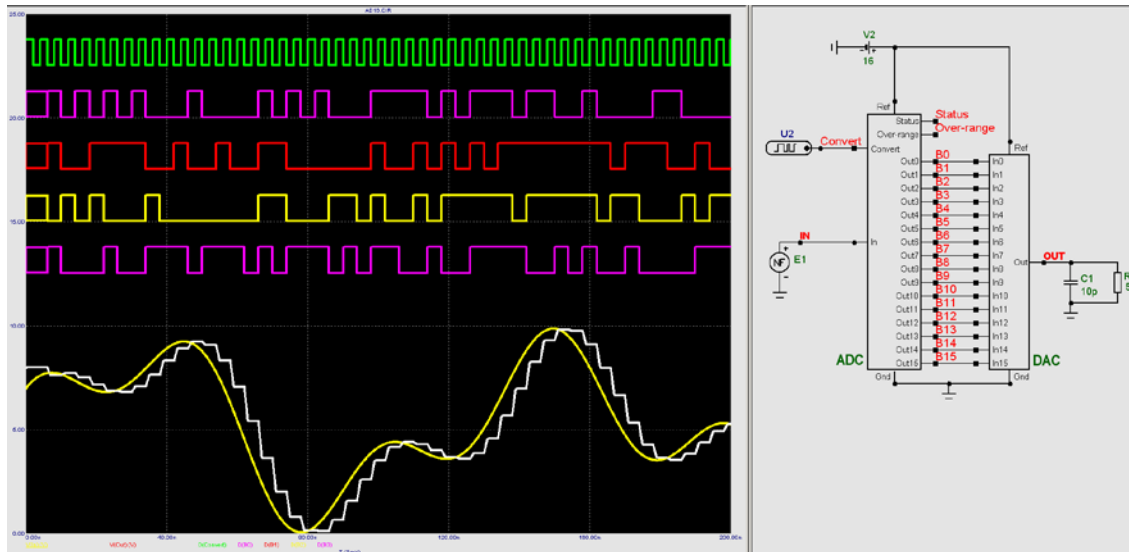


М.А. Амелина

e-mail: amelina.marina@gmail.com

Слайды к курсу лекций

Электронные промышленные устройства (7 семестр)



Информационные материалы и методические пособия размещены на сайте
кафедры: <https://sites.google.com/site/kafeimt>

Электронными промышленными устройствами называют функционально и конструктивно законченные средства получения, обработки, использования информации для управления объектами и процессами, а также отображения состояния объекта и связи его с другими управляющими средствами.

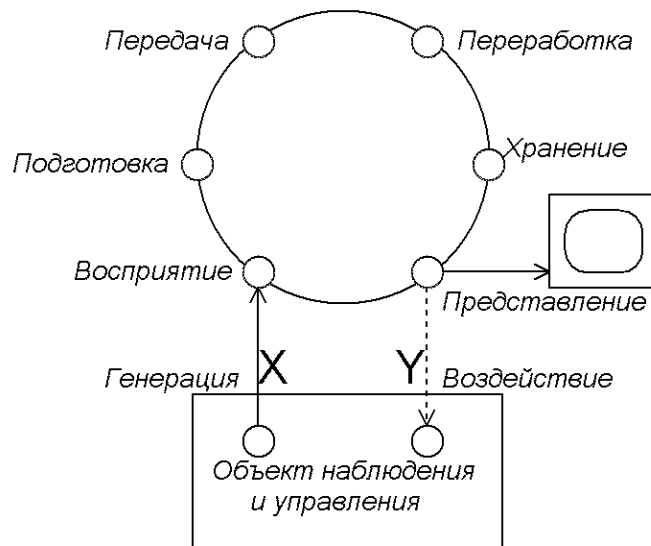
Основные задачи *первичной* обработки сигналов:

- 1) вычисление и преобразование спектров сигналов, например, для правильного выбора характеристик квантования аналоговых сигналов (частота дискретизации и число уровней квантования);
- 2) нормализация — усиление или ослабление сигналов.
- 3) предварительная цифровая или аналоговая фильтрация сигналов с целью выделения из них полезной составляющей, используемой на последующих этапах обработки;
- 4) квантование аналоговых сигналов по времени и уровню;

На *последующих стадиях* решаются задачи измерения, обработки и представления информации об управляемом процессе:

- 5) определение текущих параметров измеряемых процессов (например, скоростей и ускорений их протекания);
- 6) прогнозирование хода управляемых процессов, кодирование;
- 7) цифроаналоговые преобразования, представление и отображение информации.

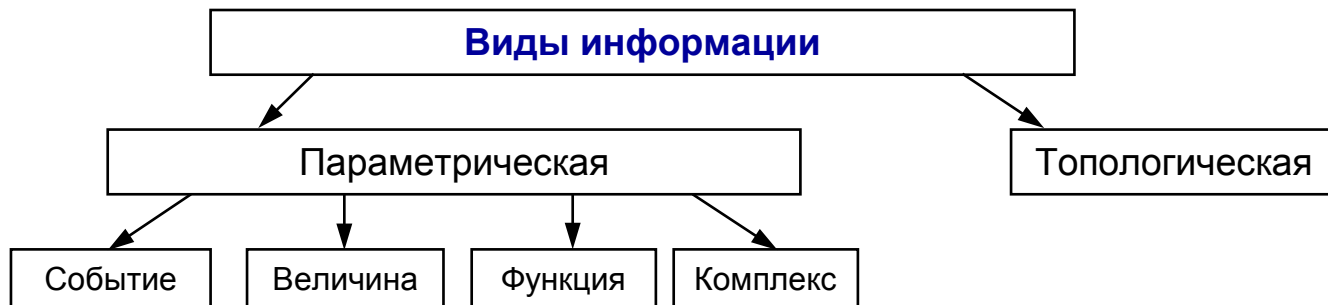
Цикл обращения информации в автоматической системе



Информацией называется совокупность каких-либо сведений об изучаемом процессе (объекте), являющаяся объектом передачи, распределения, преобразования, хранения или непосредственного использования.

Сведения о состоянии источника называются **сообщениями**. Для их передачи используются **сигналы**, которые по имеющимся каналам поступают к приемнику сообщения.

Сигналом называется физический процесс, параметры которого содержат *информацию* (*сообщение*) и который пригоден для обработки и передачи на расстояние (детер. и случайн.).



Виды параметрической информации

Событие

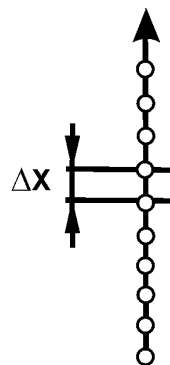
A

● Да
○ Нет

а)

величина

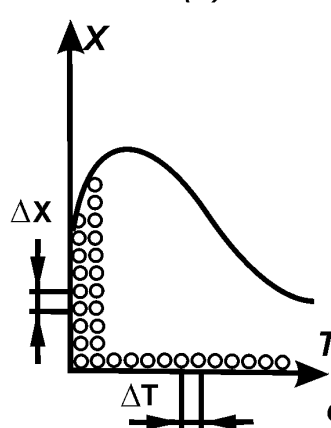
X



б)

функция

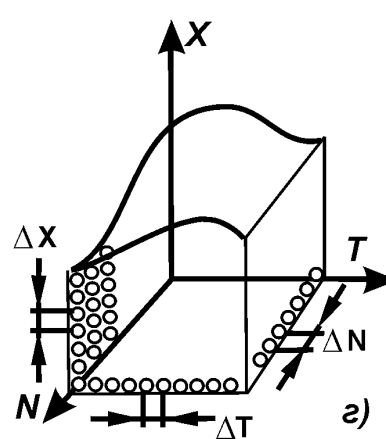
X(T)



в)

комплекс

X(T,N)



г)

Ряд Фурье:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\omega_1 t, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad c_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega_1 t dt \quad (k=1,2,3...)$$

Другая форма записи ряда Фурье:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

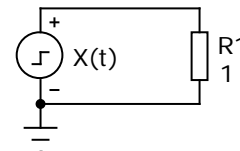
где постоянную составляющую a_0 , амплитуду a_k и фазу φ_k k -ой гармоники сигнала находят как:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad a_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg(-c_k / b_k)$$

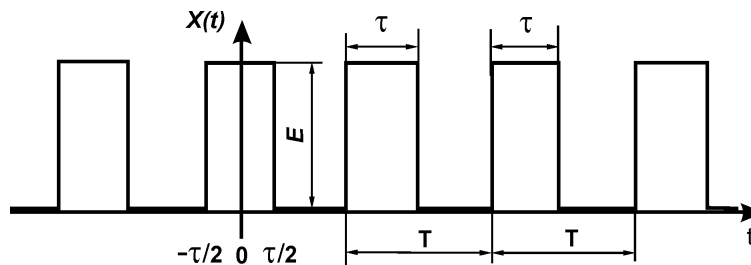
Ряд Фурье в комплексной форме:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k \cdot e^{jk\omega_1 t}, \quad \text{где } D_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt; \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$$

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$



Спектр периодического импульсного сигнала

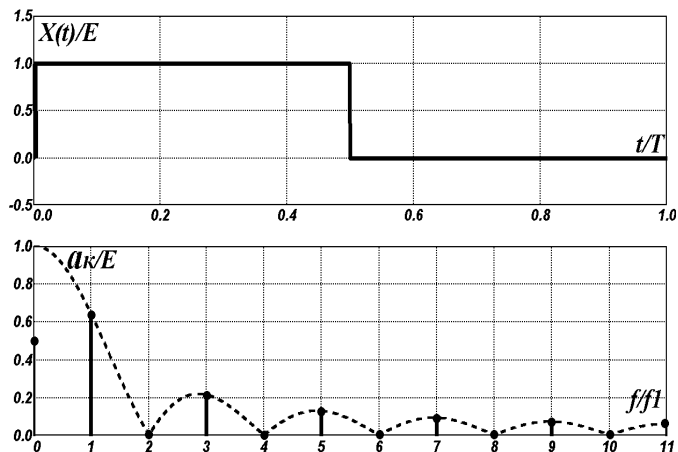


$$\Delta\omega = \frac{T}{\tau} \omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$$

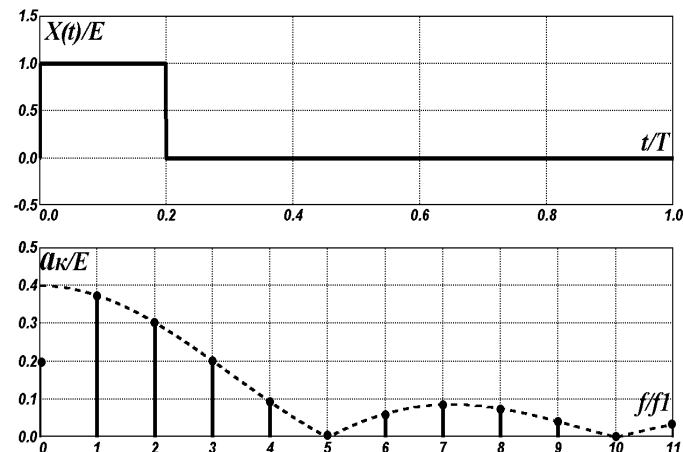
(90% сод. энергии)

$$a_0 = E \frac{\tau}{T}; \quad a_k = \frac{2E}{k\pi} \sin \frac{k\pi\tau}{T}; \quad (k=1,2,3,\dots)$$

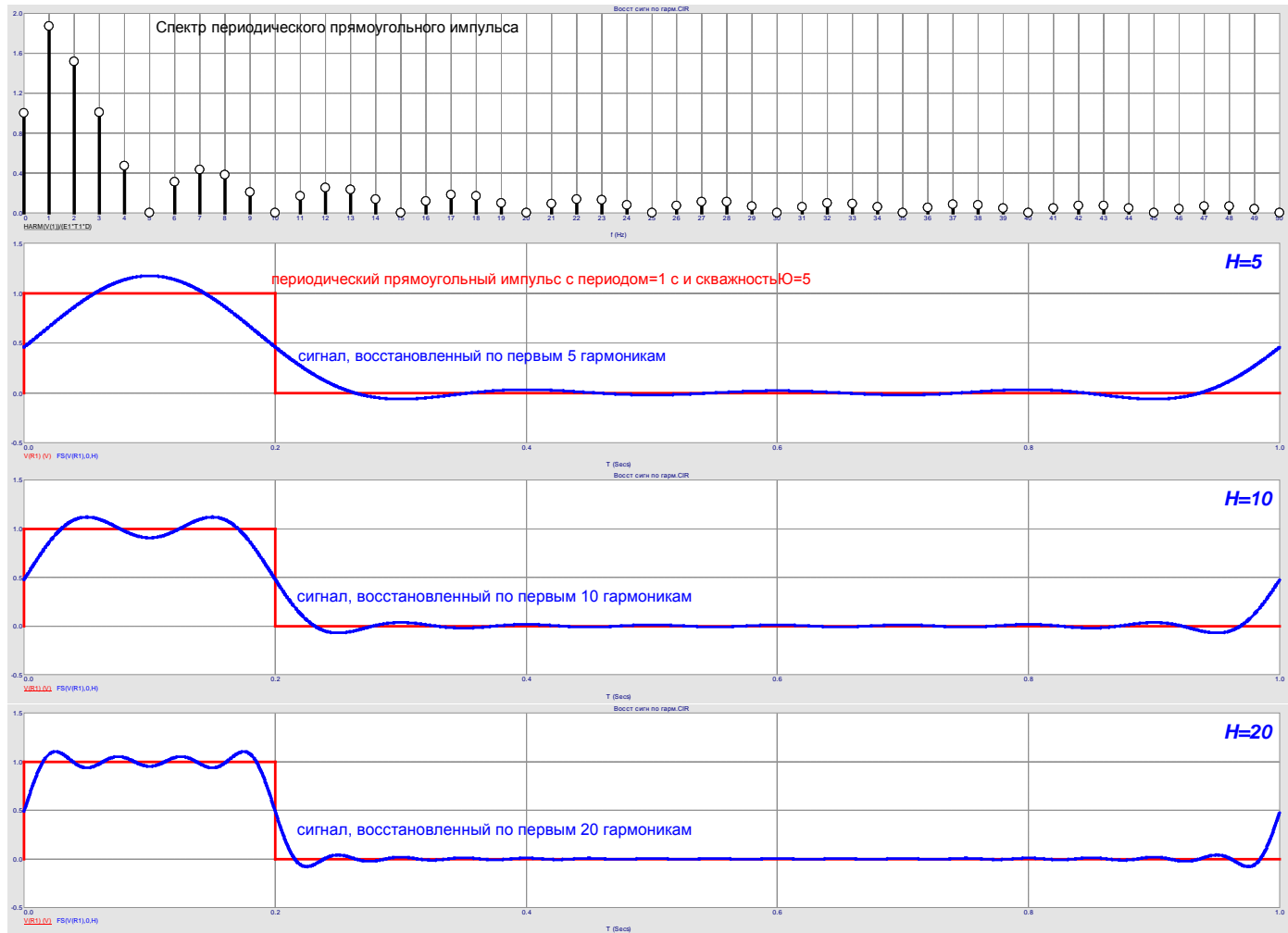
$$\tau/T = 1/2$$



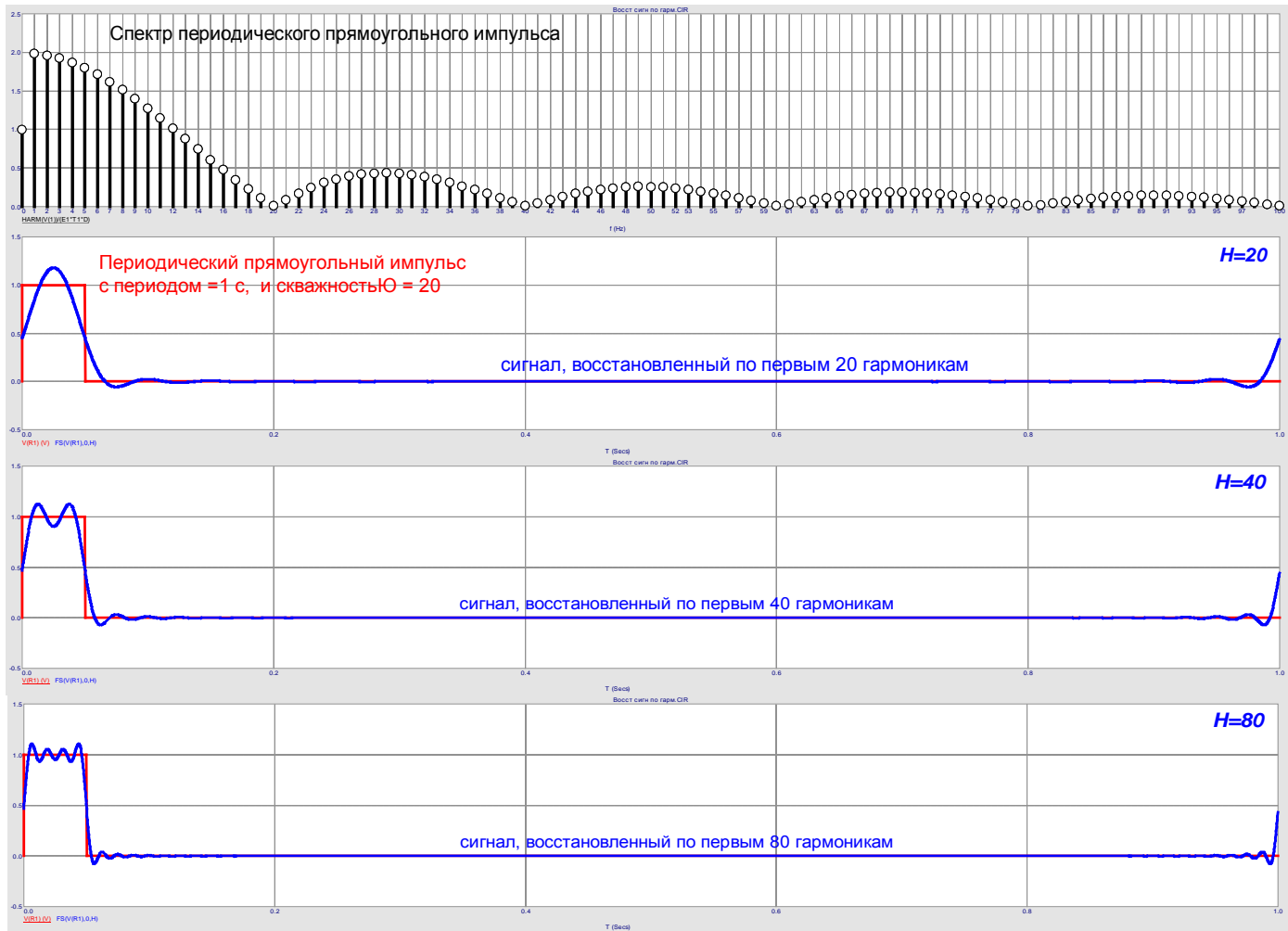
$$\tau/T = 1/5$$



Сквозность 5



Сквозность 20



Если функция $x(t)$, описывающая исследуемый сигнал, на любом конечном интервале удовлетворяет условиям Дирихле и, кроме того, является абсолютно интегрируемой на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty ,$$

то частотный спектр этой функции определяется **интегралом Фурье** (или **прямым преобразованием Фурье**):

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Обратное преобразование Фурье, осуществляющее обратный переход от изображения $X(j\omega)$ к оригиналу — временной функции $x(t)$:

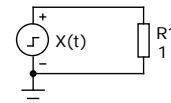
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{d\omega \rightarrow 0} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega \right] e^{j\omega t}$$

Изображение $X(j\omega)$ характеризует плотность распределения амплитуд гармонических составляющих по отдельным участкам спектра и поэтому нередко называется *спектральной плотностью сигнала*

$$X(j\omega) = X(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

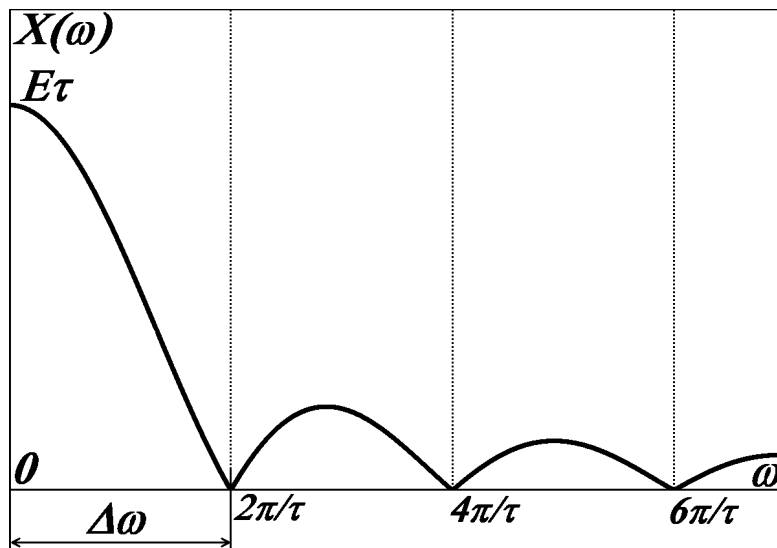
Энергия непериодического сигнала $x(t)$ в частотной области определяется **равенством Парсеваля**

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(\omega) d\omega$$



Частотный спектр одиночного прямоугольного импульса,
принимаяющего значение E на интервале $[0, \tau]$

$$X(j\omega) = 2E \cdot \frac{\sin[\omega\tau/2]}{\omega} \cdot e^{\frac{-j\omega\tau}{2}} \quad X(\omega) = \frac{2E}{\omega} \left| \sin \frac{\tau\omega}{2} \right|$$



Полоса частот $\Delta\omega$, содержащая 90% энергии сигнала, $\Delta f = \Delta\omega/2\pi = 1/\tau$, или:

$$\tau \cdot \Delta f = 1$$

Модуляция. Виды носителей сигналов

Если обозначить параметры носителя через a_1, a_2, \dots, a_n , то **носитель** как функция времени может быть представлен в виде

$$U_H = g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$$

Модулированный носитель (сигнал) можно описать в виде

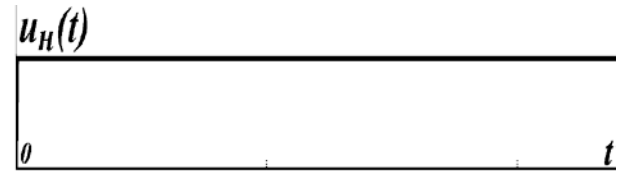
$$U_X = g(a_1, \dots, a_i + \Delta a_i(t), \dots, a_n, t),$$

где $\Delta a_i(t)$ — переменная составляющая параметра носителя, несущая информацию, или модулирующая функция.

