Тема 1. Электромагнитные волны

Лекция 2. Уравнения Максвелла в интегральной и комплексной формах.

1. Интегральные и дифференциальные уравнения электромагнетизма

2. Система основных дифференциальных уравнений в комплексной форме

3. Свойства системы основных уравнений электродинамики. Теорема о единственности решения системы уравнений электромагнитного поля

1. Интегральные и дифференциальные уравнения электромагнетизма

Интегральная форма основных уравнений электродинамики непосредственно следует из уравнений Максвелла в дифференциальной форме и представляет собой интегральную (суммарную) характеристику электромагнитного процесса. Переход к интегральной форме обусловлен такими задачами прикладной электродинамики, при решении которых уравнения Максвелла в дифференциальной форме теряют смысл, а уравнения в интегральной форме остаются справедливыми. В качестве примера можно привести задачу определения электромагнитного поля в объеме, заполненном диэлектриком и ограниченном металлическими поверхностями, которая является основной при исследовании различных устройств техники сверхвысоких частот.

На границе раздела сред в макроскопической электродинамике принято считать, что параметры среды изменяются дискретно, т. е. скачком, поэтому в точках раздела сред пространственные производные поля устремляются к бесконечности и уравнения Максвелла в дифференциальной форме становятся неприемлемыми.

Для получения интегральной формы первого и второго уравнений Максвелла построим в электромагнитном поле поверхность, ограниченную контуром (рис. 1).

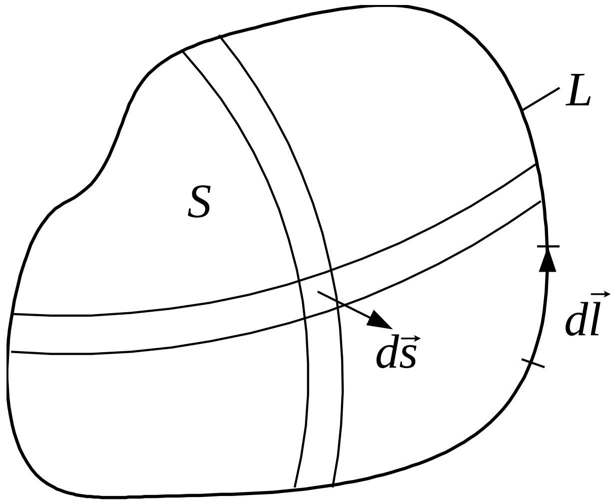


Рис. 1

Выделим на поверхности S элементарную площадку и на контуре L элемент контура dl. Умножив скалярно эти величины на единичные векторы, получим вектор-площадку $d\vec{S}$ и элемент контура $d\vec{l}$. Проделав такие подготовительные операции, запишем первое уравнение в интегральной форме, для чего обе части этого выражения умножим скалярно на вектор-площадку и выполним интегрирование по поверхности S.

$$\int_s rot\vec{H}d\vec{s} = \int_s \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\vec{s} + \int_s \vec{j}d\vec{s}. \tag{1}$$

Левую часть уравнения в соответствии с теоремой Стокса преобразуем к виду

$$\int_s rot\vec{H}d\vec{s} = \oint_L \vec{H}d\vec{l}.$$

С учетом данного соотношения уравнение (1) принимает вид

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_s \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\vec{s} + \int_s \vec{j}d\vec{s}. \tag{2}$$

Правую часть уравнения (2) преобразуем, учитывая, что величины $\partial\vec{D}/\partial t$ и $\vec{j}$ представляют собой плотности тока смещения и тока проводимости. Следовательно, первый интеграл соответствует суммарному току смещения $I_{см}$, а второй интеграл - суммарному току проводимости I, протекающему через поверхность S.

$$I_{см} = \int_s \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\vec{s} = \int_s \vec{j}_{см}d\vec{s}; \quad I = \int_s \vec{j}d\vec{s}.$$

Учитывая последние выражения получим окончательную запись первого уравнения Максвелла в интегральной форме, которое является обобщением закона полного тока (закона Ампера).

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I_{см} + I\ , \tag{3}$$

или

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I_n \tag{4}$$

где I_n - полный ток.

Физический смысл первого уравнения Максвелла в интегральной форме заключается в том, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ по произвольному контуру численно равна сумме тока проводимости и тока смещения, протекающих через любую поверхность, опирающуюся на этот контур. Замкнутые магнитные силовые линии охватывают ток, который может быть либо током проводимости (рис. 2, а), либо током смещения (рис. 2, б), либо их суммой (рис. 2, в).

