

ЛЕКЦИЯ №4 «ВОЛНОВОДЫ»

Волновод представляет собой полую металлическую трубу произвольного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны. Наиболее часто применяют волноводы прямоугольного (рис. 7.1) и круглого (рис. 7.2) сечений, реже — волноводы более сложного сечения, например П-образные и Н-образные.

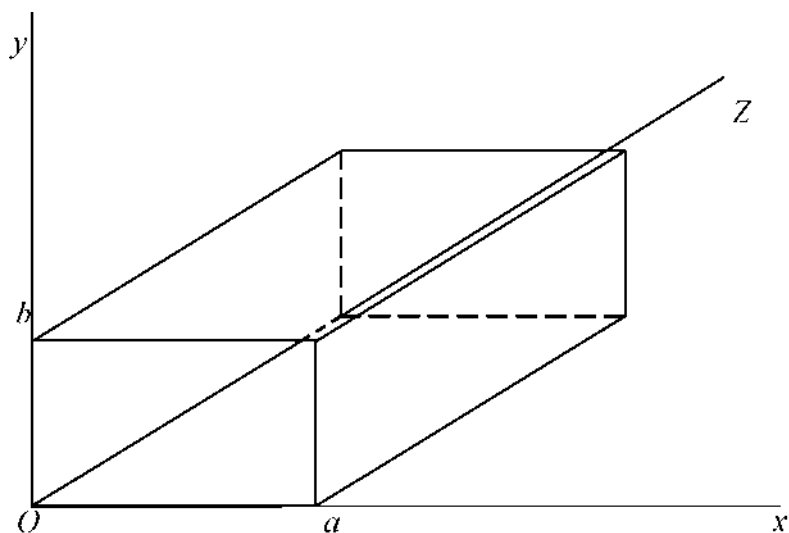


Рис. 7.1

Анализ волн в волноводах производят посредством решения уравнения Гельмгольца для составляющих E_z или H_z при равенстве нулю тангенциальной составляющей вектора электрического поля на стенках волновода.

В волноводах с идеально проводящими стенками и однородным заполнением могут распространяться волны электрического типа Е у которых $H_z \equiv 0$, а $E_z \neq 0$ (направление оси z совпадает с продольной осью волновода), и волны магнитного типа (Н), у которых $E_z \equiv 0$, а $H_z \neq 0$.

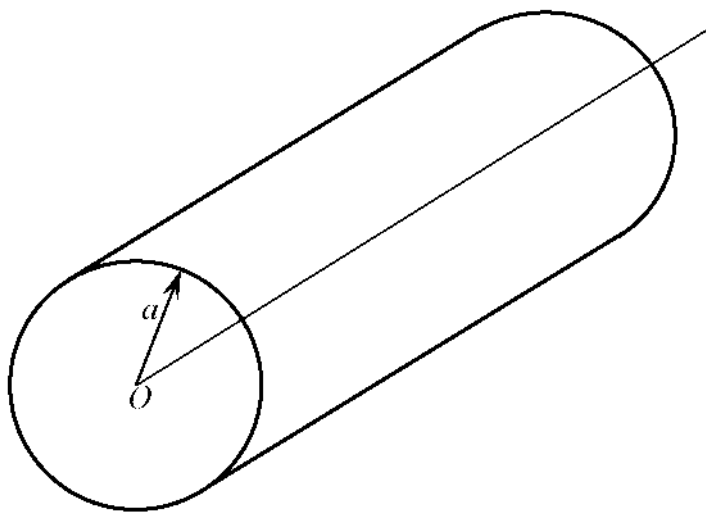


Рис. 7.2

Предположим, что волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Каждый конкретный тип волны в волноводе может распространяться в том случае, если

$$\lambda_0 / \sqrt{\epsilon} < \lambda_{кр} , \quad (7.1)$$

где λ_0 — длина волны генератора; $\lambda_{кр}$ — критическая длина волны, которая определяется размерами и формой поперечного сечения волновода.