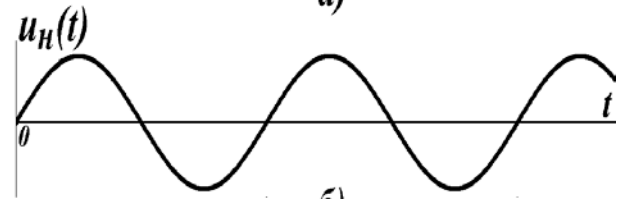
Модулирующая функция обычно связана с информационной (управляющей) функцией x линейной зависимостью

$$\Delta a_i = Kx,$$

где K — коэффициент пропорциональности.



а)



б)



в)

а — постоянное состояние

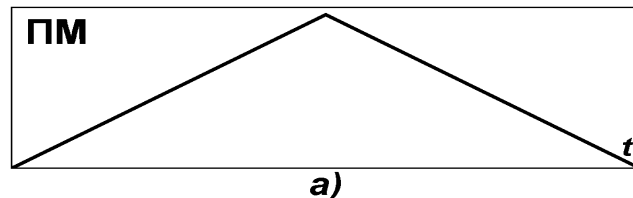
б — колебание;

в — последовательность импульсов

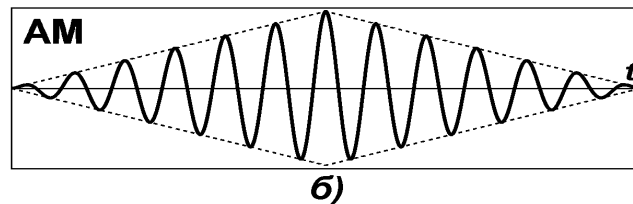
Виды модуляции для гармонического носителя

Преобразование сигнала, заключающееся в изменении какого-либо его информативного параметра в соответствии с передаваемым сообщением, называется **модуляцией**.

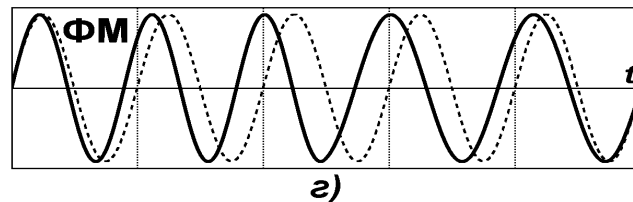
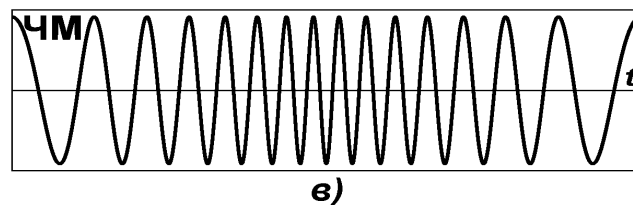
АМ — амплитудная модуляция (**АМ** — amplitude modulation, б;



ЧМ — частотная модуляция (**ФМ** — frequency modulation, в;



ФМ — фазовая модуляция (**РМ** — phase modulation, г.



Виды модуляции импульсного носителя (1)

АИМ — амплитудно-импульсная модуляция (**РАМ** — pulse-amplitude modulation, рис. а);

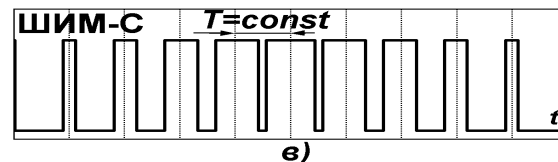
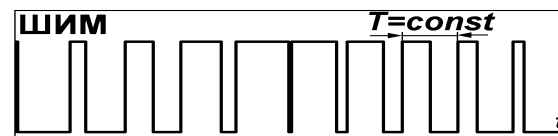
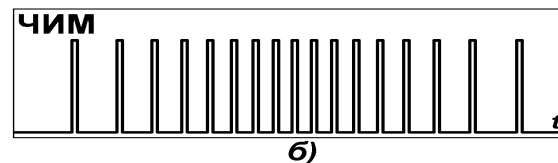
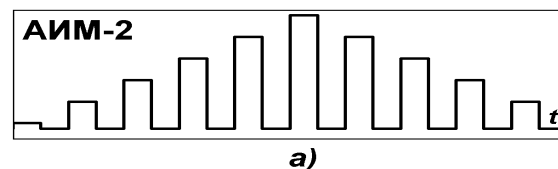
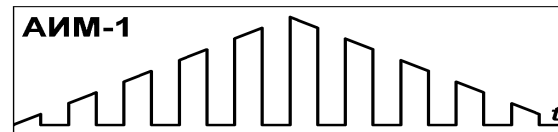
АИМ-1, при которой верхние участки импульсов (амплитуды) повторяют форму модулирующей функции (огibaющей);

АИМ-2, при которой амплитуда в пределах элементарного импульса остается неизменной, определяемой значением модулирующей функции в начале импульса (рис. а).

ЧИМ — частотно-импульсная модуляция (**PFM** — pulse-frequency modulation, рис. б);

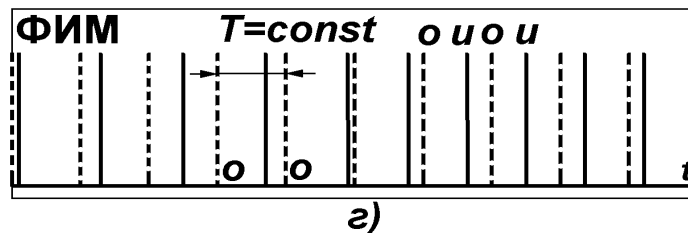
ВИМ — время-импульсная модуляция (**РТМ** — pulse-time modulation);

ШИМ — широтно-импульсная модуляция (**PDM**, **PWM** — pulse-duration (Width) modulation, рис. в);

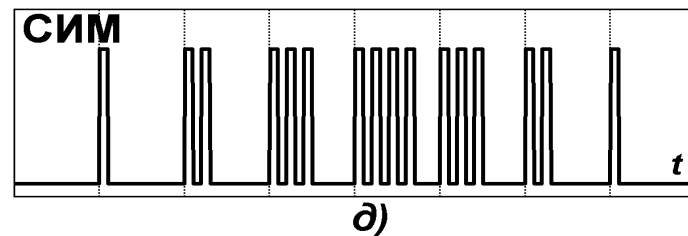


Виды модуляции импульсного носителя (2)

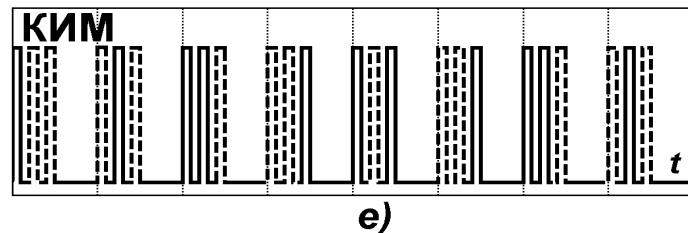
ФИМ — фазо-импульсная модуляция
(**PPM** — pulse-phase modulation, г);



СИМ — счетно-импульсная модуляция
(**PNM** — pulse-number modulation, д);



КИМ — кодо-импульсная модуляция
(**PCM** — pulse-code modulation, е).



Виды манипуляции при передаче цифровой информации

- **амплитудная манипуляция ASK** (Amplitude Shift Keying);

- **частотная манипуляция FSK** (Frequency Shift Keying);

- **фазовая манипуляция PSK** (Phase Shift Keying);

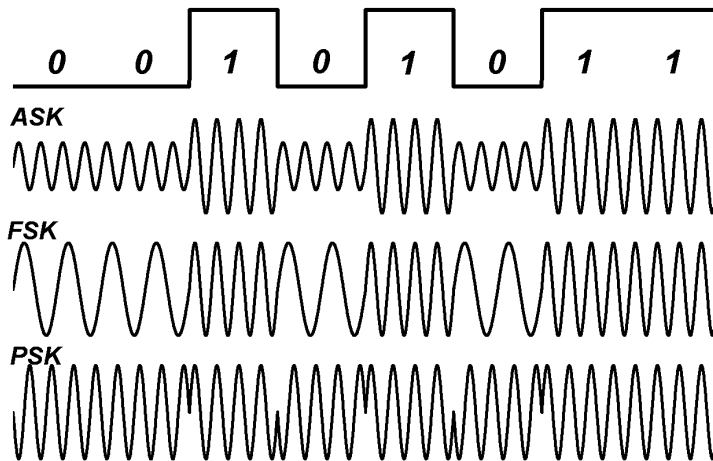
- комбинированная манипуляция амплитуды и фазы — **квадратурная манипуляция (quadrature amplitude shift keying, QASK)**

каждому из возможных значений дискретного символа C ставится в соответствие пара величин — амплитуды синфазной и квадратурной составляющих либо, что эквивалентно, амплитуда и начальная фаза несущего колебания:

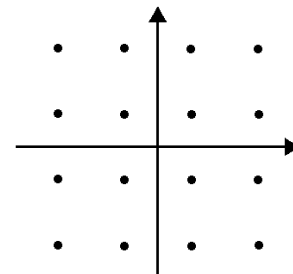
$$C_k \rightarrow (a_k, b_k), \quad s(t) = a_k \cdot \cos(\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(\omega_0 t), \quad kT < t < (k+1)T$$

или

$$C_k \rightarrow (A_k, \varphi_k), \quad s(t) = A_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k), \quad kT < t < (k+1)T$$

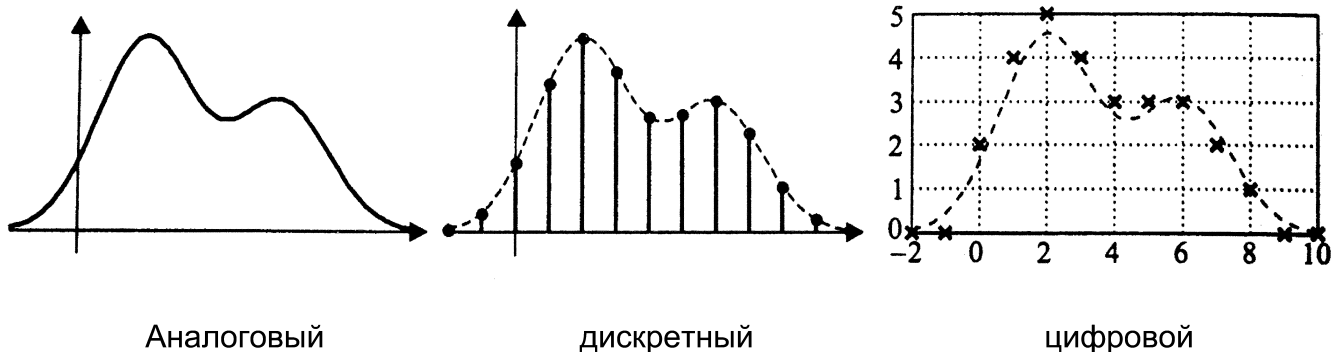


Сигнальное созвездие протокола V.32



Дискретизация сигналов

- 1) непрерывное время — непрерывная величина (аналоговые сигналы);
- 2) дискретное время — непрерывная величина (дискретные сигналы);
- 3) непрерывное время — дискретная величина (дискретно-аналоговые сигналы, на вых. ЦАП);
- 4) дискретное время — дискретная величина (цифровые сигналы).



Процедура аналого-цифрового преобразования непрерывных сигналов, которую реализуют с помощью АЦП, представляет собой преобразование непрерывной функции $U(t)$, описывающей исходный сигнал, в последовательность чисел $\{U_m(t_n)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, отнесенных к некоторым фиксированным моментам времени:

1) **дискретизация** (дискретизация по времени) и состоит в преобразовании непрерывной функции $U(t)$ в непрерывную последовательность $\{U(t_n)\}$, что соответствует переходу из формы 1 в форму 2.

2) **квантование** (дискретизация по уровню) и состоит в преобразовании непрерывной последовательности в дискретную $\{U_m(t_n)\}$, что соответствует переходу из формы 2 в форму 4.

В основе **дискретизации непрерывных сигналов** лежит принципиальная возможность представления их в виде взвешенных сумм

$$x(t) = \sum_n a_n f_n(t)$$

где a_n — некоторые коэффициенты или отсчеты, характеризующие исходный сигнал в дискретные моменты времени; $f_n(t)$ — набор элементарных функций, используемых для восстановления сигнала по его отсчетам.

В основе равномерной дискретизации лежит **теорема отсчетов** (или **теорема Котельникова–Найквиста**):

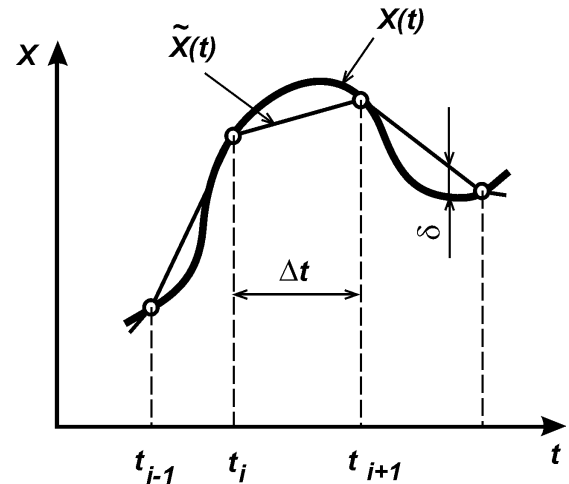
Всякий непрерывный сигнал, имеющий ограниченный частотный спектр, полностью определяется своими дискретными значениями в моменты отсчета, отстоящими друг от друга на интервалы времени не более $\Delta t = 1/(2F_{\max})$, где F_{\max} — максимальная частота в спектре сигнала.

Согласно этой теореме, в качестве коэффициентов a_n необходимо использовать мгновенные значения сигнала $x(t_n)$ в дискретные моменты времени $t_n = n\Delta t$, а период (частоту) дискретизации выбирать из условия

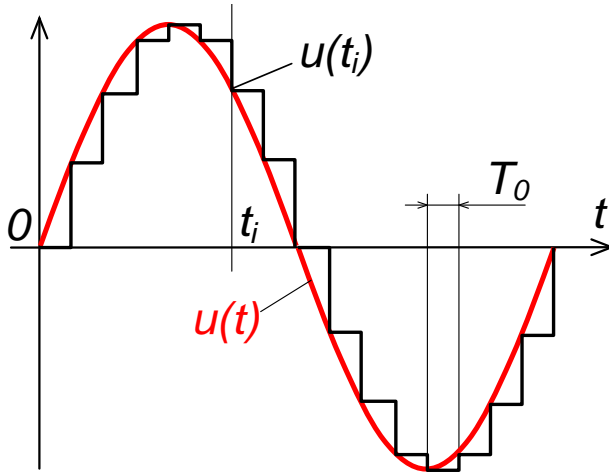
$$\Delta t \leq \frac{1}{2 \cdot F_{\max}} \quad (f_{\text{дискр}} \geq 2 \cdot F_{\max})$$

где F_m — максимальная частота спектра исходного сигнала.

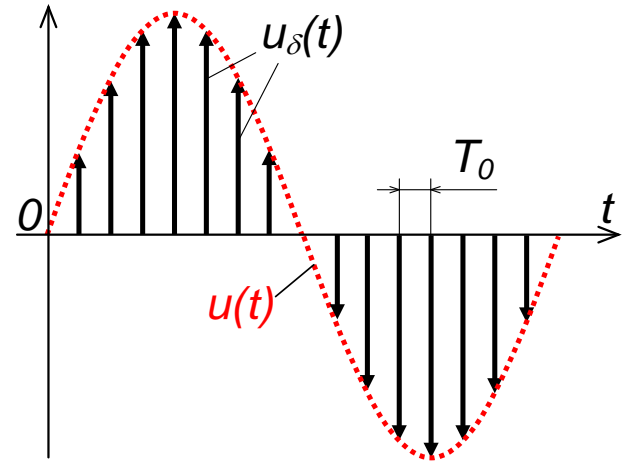
Кусочно-линейная аппроксимация



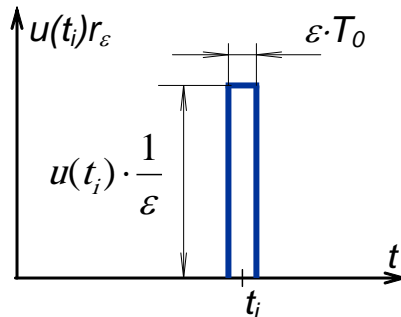
ступенчатая аппроксимация $u(t_i)$ сигнала (реальный дискретный сигнал)



последовательность импульсов Дирака $u_\delta(t)$ (аналитическое представление дискретного сигнала)

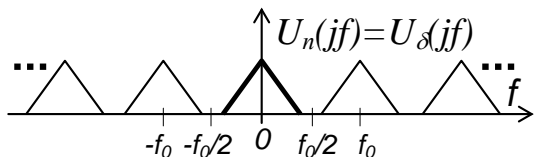
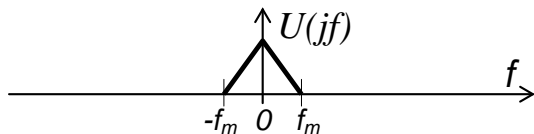


Вольт-секундная площадь импульсов в 2-х случаях одинакова



$$U_\delta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} U(t_i) \cdot T_0 \cdot \delta(t - t_i)$$

$$u(t_i) \cdot T_0 \cdot \delta(t - t_i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(t_i) \cdot r_\epsilon(t - t_i)$$



Если известны значения сигнала $u(t)$ в равноотстоящие моменты времени kT_0 для $k=0 \dots +\infty$, то ряд Фурье периодически продолженного спектра $U_n(jf)$ однозначно определяется этими выборками:

$$D_k = T_0 \cdot u(kT_0), \quad k=0,1,2,\dots +\infty$$

$$U_n(jf) = \sum_{k=0}^{+\infty} D_k \cdot e^{-jk \cdot (2\pi / f_0) \cdot f}$$

При выборе частоты отсчетов $f_0 \geq 2f_m$, можно найти выражение для восстановления непрерывного аналогового сигнала по его выборкам (ряд Котельникова):