Для получения интегральной формы второго уравнения Максвелла выполняются те же математические операции, что и для первого уравнения.

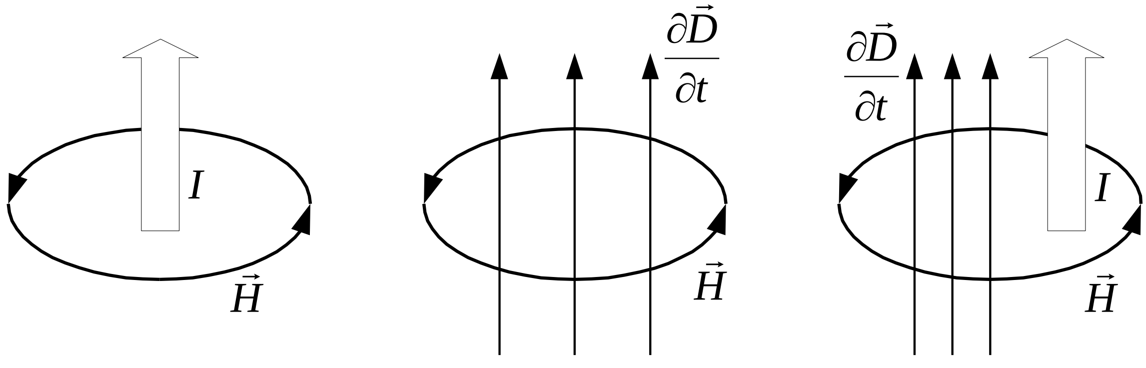
Умножим скалярно левую и правую части второго уравнения Максвелла на ds, выполним интегрирование по поверхности S.

$$\int_s rot\vec{E}d\vec{s} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}\ . \tag{5}$$

Левую часть уравнения преобразуем, используя теорему Стокса.

$$\int_s rot\vec{E}d\vec{s} = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = Э\ , \tag{6}$$

где $Э$ - эдс, наводимая в контуре L.



а б в

Рис. 2

Положим, что поверхность S неизменна во времени. С учетом этого можно поменять местами операции дифференцирования и интегрирования в правой части уравнения (5)

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{s} = \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где Φ - магнитный поток через произвольную поверхность S, ограниченную контуром L.

Подставив найденные значения интегралов в уравнение (5), получим второе уравнение Максвелла в интегральной форме.

$$Э = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad (7)$$

Физический смысл этого уравнения состоит в том, что эдс, наводимая в произвольном контуре (мысленно начерченном в пространстве), в любой среде равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного, потока пронизывающего любую поверхность, опирающуюся на контур (рис. 3). Отрицательный знак в правой части уравнения (7) показывает, что наведенная в контуре L эдс вызывает в нем ток такого направления, при котором создавшийся вокруг тока вторичный магнитный поток препятствует изменению магнитного потока, явившегося причиной возникновения эдс. В этом проявляется закон инерции для магнитного поля.

Полученная форма записи второго уравнения Максвелла (7) формально совпадает с законом электромагнитной индукции Фарадея. Различие между ними состоит лишь в том, что в уравнении (7) контур L считается произвольным, в то время как в законе электромагнитной индукции он предполагается проводящим (линейным проводником).

В формулировке Максвелла контур имеет более широкий смысл, поскольку под контуром понимается замкнутая линия, произвольно расположенная (мысленно начерченная) в пространстве. Максвелл снял ограничения и на среду - контур может располагаться в любой среде, в том числе одновременно и в нескольких средах: например, одна часть контура лежит в металле, другая - в воздухе, а третья - в другом диэлектрике (рис. 4).

Таким образом, второе уравнение Максвелла в интегральной форме представляет собой обобщенный закон электромагнитной индукции на случай любых конечных контуров.

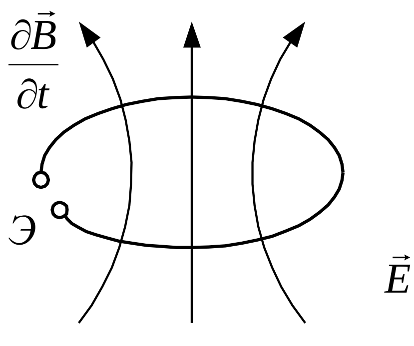


Рис. 3

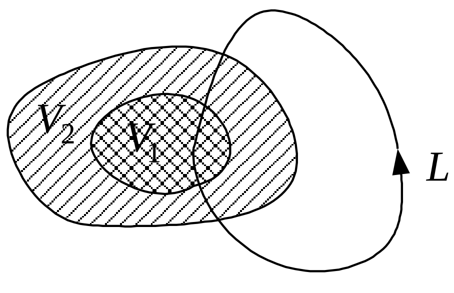


Рис. 4

Для получения третьего уравнения Максвелла в интегральной форме построим в электромагнитном поле неизменный во времени объем V и выделим в нем элементарный объем dv (рис. 5). В этом выражении умножим левую и правую части на dv и проинтегрируем по объему V.