Для волн типа E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном волноводе

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \quad (7.2)$$

где a, b — размеры поперечного сечения волновода (см. рис. 7.1).

Для волн типа E_{mn} в круглом волноводе

$$\lambda_{кр} = 2\pi a / v_{mn}, \quad (7.3)$$

где a — радиус волновода; v_{mn} — n -й корень уравнения $J_m(x) = 0$.

Для волн типа H_{mn} в круглом волноводе

$$\lambda_{кр} = 2\pi a / \mu_{mn}, \quad (7.4)$$

где μ_{mn} — n -й корень уравнения $J'_m(x) = 0$.

Значения корней v_{mn} и μ_{mn} приведены в Приложении I.

Фазовая скорость волны в волноводе определяется величиной *продольного волнового числа*:

$$h = \sqrt{\beta^2 \varepsilon - g^2}, \quad (7.5)$$

где $\beta = 2\pi/\lambda_0$; $g = 2\pi/\lambda_{кр}$ — поперечное волновое число.

Если выполняется условие (7.1), то $\beta^2 \varepsilon > g^2$, значение h действительное и данный тип волны распространяется. Если условие (7.1) не выполняется, то $\beta^2 \varepsilon < g^2$, значение h мнимое и данный тип волны затухает, не распространяясь. В этом случае формула (7.5) позволяет определить коэффициент ослабления волны.

Для нахождения фазовой скорости и длины волны в волноводе можно воспользоваться соотношением

$$h = 2\pi/\lambda_v = \omega/v_\phi, \quad (7.6)$$

где λ_v — длина волны в волноводе.

Из (7.6) получаем расчетные формулы для фазовой скорости, длины волны и групповой скорости.

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{c/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad (7.7)$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_v = \frac{\lambda_0/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad (7.8)$$

Групповая скорость

$$v_{гр} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (7.9)$$

где c — скорость света в свободном пространстве.

Решая уравнения Гельмгольца, можно получить следующие выражения для составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей волн типа E_{mn} в прямоугольном волноводе:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_x &= -j \frac{h\pi m}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{E}_y &= -j \frac{h\pi n}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_x &= j\omega\epsilon_a \frac{\pi n}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_y &= -j\omega\epsilon_a \frac{\pi m}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Низшей из волн электрического типа является волна E_{11} . Картина силовых линий поля волны E_{11} изображена на рис. 7.3.

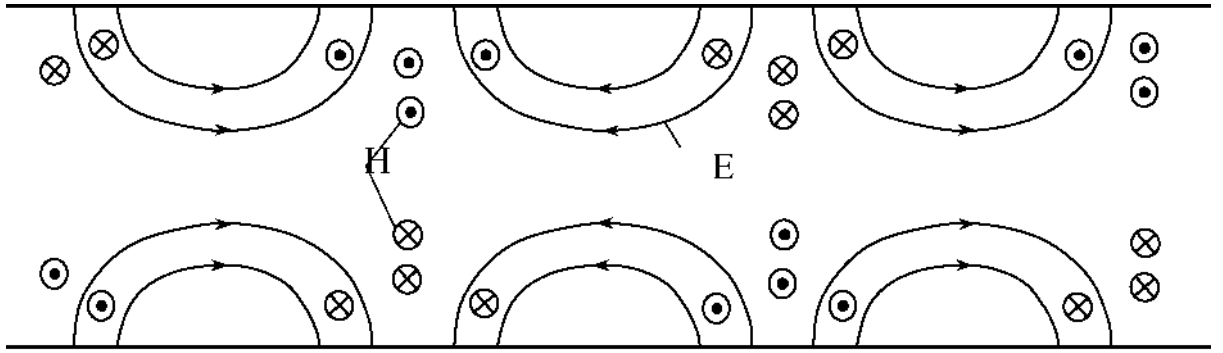


Рис. 7.3

Выражения для составляющих векторов напряженностей полей волн типа H_{mn} в прямоугольном волноводе записываются в виде :

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_x &= j\omega\mu_a \frac{\pi n}{g^2 a} H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a \frac{\pi m}{g^2 b} H_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{E}_z &= 0, \\
 \dot{H}_x &= j \frac{h\pi m}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_y &= j \frac{h\pi n}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}.
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Основным типом волны в прямоугольном волноводе при $a > b$ является волна

H_{10} , для которой $\lambda_{кр} = 2a$, ближайшими высшими типами - волны H_{20} , H_{01} , H_{11} .

