Тема 1. Электромагнитные волны

Лекция 3. Плоские электромагнитные волны.

1. Основные понятия, характеризующие волну
2. Решение задачи распространения плоской волны в однородной изотропной среде
3. Свойства плоской волны в однородной среде

1. Основные понятия, характеризующие волну

Электромагнитное поле, как форма материи, существует в движении, которое проявляется в виде электромагнитных волн (ЭМВ).

Электромагнитной волной называется процесс распространения в пространстве изменений электромагнитного поля. В практике радиолокации и связи чаще всего используются поля, изменяющиеся во времени по гармоническому закону, поэтому применительно к ним электромагнитной волной можно назвать процесс распространения в пространстве переменного электромагнитного поля.

Сформулируем основные понятия, характеризующие процесс распространения ЭМВ.

Поверхностью равных фаз называется воображаемая поверхность в пространстве, во всех точках которой начальные фазы напряженностей поля одинаковы.

Электромагнитная волна (волновой процесс) характеризуется тем свойством, что поверхности равных фаз перемещаются в пространстве с фазовой скоростью, близкой к скорости света.

В зависимости от формы поверхности равных фаз волны бывают: плоские, сферические и цилиндрические.

Плоской называется такая электромагнитная волна, у которой поверхности равных фаз образуют семейство параллельных плоскостей (рис. 1).

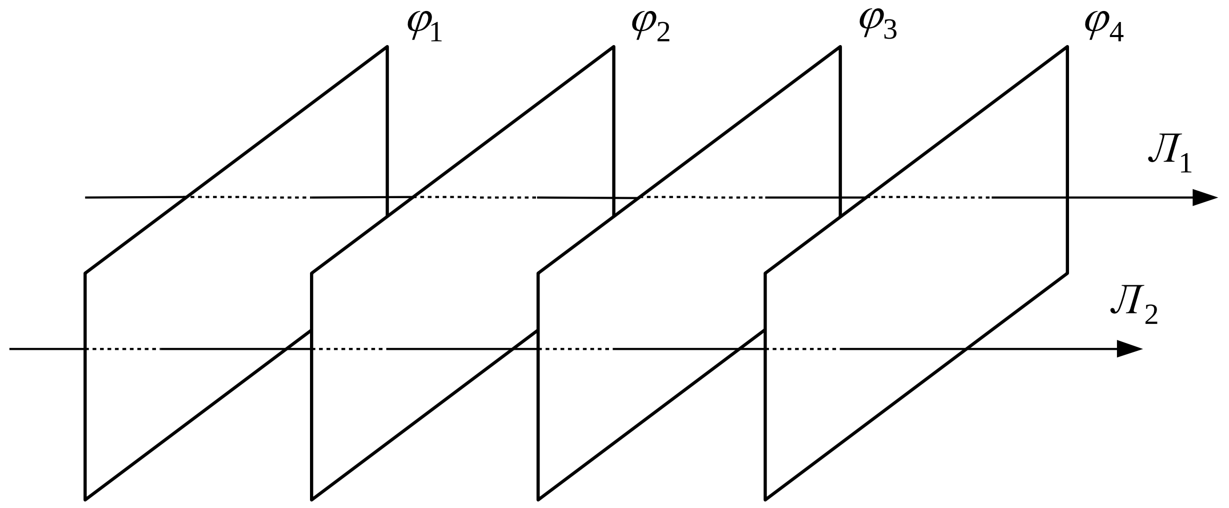

Рис. 1

Сферической называют волну, у которой поверхности равных фаз образуют семейство концентрических сфер (рис. 2).

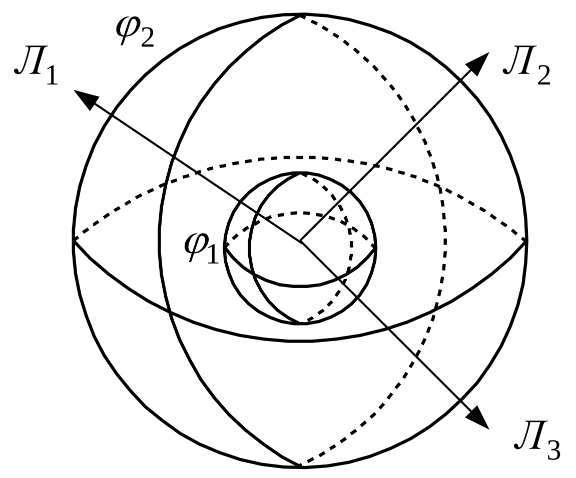

Рис. 2

Цилиндрическая ЭМВ имеет поверхности равных фаз в виде семейства коаксиальных цилиндров (рис. 3).