$$\int_{v} div\vec{j}d\vec{v} = -\int_{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv. \qquad (8)$$

Левую часть уравнения преобразуем, используя теорему Остроградского-Гаусса.

$$\int_{v} div\vec{j}d\vec{v} = -\int_{s} \vec{j}d\vec{s} = I.$$

где I - величина тока, протекающего через поверхность S, ограничивающую объем V.

Так как объем V неизменный во времени, то в правой части третьего уравнения Максвелла можно изменить порядок дифференцирования и интегрирования.

$$\int_{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v} \rho dv = \frac{\partial q}{\partial t},$$

где $q = \int_{v} \rho dv$ - мгновенное значение величины заряда в объеме V.

Подставим найденные значения интегралов в уравнение (8), получим выражение, позволяющее определить мгновенное значение величины тока

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (9)$$

Обе части уравнения (9) умножим на элемент времени dt и проинтегрируем по интервалу времени ($t_1,\ t_2$)

$$\int_{t_1}^{t_2} Idt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q}{\partial t} dt, \qquad (10)$$

где $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q}{\partial t} dt = q_s$ - заряд, перенесенный током через поверхность S за время $t_2 - t_1$.

Решение интеграла в правой части (10) имеет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q}{\partial t} dt = q(t_2) - q(t_1) = \Delta q,$$

где $q(t_2)$ и $q(t_1)$ - величины зарядов внутри объема V в моменты времени t_1 и t_2;

Δq - изменение заряда внутри объема V за время $(t_2 - t_1)$.

С учетом последних обозначений уравнение (10) примет вид

$$q_S = \Delta q.$$

Это и есть интегральная форма третьего уравнения Максвелла, физический смысл которого заключается в том, что величина заряда, перенесенного током через поверхность S, всегда равна изменению заряда внутри объема V, ограниченного этой поверхностью. То есть уравнение (10) выражает закон сохранения заряда.

В заключение следует заметить, что содержание обобщений, выполненных Максвеллом, сводится к трем гипотезам:

1) закон полного тока, установленный в результате изучения магнитных полей постоянных токов, остается в силе и для переменных токов, если величину тока проводимости в нем заменить величиной полного тока (к величине тока проводимости добавить величину тока смещения);

2) закон электромагнитной индукции отображает связи между величинами, описывающими в общем случае произвольные контуры, а не только случаи контуров, совпадающих с линейными проводниками;

3) обобщенные законы полного тока и электромагнитной индукции остаются верными для контуров сколь угодно малых размеров.

Весь последующий опыт блестяще подтвердил справедливость гипотез, выдвинутых Максвеллом.

Выводы:

1). Физический смысл первого уравнения Максвелла в интегральной форме заключается в том, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ по произвольному контуру численно равна сумме тока проводимости и тока смещения, протекающих через любую поверхность, опирающуюся на этот контур.

2). Физический смысл второго уравнения состоит в том, что эдс, наводимая в произвольном контуре, равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного, потока пронизывающего любую поверхность, опирающуюся на контур.

3). Физический смысл третьего уравнения Максвелла, заключается в том, что величина заряда, перенесенного током через поверхность S, всегда равна изменению заряда внутри объема V, ограниченного этой поверхностью.

2. Система основных дифференциальных уравнений в комплексной форме

Решение любой системы уравнений, в том числе и системы основных уравнений электродинамики, необходимо начинать с вывода уравнения, содержащего одно неизвестное, в качестве которого чаще всего выбирают векторную функцию $\vec{E}(M,t)$ или $\vec{H}(M,t)$.

В общем случае такое уравнение может быть выведено, однако оно оказывается столь сложным, что его решение встречает практически непреодолимые математические сложности.

Оказывается, что решение системы основных уравнений электродинамики существенно упрощается, если ограничиться рассмотрением лишь гармонических электромагнитных полей. Это обусловлено рядом обстоятельств: во-первых, на практике достаточно часто используются гармонические во времени электромагнитные поля; во-вторых, реальные электромагнитные процессы, которые не являются гармоническими, можно представить на основе ряда или интеграла Фурье в виде суммы гармонических колебаний. Поэтому изучение электромагнитных полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, представляет большой теоретический и практический интерес.