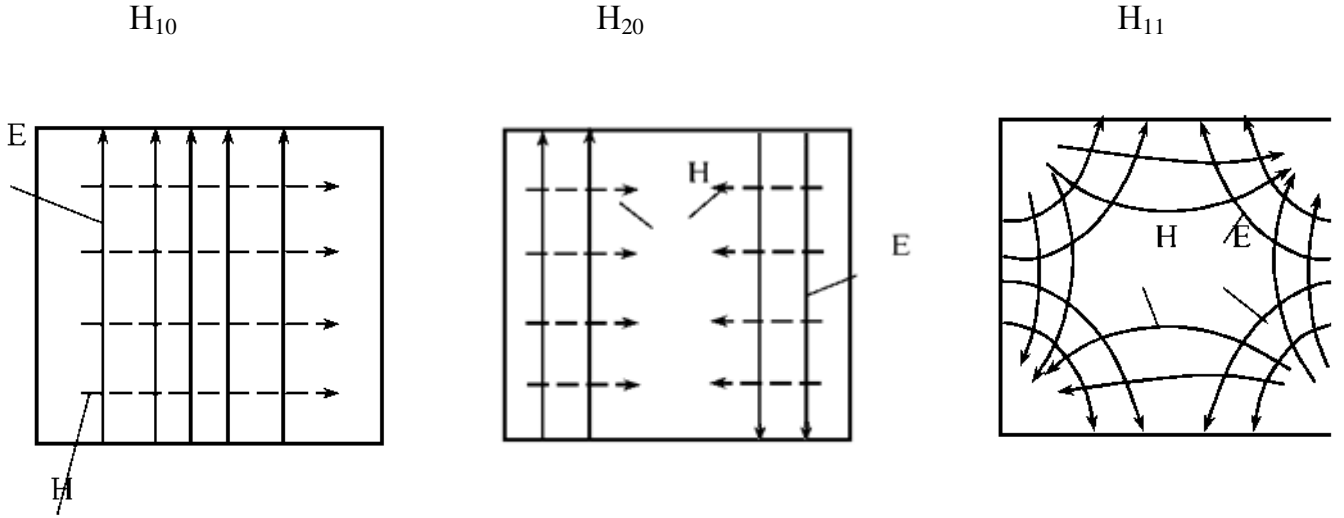


Рис. 7.4

Картина силовых линий поля простейших волн магнитного типа изображена на рис. 7.4. Наибольшее практическое значение имеет волна типа H_{10} в прямоугольном волноводе. Составляющие векторов поля этой волны описываются выражениями:

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= 0, \\ \dot{E}_y &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= -\frac{h}{\omega\mu_a} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_y &= 0, \\ \dot{H}_z &= j \frac{\pi}{a} \frac{E_0}{\omega\mu_a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}.\end{aligned}\tag{7.12}$$

Составляющие векторов поля волны типа E_{mn} в круглом волноводе имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= -j \frac{h}{g} E_0 J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi &= j \frac{hm}{g^2 r} E_0 J_m(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= E_0 J_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_r &= -j \frac{\omega\epsilon_a}{g^2 r} m E_0 J_m(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_\varphi &= -j \frac{\omega\epsilon_a}{g} E_0 J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= 0.\end{aligned}\tag{7.13}$$

