

$$P_{\Sigma} = 80\pi^2\left(\frac{l_{\partial}}{\lambda_0}\right)^2. \qquad (11.22)$$

**Элементарный магнитный излучатель**

Элементарный магнитный излучатель — это воображаемый «проводник» длиной $l_д \ll \lambda_0$, по которому протекает фиктивный магнитный ток $J_{ст\cdot м}$. К этому классу могут быть отнесены рамочный и щелевой излучатели.

Для расчета поля магнитного излучателя используют свойство *перестановочной двойственности* уравнений Максвелла. Если в формуле (11.13) для электрического излучателя произвести перестановки вида

$$\dot{E} \to \dot{H}, \dot{H} \to \dot{E}, \qquad \dot{J}_{ст.э.} \to -\dot{J}_{ст.м.}$$

$$\varepsilon_a \to -\mu_a,\ \ \mu_a \to -\varepsilon_a\,. \qquad (11.23)$$

то получим выражения для составляющих поля элементарного магнитного излучателя в дальней зоне

$$\dot{E}_{\varphi} = -j\frac{I_{ст.м.} l_{\partial}}{2r\lambda_0}\sin\theta\, e^{-j\gamma r}\,,$$

$$\dot{H}_{\theta} = j\frac{I_{ст.м.} l_{\partial}}{2r\lambda_0 Z_c}\sin\theta\ e^{-j\gamma r}. \qquad (11.24)$$

Рамочный излучатель представляет собой небольшую проволочную петлю площадью S, по которой протекает переменный электрический ток (рис. 11.4). Такой излучатель становится элементарным, если периметр рамки мал по сравнению с длиной волны.

Если в выражениях (11.24) сделать замену в соответствии с равенством

$$I_{\text{ст.м.}} l_{\partial} = -j\omega\mu_a I_{\text{ст.э.}} S \,. \qquad (11.25)$$

то получим выражения для составляющих поля рамочного излучателя в дальней зоне

$$\dot{E}_{\varphi} = -j\frac{I_{\text{ст.м.}} S\pi Z_c}{r\lambda_0^2}\sin\theta\, e^{-j\gamma r}\,,$$

$$\dot{H}_{\theta} = \frac{I_{\text{ст.м.}} S\pi}{r\lambda_0^2}\sin\theta\ e^{-j\gamma r}. \qquad (11.26)$$

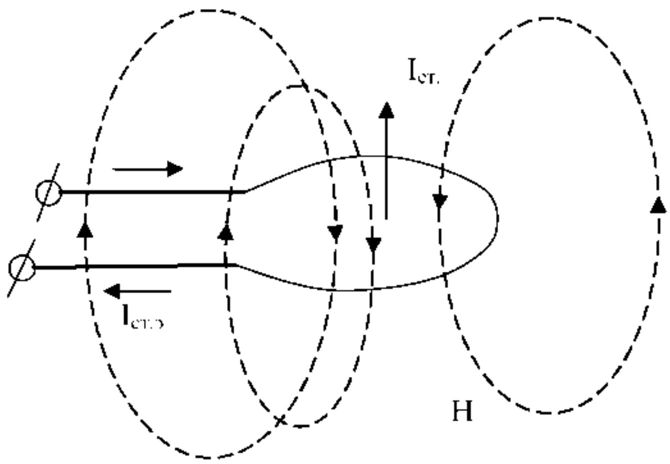



Рис. 11.4

Щелевой излучатель образован металлической плоскостью, в которой прорезана щель длиной $l_{щ}$ и шириной Δ(рис. 11.5). Чтобы щель можно было считать элементарным излучателем, необходимо выполнение условий $l_{щ} << \lambda_0$ и $\Delta << l_{щ}$ Щель может возбуждаться источником высокочастотного напряжения, подключенным к её кромкам (рис.11.5, а). Такое возбуждение является двусторонним (щелевая антенна излучает в оба полупространства). Антенна, показанная на рис. 11.5, б, излучает только в одно полупространство (одностороннее возбуждение). Осуществляя в выражениях (11.24) подстановку