Переменное поле одной частоты, изменяющееся во времени по гармоническому закону, называется монохроматическим. Анализ монохроматических полей существенно упрощается при использовании символического метода, который еще называют методом комплексных амплитуд. Он широко применяется в основах теории цепей.

Рассмотрим особенности применения данного метода для векторных величин и запишем уравнения электромагнитного поля в комплексной форме.

Известно, что любая скалярная функция изменяется по закону

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi), \tag{11}$$

где U_m - амплитуда;

φ - начальная фаза;

ω - круговая частота.

Выражению (11) можно, на основе формулы Эйлера, поставить в соответствие комплексную функцию $U(t)$, определяемую соотношением:

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_m e^{i\omega t}, \tag{12}$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{i\varphi}$ - комплексная амплитуда, не зависящая от времени.

Соотношение (11) представляет собой вещественную форму записи гармонического колебания и позволяет найти истинное мгновенное значение соответствующего процесса, а выражение (12) представляет комплексную форму записи гармонического колебания. Для перехода от комплексной формы к вещественной необходимо взять реальную часть комплексной функции

$$U(t) = \mathrm{Re}(\dot{U}(t)), \tag{13}$$

поскольку

$$\dot{U}(t) = U_m e^{i(\omega t + \varphi)},$$

$$e^{i(\omega t+\varphi)}=\cos(\omega t+\varphi)+i\sin(\omega t+\varphi).$$

По аналогии с формулами (11) и (12) произвольной векторной гармонической функции времени

$$\vec{U}(t)=\vec{U}_m\cos(\omega t+\varphi)$$

можно поставить в соответствие комплексную векторную функцию

$$\dot{\vec{U}}(t)=\dot{\vec{U}}_m e^{i\omega t}, \qquad (14)$$

где $\dot{\vec{U}}_m=\vec{U}_m e^{i\omega t}$ - комплексная амплитуда вектора.

Необходимо отметить, что как действительная функция $\vec{U}(t)$, так и комплексная $\dot{\vec{U}}(t)$ определяют истинное положение вектора в трехмерном пространстве в любой момент времени. Действительно, каждый вектор можно представить через составляющие по соответствующим осям выбранной координатной системы, например, декартовой системы координат

$$\vec{U}(t)=\vec{x}_o U_x(t)+\vec{y}_o U_y(t)+\vec{z}_o U_z(t),$$

$$\dot{\vec{U}}(t)=\vec{x}_o \dot{U}_x(t)+\vec{y}_o \dot{U}_y(t)+\vec{z}_o \dot{U}_z(t).$$

В соответствии с соотношением (13) имеем

$$U_x(t)=\mathrm{Re}\left(\dot{U}_x(t)\right);$$

$$U_y(t)=\mathrm{Re}\left(\dot{U}_y(t)\right);$$

$$U_z(t)=\mathrm{Re}\left(\dot{U}_z(t)\right).$$

Следовательно, векторы $\vec{U}(t)$ и $\dot{\vec{U}}(t)$ параллельны в трехмерном пространстве, а $\dot{\vec{U}}(t)$ соответствует истинному положению реального вектора в трехмерном пространстве и является реальной характеристикой его ориентации. Одновременно $\dot{\vec{U}}(t)$ представляет собой вектор, вращающийся с круговой частотой ω на комплексной плоскости. Направление же вектора на комплексной плоскости - это лишь условное обозначение начальной фазы гармонически изменяющейся величины относительно выбранного начала отсчета.

Символический метод применим для анализа любых гармонических процессов, описываемых линейными уравнениями, в частности, уравнениями Максвелла для линейных сред. Применение данного метода значительно упрощает решение задач электродинамики. Например, дифференцирование комплексной величины по времени эквивалентно умножению ее на $i\omega$, так как

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t}=i\omega e^{i\omega t}. \qquad (15)$$

Аналогично интегрирование эквивалентно делению на $i\omega$, поскольку

$$\int e^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}\ . \tag{16}$$

При этом постоянная интегрирования для гармонических функций принимается равной нулю.