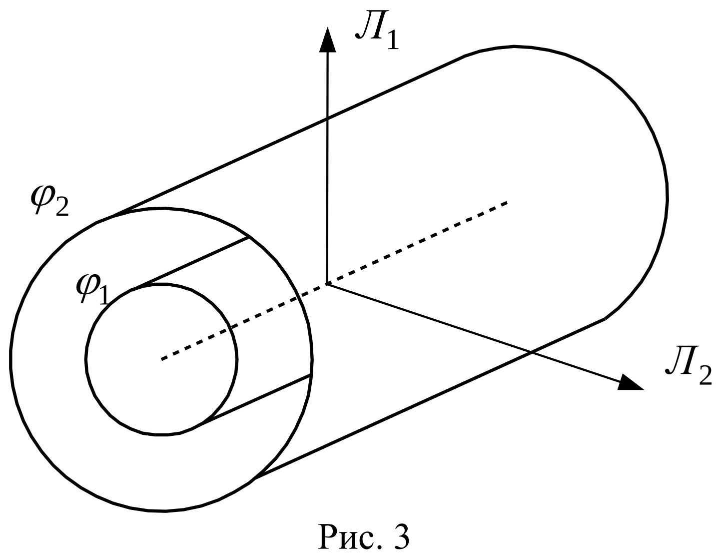

Рис. 3

Для наглядной иллюстрации распространения ЭМВ вводится понятие лучей, которые представляют собой линии, нормальные к семейству поверхностей равных фаз. Направление лучей совпадает с направлением распространения волны (рис. 1 - 3).

Электромагнитная волна характеризуется векторами напряженностей электрического и магнитного полей, каждый из которых может быть представлен с помощью трех проекций на оси выбранной системы координат. В зависимости от наличия (отсутствия) каких-либо составляющих векторов поля ЭМВ делятся на следующие типы: волны типа Е, волны типа Н и волны типа ТЕМ.

Волной типа Е (поперечно-магнитной волной) называется такая волна, у которой в любой точке наблюдения составляющая вектора магнитного поля, параллельная направлению распространения (лучу), равна нулю, а такая же составляющая электрического поля не равна нулю (рис. 4).

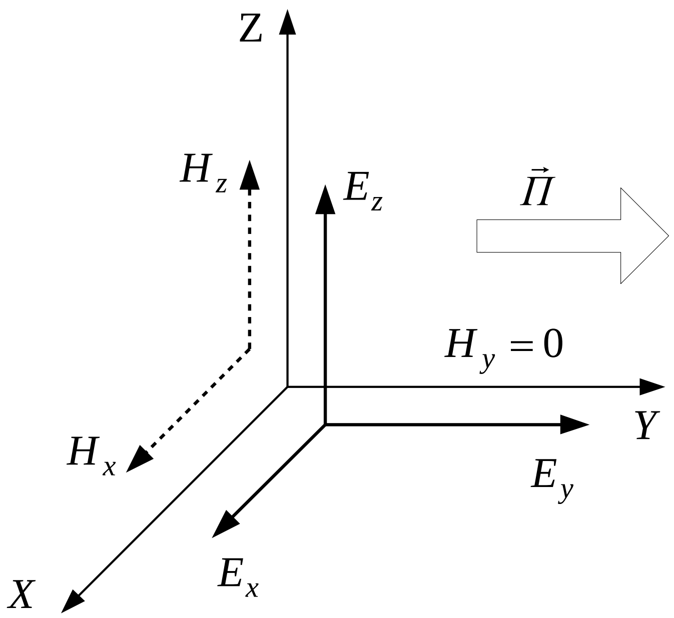

Рис. 4

Волной типа Н (поперечно-электрической волной) называется волна, у которой в любой точке наблюдения составляющая вектора электрического поля, параллельная лучу, равна нулю, а такая же составляющая магнитного поля не равна нулю (рис. 5).