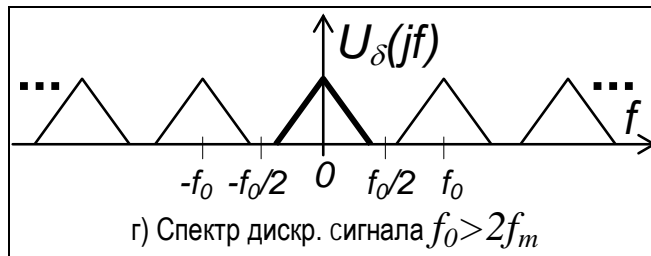
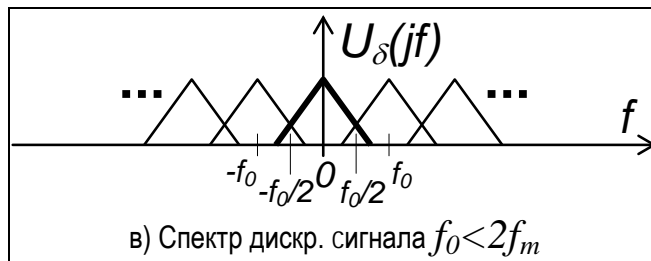
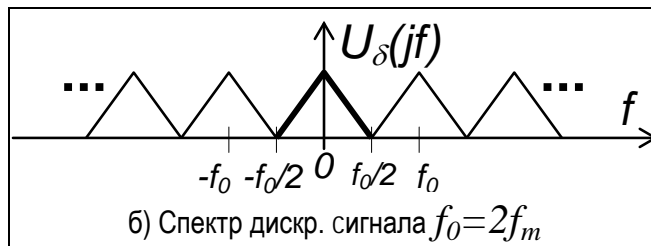
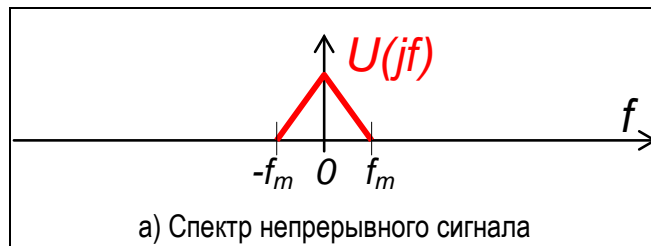
$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT_0) \frac{\sin[\pi f_0(t - kT_0)]}{\pi f_0(t - kT_0)}$$

соответствует фильтрации
последовательности
импульсов-дискрет
идеальным ФНЧ

Спектр последовательности импульсов Дирака:

$$U_\delta(j\omega) = T_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(kT_0) \cdot \delta(t - kT_0) \cdot e^{-j\omega t} dt = T_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) \cdot e^{-j\omega kT_0} \Rightarrow$$

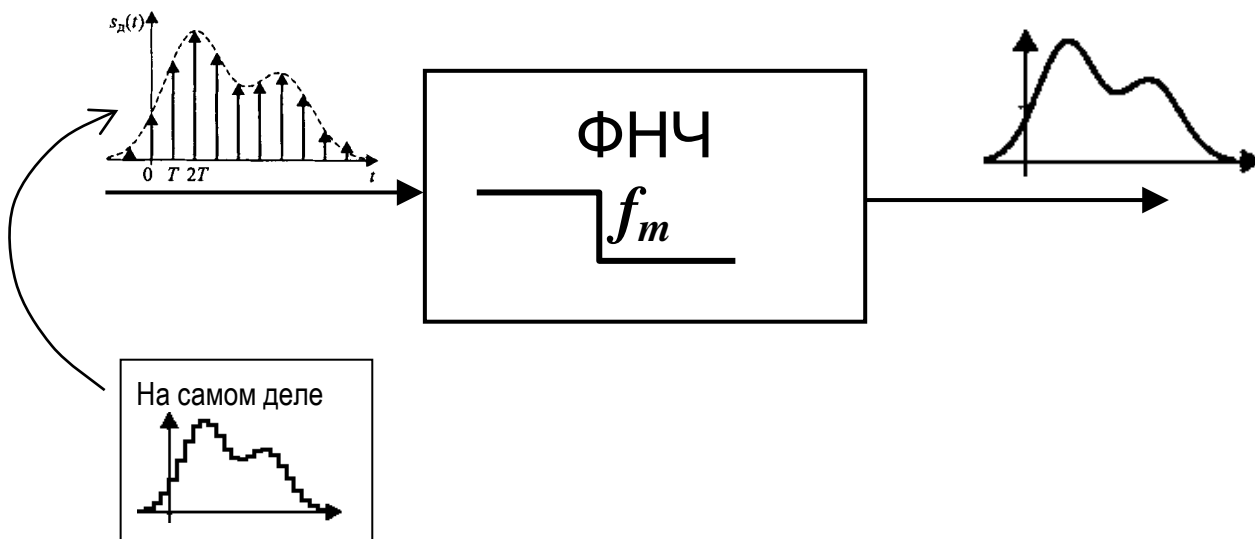
$$U_\delta(jf) = T_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0) \cdot e^{-j2\pi k \cdot \frac{f}{f_0}} = U_n(jf)$$



Восстановление аналогового сигнала

Исходную функцию можно восстановить с помощью выборочных значений непрерывной, ограниченной по полосе временной функции, если выполняется условие $f_0 > 2f_m$. Для этого необходимо образовать из выбранных значений последовательность импульсов Дирака и подать их на вход идеального фильтра нижних частот с $f_{cp} = f_m$.

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_0) \frac{\sin[\pi f_0(t - nT_0)]}{\pi f_0(t - nT_0)}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

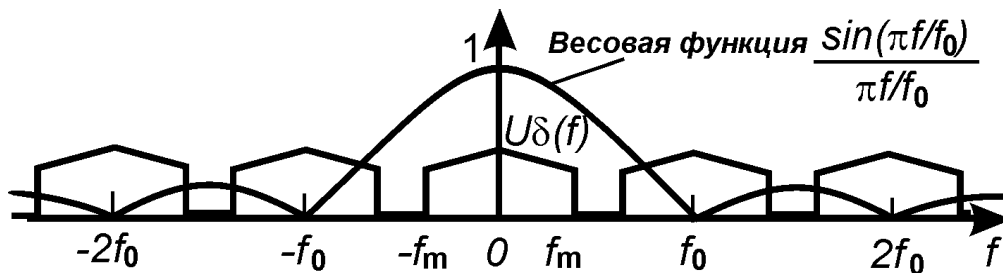


Спектр импульсов конечной длительности и амплитуды

$$U_u(jf) = \frac{\sin[\pi \mathcal{E} / f_0]}{\pi \mathcal{E} / f_0} \cdot e^{-\frac{j \cdot \pi \mathcal{E}}{f_0}} \cdot U_\delta(jf)$$

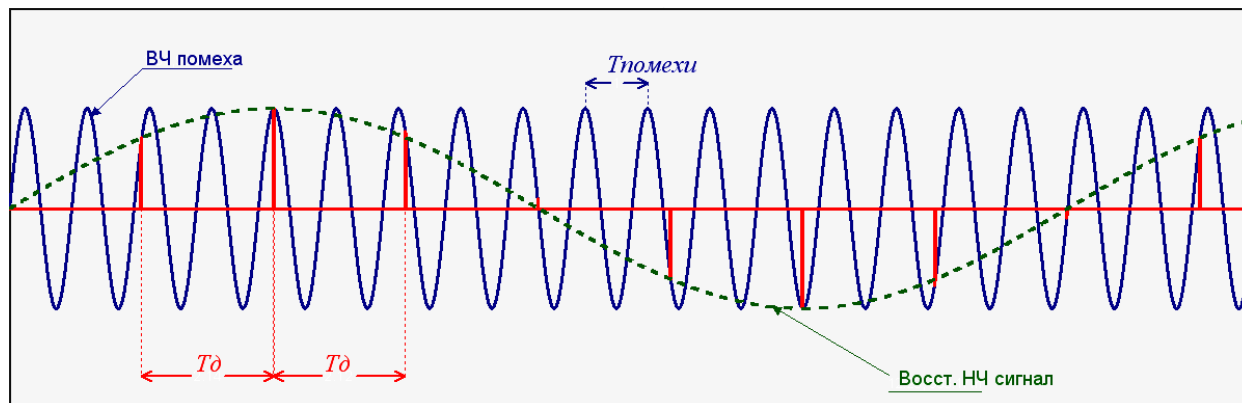
1. Спектр ступенчатой аппроксимации исходного сигнала ($\varepsilon \rightarrow 1$):

$$U_c(jf) = \frac{\sin\left[\frac{\pi f}{f_0}\right]}{\frac{\pi f}{f_0}} \cdot e^{-\frac{j \cdot \pi f}{f_0}} \cdot U_\delta(jf) \qquad U_c(f) = \frac{\sin\left|\frac{\pi f}{f_0}\right|}{\frac{\pi f}{f_0}} \cdot U_\delta(jf)$$



При максимальной частоте спектра сигнала $f_m = 0,5f_0$ имеет место ослабление сигнала с коэффициентом 0,64; при максимальной частоте $f_m = 0,2f_0$, ослабление составляет 0,94. Таким образом, искажения спектра до частоты среза f_m остаются пренебрежимо малыми, если выбрать $f_0 \approx 5 \cdot f_m$.

2. Высокочастотные искажения, обусловленные выборкой



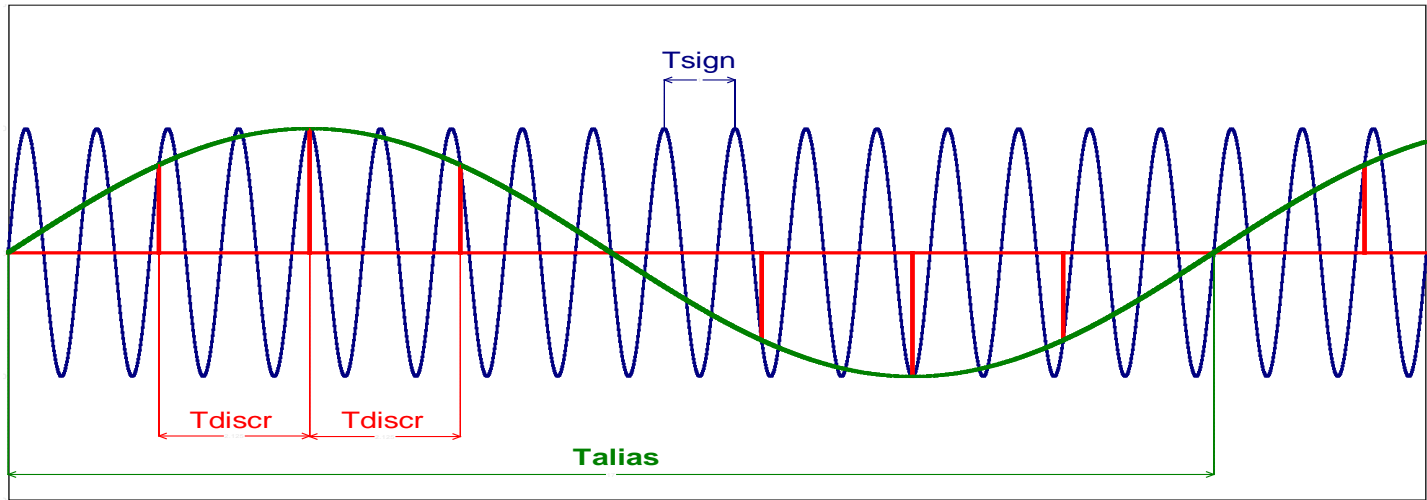
Дискретизация звукового сигнала (частотный диапазон 0...20 кГц) на частоте 40 кГц, т.е. при выполнении граничного условия теоремы отсчетов. Процесс свертки спектра внутри частотного диапазона 0...20 кГц



3. Нереализуемость идеального ФНЧ

Вывод: $F_{\text{discr}} > 2F_m$, $F_{\text{discr}} = 4 - 5 F_m$

Нахождение ложных частот (1)



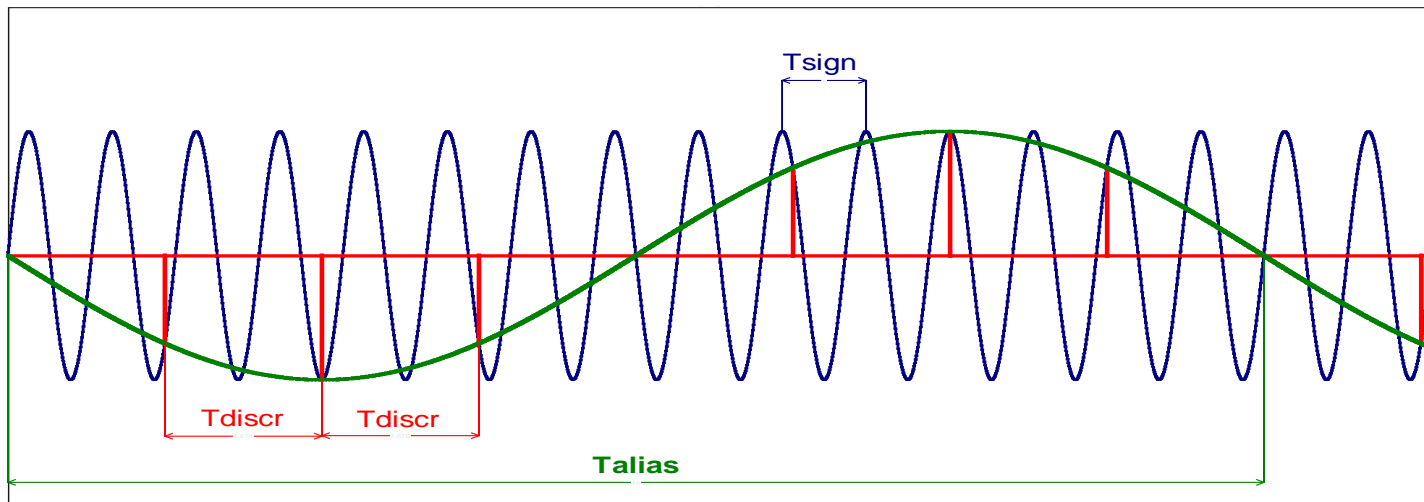
$$F_{aliasing} = F_{discr} \frac{T_{discr} - k \cdot T_{sign}}{T_{sign}}, \quad k - \text{целое} \quad (*)$$

На рисунке $F_{aliasing} = F_{discr} \frac{T_{discr} - 2 \cdot T_{sign}}{T_{sign}} = F_{discr} \cdot \frac{1}{8}$

Преобразуя формулу (*):

$$F_{aliasing} = F_{discr} \frac{T_{discr} - k \cdot T_{sign}}{T_{sign}} = \frac{1}{T_{sign}} - k \cdot F_{discr} = F_{sign} - k \cdot F_{discr}$$

Нахождение ложных частот (2)



$$F_{aliasing} = F_{discr} \frac{k \cdot T_{sign} - T_{discr}}{T_{sign}} = k \cdot F_{discr} - \frac{1}{T_{sign}} = k \cdot F_{discr} - F_{sign}, \quad k - \text{целое} \quad (**)$$

На рисунке
$$F_{aliasing} = F_{discr} \frac{2 \cdot T_{sign} - T_{discr}}{T_{sign}} = F_{discr} \cdot \frac{1}{8}$$

Окончательная формула для вычисления ложной частоты при $F_{sign} > 0.5 F_{discr}$:

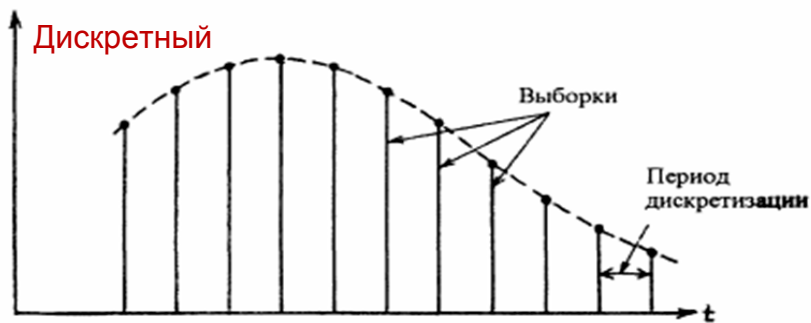
$$F_{aliasing} = |F_{sign} - k \cdot F_{discr}|,$$

целое k берется таким, при котором *абсолютная величина разности минимальна*.

Квантование по уровню

Усечение — если квантование происходит с отождествлением с нижней границей интервала, то $\max|\xi(x)| = \Delta x$.

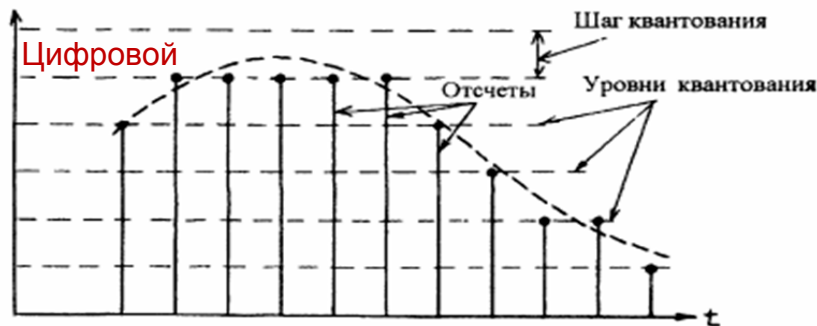
Округление — если в результате квантования любое из значений сигнала $x(t)$, попавшее в интервал $(x_i - \Delta x/2; x_i + \Delta x/2)$, округляется до x_i , то возникающая при этом ошибка $\xi(x)$ не превышает половины шага квантования, т. е. $\max|\xi(x)| = 0,5 \cdot \Delta x$.



Округленное значение величины:

$$x_i = \Delta x \cdot i,$$

i — номер уровня квантования



При равномерном квантовании ($\Delta x = \text{const}$) число разрешенных дискретных уровней x , составляет

$$m = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x}$$

Задачи на аналого-цифровое преобразование

1 На входе 4-хразрядного АЦП с опорным напряжением **Vref=16В** действует напряжение **Vin=5.678В**. Какое число после выполнения преобразования будет на выходах АЦП **A₃,A₂,A₁,A₀**, если АЦП в процессе квантования производит округление по 2-му правилу (до ближайшего разрешенного уровня). Ответ дать в десятичной и двоичной системах счисления.

Решение

1. Определяем шаг квантования по уровню ΔV :

$$\Delta V = \frac{V_{REF} - V_{GND}}{2^4} = \frac{16 - 0}{16} = 1 \text{ В}; \quad \frac{\Delta V}{2} = 0.5 \text{ В}$$

2. Определяем **номер i** ближайшего уровня квантования, до которого округляется точное значение напряжения:

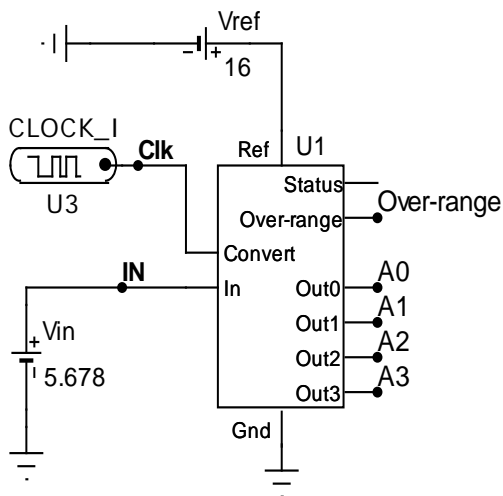
Целочисленное деление:

$$(V_{in} - V_{GND}) \text{ div } \Delta V = [5.678/1] = 5$$

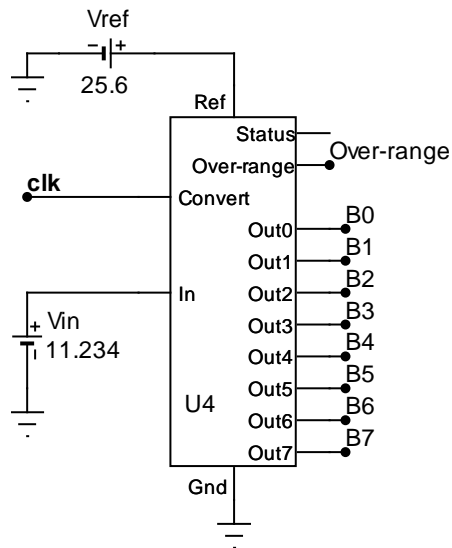
Остаток от целочисленного деления: $(V_{in} - V_{GND}) \text{ mod } \Delta V = 0.678 > \Delta V/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow i = 5 + 1 = 6_{10} = 0110_2$$

$$(A_3, A_2, A_1, A_0) = 0110$$



2 На входе 8-хразрядного АЦП с опорным напряжением **Vref=25.6В** действует напряжение **Vin=11.234В**. Какое число после выполнения преобразования будет на выходах АЦП **B₇,B₆,B₅,B₄,B₃,B₂,B₁,B₀**, если АЦП в процессе квантования производит округление по 2-му правилу (до ближайшего разрешенного уровня). Ответ дать в десятичной и двоичной системах счисления.