Представляя параметры поля в виде комплексных функций времени с учетом выражений (15) и (16), запишем систему основных уравнений электродинамики в комплексной форме:

$$rot\dot{\vec{H}} = i\omega\dot{\vec{D}} + \dot{\vec{j}}\,, \tag{17}$$

$$rot\dot{\vec{E}} = -i\omega\dot{\vec{B}}\,, \tag{18}$$

$$div\dot{\vec{j}} = -i\omega\dot{\rho}\,, \tag{19}$$

$$\dot{\vec{j}} = \sigma\dot{\vec{E}}\,, \tag{20}$$

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon_a\dot{\vec{E}}\,, \tag{21}$$

$$\dot{\vec{B}} = \mu_a\dot{\vec{H}}\ . \tag{22}$$

Эти уравнения можно преобразовать для комплексных амплитуд, представляя каждый вектор в форме

$$\dot{\vec{U}}(t) = \dot{\vec{U}}_m e^{i\omega t}\,.$$

Принимая во внимание, что величина $e^{i\omega t}$ не зависит от пространственных координат, поэтому ее можно вынести за пределы операций дивергенции и ротора. С учетом этого первое уравнение Максвелла преобразуется к виду

$$e^{i\omega t}rot\dot{\vec{H}}_m = i\omega\dot{\vec{D}}_m e^{i\omega t} + \dot{\vec{j}}_m e^{i\omega t}$$

Сокращая левую и правую части уравнения на $e^{i\omega t}$, получим

$$rot\dot{\vec{H}}_m = i\omega\dot{\vec{D}}_m + \dot{\vec{j}}_m.$$

Выполнив аналогичные операции в остальных уравнениях, получаем следующую запись уравнений Максвелла для комплексных амплитуд:

$$rot\dot{\vec{H}}_m = i\omega\dot{\vec{D}}_m + \dot{\vec{j}}_m, \tag{23}$$

$$rot\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\dot{\vec{B}}_m, \tag{24}$$

$$div\dot{\vec{j}}_m = -i\omega\dot{\rho}_m, \tag{25}$$

$$\dot{\vec{j}}_m = \sigma\dot{\vec{E}}_m, \tag{26}$$

$$\dot{\vec{D}}_m = \varepsilon_a\dot{\vec{E}}_m, \tag{27}$$

$$\dot{\vec{B}}_m = \mu_a\dot{\vec{H}}_m. \tag{28}$$

Аналогично можно записать дополнительные уравнения Максвелла в комплексной форме

$$div\dot{\vec{E}}_m = \frac{\dot{\rho}_m}{\varepsilon_a}, \tag{29}$$

$$div\dot{\vec{H}}_m = 0. \tag{30}$$

Следует обратить внимание на то, что уравнения (17)-(22) для комплексных векторов и их решения определяют искомое поле в комплексной форме, а уравнения (23)-(30) справедливы для комплексных амплитуд. Для нахождения комплексных векторов поля, необходимо полученные решения этих уравнений умножить на величину $e^{i\omega t}$.

В дальнейшем для удобства записи индекс m в уравнениях будем опускать. В этом случае уравнения для комплексных амплитуд векторов окажутся формально идентичными. Поэтому там, где это необходимо, будем оговаривать, для каких величин записаны уравнения.

Дифференциальные уравнения электромагнитного поля в комплексной форме проще уравнений в вещественной форме, т.к. содержат только производные по координатам, а исходные уравнения содержат еще и производные по времени. Однако необходимо помнить, что данное упрощение достигнуто за счет наложения ограничения на вид временной зависимости поля, поскольку уравнения в комплексной форме справедливы только для монохроматических полей.

Символический метод применим также к уравнениям электромагнитного поля в интегральной форме.

Выводы:
1). Дифференциальные уравнения электромагнитного поля в комплексной форме проще уравнений в вещественной форме, т.к. содержат только производные по координатам.
2). Дифференциальные уравнения в комплексной форме справедливы только для монохроматических полей.

3. Свойства системы основных уравнений электродинамики. Теорема о единственности решения системы уравнений электромагнитного поля

Решение многих задач макроскопической электродинамики существенно упрощается благодаря использованию ряда важных свойств уравнений Максвелла. Они определяются принципами: суперпозиции, перестановочной двойственности и взаимности.

1.1. Принцип суперпозиции

Известно, что принцип суперпозиции справедлив лишь для линейных уравнений и систем. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах не содержат произведений или степеней величин $\vec{H}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$ и ρ, характеризующих электромагнитное поле, поэтому формально они линейны. Однако данный вывод будет справедлив лишь в том случае, если параметры среды не зависят от величины исследуемого поля, т. е. при условии, что среда линейна.

Одно из свойств линейных дифференциальных уравнений состоит в том, что если имеется несколько решений уравнения или системы уравнений, то их линейная комбинация также является решением. Это свойство представляет собой математическое обоснование принципа суперпозиции. Применительно к электродинамике он формулируется следующим образом: поле, образованное несколькими источниками, можно найти как сумму полей всех источников действующих раздельно.