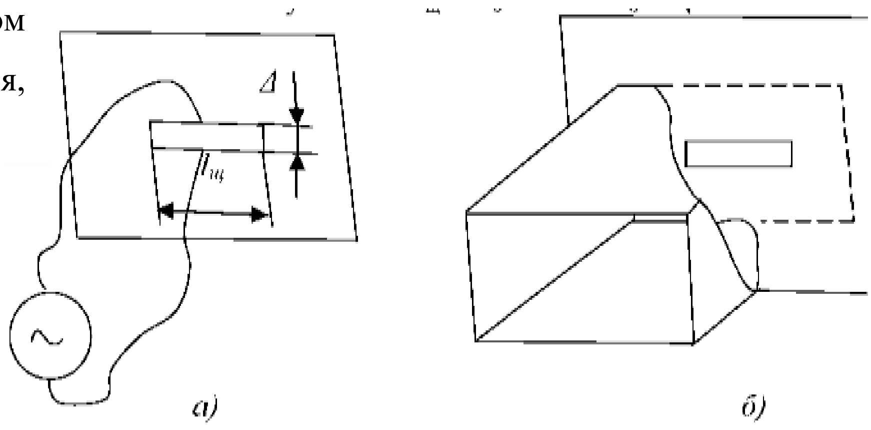



Рис.11.5

$$I_{\text{ст.м.}} = 2\dot{U}_{щ}\,,\ \ l_{\partial} = l_{щ}\,. \qquad (11.27)$$

получим выражения для составляющих поля элементарного щелевого излучателя в дальней зоне при двустороннем возбуждении:

$$\dot{E}_\varphi = -j\,\frac{\dot{U}_{щ} l_{щ}}{r\lambda_0}\sin\theta\, e^{-j\gamma r}\ ,$$

$$\dot{H}_\theta = j\,\frac{\dot{U}_{щ} l_{щ}}{r\lambda_0 Z_c}\sin\theta\ \ e^{-j\gamma r}. \qquad (11.28)$$

где $U_{щ}$ — напряжение в щели.

Диаграмма направленности элементарного магнитного излучателя (рамочного или щелевого) определяется выражением

$$F(\theta,\varphi) = \sin\theta. \qquad (11.29)$$

Мощность излучения $P_\Sigma$ вычисляют согласно соотношению (11.17). Для щелевого излучателя

$$P_\Sigma = \int_S \Pi_{ср} dS = \frac{U_{щ}^2}{2R_{\Sigma_{щ}}}, \qquad (11.30)$$

$R_{\Sigma_{щ}}$ — сопротивление излучения щелевого излучателя.

## Элемент Гюйгенса

Элемент Гюйгенса представляет собой излучатель, соответствующий бесконечно малому элементу поверхности фронта плоской электромагнитной волны с линейной поляризацией.

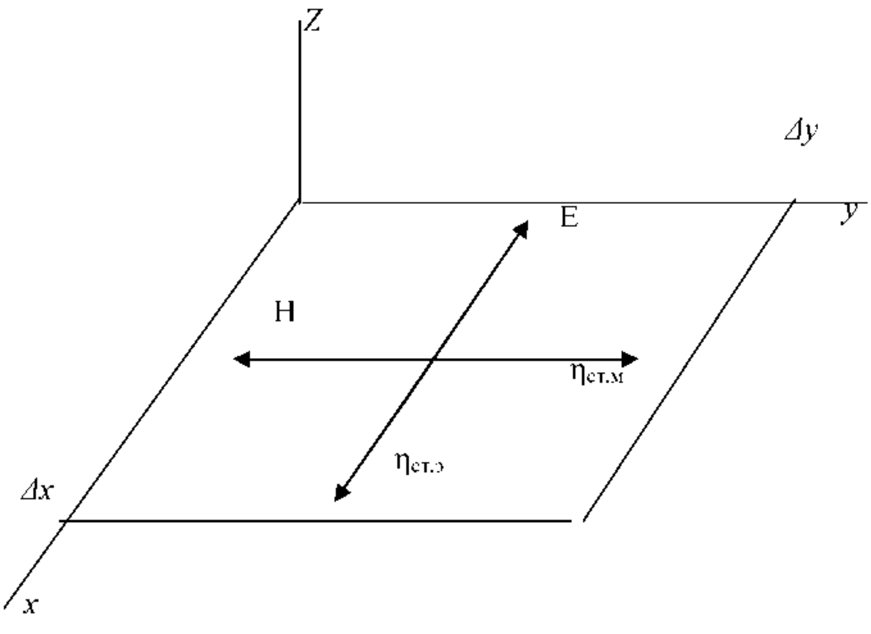


Рис. 11.6

Взяв этот элемент в виде прямоугольника, как показано на рис. 11.6, можно заметить, что элемент Гюйгенса эквивалентен взаимно перпендикулярным элементам электрического и магнитного поверхностных токов, расположенным на поверхности $\Delta S = \Delta x \Delta y$ (причем $\Delta x \ll \lambda_0$, $\Delta y \ll \lambda_0$), плотности которых

$$\dot{\eta}_{ст.э.} = \left|\dot{H}\cdot 1_z\right|,\ \ \dot{\eta}_{ст.м.} = \left|\dot{H}\cdot 1_z\right|.$$