Решение

1. Определяем шаг квантования по уровню ΔV :

$$\Delta V = \frac{V_{REF} - V_{GND}}{2^8} = \frac{25.6 - 0}{256} = 0.1 \text{ В} \quad \frac{\Delta V}{2} = 0.05 \text{ В}$$

2. Определяем **номер i** ближайшего уровня квантования, до которого округляется точное значение напряжения:

Целочисленное деление:

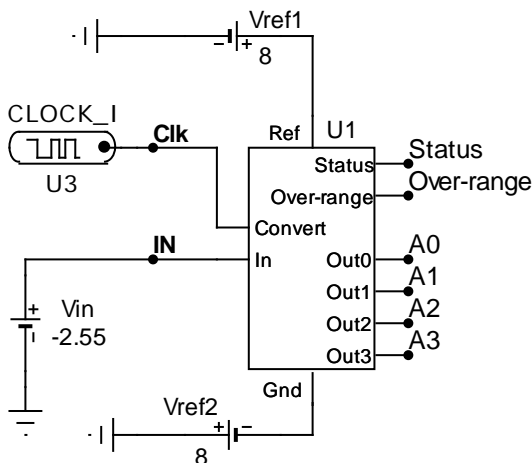
$$(V_{in} - V_{GND}) \text{ div } \Delta V = [11.234 / 0.1] = 112$$

Остаток от целочисленного деления: $(V_{in} - V_{GND}) \text{ mod } \Delta V = 0.034 < \Delta V / 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow i = 112_{10} = 01110000_2$$

$$(B_7, B_6, B_5, B_4, B_3, B_2, B_1, B_0) = 01110000$$

3 На входе 4-хразрядного АЦП, вывод опорного напряжения которого подключен к источнику напряжения $V_{ref1}=8B$, а общий вывод — к источнику напряжения $V_{ref2} = -8B$ действует напряжение $V_{in}=-2.55B$. Какое число после выполнения преобразования будет на выходах АЦП A_3, A_2, A_1, A_0 , если АЦП в процессе квантования производит округление по 2-му правилу (до ближайшего разрешенного уровня). Ответ дать в десятичной и двоичной системах счисления.



Решение

1. Определяем шаг квантования по уровню ΔV :

$$\Delta V = \frac{V_{REF} - V_{GND}}{2^4} = \frac{8 - (-8)}{16} = 1 B; \quad \frac{\Delta V}{2} = 0.5 B$$

2. Определяем **номер i** ближайшего уровня квантования, до которого округляется точное значение напряжения:

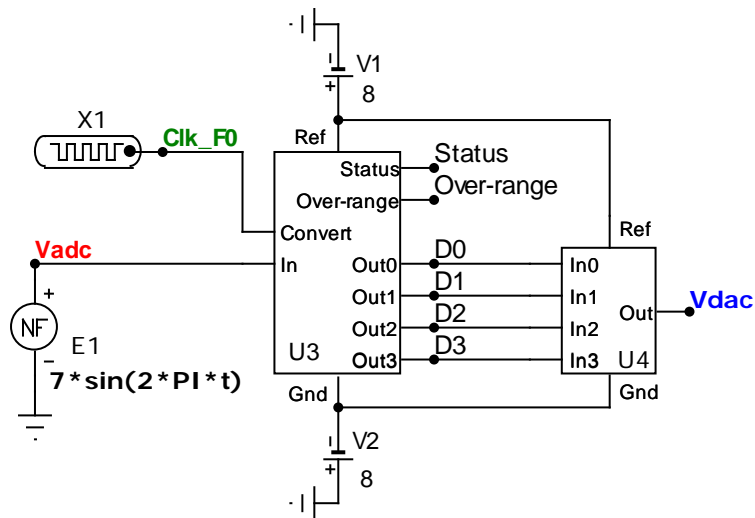
Целочисленное деление:

$$(V_{in} - V_{GND}) \text{ div } \Delta V = [(-2.55 - (-8))/1] = [5.45/1] = 5$$

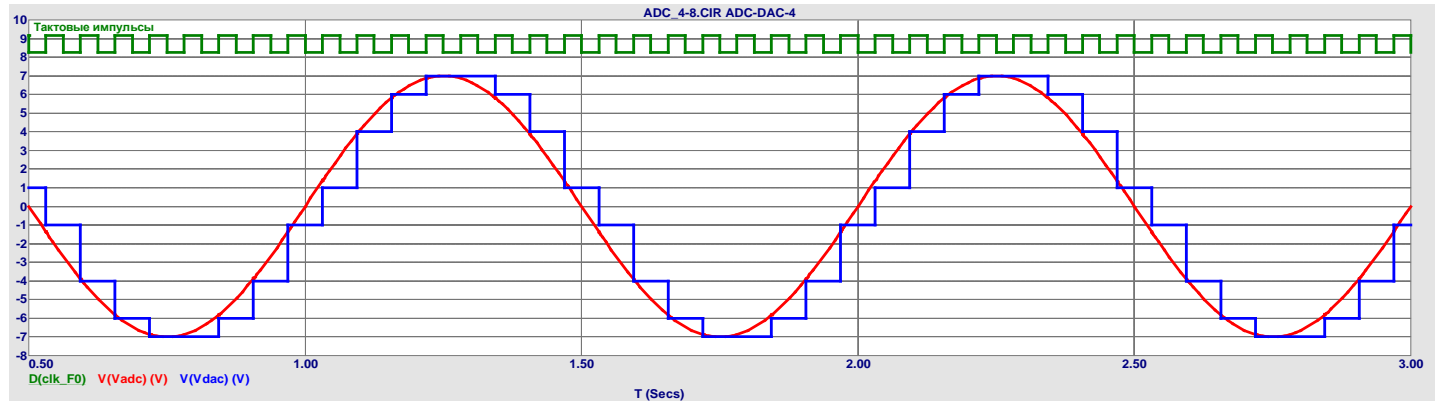
Остаток от целочисленного деления: $(V_{in} - V_{GND}) \text{ mod } \Delta V = 0.45 < \Delta V/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow i = 5_{10} = 0101_2$$

$$(A_3, A_2, A_1, A_0) = 0101_2$$



4 Какой сигнал будет на выходе ЦАП **Vdac** при последовательном соединении 4-хразрядных АЦП и ЦАП (см. рис.) с одинаковыми опорными потенциалами **Vgnd = -8 В** и **Vref = +8 В**, если частота дискретизации (тактирования) АЦП **F₀=Fclk=16 Гц** и на его вход подается синусоидальное напряжение **Vin = 7·sin(2·π·t)**. Нарисовать временную диаграмму сигнала на выходе ЦАП **Vdac(t)**. Каковы будут минимальные высота ступеньки и ширина ступеньки?



Минимальная ширина ступеньки — шаг квантования по времени **T₀=1/F₀=1/16 с**

Минимальная высота ступеньки — шаг квантования по уровню **ΔV=(V_{ref}-V_{gnd})/2⁴=16/16=1 В**

Вероятностные характеристики случайных процессов:

Математическое ожидание (*mean value*) $m_x(t)$ – теоретическая оценка среднего взвешенного значения случайного процесса плотностью вероятности $p(x,t)$ в момент времени t :

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x,t) dx.$$

Как несложно догадаться, (а можно и получить из формулы), для 1-го правила округления математическое ожидание ошибки квантования составит половину шага квантования $\Delta x/2$, а для 2-го — 0.

Дисперсия (*variance*) характеризует среднюю мощность отклонений случайного процесса от его среднего значения $m_x(t)$ (математического ожидания), называемых *флуктуациями* (*fluctuation*):

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x,t) dx - m_x^2(t)$$

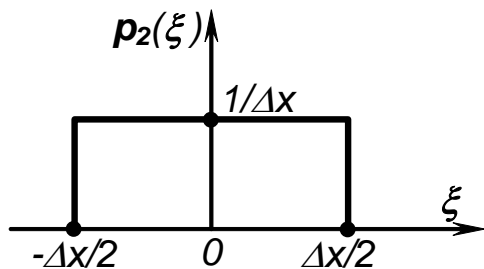
Среднее квадратическое отклонение (*standard deviation*) – квадратный корень из дисперсии, служит амплитудной мерой разброса значений случайного процесса в момент времени t относительно математического ожидания: $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$.

Мощность шумов квантования характеризует **дисперсия** $D(\xi)$ ошибки квантования ξ .
Определим ее для первого и второго правил округления:

$$1) D(\xi) = \int_0^{\Delta x} \xi^2 p_1(\xi) d\xi - \frac{\Delta x^2}{4} = \int_0^{\Delta x} \xi^2 \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot d\xi - \frac{\Delta x^2}{4} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \xi^3 \Big|_0^{+\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{4} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\Delta x^3}{3} - \frac{\Delta x^3}{4} \right] \Rightarrow$$

$$D(\xi) = \int_0^{+\Delta x} \xi^2 p_1(\xi) d\xi - \frac{\Delta x^2}{4} = \frac{\Delta x^2}{12}$$

$$2) D(\xi) = \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \xi^2 p_2(\xi) d\xi - 0 = \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \xi^2 \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot d\xi = \frac{1}{\Delta x} \cdot \xi^3 \Big|_{-\frac{\Delta x}{2}}^{+\frac{\Delta x}{2}} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\Delta x^3}{24} + \frac{\Delta x^3}{24} \right] \Rightarrow$$



$$D(\xi) = \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \xi^2 p_2(\xi) d\xi = \frac{\Delta x^2}{12}$$

Равномерный закон распределения
ошибки квантования

Задачи на погрешность операции квантования по уровню

1 Непрерывный во времени сигнал, имеющий максимальную частоту спектра $F_{\max}=20$ кГц дискретизируют с помощью АЦП с частотой квантования $F_0=40$ кГц. Определить минимальное количество разрядов АЦП (квантователя) n_{\min} для достижения относительной погрешности **0.1%** (для сигналов вблизи максимума шкалы).

Решение. Здесь происходит операция дискретизации с минимально возможной частотой дискретизации, определяемой из граничного условия теоремы отсчетов (Котельникова-Найквиста) $f_0 \geq 2f_m$. Поэтому требуемая разрядность квантователя (АЦП) определяется только исходя из погрешности при дискретизации сигналов по уровню вблизи максимума шкалы.

Относительная погрешность в %: $\delta_{\%} = \frac{\Delta V}{V_m} \cdot 100\%$, где ΔV — абсолютная погрешность

(шаг квантования по уровню); V_m — максимальное значение напряжения.

Выражаем и находим требуемое отношение максимального значения сигнала к шагу квантования по уровню (т.е. **минимальное число уровней квантования m_{\min}**):

$$m_{\min} = \frac{V_m}{\Delta V} = \frac{100\%}{\delta_{\%}} = \frac{100}{0.1} = 1000$$

Определяем число двоичных разрядов АЦП (квантователя): $n \geq \log_2(m_{\min})$ или $n = \lceil \log_2(m_{\min}) \rceil$; $n \geq \log_2 1000$; $n \geq 10$ (n , естественно, целое)

Минимальное количество двоичных разрядов АЦП $n_{\min}=10$

2 Электрический сигнал в виде напряжения, уровень которого находится в диапазоне $0 < V_{\text{вх}}(t) < 10 \text{ В}$, подвергается аналого-цифровому преобразованию с помощью квантователя с числом разрядов $n=10$ и соответствующим диапазоном входного напряжения ($V_{\text{гнд}}=0$, $V_{\text{ref}}=10 \text{ В}$). Определить относительную погрешность преобразования (шум квантования) в процентах и в децибелах для трех случаев: а) для уровня входного сигнала вблизи максимума шкалы $V_{\text{вх}}(t) \approx 10 \text{ В}$; б) для уровня входного сигнала вблизи середины шкалы $V_{\text{вх}}(t) \approx 0.32 \text{ В}$; в) для уровня входного сигнала вблизи начала шкалы $V_{\text{вх}}(t) \approx 0.01 \text{ В}$.

Решение. Рассчитаем шаг квантования при заданных условиях. Для определенности будем считать, что округление производится по 1-му правилу. В этом случае ошибка квантования равна шагу квантования.

Шаг квантования
$$\Delta V = \frac{V_{\text{REF}} - V_{\text{гнд}}}{2^n} = \frac{10 - 0}{1024} \approx 0.01 \text{ В}$$

$$\delta_{\%} = \frac{\Delta V}{V} \cdot 100\% \quad \delta_{\text{дБ}} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\Delta V}{V} \right)$$

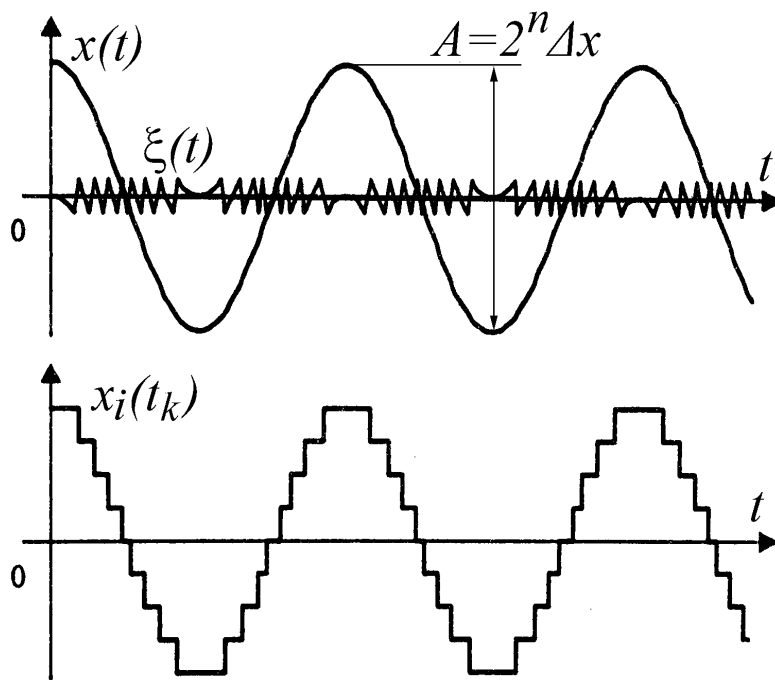
а) $\delta_{\%} = \frac{0.01}{10} \cdot 100\% \approx 0.1\%$ $\delta_{\text{дБ}} = 20 \log_{10} \left(\frac{0.01}{10} \right) \approx -60 \text{ дБ}$

б) $\delta_{\%} = \frac{0.01}{0.32} \cdot 100\% \approx 3\%$ $\delta_{\text{дБ}} = 20 \log_{10} \left(\frac{0.01}{0.32} \right) \approx -30 \text{ дБ}$

в) $\delta_{\%} = \frac{0.01}{0.01} \cdot 100\% \approx 100\%$ $\delta_{\text{дБ}} = 20 \log_{10} \left(\frac{0.01}{0.01} \right) \approx 0 \text{ дБ}$

Связь наилучшего достижимого отношения сигнал-шум (SNR) с разрядностью системы ЦОС

$$\delta(x) = 20 \log_{10} \left[\frac{\xi_{\max}(x)}{x_{i\max}} \right] = 20 \cdot \lg \left[\frac{1}{2^n} \right] = -n \cdot 20 \lg 2 = -6n \text{ дБ}$$



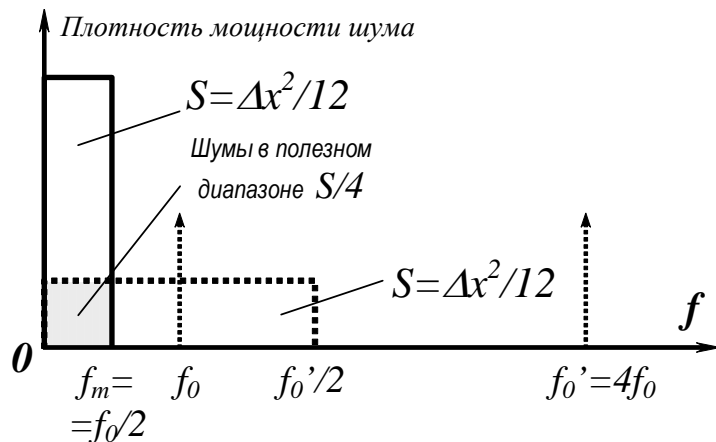
Соотношение разрядности АЦП, частоты дискретизации сигнала и шума квантования

Дискретизация с помощью n -разрядного АЦП на частоте дискретизации $f_0 = 2f_m$.

$$SNR = 20 \cdot \lg \left[\frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot A}{\Delta x \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} \right] = 20 \cdot \lg [2^n \cdot \sqrt{1,5}] = 20n \lg 2 + 10 \cdot \lg 1,5 = 6n + 1,76 [\text{дБ}]$$

Дискретизация на частоте в 4 раза превышающей исходную $f_0' = 8f_m$.

$$SNR' = 20 \lg \left[\frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot A}{\Delta x \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} \right] = 20 \lg \left[\frac{A}{\Delta x} \sqrt{1,5} \cdot 2 \right] = 20n \lg 2 + 10 \lg 1,5 + 20 \lg 2 = SNR + 6 [\text{дБ}].$$



$$SNR = 6 \cdot n + 10 \cdot \lg \left[\frac{f_{\text{дискр}}}{2f_m} \right] + C_s,$$

где n – разрядность АЦП,

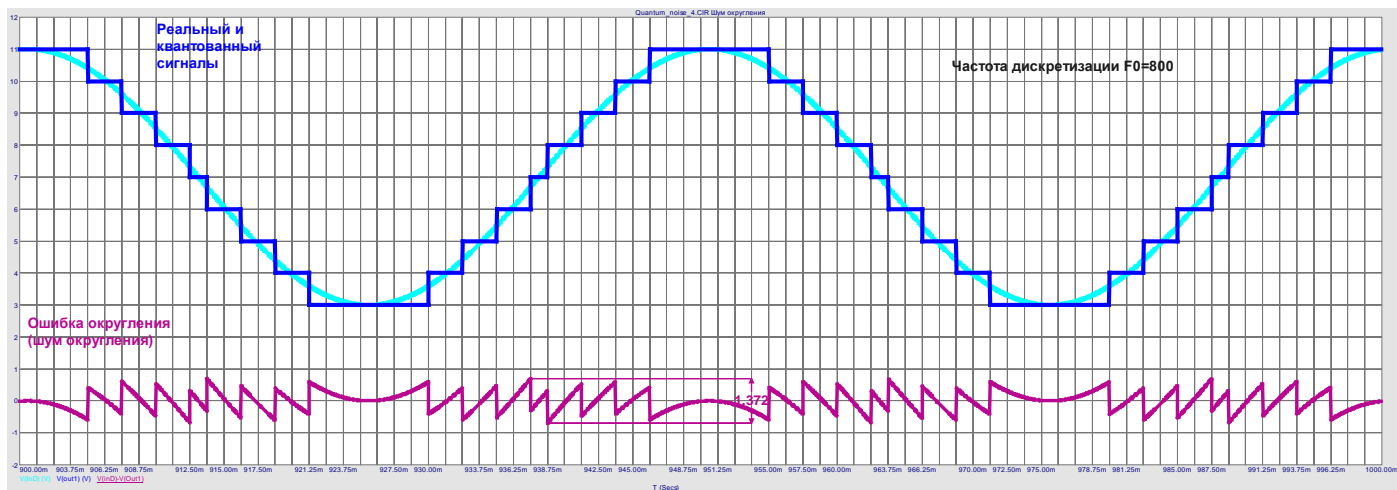
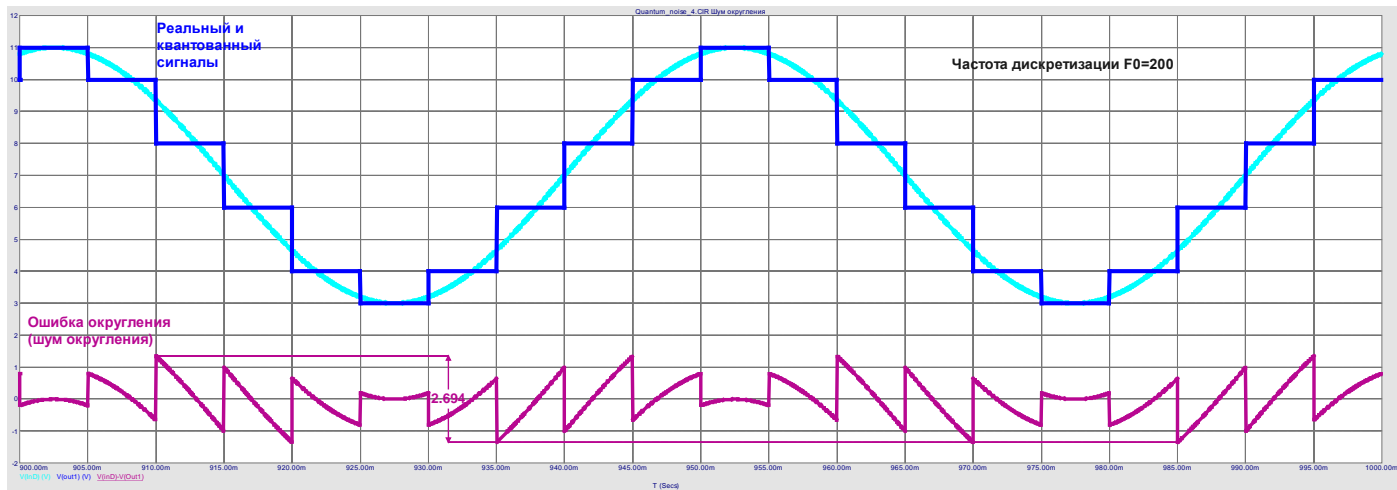
f_m – максимальная частота спектра,

C_s – постоянная, учитывающая форму сигнала (для \sin — 1,76).