Принцип суперпозиции позволяет при решении электродинамических задач упростить:

анализ монохроматических полей на основе применения преобразований Фурье;

определение поля, создаваемого дискретно или непрерывно распределенными источниками. Например, при определении поля непрерывно распределенных поверхностных источников можно разделить заданную поверхность на совокупность элементарных площадок, найти поле, создаваемое каждой площадкой, а затем вычислить напряженность, создаваемую всей системой, суммированием полученных результатов.

Необходимо отметить, что принцип суперпозиции неприменим при анализе энергетических характеристик поля. Это свидетельствует о том, что энергия представляет собой нелинейную функцию напряженности поля. Например, для плотности электрической энергии поля имеем

$$w_э = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \left[\frac{Дж}{м^3}\right].$$

Поэтому для двух полей с напряженностью $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ общая напряженность $\vec{E}$ равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

а плотность общей энергии вычисляется с помощью выражения

$$w_э = \frac{\varepsilon_a\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2}{2} = \frac{\varepsilon_a \vec{E}_1^{\,2}}{2} + \frac{\varepsilon_a \vec{E}_2^{\,2}}{2} + \varepsilon_a \vec{E}_1 \vec{E}_2,$$

где первые два слагаемых определяют энергию соответствующего поля, а последние - взаимную энергию полей.

1.2. Принцип перестановочной двойственности

Принцип применим для симметричной системы уравнений и в общем случае представляет собой такую замену переменных, которая позволяет преобразовать одно уравнение системы в другое и наоборот таким образом, что общий вид системы и ее решение остаются неизменными.

Условию симметрии удовлетворяют уравнения Максвелла для пассивного объема из идеального диэлектрика (когда нет сторонних токов $\vec{j}=0$)

$$rot\vec{H}=\varepsilon_a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\ rot\vec{E}=-\mu_a\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Для этой системы замена переменных на $\vec{E}$ на $\vec{H}$, ε_a на $-\mu_a$, $\vec{H}$ на $\vec{E}$ приводит к тому, что первое уравнение преобразуется во второе, а второе - в первое. Следовательно, данная перестановка переменных, которую можно записать в виде

$$\vec{E}\Leftrightarrow\vec{H},\ \varepsilon_a\Leftrightarrow-\mu_a, \tag{31}$$

приводит только к перестановке уравнений в системе, не изменяя ее сущности и решения.

Таким образом, применяя принцип перестановочной двойственности, по решению одной электродинамической задачи можно найти решение другой задачи. Например, по известному решению задачи для поля, создаваемого электрическими источниками, путем перестановки (31) можно найти решение для поля с магнитными источниками, распределенными в пространстве аналогично электрическим.

1.3. Принцип (теорема) взаимности

В основу принципа положена теорема Лоренца, устанавливающая связь между сторонними токами в двух различных точках линейной среды и электромагнитными полями, возбужденными этими токами.

Пусть в ограниченном объеме V имеются два, не зависящих друг от друга, источника, один из которых характеризуется плотностью тока $\vec{j}_1^{\,ст}$, распределенного в объеме ΔV_1 (рис. 5), а другой - плотностью тока $\vec{j}_2^{\,ст}$, распределенного в объеме ΔV_2. Первый источник создает в каждой точке пространства поле с напряженностями $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$, а второй - $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$. В силу независимости источников для указанных полей справедливы следующие две системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} rot\dot{\vec{H}}_1&=\dot{\vec{j}}_1^{\,ст}+\left(\dot{\vec{j}}+i\omega\varepsilon_a\right)\dot{\vec{E}}_1,\\ rot\dot{\vec{E}}_1&=-i\omega\dot{\vec{H}}_1,\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} rot\dot{\vec{H}}_2&=\dot{\vec{j}}_2^{\,ст}+\left(\dot{\vec{j}}+i\omega\varepsilon_a\right)\dot{\vec{E}}_2,\\ rot\dot{\vec{E}}_2&=-i\omega\dot{\vec{H}}_2.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