Поле элемента Гюйгенса в дальней зоне, выраженное в сферической системе координат, записывается в виде (элемент расположен в экваториальной плоскости)

$$\dot{E} = -j\frac{\eta_{\text{ст.э.}}\Delta S Z_c}{2r\lambda_0}(1+\cos\theta)\times(1_\theta\cos\theta - 1_\varphi\sin\varphi)e^{-j\gamma r}. \quad (11.31)$$

Диаграмма направленности элемента Гюйгенса в главных плоскостях ($\varphi$ = 0, $\varphi$ = $\pi$/2) определяется выражением

$$F(\theta, \pi/2) = F(\theta, 0) = \frac{1+\cos\theta}{2}. \quad (11.32)$$

# Возбуждение замкнутых электродинамических систем

## Возбуждение волноводов

Пусть в бесконечном волноводе источники поля, находящиеся в объеме *V*, ограниченном интервалом $z_1<z<z_2$ (рис. 11.7), заданы функциями $J_{\text{ст.э.}}$, $J_{\text{ст.м}}$. Предполагается, что стенки волновода идеально проводящие, а диэлектрик, заполняющий волновод, не имеет потерь. Поле вне объема *V* представляется в виде совокупности волн электрического и магнитного типов:

$$\dot{E} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{-n}\dot{E}_{-n}\ (z<z_1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{+n}\dot{E}_{+n}\ (z>z_2) \end{Bmatrix}$$

$$\dot{H} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{-n}\dot{H}_{-n}\ (z<z_1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{+n}\dot{H}_{+n}\ (z>z_2) \end{Bmatrix} \quad (11.33)$$

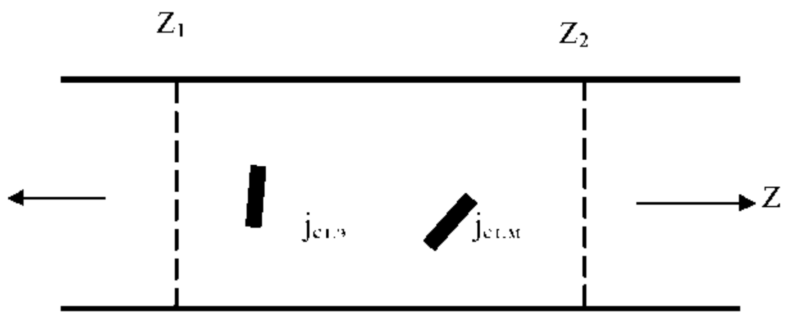



Рис. 11.7

Здесь *n* — номер типа волны в волноводе (если под *n* понимать два индекса, то суммирование рядов проводят по обоим индексам); $C_{\pm n}$ — коэффициенты возбуждения; $E_{\pm n}$ и $H_{\pm n}$ — комплексные амплитуды векторов поля n-го типа. Знак минус означает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z.

Ставится задача определения коэффициентов возбуждения. Вынужденное поле (11.33) удовлетворяет неоднородным уравнениям Максвелла (11.1). Для того чтобы решить задачу о вынужденных колебаниях в волноводе, необходимо располагать решением более простой задачи о свободных полях, удовлетворяющих однородным уравнениям Максвелла.

Применяя лемму Лоренца к электромагнитному полю (11.33) в объеме $V$ и используя в качестве вспомогательного собственное поле $E_{\pm n}$, $H_{\pm n}$ k-го типа волны, комплексные амплитуды которого подлежат определению, находим выражение для коэффициентов возбуждения:

$$\dot{C}_{\pm k} = \frac{1}{N_k}\int_V \left(\dot{J}_{\text{ст.э.}}\dot{E}_{\pm k} - \dot{J}_{\text{ст.м.}}\dot{H}_{\pm k}\right)dV \tag{11.34}$$

$$N_k = \int_S \left\{\left[\dot{E}_{+k}\dot{H}_{-k}\right] - \left[\dot{E}_{-k}\dot{H}_{+k}\right]\right\}\cdot 1_z dV \tag{11.35}$$

*Это норма к-й собственной волны.*

Возбуждаемая источником *k-я* волна переносит через каждое поперечное сечение активную мощность

$$\text{P}_{\Sigma} = \left|\dot{C}_k\right|^2 \frac{1}{4}\left|N_k\right| \ . \tag{11.36}$$

**Возбуждение объемных резонаторов**

Если объемный резонатор ограничен замкнутой идеально проводящей поверхностью $S_0$, то решение уравнений (11.1) должно удовлетворять граничному условию

$$[1_n E] = 0 \ . \tag{11.37}$$

Будем полагать, что свободные колебания резонатора известны, т. е. найдены полная система векторных функций $E_p$, $H_p$ и собственные частоты $\omega_p$. Здесь индекс $p$ означает номер типа колебаний в объемном резонаторе. Собственные колебания в объемном резонаторе удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_V \dot{E}_p\dot{E}_q dV = 0, \quad \int_V \dot{H}_p\dot{H}_q dV = 0\ , \quad (p \neq q), \tag{11.38}$$

(считается, что собственные частоты всех типов колебаний различны, или, как говорят, в резонаторе отсутствует вырождение типов колебаний).