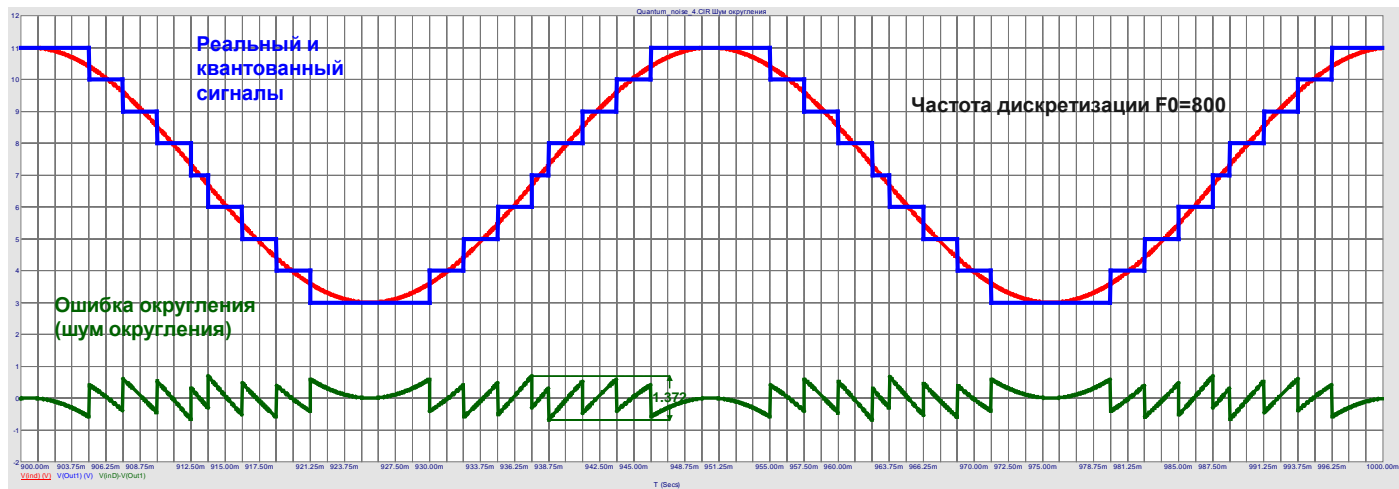
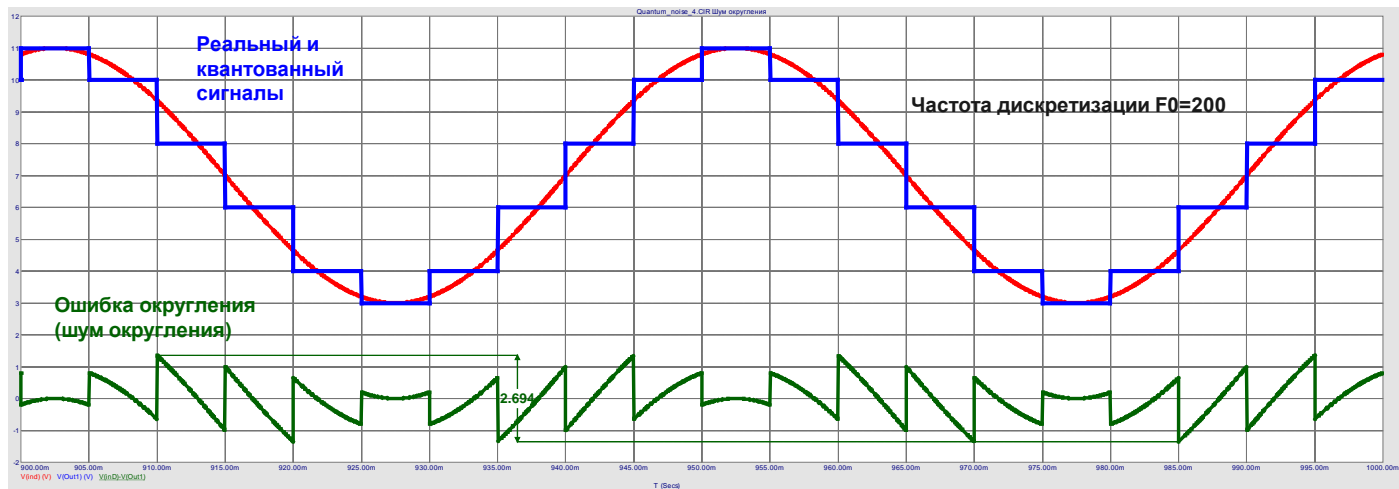
С помощью цифрового фильтра с большим ослаблением шума в полосе задержания и узкой переходной полосой подавляется

полоса от f_m до $4^k f_m$ кГц, содержащая только шумы квантования, и получается лучшее на $6k$ дБ отношение сигнал/шум квантования.

Квантование 4-хразрядным АЦП ($n=4$) при различных частотах дискретизации



Квантование 4-хразрядным АЦП ($n=4$) при различных частотах дискретизации



Каждое увеличение частоты дискретизации в 4 раза создает условия для улучшения отношения сигнал-шум на 6 дБ, что равносильно увеличению разрядности АЦП на один двоичный разряд. Исходя из вышесказанного, уровень шумов принято оценивать по формуле:

$$SNR = 6 \cdot n + 10 \cdot \lg \left[\frac{f_{\text{дискр}}}{2f_m} \right] + C_s \quad (1.39)$$

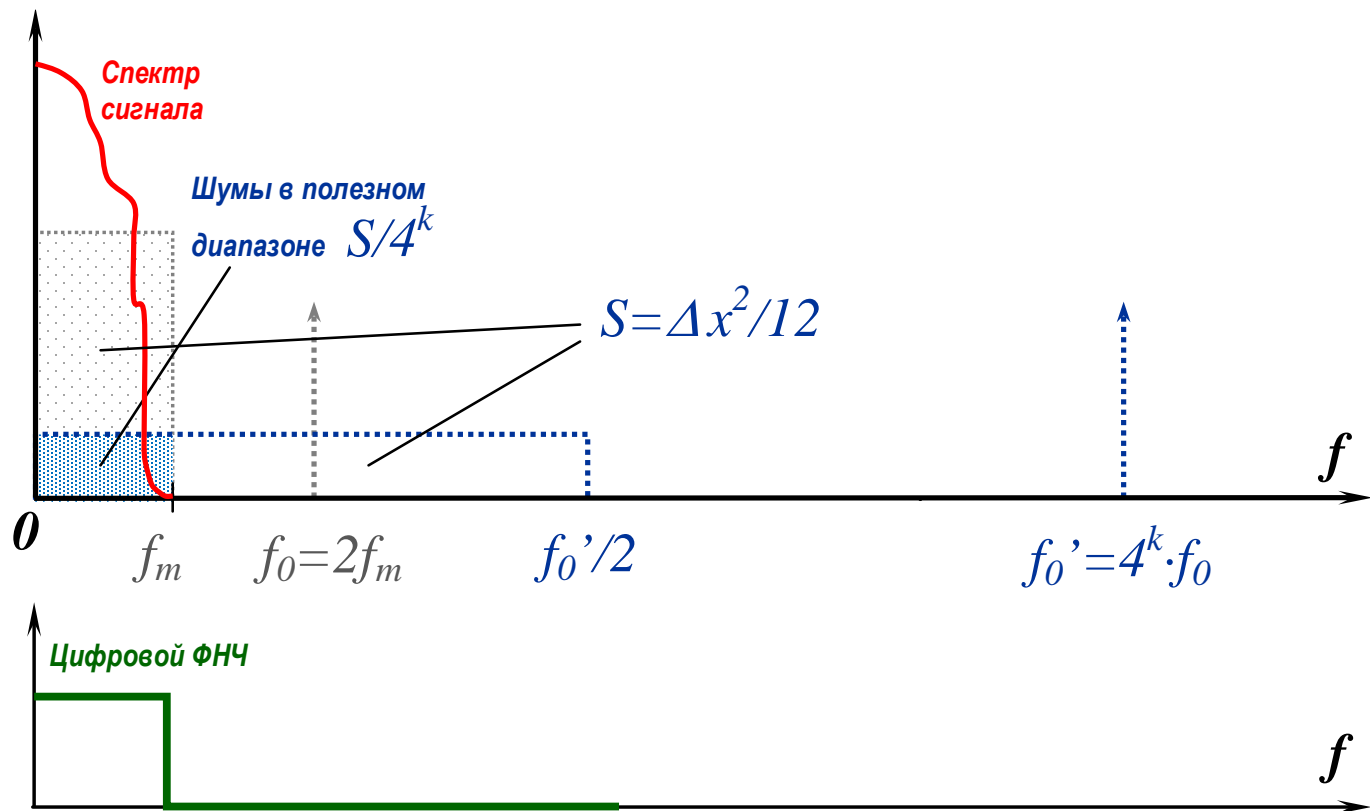
n – разрядность квантователя (АЦП), количество двоичных разрядов,

f_m – максимальная частота спектра дискретизируемого сигнала,

C_s – постоянная, учитывающая форму сигнала (для гармонических сигналов $C_s=1,76$ дБ, для обычных звуковых сигналов $C_s= -15...+2$ дБ). При решении задач постоянную C_s учитывать не будем (т.к. форма сигнала неизвестна).

Увеличение отношения сигнал-шум можно реализовать при условии цифровой фильтрации дискретизированного сигнала перед окончательным восстановлением его непрерывной формы на выходе (подавление полосы от f_m до $4^k \cdot f_m$ кГц, содержащей только шумы квантования). При этом в системе получится лучшее на $6k$ дБ отношение сигнал/шум SNR.

Шум квантования при передискретизации



Задачи на связь разрядности АЦП, частоты дискретизации и отношения сигнал-шум (SNR) в системе с ЦОС

1 Непрерывный во времени сигнал, имеющий максимальную частоту спектра $F_{max}=50$ кГц дискретизируют с частотой квантования $F_0=400$ кГц. Определить минимальное количество разрядов АЦП (квантователя) n_{min} для достижения относительной погрешности в **0.1%** (для сигналов вблизи максимума шкалы).

Решение. Зная относительную погрешность в %, найдем требуемое отношение сигнал-шум в дБ:

$$SNR = 20 \cdot \lg \left[\frac{1}{\delta} \right] = 20 \cdot \lg \left[\frac{100}{0,1} \right] = 60 \text{ дБ}.$$

Наилучшее достижимое в системе с ЦОС отношение сигнал-шум при использовании квантователя с разрядностью n , частоты дискретизации F_0 , при максимальной частоте спектра обрабатываемого сигнала F_m , определяется приближенным соотношением:

$$SNR \approx 6 \cdot n + 10 \cdot \lg \left[\frac{F_0}{2F_m} \right] \quad [\text{дБ}] \quad (1.39)$$

Определяем минимальную разрядность квантователя (АЦП) для достижения заданных точностных характеристик системы, выражая ее (n) из (1):

$$n \geq \frac{SNR - 10 \cdot \lg \left[\frac{F_0}{2 \cdot F_m} \right]}{6}, \quad n_{min} \approx 9$$

Следует отметить, что найденная разрядность квантователя в системе с передискретизацией лишь дает возможность достичь погрешность, не превосходящую заданную, *при условии цифровой фильтрации шумовых компонент лежащих в диапазоне частот от F_m до $F_0/2$.*

2 Для дискретизации непрерывного во времени сигнала с максимальной частотой спектра $F_{max}=5$ кГц используют АЦП (квантователь) с разрядностью $n=4$. Определить минимально возможную частоту дискретизации F_0 для достижения относительной погрешности преобразования **0.2%** (для сигналов вблизи максимума шкалы).

Решение 1. Для решения используем соотношение (1.39), устанавливающее связь между разрядностью квантователя n , частотой передискретизации F_0 и достижимым отношением сигнал-шум в дБ **SNR** системы, обрабатывающей сигнал с максимальной частотой спектра F_m . Решая логарифмическое уравнение, полученное из соотношения (1.39) при подстановке в него всех известных величин в задаче, находим частоту дискретизации $F_0 \geq 10$ МГц.

$$SNR = 20 \cdot \lg \left[\frac{100}{0.2} \right] = 54 \text{ дБ} \quad SNR \approx 6 \cdot n + 10 \cdot \lg \left[\frac{F_0}{2F_m} \right] \Rightarrow F_0 \approx 2F_m \cdot 10^{\frac{SNR - 6 \cdot n}{10}} \Rightarrow F_0 \approx 10 \text{ МГц}$$

Решение 2. Можно также решить задачу, рассуждая следующим образом. При использовании цифровой фильтрации шумовых составляющих сигнала квантователя в системе с передискретизацией каждое увеличение частоты дискретизации в 4 раза приблизительно эквивалентно добавлению одного двоичного разряда. Согласно условию задачи для достижения заданной относительной погрешности в системе (без передискретизации) потребуется 9-разрядный АЦП ($100/0.2=500 \leq 2^9$). Но у нас есть только 4-хразрядный квантователь. Следовательно, мы должны выбрать частоту дискретизации $F_0 \geq 4^5 \cdot F_{max} \approx 10$ МГц.

3 Сигнал с максимальной частотой спектра $f_m = 1$ Гц требуется оцифровать с помощью компаратора (1-битного параллельного АЦП) с относительной погрешностью (уровнем шума квантования) 0.1% (-60 дБ) в конечной точке шкалы. Определить минимально возможную частоту дискретизации.

Решение

Компаратор — это одноразрядный АЦП ($n=1$), а SNR [дБ] = $-NR$ [дБ] = 60 дБ. Далее воспользуемся соотношением (1.39), доказанным в конспекте лекций:

$$SNR \approx 6 \cdot n + 10 \cdot \lg \left[\frac{f_{\text{дискр}}}{2f_m} \right] \quad [\text{дБ}] \quad (1.39)$$

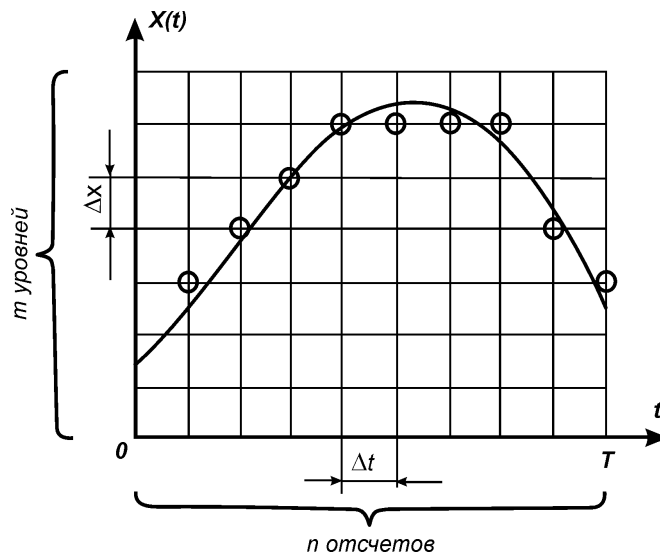
Решая логарифмическое уравнение, получаем $f_{\text{дискр}} \geq 2 \cdot f_m \cdot 10^{\frac{SNR-6}{10}} = 2 \cdot 10^{5,4} \approx 502$ кГц

Эту задачу также можно решить, рассуждая следующим образом. Каждое увеличение частоты дискретизации примерно в 4 раза в системе с ЦОС на основе АЦП заданной разрядности без шумоформирующей характеристики (имеется в виду обычный квантователь, не дельта-сигма модулятор) равносильно добавлению одного двоичного разряда в квантователь. Здесь необходимо нарастить 9 двоичных разрядов (один уже есть, так как основа нашей системы — компаратор). Это значит, что минимально возможную частоту дискретизации 2 Гц надо увеличить в $4^9 = 2^{18}$ раз. Т.е. $f_{\text{дискр min}} \approx 2 \cdot 2^{18} \approx 520$ кГц

Следует отметить, что найденная разрядность квантователя в системе с передискретизацией лишь дает возможность достичь погрешность, не превосходящую заданную, *при условии цифровой фильтрации шумовых компонент лежащих в диапазоне частот от f_m до $f_{\text{дискр}}/2$.*

Меры количества информации

- 1 отсчет сигнала — m различных сообщений,
 2 отсчета сигнала — m^2 различных сообщений,
 3 отсчета — m^3 сообщений и т. д.
 n отсчетов за время $T=n\Delta t$ — $N=m^n$ сообщений (**комбинаторная оценка информации**).



К определению количества информации в сигнале

Мера информации по Хартли:

$$I = \log_a N = n \log_a m$$

Выбор оптимальной значности кода

Требуется передать сигнал $x(t)$: $0\text{В} \leq x(t) \leq 10\text{В}$, $\Delta x = 10\text{ мВ}$:

а) каждому сообщению поставить в соответствие определенный уровень напряжения, при этом *основание кода* $m=1000$, а *длина слова* $n=1$;

б) можно воспользоваться двоичным (бинарным) сигналом с $m=2$, но тогда потребуется комбинация длины $n=10$ ($2^{10}=1024$), так что некоторые комбинации здесь не использованы.

Возникает вопрос об определении *оптимальной пары* значений m (*значности кода*) и n (*длины кодового слова*).

Критерий оптимальности — **минимум произведения** числа требуемых символов (уровней) m на длину кодовой комбинации n , необходимой для представления заданного числа сообщений N .

Если значность кода m , то для передачи N сообщений, потребуется комбинация длиной n , причем должно выполняться неравенство $m^n \geq N$. Отсюда

$$n \cdot \log_2 m \geq \log_2 N \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\log_2 N}{\log_2 m}$$

$$S = mn = \frac{m \log_2 N}{\log_2 m}$$

$$\frac{\partial S}{\partial m} = \log_2 N \frac{\log_2 m - \log_2 e}{[\log_2 m]^2} = 0$$

или $m=e$. Наиболее экономное представление множества сообщений соответствует $m=2, 3$.

Двоичные числа

Запись натурального числа A в позиционной двоичной системе счисления:

$$A = (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0)_2 = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_0 \cdot 2^0 .$$

Представление дробных чисел, значения которых не превышают единицы:

$$A = (0.a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0)_2 = \frac{a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_0 \cdot 2^0}{2^n} = a_{n-1} \cdot 2^{-1} + \dots + a_0 \cdot 2^{-n} .$$

Помехозащищенное кодирование

Соотношение Хартли–Шеннона

$$C = F_k \cdot \log_2 \left[1 + \frac{P_c}{P_{ном}} \right], \text{ [бит/с]} \quad (1.44)$$

где F_k — полоса частот канала в Гц; P_c и $P_{ном}$ — средние мощности полезного сигнала и помехи.

Пропускная способность канала в отсутствие шума по Хартли:

$$C = 2 \cdot F_k \cdot \log_2 N, \text{ [бит/с]}$$

где N — число уровней кодирования (2 в двоичной системе).

Задача на применение соотношения Хартли-Шеннона

Внутригородская телефонная линия связи имеет следующие характеристики: уровень шума **–25 дБ**, диапазон частот **300 Гц – 3400 Гц**. Определить максимально возможную скорость передачи цифровой информации по заданной линии в битах в секунду.

Решение. Воспользуемся для решения задачи соотношением Хартли–Шеннона:

$$C = F_k \cdot \log_2 \left[1 + \frac{P_c}{P_{ном}} \right] \quad (1.44)$$

где F_k — полоса частот канала в Гц; P_c и $P_{ном}$ — средние мощности полезного сигнала и помехи соответственно.