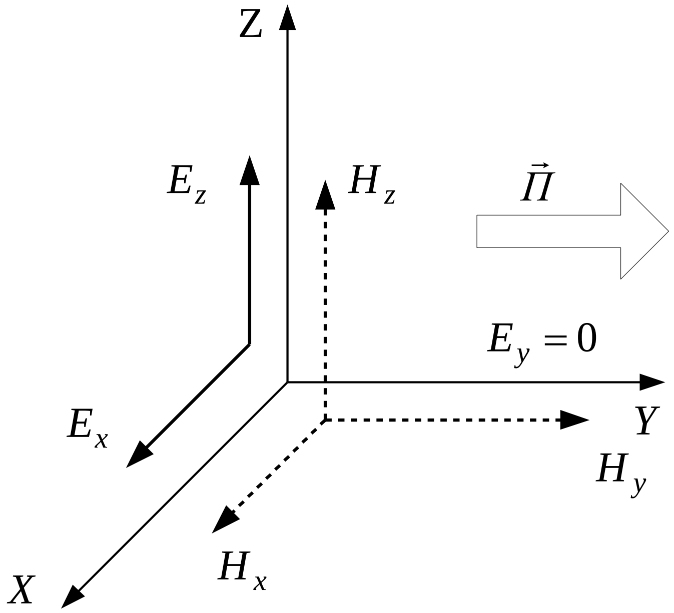

Рис. 5

Волна типа ТЕМ (поперечная волна) имеет только составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, перпендикулярные направлению распространения.

Задача нахождения напряженностей поля ЭМВ при ее распространении в пространстве формулируется следующим образом.

В неограниченной электрически однородной среде с заданными параметрами ε_a, μ_a и σ возбуждено гармоническое электромагнитное поле с частотой и известным признаком (заранее заданным свойством). Найти векторные функции $\vec{E}(M)$ и $\vec{H}(M)$.

Как правило, такие задачи решаются по универсальному алгоритму, включающему следующие операции.

1. Выбор подходящей системы координат.
2. Описание известного признака поля ЭМВ в виде математических соотношений в выбранной системе координат.
3. Выбор уравнения для нахождения одной из неизвестных функций $\vec{E}(M)$, и $\vec{\Pi}^e(M)$ т. д. и упрощение этого уравнения с помощью соотношений, упомянутых во втором пункте.
4. Решение уравнения для выбранной неизвестной функции.
5. Нахождение остальных неизвестных функций по найденной. Этот алгоритм будет в дальнейшем использоваться при решении задач распространения радиоволн различных типов.

Выводы:

1). По виду поверхности равных фаз различают плоские, сферические и цилиндрические волны;

2). Все волны имеют поперечные составляющие поля. Наличие или отсутствие продольных составляющих поля определяет тип волны (Е, Н и ТЕМ).

2. Решение задачи распространения плоской волны в однородной изотропной среде

Рассмотрим гармоническое электромагнитное поле, которое обладает следующим наперед заданным свойством: в нем можно провести бесчисленное множество параллельных плоскостей S_1, S_2, ..., в каждой из которых напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ постоянны для фиксированного момента времени, а плотности свободных зарядов $\rho(M)$ и сторонних токов $\dot{\vec{j}}^{cm}(M)$ равны нулю (рис. 6).