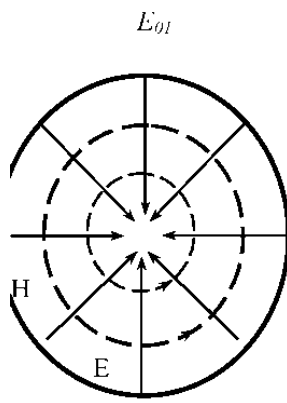


Рис. 7.5

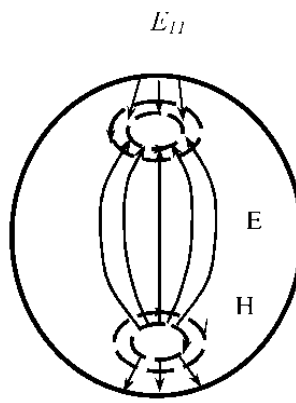
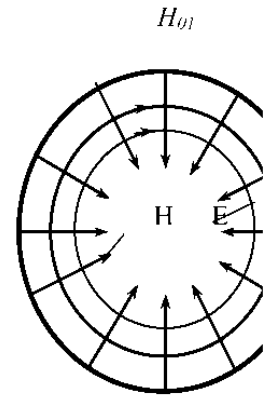
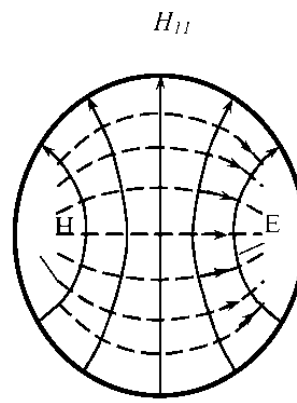


Рис. 7.6



Низшей среди волн электрического типа в круглом волноводе является волна E_{01} , для которой $\lambda_{кр} = 2,613a$, ближайшим высшим типом – волна E_{11} . Картина силовых линий поля волн типов E_{01} и E_{11} изображена на рис. 7.5.

Выражения для составляющих векторов поля волн типа H_{mn} в круглом волноводе имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= j \frac{\omega \mu_a}{g^2 r} m H_0 J_m(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi &= j \frac{\omega \mu_a}{g} H_0 J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_r &= -j \frac{h}{g} H_0 J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_\varphi &= j \frac{hm}{g^2 r} H_0 J_m(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= H_0 J_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}.\end{aligned}\tag{7.14}$$

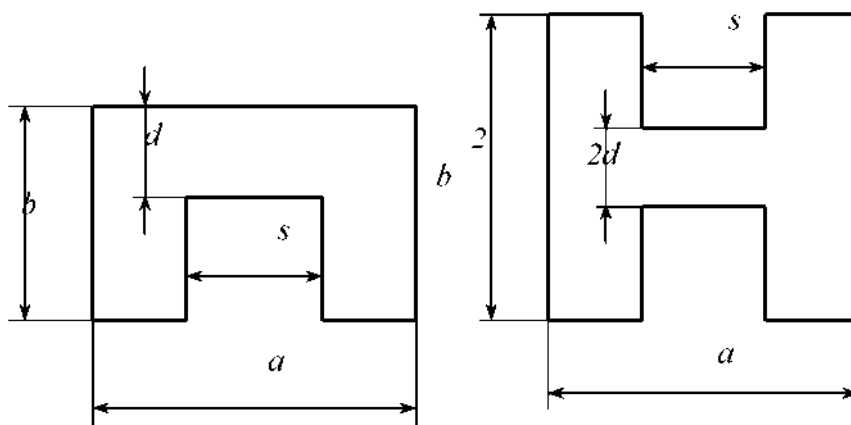


Рис. 7.7

Основным типом волны в круглом волноводе, имеющим наибольшую критическую длину, является волна H_{11} , для которой $\lambda_{кр} = 3,413a$. Из других волн магнитного типа в круглом волноводе часто используют волну H_{01} для которой $\lambda_{кр} = 1,640a$. Картина силовых линий поля волны типов H_{11} и H_{01} изображена на рис. 7.6. Кроме прямоугольных и круглых волноводов в технике СВЧ используют волноводы П и Н образного сечения (рис.7.7). Их особенность состоит в том, что при тех же габаритных размерах a и b они имеют большую критическую длину волны основного типа, чем прямоугольные волноводы, в то время как критическая длина волны высших типов изменяется мало. Вследствие этого рабочий диапазон частот П- и Н-образных волноводов значительно шире по сравнению с прямоугольными.