Из условия задачи нам известен уровень шума по отношению к уровню полезного сигнала (или относительная погрешность) в дБ, а нам для использования соотношения (1.44) необходимо знать отношение мощности сигнала к мощности шума. Осуществим этот переход:

$$\delta [\text{дБ}] = -SNR [\text{дБ}] = -10 \cdot \lg \left[\frac{P_c}{P_{ном}} \right] \Leftrightarrow \frac{P_c}{P_{ном}} = 10^{-0.1 \cdot \delta [\text{дБ}]} = 10^{-0.1 \cdot (-25)} = 10^{2.5}$$

$$C = (3400 - 300) \cdot \log_2 [1 + 10^{2.5}] = 25760 \text{ бит/с}$$

Важной характеристикой используемого кода является **минимальное кодовое расстояние** — минимально возможное количество отличающихся двоичных разрядов в двух произвольно взятых кодовых комбинациях.

Рассмотрим 3-разрядный двоичный код $\{a_2, a_1, a_0\}$

а) Пусть 8 кодовых комбинаций для являются разрешенными, тогда $d_{min}=1$. Здесь отсутствует какой-либо признак, позволяющий судить о появлении ошибки, такой код не является помехозащищенным.

б) Допустим лишь 4 из 8 кодовых комбинаций разрешены: **001**, **010**, **100** и **111**. Тогда минимальное кодовое расстояние $d_{min}=2$, причем искажение символа в одном из разрядов приводит к получению запрещенной кодовой комбинации (**000**, **011**, **101** или **110**), что легко выявляется при проверке. Данный двоичный код является кодом с обнаружением одиночной ошибки.

в) Для $d_{min}=3$ в качестве разрешенных кодовых комбинаций используем: **010** и **101**. Получение запрещенной кодовой комбинации **110** указывает на наличие ошибки, для исправления которой необходимо перейти к ближайшей из разрешенных кодовых комбинаций — **010**.

Вывод: построение помехозащищенных кодов всегда связано с введением избыточности в передаваемые кодовые комбинации. При этом корректирующая способность кода, т. е. число обнаруживаемых и исправляемых с его помощью ошибок, определяется минимальным кодовым расстоянием:

$$d_{\min} = t_{\text{обн}} + t_{\text{испр}} + 1,$$

Код с проверкой на четность ($d=2$). Добавление одного дополнительного разряда a_0 :

$$A' = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0), \quad a_0 = a_n \oplus a_{n-1} \oplus \dots \oplus a_1$$

При отсутствии ошибки кодовая комбинация всегда содержит четное число единиц:

$$p = a_n \oplus a_{n-1} \oplus a_{n-2} \oplus \dots \oplus a_1 \oplus a_0 = 0$$

Корректирующий **код Хемминга** позволяет обнаружить и исправить одиночную ошибку ($d_{min}=3$).

$$2^k \geq n + k + 1$$

откуда можно найти требуемое число **контр. разр. k** для заданного числа **инф. разр. n** .

| N | k | $n+k$ | $R=k/(n+k)$ |
|-----|-----|-------|-------------|
| 1 | 2 | 3 | 0,67 |
| 2 | 3 | 5 | 0,6 |
| 3 | 3 | 6 | 0,5 |
| 4 | 3 | 7 | 0,43 |
| 5 | 4 | 9 | 0,44 |
| 6 | 4 | 10 | 0,4 |
| 7 | 4 | 11 | 0,36 |
| 8 | 4 | 12 | 0,33 |
| 16 | 5 | 21 | 0,24 |
| 26 | 5 | 31 | 0,16 |

Проверочные уравнения:

$$p_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus \dots;$$

$$p_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus \dots;$$

$$p_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus \dots;$$

.....

$$p_k = a_{2^{k-1}} \oplus \dots$$

Разряды $a_1, a_2, a_4 \dots a_{2^{k-1}}$ входят только по одному разу в каждое из этих уравнений — удобно принять в качестве контрольных. Приравнявая проверочные уравнения к нулю при отсутствии ошибок, т. е. Полагая $p_1=p_2=\dots=p_k=0$, **на передающей стороне** формируются значения контрольных разрядов кодовой комбинации:

$$a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus \dots;$$

$$a_2 = a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus \dots;$$

$$a_4 = a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus \dots;$$

.....

Для 8-разрядного инф. кода

| | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_{13} | a_{12} | a_{11} | a_{10} | a_9 | a_8 | a_7 | a_6 | a_5 | a_4 | a_3 | a_2 | a_1 |
|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

На приемной стороне вычисляются контрольные суммы p_1, p_2, \dots, p_k .

Двоичный код номера разряда, в котором произошла ошибка — $(p_k p_{k-1} \dots p_1)_2$

Отсутствие ошибки — $(p_k p_{k-1} \dots p_1) = 00 \dots 0_2$.

Циклические корректирующие коды

При построении циклического кода кодовая комбинация записывается в виде полинома:

$$A(x) = a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a_n \cdot x^0,$$

$$A=(1011)_2=1 \cdot 2^3+0 \cdot 2^2+1 \cdot 2^1+1 \cdot 2^0 \rightarrow A(x)=1 \cdot x^3+0 \cdot x^2+1 \cdot x^1+1 \cdot x^0=x^3+x+1$$

Над полиномами можно производить любые алгебраические операции, как и над двоичными числами. Исключение составляет *сложение*, производимое по модулю 2:

$$0 \cdot x^i + 0 \cdot x^i = 0 \cdot x^i;$$

$$0 \cdot x^i + 1 \cdot x^i = 1 \cdot x^i;$$

$$1 \cdot x^i + 0 \cdot x^i = 1 \cdot x^i;$$

$$1 \cdot x^i + 1 \cdot x^i = 0 \cdot x^i$$

$$-1 \cdot x^i = 1 \cdot x^i$$

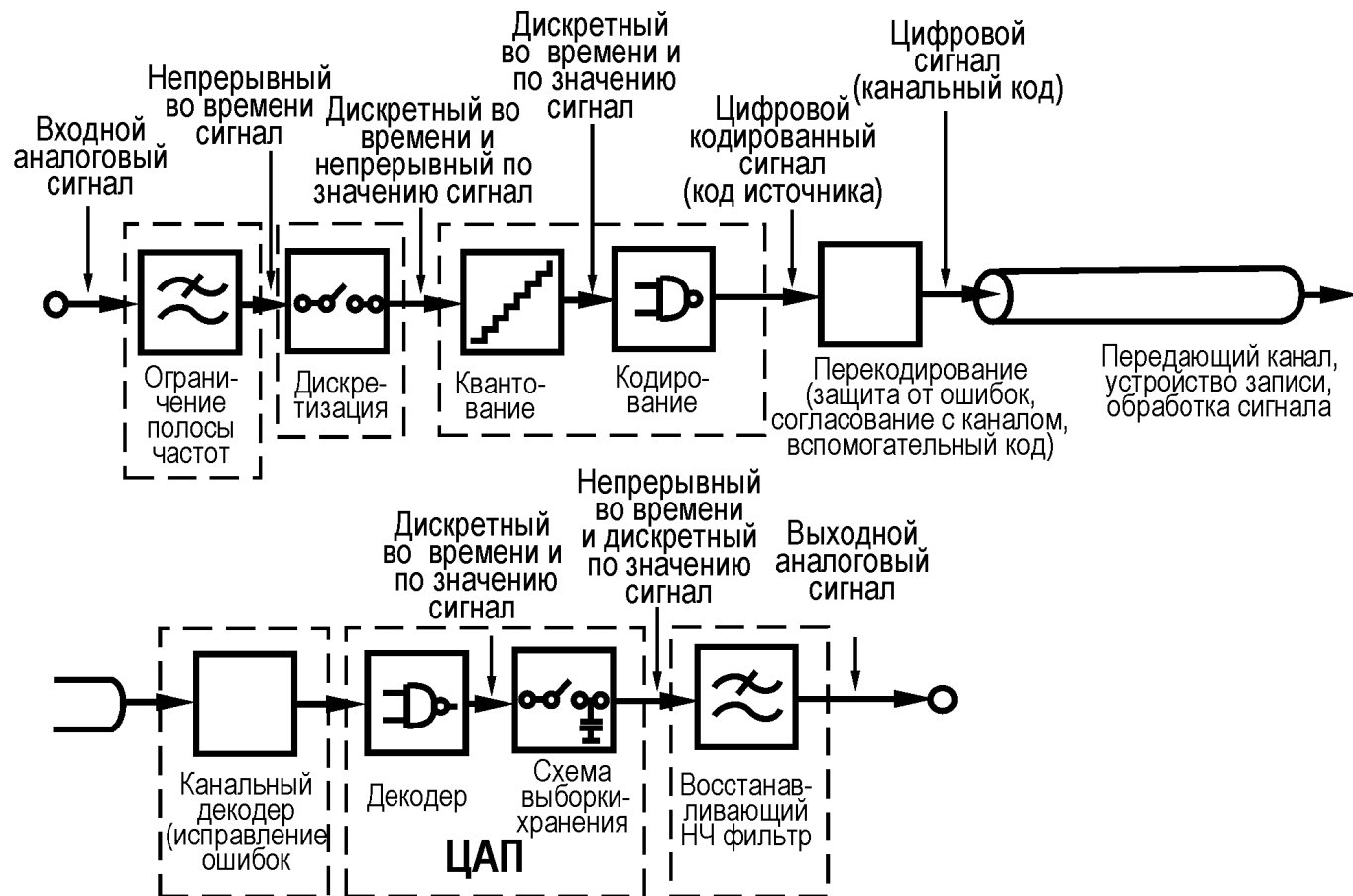
Циклические коды образуются путем умножения комбинации исходного кода, выраженной в виде полинома **A(x)** степени **(n-1)**, на образующий неприводимый полином **G(x)** степени **k** (в соответствии с правилом для **n** и **k** см. табл.). Разрешенными считаются лишь те кодовые комбинации, которые делятся без остатка на полином **G(x)**.

К **неприводимым** полиномам (не содержащим полиномов-сомножителей) относятся:

$$G(x)=x+1; \quad G(x)=x^2+x+1; \quad G(x)=x^3+x^2+1; \quad G(x)=x^3+x+1; \quad G(x)=x^4+x^3+1 \text{ и т.д.}$$

Пример. Для кодовой комбинации $A=(1001) \rightarrow A(x)=x^3+1$. **n=4** \Rightarrow **k=3** (для обнаружения и исправления одиночной ошибки). Выбираем $G(x)=x^3+x^2+1$. Перемножая полиномы **A(x)** и **G(x)**, получаем $F(x)=A(x) \cdot G(x)=x^6+x^5+x^2+1$, т. е. комбинация циклического кода принимает вид $F=(1100101)_2$.

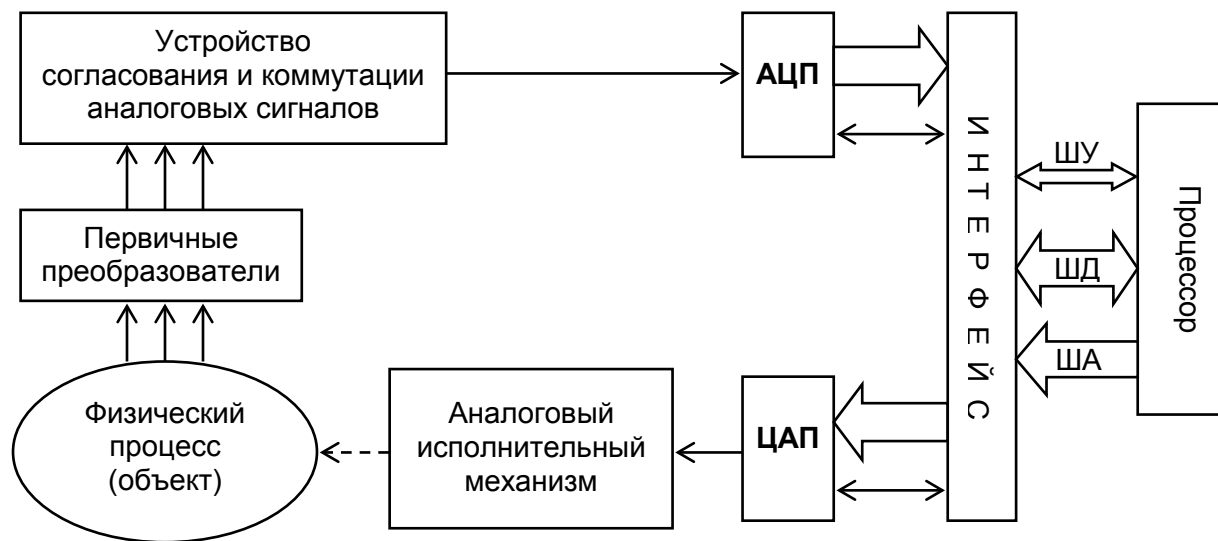
Структура цифровой системы записи-воспроизведения звука на основе оптического компакт-диска



ЦАП и АЦП

При построении устройств, связывающих ЭВМ с объектами, использующими информацию в непрерывной форме, требуется преобразование информации из цифровой формы в аналоговую (непрерывную) и из аналоговой в цифровую. Это осуществляют:

1. Цифроаналоговые преобразователи **ЦАП** (Digital to Analod Convertor — **DAC**)
2. Аналого-цифровые преобразователи **АЦП** (Analod to Digital Convertor — **ADC**)



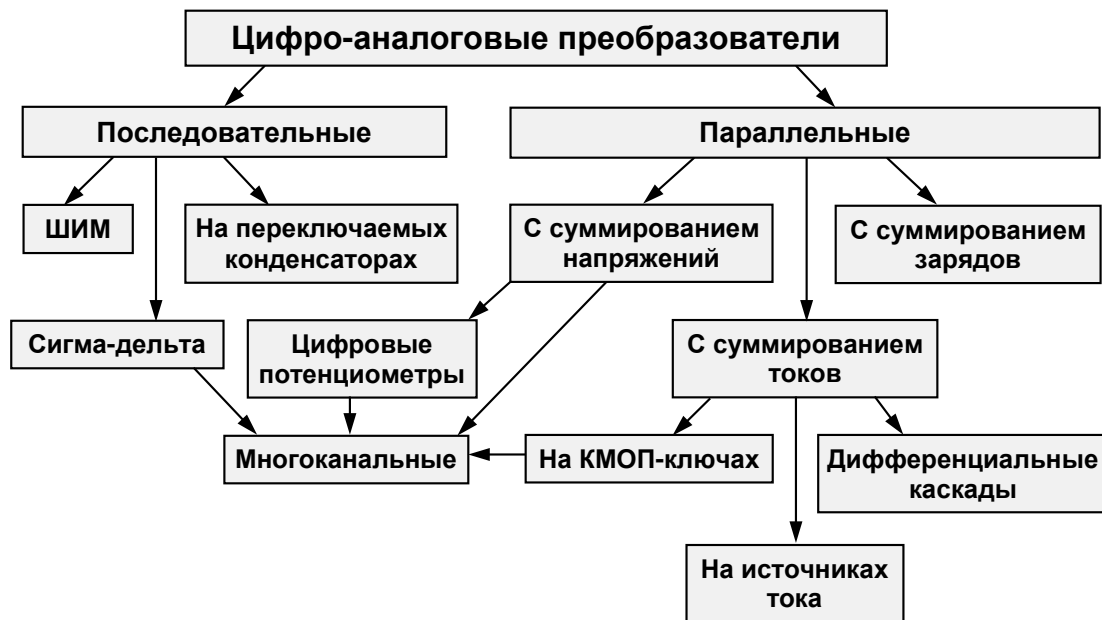
Система сбора и цифровой обработки данных

Цифроаналоговым преобразователем (ЦАП) называется устройство, осуществляющее автоматическое преобразование входных значений, представленных числовым кодом в эквивалентные им значения физической величины (напряжения, тока). Преобразование обеспечивает соответствие между входным числовым значением N , и его аналоговым эквивалентом $x(t)$.

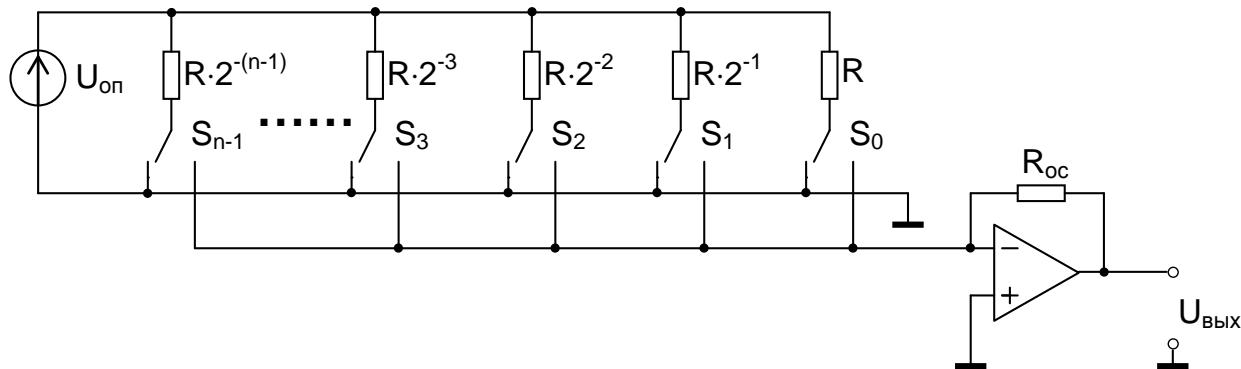
Количественная связь для любого момента времени t_i : $x(t) = N_{ti} \cdot \Delta x \pm \delta x_i$

Δx — шаг квантования по уровню (аналоговый эквивалент ЕМР);

δx_i – погрешность преобразования.



ЦАП с суммированием весовых токов (с двоично-взвешенными сопротивлениями)



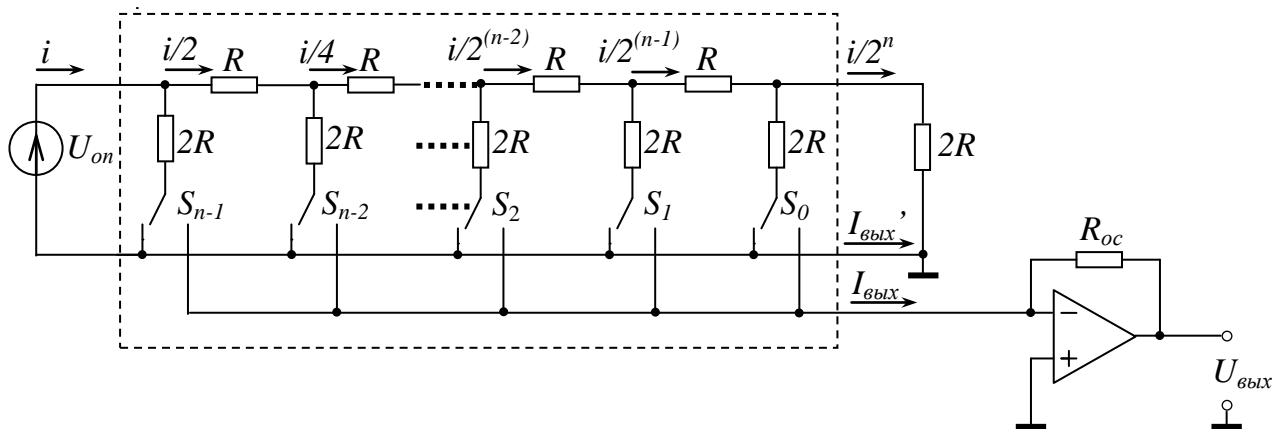
$$A = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i \quad A \geq 0, \text{ целое}$$

$$U_{\text{вых}} = -U_{\text{он}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{R_{\text{oc}}}{R \cdot 2^{-i}} \cdot a_i = -\frac{U_{\text{он}} \cdot R_{\text{oc}}}{R} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i = -\frac{U_{\text{он}} \cdot R_{\text{oc}} \cdot A}{R} = -\frac{U_{\text{он}} \cdot R_{\text{oc}} \cdot 2^n}{R} N \quad 0 \leq N < 1$$

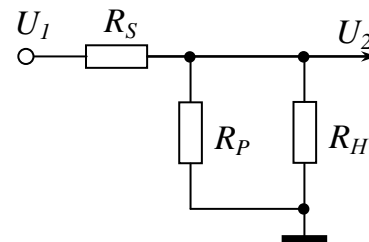
$$\Delta I_k = \frac{\partial}{\partial R_k} \left[\frac{U_{\text{он}}}{R_k} \right] \cdot \Delta R_k = \frac{U_{\text{он}}}{R_k^2} \cdot \Delta R_k < \frac{1}{2} \cdot I_{\text{МЗР}} \Rightarrow \frac{U_{\text{он}}}{R_k^2} \cdot \Delta R_k < \frac{1}{2} \cdot \frac{U_{\text{он}}}{R_k \cdot 2^k} \Rightarrow \frac{\Delta R_k}{R_k} < \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\frac{\Delta R}{R} < 2^{-(k+1)}$$