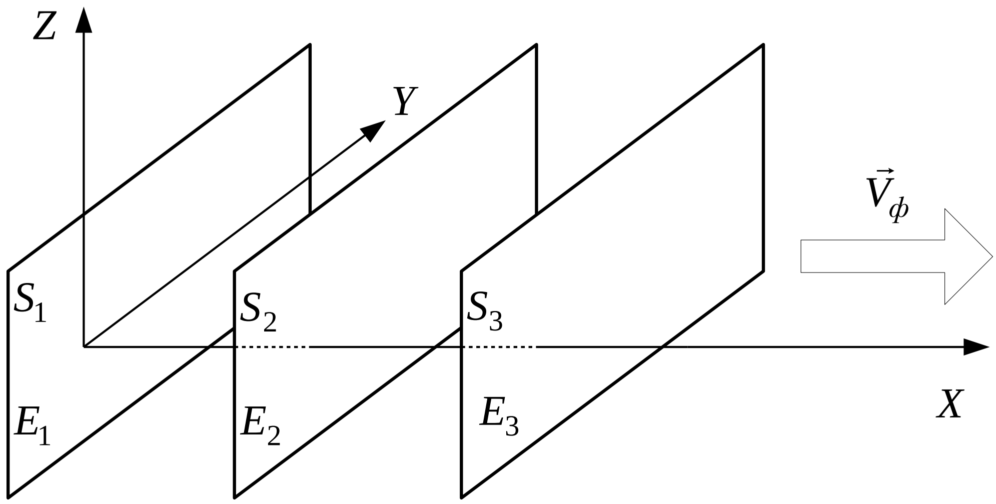

Рис. 6

Требуется найти функции распределения напряженностей электрического и магнитного полей в пространстве.

Решение задачи

1. Выберем прямоугольную декартову систему координат (рис. 6).

2. Опишем математически заданные свойства поля в выбранной системе координат.

В нашем случае в пределах поверхностей параллельных плоскости YOZ величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ постоянны, следовательно,

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial z} = \frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial z} = 0. \qquad (1)$$

Кроме того, $\rho = 0$, $\dot{\vec{j}}^{cm} = 0$

3. В данном случае для решения задачи целесообразно воспользоваться волновым уравнением и выражением , учитывая, что $\rho = 0$ и $\dot{\vec{j}}^{cm} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0; \\ div\dot{\vec{E}} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В декартовой системе координат уравнения (2) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial z^2} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\vec{E}}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\vec{E}}_z}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

С учетом заранее заданных свойств выражения (3) и (4) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial x^2} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0; \\ \frac{\partial \dot{\vec{E}}_x}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

4. Решение уравнений (5) начинается с перехода от векторного уравнения для $\dot{\vec{E}}$ к уравнениям для составляющих этого вектора $\dot{\vec{E}}_x$, $\dot{\vec{E}}_y$, $\dot{\vec{E}}_z$. Представим вектор $\dot{\vec{E}}$ в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\dot{\vec{E}} = \dot{E}_x \vec{x}_o + \dot{E}_y \vec{y}_o + \dot{E}_z \vec{z}_o,$$

где $\vec{x}_o$, $\vec{y}_o$, $\vec{z}_o$ - единичные орты.

Подставляя это выражение для вектора $\dot{\vec{E}}$ в (5), приведем первое уравнение системы к виду

$$\left(\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_x}{\partial x^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_x \right) \vec{x}_o + \left(\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_y}{\partial x^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_y \right) \vec{y}_o + \left(\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_z}{\partial x^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_z \right) \vec{z}_o = 0$$

Приравнивая нулю, множители при ортах $\vec{x}_o$, $\vec{y}_o$, $\vec{z}_o$ получаем три скалярных уравнения для составляющих искомого вектора

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + k^2 \dot{E}_x = 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + k^2 \dot{E}_y = 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + k^2 \dot{E}_z = 0; \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставим последнее уравнение системы (6) в первое и сразу получим его решение

$$k^2 \dot{E}_x = 0, \quad \dot{E}_x = 0. \tag{7}$$

Интегралы второго и третьего уравнений (6) известны, они имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_y &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx};\\ \dot{E}_z &= A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}.\end{aligned}\right\}$$

где A_1, A_2, B_1 и B_2 - произвольные постоянные интегрирования.

С целью упрощения решения ограничимся частным случаем, когда $A_1 = B_1 = A_2 = 0$, т. е. предположим, что в пространстве распространяется только прямая волна (отраженная отсутствует), а вектор параллелен оси Z. Учитывая, что $\dot{E}_x = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_x &= \dot{E}_y = 0,\\ \dot{E}_z &= B_2 e^{-ikx}.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Для нахождения постоянной интегрирования в последнем равенстве (8) будем считать $x = 0$.

$$\dot{E}_z /_{x=0} = B_2 .$$

Отсюда следует, что постоянная B_2 равна значению составляющей $\dot{E}_z$ поля в точках координатной плоскости YOZ. Обозначив его через E_{0z} из выражений (3,8), получим частное решение уравнения (2)

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_x &= \dot{E}_y = 0,\\ \dot{E}_z &= E_{0z} e^{-ikx}.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Для упрощения будем полагать, что величина E_{0z}- вещественная (начальная фаза E_z в точках плоскости YOZ равна нулю).