Анализ П- и Н-образных волноводов производят численными методами. Критическая длина волны основного типа H_{10}

$$\lambda_{кр} = \frac{2a}{\xi}, \quad (7.15)$$

где ξ , - фактор понижения критической частоты, зависящий от размеров выступа d и s .

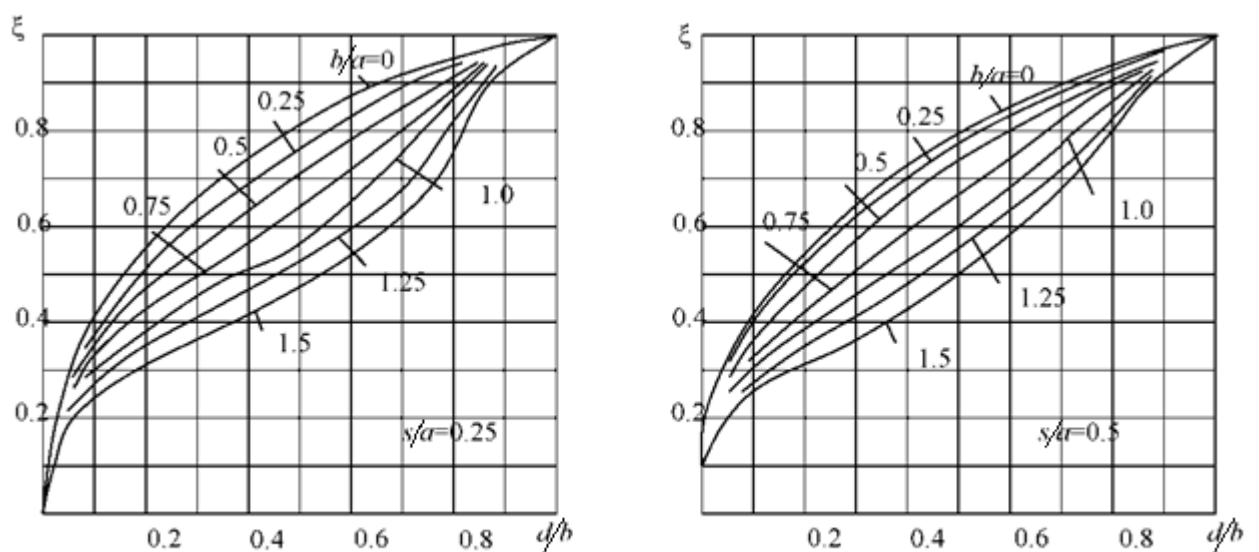


Рис. 7.8

Значения ξ для некоторых размеров волноводов приведены на рис 7.8, а, б. Более подробные сведения о П- и Н-образных волноводах можно найти в [6].

Характеристическим сопротивлением Z_c волновода называется отношение поперечных составляющих векторов E и H . Для волн электрического типа

$$Z_{cE} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (7.16)$$

Для волн магнитного типа

$$Z_{сН} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (7.17)$$

где Z_0 — характеристическое сопротивление плоской волны в свободном пространстве.

Мощность, переносимую волной любого типа в волноводе, определяют интегрированием вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода:

$$P_{ср} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \left\{ 1_z \left[\dot{E} \tilde{H} \right] \right\} dS. \quad (7.18)$$

Подставляя выражения для составляющих векторов поля (7.12) в (7.18) получим формулу для расчета мощности, переносимой волной типа H_{10} в прямоугольном волноводе:

$$P = \frac{E_0^2 ab \sqrt{1 - [\lambda_0/2a]^2}}{4Z_0}. \quad (7.19)$$

где E_0 — максимальная амплитуда напряженности электрического поля в волноводе.