ЦАП на основе матрицы R-2R



$$\left\{ \begin{array}{l} R_s + \frac{R_p R_H}{R_p + R_H} = R_H \\ \frac{R_p R_H}{R_p + R_H} = \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \frac{R_p R_H}{(R_p + R_H) \cdot R_H} = \alpha \Rightarrow \frac{R_p}{R_p + R_H} = \alpha$$



$$\Rightarrow R_s + \alpha \cdot R_H = R_H; \quad R_s = R_H \cdot (1 - \alpha)$$

$$R_p = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot R_H; \quad R_s = (1 - \alpha) \cdot R_H$$

При двоичном кодировании $\alpha = 0,5$. Если положить $R_H = 2R$, то $R_S = R$ $R_P = 2R$

$$I_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{он}}}{R \cdot 2} a_{n-1} + \frac{U_{\text{он}}}{R \cdot 4} a_{n-2} + \dots + \frac{U_{\text{он}}}{R \cdot 2^n} a_0 = \frac{U_{\text{он}}}{R \cdot 2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i = \frac{U_{\text{он}}}{R \cdot 2^n} \cdot A;$$

$$I'_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{он}}}{R \cdot 2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \cdot 2^i = \frac{U_{\text{он}}}{R \cdot 2^n} \cdot \bar{A}, \quad \text{где } A = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_0 \cdot 2^0.$$

$$U_{\text{вых}} = -R_{\text{oc}} I_{\text{вых}} = -U_{\text{он}} \frac{R_{\text{oc}}}{R \cdot 2^n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i = -U_{\text{он}} \frac{R_{\text{oc}} \cdot A}{R \cdot 2^n}$$

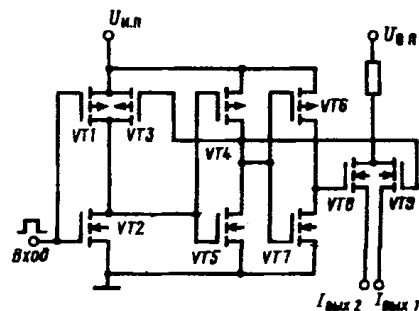
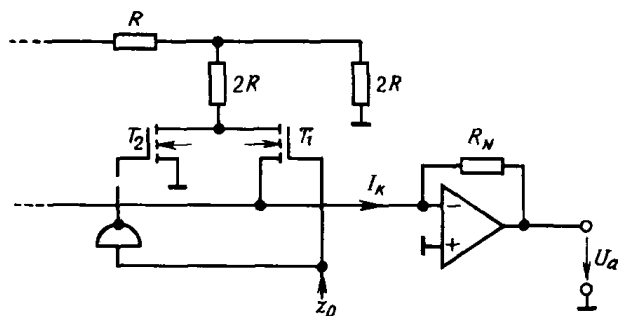
$$R_{\text{oc}} = R \quad U_{\text{вых}} = -U_{\text{он}} \frac{R \cdot A}{R \cdot 2^n} = -U_{\text{он}} \frac{A}{2^n} = -U_{\text{он}} N, \quad 0 \leq N < 1$$

$$I_{\text{вх}} = I = I_{\text{вых}} + I'_{\text{вых}} + \frac{U_{\text{он}}}{R \cdot 2^n} = \frac{U_{\text{он}}}{R} \quad I_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{он}}}{R} \cdot N, \quad \text{где } 0 \leq N < 1$$

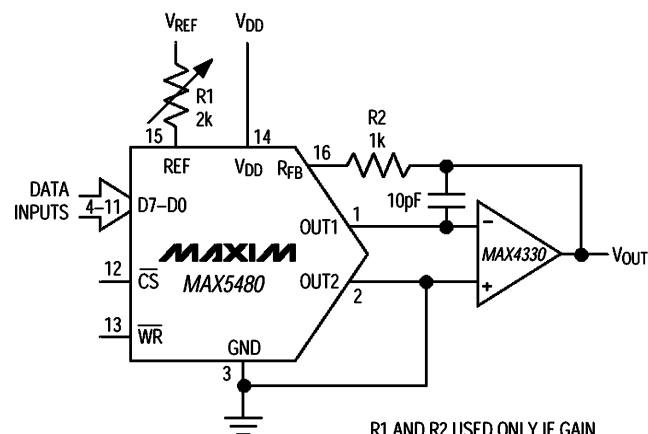
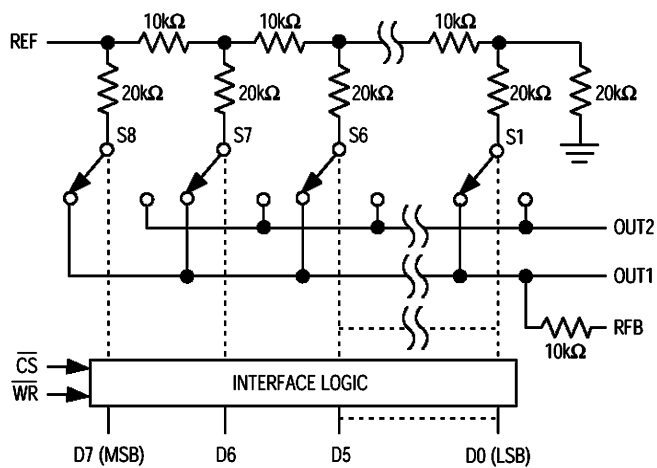
ЦАП с матрицей R-2R и МОП-ключами

- Потенциалы между контактами таких ключей близки к 0, и следовательно переходные процессы протекают быстрее (не надо перезаряжать C_{cu} у МОП-ключа).
- Можно использовать источник опорного напряжения любой полярности.
- При высокой разрядности необходимо согласовывать сопротивления открытых ключей с разрядными токами (разные площади транзисторов переключателей).
- Низкое быстродействие из-за большой входной емкости МОП-ключей (1...15 мкс).

Схемы КМОП-переключателей

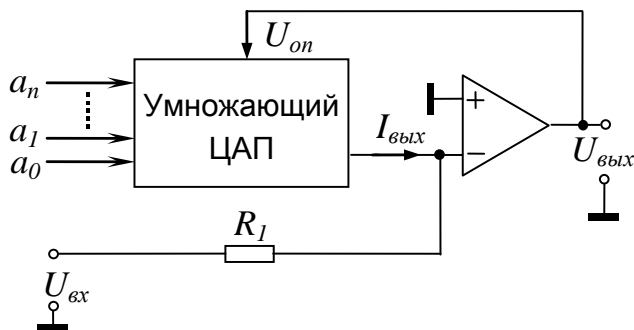


Двухквадрантный перемножитель



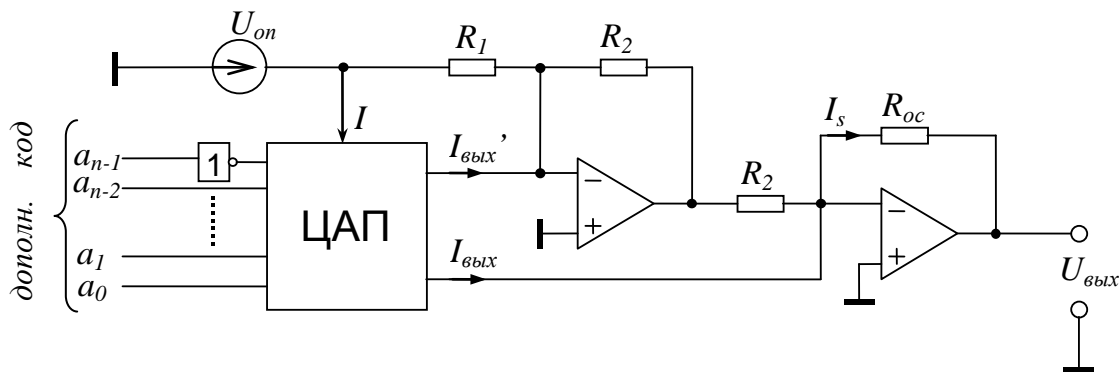
R1 AND R2 USED ONLY IF GAIN ADJUSTMENT IS REQUIRED.

Деление входного аналогового напряжения на число



$$\left. \begin{aligned} I_{6bIX} &= \frac{U_{6bIX}}{R} N \\ I_{6bIX} &= -\frac{U_{6X}}{R_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{6bIX} = -\frac{R}{R_1} \frac{U_{6X}}{N}$$

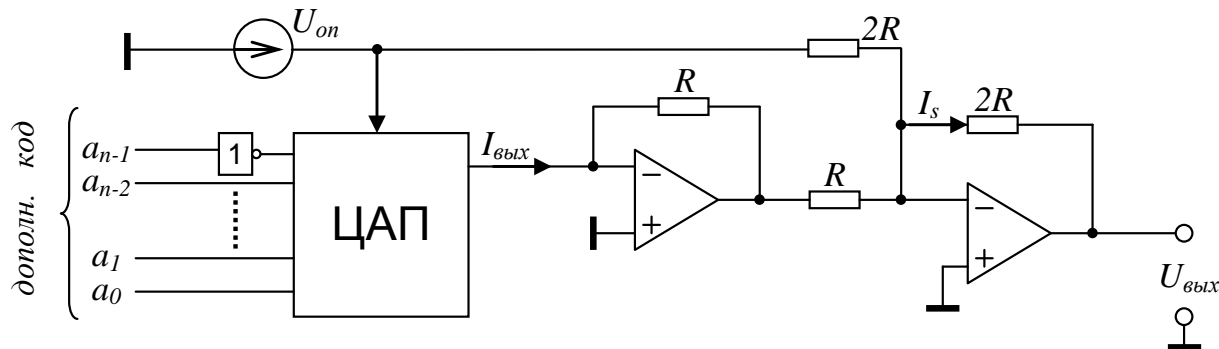
Четырехквadrантный перемножитель (схема 1)



$R_1 = R \cdot 2^n$, а R_2 – любое; либо $R_1/R_2 = 2^n$ и $R_2 = R$

$$I_s = I_{6bIX} - I_{6bIX} \cdot \frac{R_2}{R_1} - \frac{U_{on}}{R_1} \cdot \frac{R_2}{R_2} = I_{6bIX} - \left(I - I_{6bIX} - \frac{I}{2^n} \right) - \frac{U_{on}}{R \cdot 2^n} = 2 \left(I_{6bIX} - \frac{I}{2} \right) = 2 \frac{U_{on}}{R} \left(N - \frac{1}{2} \right)$$

Четырехквadrантный перемножитель (схема 2)



$$U_{6bIX} = - \left[\frac{-I_{6bIX} \cdot R}{R} \cdot 2R \right] + \frac{U_{on}}{2R} \cdot (-2R) = \frac{U_{on}}{R} \cdot N \cdot 2R - U_{on} = 2U_{on} \cdot N - U_{on} =$$

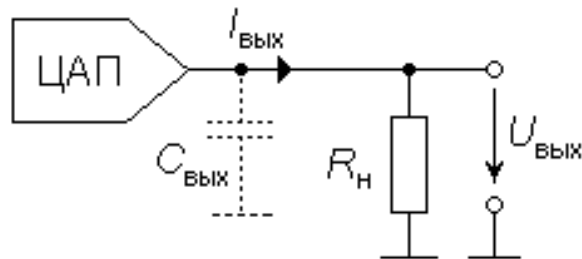
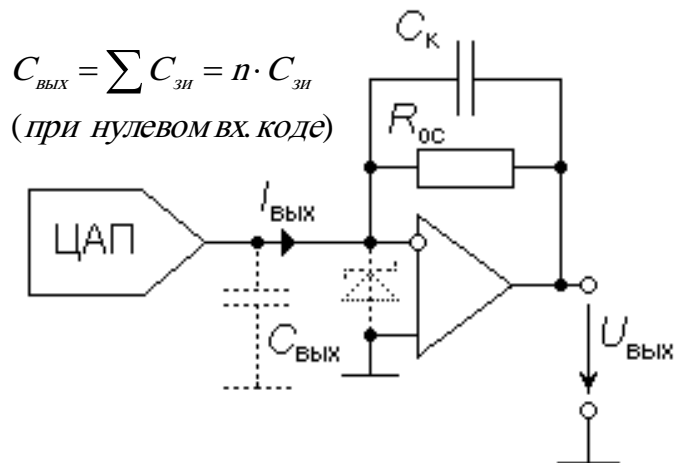
$$= 2U_{on}(N - 0.5), \quad \text{где } 0 \leq N < 1$$

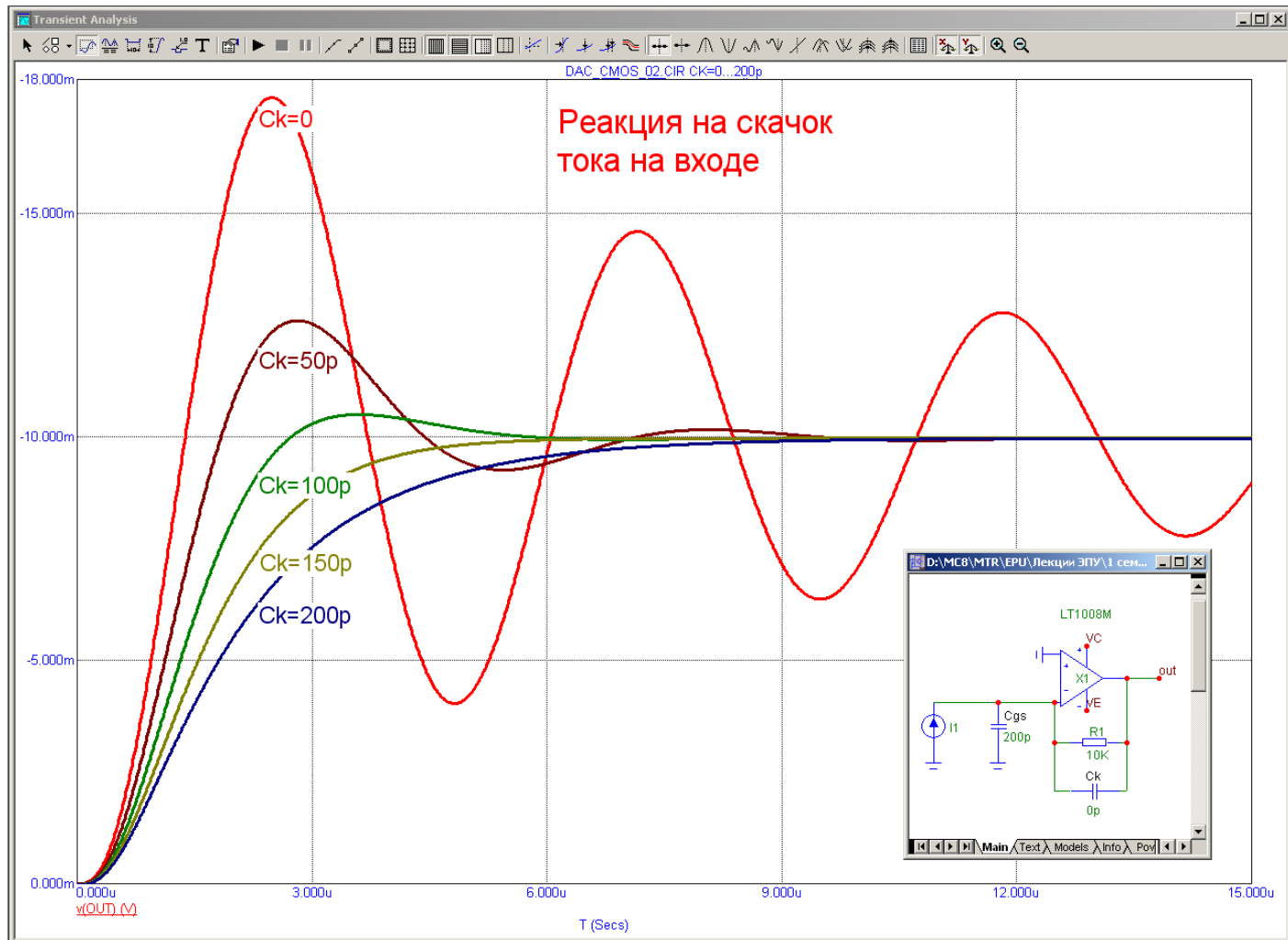
Формирование выходного сигнала в виде напряжения

$$U_{\text{вых}} = -R_{OC} \cdot I_{\text{вых}} = -\frac{R_{oc}}{R \cdot 2^n} \cdot U_{on} \cdot A$$

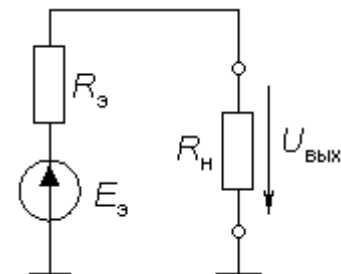
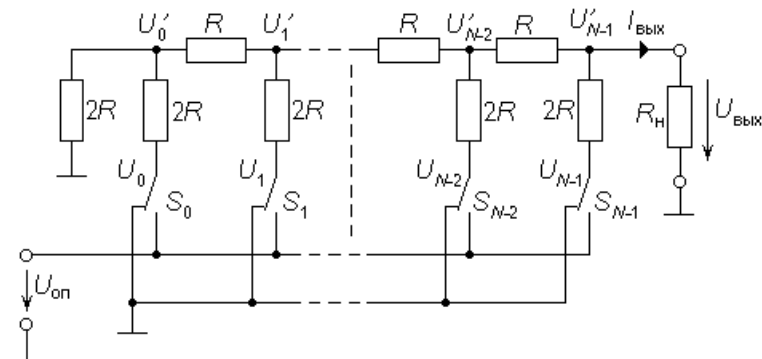
Обычно сопротивление резистора обратной связи $R_{oc}=R$:

$$U_{\text{вых}} = -\frac{1}{2^n} \cdot U_{on} \cdot A = N \cdot U_{on}, \quad \text{где} \quad 0 \leq N < 1$$





Инверсное включение ЦАП с КМОП-ключами



Согласно методу двух узлов при $R_H = 2R$:

$$U'_i = \frac{U_i / 2R}{1/(2R) + 1/(2R) + 1/(2R)} = \frac{U_i}{3}$$

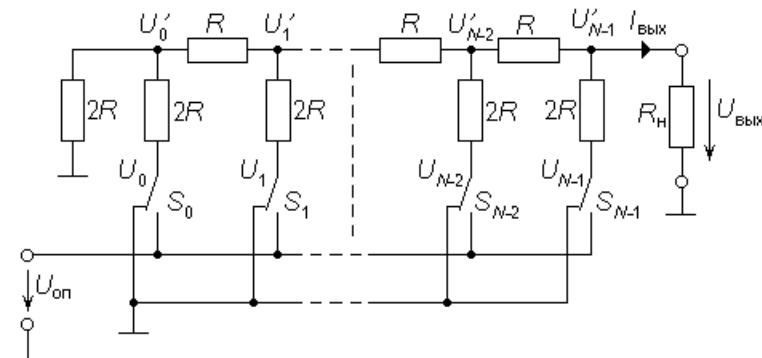
$$U_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} U_k \cdot 2^k = \frac{U_{\text{оп}}}{3 \cdot 2^{n-1}} \cdot A$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = \frac{E_3 \cdot R_H}{R_3 + R_H} \Rightarrow E_3 = U_{\text{ВЫХ}} \cdot \left(1 + \frac{R_3}{R_H}\right); \quad R_3 = R$$

$$\text{При } R_H = 2R: \quad E_3 = \frac{U_{\text{оп}}}{2^n} \cdot A \quad U_{\text{ВЫХ}} = \frac{R_H}{R + R_H} \cdot \frac{U_{\text{оп}}}{2^n} \cdot A$$

$$\text{При } R_H = \infty: \quad U_{\text{ВЫХ}} = \frac{U_{\text{оп}}}{2^n} \cdot A = U_{\text{оп}} \cdot N, \quad \text{где } 0 \leq N < 1$$

ЦАП на резистивной матрице R-2R в инверсном включении



Недостатки:

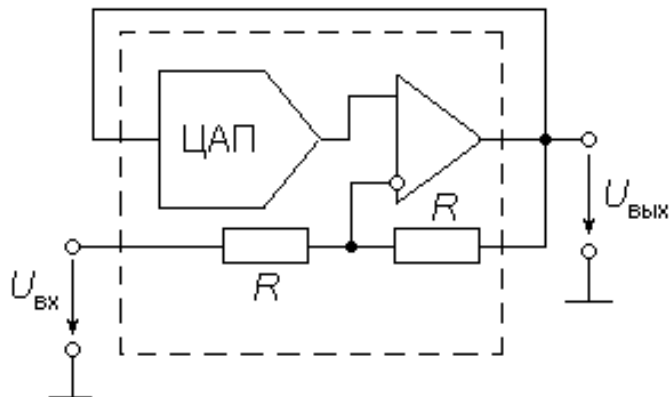
1. Большой перепад напряжений на ключах
2. Изменяющаяся нагрузка источника опорного напряжения
3. Значительное выходное сопротивление.