*Норма собственного колебания*

$$N_p = \int_V \dot{E}_p^2 \varepsilon_a dV = -\int_V \dot{H}_p^2 \mu_a dV \ . \tag{11.39}$$

Электромагнитное поле, возбужденное в резонаторе, отыскивают в виде рядов. (Строго говоря, в эти ряды следует добавить члены, описывающие статические поля источников. Однако практически их вклад в поле, возбуждения в резонаторе, невелик.)

$$\dot{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_q \dot{E}_q \, ,$$

$$\dot{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{B}_q \dot{H}_q \, . \qquad (11.40)$$

Амплитудные коэффициенты для колебаний типа р вычисляют по формулам

$$\dot{A}_p = j \frac{1}{(\omega^2 - \omega_p^2) N_p} \int_V \left( \omega \dot{J}_{\text{ст.э.}} \dot{E}_p - \omega_p \dot{J}_{\text{ст.м.}} \dot{H}_p \right) dV \, , \qquad (11.41)$$

$$\dot{B}_p = j \frac{1}{(\omega - \omega_p) N_p} \int_V \left( \omega_p \dot{J}_{\text{ст.э.}} \dot{E}_p - \omega \dot{J}_{\text{ст.м.}} \dot{H}_p \right) dV \, . \qquad (11.42)$$

Если резонатор не имеет потерь, то собственная частота $\omega_p$, — действительная, и при частоте возбуждения $\omega = \omega_p$ коэффициенты $A_p$, $B_p$ и определяемые ими поля обращаются в бесконечность. Для реального объемного резонатора, обладающего потерями, собственная частота $\omega_p$ — комплексная. При больших значениях добротности $Q_p$ объемного резонатора собственная частота

$$\dot{\omega}_p \approx \omega_p + j \frac{\omega_p}{2Q_p} , \qquad (11.43)$$

где $Q_p$ — добротность *р-го* типа колебаний.

Учитывая, что значение $Q_p$ велико, для практических расчетов в числителе принимают $\dot{\omega}_p = \omega_p$.

Тогда

$$\dot{A}_p = j \frac{\omega \int_V \dot{J}_{\text{ст.э.}} \dot{E}_p dV - \omega_p \int_V \dot{J}_{\text{ст.м.}} \dot{H}_p dV}{(\omega^2 - \omega_p^2 - j\omega_p^2 / Q_p) N_p} ,$$

$$\dot{B}_p = j \frac{\omega_p \int_V \dot{J}_{\text{ст.э.}} \dot{E}_p dV - \omega \int_V \dot{J}_{\text{ст.м.}} \dot{H}_p dV}{(\omega^2 - \omega_p^2 - j\omega_p^2 / Q_p) N_p} . \qquad (11.44)$$

При $\omega_p = \omega$ коэффициенты $A_p$ и $B_p$ равны между собой.

Теория возбуждения позволяет рассчитать изменение собственные частоты объемного резонатора при деформации его оболочки. Эта деформация может осуществляться, например, погружением металлического тела с объемом *V'* в резонатор. Собственные частоты $\omega_p$ возмущенного резонатора можно рассчитать по известным частотам $м_p$ и собственным векторным функциям $E_p$, $H_p$ невозмущенного резонатора:

$$\omega'_p = \omega_p \sqrt{1 + \frac{\int_V \frac{|\dot{H}_p|^2 \mu_a}{2} dV - \int_V \frac{|\dot{E}_p|^2 \varepsilon_a}{2} dV}{\int_V \frac{|\dot{E}_p|^2 \varepsilon_a}{2} dV}} , \qquad (11.45)$$

Здесь $\int_V \frac{|\dot{H}_p|^2 \mu_a}{2} dV$ , $\int_V \frac{|\dot{E}_p|^2 \varepsilon_a}{2} dV$— максимальная магнитная и электрическая энергии колебания в объеме $V'$ до введения возмущающего элемента; $\int_V \frac{\dot{E}_p^2 \varepsilon_a}{2} dV$ - полная электромагнитная энергия p-й волны в резонаторе до введения возмущения. Выражение (11.45) справедливо при малых деформациях системы.