Аналогично выводится формула для расчета мощности, переносимой волной типа H_{11} в круглом волноводе:

$$P = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4.28 Z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (7.20)$$

$$P_{max} = 597 ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}.$$

Максимальная переносимая мощность в волноводе определяется максимально допустимой (пробивной) напряженностью электрического поля в волноводе. Для сухого воздуха при атмосферном давлении $E_{max}=30$ кВ/см, в этом случае максимальная мощность P_{max} имеет размерность кВт, а размеры волновода a и b подставляются в сантиметрах.

Затухание волн в волноводах зависит от потерь в металлических стенках и в материале, заполняющем волновод. Результирующий коэффициент ослабления волны в волноводе равен сумме коэффициентов ослабления, вызванных потерями в металлических стенках и диэлектрике:

$$\alpha_{общ} = \alpha_m + \alpha_d.$$

Коэффициент ослабления вследствие потерь в металлических стенках для любой волны в волноводе произвольного сечения

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \frac{R_s \int |\dot{H}_\tau|^2 dl}{\int_S \operatorname{Re} \{ [\dot{E} \tilde{H}] \} dS}, \quad (7.21)$$

где $R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}}$ — поверхностное сопротивление металла; H_τ — составляющая

магнитного поля, тангенциальная к поверхности металла.

Интеграл в числителе выражения (7.21) берут по контуру сечения волновода, интеграл в знаменателе — по его поперечному сечению.

Подставляя соотношения для составляющих векторов поля в общее выражение (7.21), получим расчетные формулы для коэффициентов ослабления конкретных типов волн в волноводах:

для волн типа H_{10} в прямоугольном волноводе

$$\alpha_m = \frac{R_s \left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \frac{2b}{a} \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}, \quad (7.22)$$

для типа H_{mn} в прямоугольном волноводе ($n \geq 1$)

$$\alpha_m = \frac{2R_s}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{кр}} \right)^2}} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{кр}} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{кр}} \right)^2 \right) \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} n^2 + m^2 \right)}{\frac{b^2 n^2}{a^2} + m^2} \right\}, \quad (7.23)$$

для волн типа E_{mn} в прямоугольном волноводе

$$\alpha_m = \frac{2R_s \left(\left(\frac{b}{a} \right)^3 n^2 + m^2 \right)}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{кр}} \right)^2 \left(\frac{b^2 n^2}{a^2} + m^2 \right)}}, \quad (7.24)$$

для волн типа H_{mn} в круглом волноводе

$$\alpha_m = \frac{2R_s}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{кр}} \right)^2}} \left\{ \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{кр}} \right)^2 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} \right\} \quad (7.25)$$

для волн типа E_{mn} в круглом волноводе

$$\alpha_m = \frac{2R_s}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (7.26)$$

Расчетные формулы (7.20), (7.21), (7.23)—(7.26) получены в предположении, что волновод имеет воздушное заполнение. Если волновод заполнен диэлектриком, то в эти формулы вместо λ_0 следует подставлять значение длины волны в диэлектрике $\lambda_0 / \sqrt{\epsilon}$.

Для расчета коэффициента ослабления за счет потерь в диэлектрике можно воспользоваться формулой (7.5), где вместо ϵ следует подставить комплексную проницаемость диэлектрика $\tilde{\epsilon} = \epsilon (1 - j \operatorname{tg} \delta_3)$

$$\text{В результате получим } \alpha_d = \operatorname{Im} \left[\sqrt{\beta^2 \tilde{\epsilon} (1 - j \operatorname{tg} \delta_3) - g^2} \right]. \quad (7.27)$$

При условии $\operatorname{tg} \delta_3 \ll 1$ формула (7.27) может быть упрощена:

$$\alpha_d \approx \frac{\beta^2 \epsilon \operatorname{tg} \delta_3}{2h}, \quad (7.28)$$

$$\alpha_d \approx \frac{\pi \epsilon \operatorname{tg} \delta_3}{\lambda_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}, \quad (7.29)$$