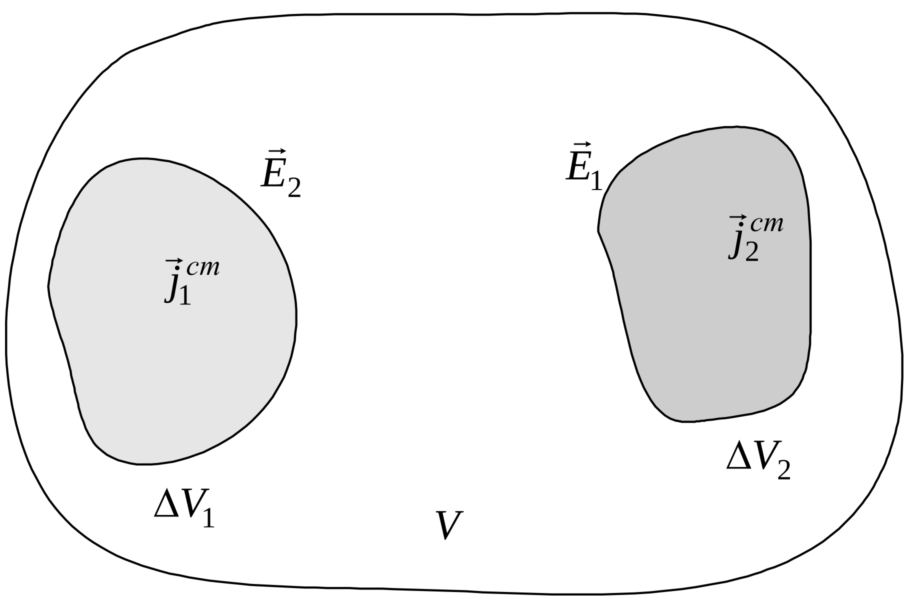


Рис. 5

Умножим первое уравнение системы (32) на $\dot{\vec{E}}_2$, а второе – на $\dot{\vec{H}}_2$, во второй системе (33) – на $\dot{\vec{E}}_1$ и $\dot{\vec{H}}_1$ соответственно. После этого из первого уравнения системы (32) вычтем второе уравнение системы (33)

$$\dot{\vec{E}}_2 rot\dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{H}}_1 rot\dot{\vec{E}}_2 = \dot{\vec{j}}_1^{\,ст}\dot{\vec{E}}_2 + \left(\dot{\vec{j}} + i\omega\varepsilon_a\right)\dot{\vec{E}}_1\dot{\vec{E}}_2 + i\omega\mu_a\dot{\vec{H}}_1\dot{\vec{H}}_2. \qquad (34)$$

Точно также, вычитая из первого уравнения системы (33) второе уравнение системы (32), получим

$$\dot{\vec{E}}_1 rot\dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{H}}_2 rot\dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{j}}_2^{\,ст}\dot{\vec{E}}_1 + \left(\dot{\vec{j}} + i\omega\varepsilon_a\right)\dot{\vec{E}}_1\dot{\vec{E}}_2 + i\omega\mu_a\dot{\vec{H}}_1\dot{\vec{H}}_2. \qquad (35)$$

Воспользовавшись операцией

$$div[\vec{a}\times\vec{b}] = \vec{b}\,rot\vec{a} - \vec{a}\,rot\vec{b} = -div[\vec{b}\times\vec{a}]$$

находим

$$\dot{\vec{E}}_2 rot\dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{H}}_1 rot\dot{\vec{E}}_2 = -div[\dot{\vec{E}}_2\times\dot{\vec{H}}_1],$$
$$\dot{\vec{E}}_1 rot\dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{H}}_2 rot\dot{\vec{E}}_1 = -div[\dot{\vec{E}}_1\times\dot{\vec{H}}_2].$$

Вычтем теперь равенство (35) из равенства (34)

$$div\left\{[\dot{\vec{E}}_1\times\dot{\vec{H}}_2] - [\dot{\vec{E}}_2\times\dot{\vec{H}}_1]\right\} = \dot{\vec{j}}_1^{\,ст}\dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^{\,ст}\dot{\vec{E}}_1. \qquad (36)$$

Полученное соотношение определяет связь между полем и сторонними токами в двух различных точках пространства. Его называют леммой Лоренца в дифференциальной форме. Для перехода к интегральной форме следует умножить обе части равенства (36) на dv и проинтегрировать по объему V, ограниченному поверхностью S. Применив теорему Остроградского-Гаусса, получим окончательное выражение

$$\oint_s\left\{[\dot{\vec{E}}_1\times\dot{\vec{H}}_2] - [\dot{\vec{E}}_2\times\dot{\vec{H}}_1]\right\}d\vec{s} = \int_v\left(\dot{\vec{j}}_1^{\,ст}\dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^{\,ст}\dot{\vec{E}}_1\right)dv. \qquad (37)$$

Учитывая, что в реальной среде произведение $E \cdot H$ уменьшается быстрее, чем $1/r^2$, где r - расстояние от источника до границы объема V, при $r \to \infty$ интеграл в левой части выражения (37) обращается в нуль. Поскольку источники поля локализованы в объемах ΔV_1 и ΔV_2, уравнение (37) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Delta V_1} \dot{\vec{j}}_1^{cm} \dot{\vec{E}}_2 dv = \int\limits_{\Delta V_2} \dot{\vec{j}}_2^{cm} \dot{\vec{E}}_1 dv. \tag{38}$$

Полученное выражение представляет собой математическую запись принципа взаимности.