5. Найдем составляющие магнитного поля по уже известным составляющим электрического поля, используя второе уравнение Максвелла

$$rot\dot{\vec{E}} = -i\omega\mu_a \dot{\vec{H}} .$$

Решая это уравнение относительно вектора $\dot{\vec{H}}$ и представляя его в проекциях на оси координат, получим

$$\dot{H}_x = -\frac{1}{i\omega\mu_a}\left(\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}\right) = 0, \qquad (10)$$

так как в соответствии с условием (1)

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = 0;$$

$$\dot{H}_z = -\frac{1}{i\omega\mu_a}\left(\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y}\right) = 0. \qquad (11)$$

поскольку $\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0$

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{i\omega\mu_a}\left(\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{i\omega\mu_a}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}.$$

Подставляя значение из выражения (9), получим

$$\dot{H}_y = \frac{1}{i\omega\mu_a}\frac{\partial}{\partial x}\left(E_{0z}e^{-ikx}\right) = \frac{-k}{\omega\mu_a}E_{0z}e^{-ikx}. \qquad (12)$$

Таким образом, уравнения (9)-(12) представляют собой решение поставленной задачи.

Для перехода от комплексных к мгновенным значениям составляющих поля необходимо определить волновое число для среды, состоящей из реального диэлектрика. С этой целью введем новое обозначение

$$\dot{\varepsilon}_k = \varepsilon_a\left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_a}\right). \qquad (3.13)$$

Величину $\dot{\varepsilon}_k$ принято называть комплексной диэлектрической проницаемостью.

С учетом формулы (13) выражение для волнового числа примет вид

$$\dot{k} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}_k\mu_a}. \qquad (14)$$

Из этого уравнения следует, что для среды с потерями (реальной среды) величина является комплексной и ее можно представить в виде

$$\dot{k} = \beta - i\alpha, \qquad (15)$$

где β - действительная часть $\dot{k}$;

α - мнимая часть $\dot{k}$.

Подставляя формулу (15) в выражение (9) получим:

$$\dot{E}_z = E_{0z}e^{-\alpha x}e^{-i\beta x} \qquad (16)$$

Множитель $E_{0z}e^{-\alpha x}$ описывает амплитуду волны, а произведение βx- изменение фазы при увеличении расстояния вдоль оси x.

После перехода от комплексных величин к мгновенным значениям напряженности электрического поля уравнение (3.16) примет вид

$$E_z(t) = E_{0z}e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x). \qquad (17)$$

Теперь необходимо проанализировать полученное решение и сформулировать свойства плоской электромагнитной волны.

Выводы:

1). В уравнения поля множитель $e^{-\alpha x}$ говорит о затухании электромагнитной волны при ее распространении вдоль координаты X;

2). Множитель $e^{-i\beta x}$ говорит о распространении электромагнитной вдоль координаты X;

3). Множитель $\cos(\omega t - \beta x)$ говорит о колебании поля во времени и о распространении электромагнитной вдоль координаты X.

3. Свойства плоской волны в однородной среде

Проанализируем уравнение (17), описывающее электрическое поле плоской волны, и сформулируем ее свойства.

Первый и второй сомножители уравнения описывают амплитуду волны. Из них следует, что в реальной среде амплитуда убывает по экспоненциальному закону при распространении волны вдоль оси x. Причиной затухания является отличие проводимости среды от нуля, т. е. тепловые потери электромагнитной энергии, связанные с волной. Таким образом, величина α может быть истолкована как коэффициент затухания. В идеальной среде, где отсутствуют потери, $\alpha = 0$, амплитуда поля не убывает.

Рассмотрим фазу колебания в некоторой точке пространства. С этой целью введем обозначение

$$\psi = \omega t - \beta x, \tag{18}$$

где ψ - фаза волны.