Физический смысл принципа взаимности состоит в следующем: независимо от свойств изотропной линейной среды, разделяющей два произвольных объема ΔV_1 и ΔV_2, условия распространения поля из объема ΔV_1 в объем ΔV_2 и обратно из ΔV_2 в ΔV_1 совершенно одинаковы.

Например, при равенстве объемов ΔV_1 и ΔV_2 и токов $\vec{j}_1^{cm}$ и $\vec{j}_2^{cm}$ из соотношения (38) получаем, что комплексные векторы $\dot{\vec{E}}_1$ и $\dot{\vec{E}}_2$ равны.

Таким образом, процесс приема и передачи электромагнитной энергии не изменится, если поменять местами, передающую и приемную антенны. Это позволяет по свойствам излучающих систем судить о свойствах приемных систем и упрощает их изучение.

1.4. Теорема о единственности решения системы дифференциальных уравнений электродинамики

Система основных уравнений электродинамики, являясь системой дифференциальных уравнений, имеет бесчисленное множество решений, которые выражаются векторными функциями $\vec{E}(M,t)$ и $\vec{H}(M,t)$. Следовательно, знание одной этой системы недостаточно для того, чтобы найти функции, описывающие распределение векторов конкретного поля.

Возникает вопрос: что необходимо знать об электромагнитном поле, кроме системы дифференциальных уравнений, чтобы однозначно определить функции $\vec{E}(M,t)$ и $\vec{H}(M,t)$, характеризующие его напряженности?

Ответ на этот вопрос дает теорема о единственности решения системы основных уравнений электродинамики, которая формулируется следующим образом: система основных уравнений электромагнитного поля имеет внутри объема V, ограниченного поверхностью S (рис. 6), единственное решение для любого момента времени $t > 0$,
если заданы:

1) параметры среды в каждой точке объема V и поверхности S;

2) плотность сторонних токов $\vec{j}^{cm}$ внутри объема V при $t > 0$;

3) касательные составляющие напряженности электрического поля E_τ к поверхности S на S_1, касательные составляющие напряженности магнитного поля H_τ к S на S_2 при $t > 0$, где $S = S_1 + S_2$;

4) начальные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $t = 0$.

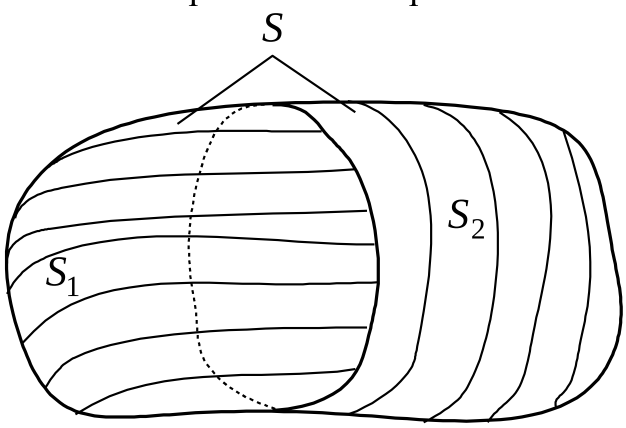


Рис. 6

Таким образом, система основных уравнений электродинамики вместе с заданными в теореме условиями позволяют однозначно определить векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в любой точке M, лежащей внутри объема V.

Опираясь на рассмотренную выше теорему, можно сформулировать отдельные частные задачи, связанные с отысканием напряженности поля, задавая лишь необходимые и вместе с тем достаточные данные для их решения.

Кроме того, теорема о единственности дает нам уверенность в том, что найденное с помощью какого-либо искусственного приема, основанного на том или ином неочевидном предположении, решение задачи является единственным и правильным.

Выводы:

1). Система основных уравнений электродинамики подчиняется принципам: суперпозиции, перестановочной двойственности, взаимности.

2). Система основных уравнений электродинамики имеет единственное решение, если известны: параметры среды, плотность сторонних токов, касательные составляющие напряженности электрического поля E_τ к поверхности S, начальные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $t = 0$.