Из уравнения (18) выразим x.

$$x = \frac{\omega t}{\beta} - \frac{\psi}{\beta}. \tag{19}$$

Считая $\psi = \psi_o = 0$, $t = t_o$, и учитывая, что ω и β также величины постоянные, получим выражение

$$x = \frac{\omega t_o}{\beta} - \frac{\psi_o}{\beta} = const\ ,$$

которое является уравнением семейства плоскостей (поверхностей равных фаз), параллельных плоскости YOZ. Следовательно, изучаемая нами волна плоская.

Если в уравнении (19) увеличивать время t, (при $\psi = \psi_o = const$, то будет расти величина x, которая соответствует положению поверхности равных фаз с начальной фазой ψ_o. Это означает, что поверхности равных фаз перемещаются и интересующее нас поле представляет собой волну.

Определим скорость распространения этой волны. Путь, пройденный точкой с заданной фазой ψ_o, равен x, следовательно, фазовая скорость $V_ф$ равна производной dx/dt. Дифференцируя выражение (19) по t, получим

$$V_ф = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega}{\beta}t - \frac{\psi}{\beta}\right) = \frac{\omega}{\beta}. \tag{20}$$

Величина β, входящая в последнюю формулу, выполняет функцию волнового числа k (при $\sigma = 0$, $\alpha = 0$). Она зависит от ε_a, μ_a, σ и ω.

Следовательно, фазовая скорость плоской волны зависит от свойств среды и частоты колебаний.

В частном случае идеальной электрической среды ($\sigma = 0$), $\alpha = 0$, а $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$. Тогда из уравнения (20) получим

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

$$V_\phi = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \qquad (21)$$

где $C = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$ - скорость света.

Для свободного пространства $\varepsilon = \mu = 1$ и $V_\phi = C$, т. е. фазовая скорость волны равна скорости света. В диэлектрике, для которого относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon > 1$, фазовая скорость всегда меньше скорости света.

Если зафиксировать некоторый момент времени, на основании выражений (11) и (17) можно построить распределение векторов напряженности поля в пространстве (рис. 7). Для плоской волны векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

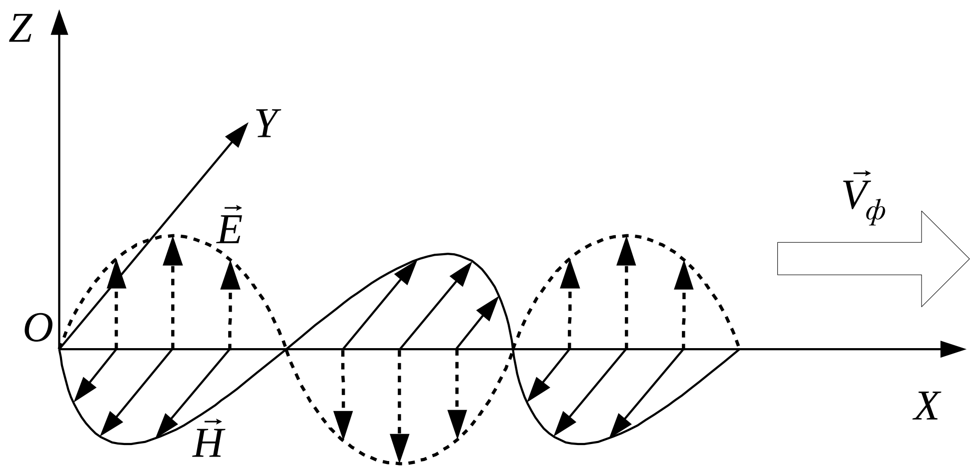

Рис. 7

В том случае, когда $\alpha \neq 0$, вдоль оси x величина каждого вектора будет убывать

Выводы:

1). Фазовая скорость электромагнитной волны зависит от параметров среды ε_a, μ_a,;

2). Если коэффициент затухания равен нулю $\alpha = 0$, то амплитуда плоской волны не изменяется. Если коэффициент затухания не равен нулю $\alpha \neq 0$, то амплитуда плоской волны убывает по экспоненциальному закону $e^{-\alpha x}$.