$$U_{OUT} = NU_{REF} 2^{-U_{REF}} = 2 \cdot U_{REF} \left(N - \frac{1}{2} \right)$$

униполярное $0 < U_{\text{ВЫХ}} < 4.096 \text{V}$)

$$\frac{U_{out} - U_{dac}}{2R} = \frac{U_{dac} - U_{ref}}{2R} \Rightarrow U_{out} = 2U_{dac} - U_{ref} = 2U_{ref} \left(\frac{A}{2^n} - \frac{1}{2} \right) = 2U_{ref} \left(N - \frac{1}{2} \right)$$

Двухквадрантный делитель на основе ЦАП с инверсной РМ

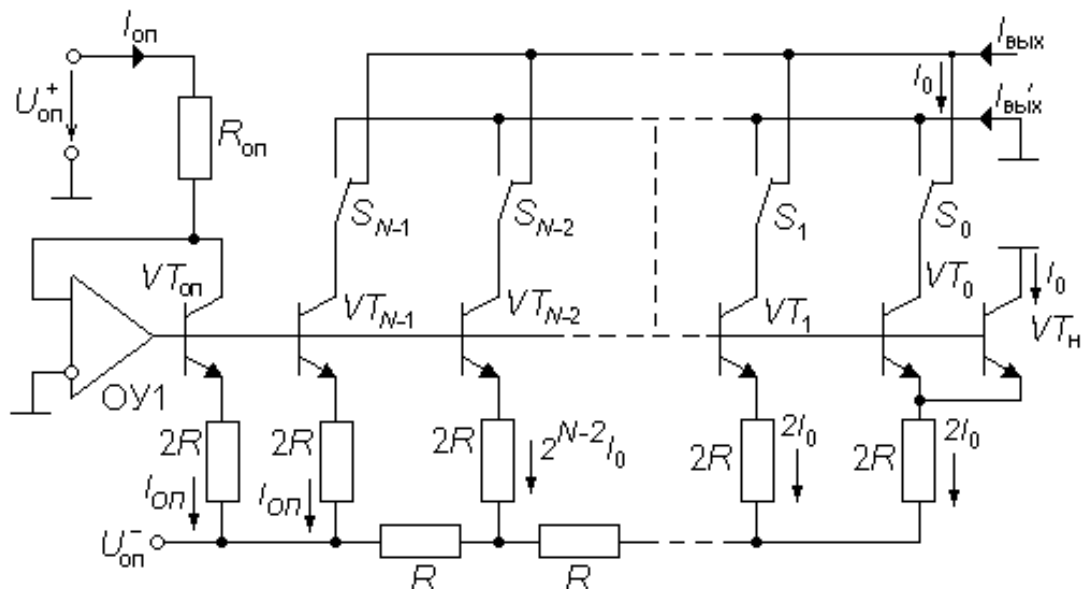


$$U_{\text{вых}} - U_{\text{цан}} = U_{\text{цан}} - U_{\text{вх}} \Rightarrow U_{\text{вых}} = \frac{2 \cdot U_{\text{вх}} \cdot A}{2^n} - U_{\text{вх}}$$

$$U_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{вх}} \cdot 2^{n-1}}{A - 2^{n-1}} = \frac{U_{\text{вх}}}{2 \cdot N - 1} = \frac{U_{\text{вх}}}{2 \cdot (N - 0.5)}$$

В данной схеме усилитель охвачен как положительной, так и отрицательной обратными связями. Для преобладания отрицательной обратной связи (иначе ОУ превратится в компаратор) необходимо выполнение условия $A < 2^{n-1}$ или $N < 1/2$. Это ограничивает значение входного кода нижней половиной шкалы.

ЦАП на источниках тока

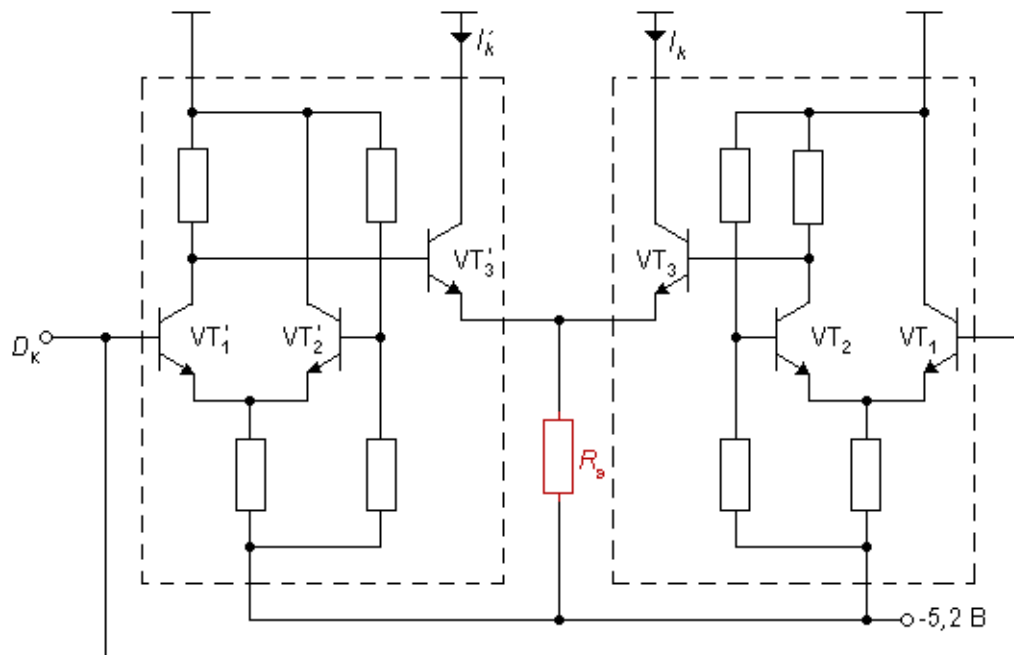


В данном случае весовые токи обеспечиваются транзисторными источниками тока, имеющими **высокое динамическое сопротивление** (разрядные токи не зависят от сопротивления ключей и нагрузки).

Выходной ток для N -разрядного ЦАП:

$$I_{on} = 2^{N-1} \cdot I_0; \quad I_{вых} = I_{on} \cdot a_{n-1} + \frac{I_{on}}{2} \cdot a_{n-2} + \dots + \frac{I_{on}}{2^{N-1}} \cdot a_0 = 2 \cdot \frac{I_{on}}{2^n} \cdot A = 2I_{on} \cdot N$$

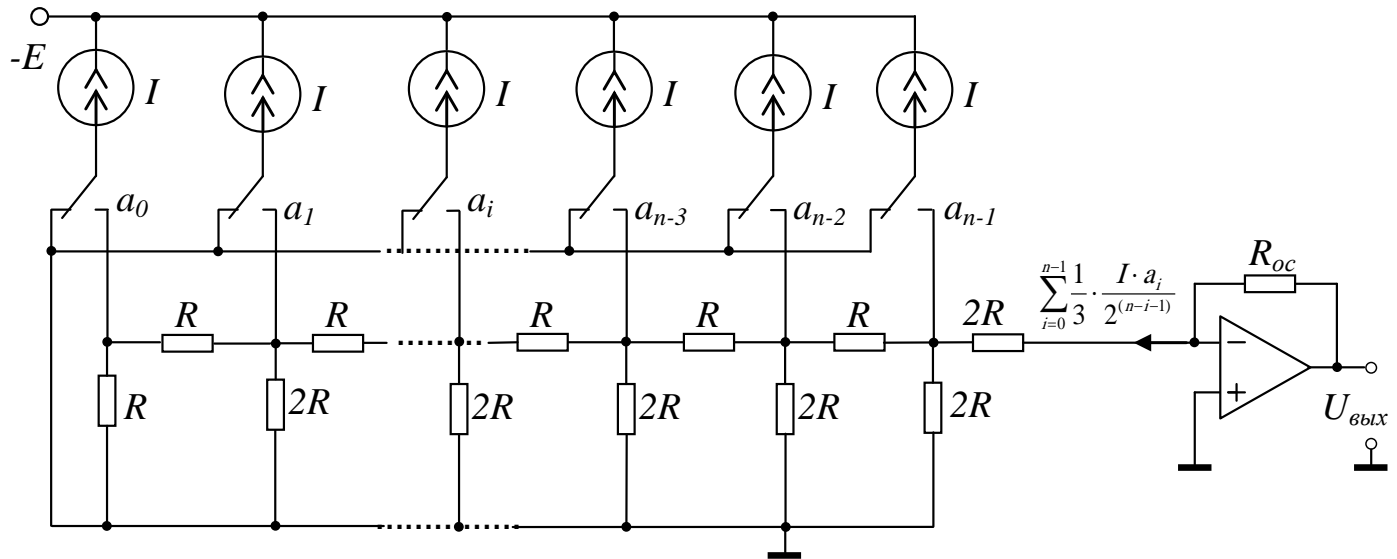
В качестве переключателей тока S_k часто используются **биполярные дифференциальные каскады**, в которых транзисторы работают в активном режиме. Это позволяет сократить время установления до единиц наносекунд. $D_K=1 \Rightarrow VT_3$ – откр., VT_3' – закр.



$$I_k \approx \frac{(5,2 - 0,9)B}{R_3}$$

Дифференциальные каскады VT_1-VT_3 и $VT_1'-VT_3'$ образованы из стандартных ЭСЛ вентилей. Ток I_k , протекающий через вывод коллектора выходного эмиттерного повторителя является выходным током ячейки. Точность значительно повышается, если резистор R_3 заменить источником постоянного тока, как на предыдущем слайде.

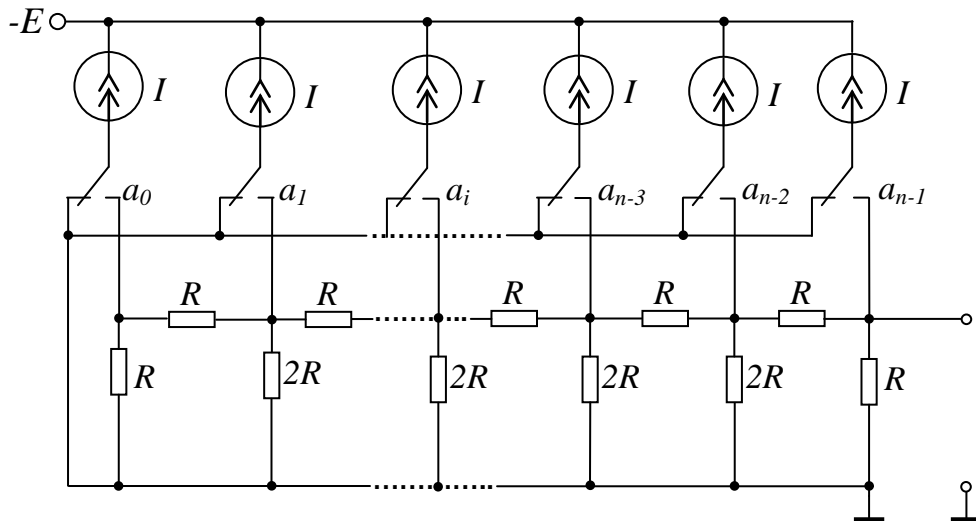
ЦАП с матрицей R–2R и источниками токов на активных элементах



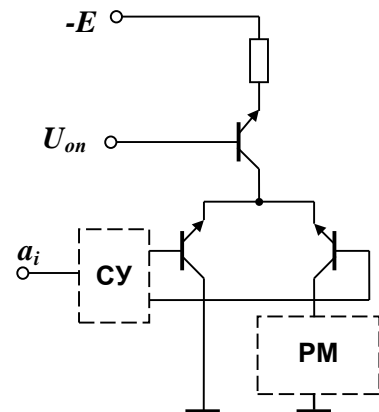
$$I_{\text{вых}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{I}{2^{n-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i = \frac{2}{3} \cdot \frac{I}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i = \frac{2}{3} \cdot \frac{I}{2^n} \cdot A = \frac{2}{3} \cdot I \cdot N$$

$$0 \leq N < 1$$

ЦАП с матрицей R–2R и источниками токов на активных элементах (с выходом по напряжению)

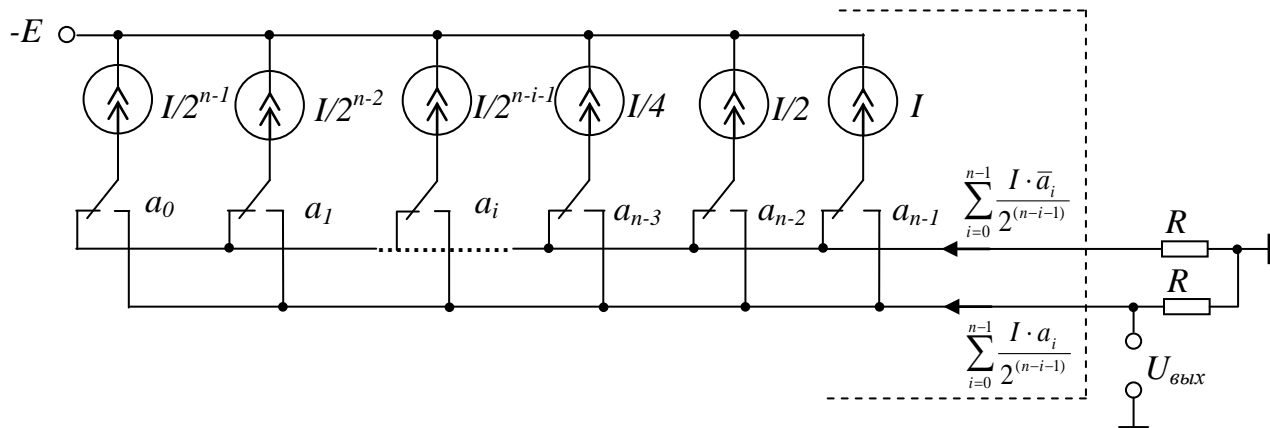


Источник тока с переключателем

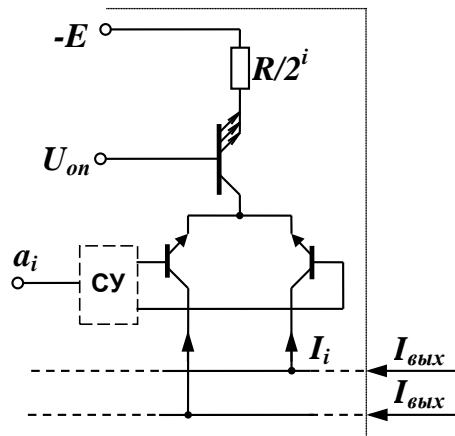


$$U_{вых} = I \cdot \frac{2}{3} R \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{2^{(n-i-1)}} = \frac{4}{3} \cdot I \cdot R \cdot N \quad 0 \leq N < 1$$

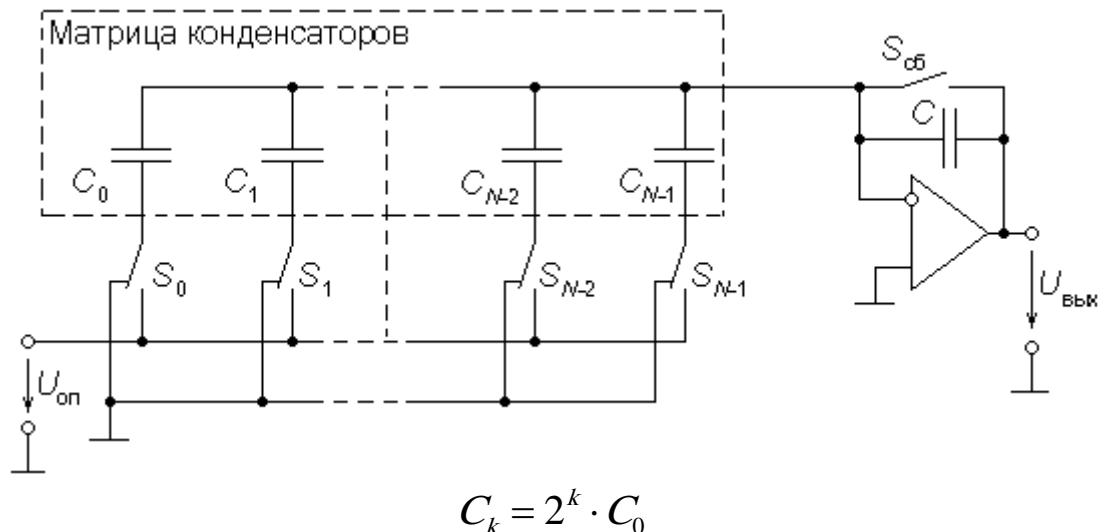
ЦАП со взвешенными по двоичному закону токами и источниками тока на активных элементах



Источник двоично-взвешенного тока с переключателем



Параллельный ЦАП на переключаемых конденсаторах



Суммарный заряд конденсаторов матрицы:

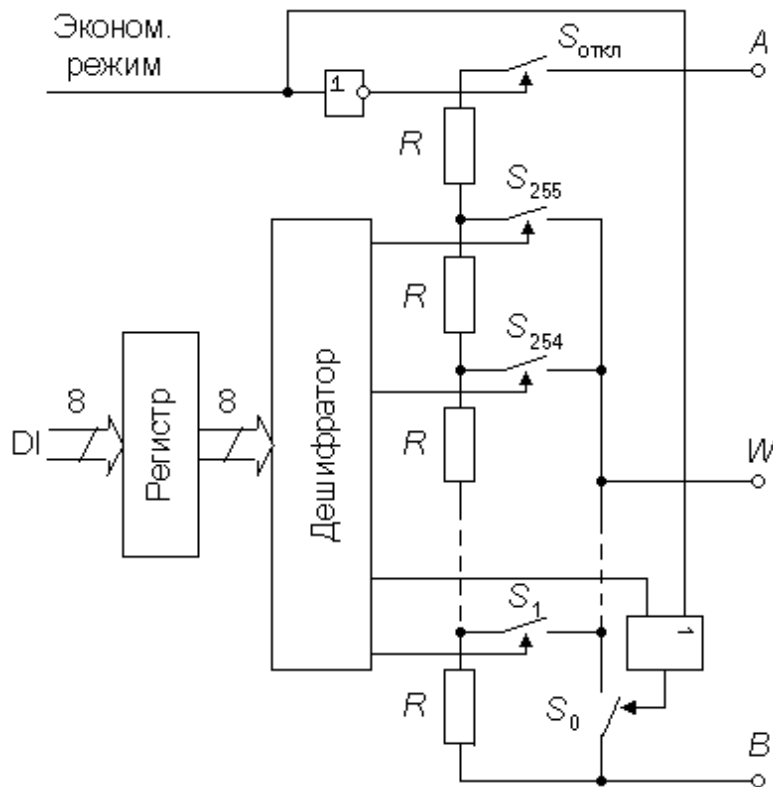
$$q = U_{оп} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot a_k = U_{оп} \cdot C_0 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} 2^k \cdot a_k = U_{оп} \cdot C_0 \cdot A$$

Равный заряд получает и конденсатор C в обратной связи ОУ. При этом на выходное напряжение ОУ:

$$U_{вых} = -q/C; \quad U_{вых} = -U_{оп} \cdot \frac{C_0}{C} \cdot A$$

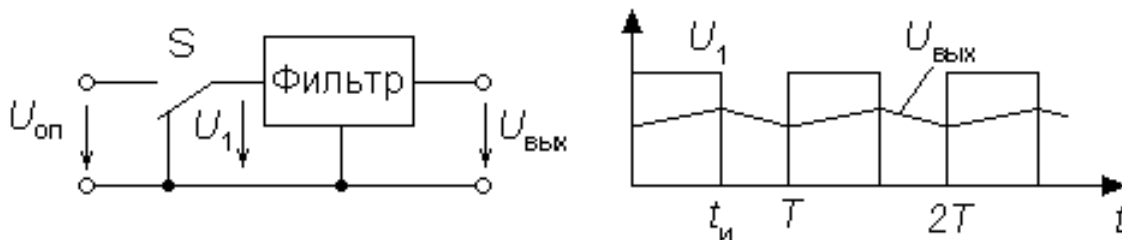
ЦАП с суммированием напряжений

Входной двоичный код D преобразуется дешифратором 8х256 в унитарный позиционный код, непосредственно управляющий ключами. Вывод W через ключи $S_0 \dots S_{255}$ может подключаться к любому из 256 резисторов в зависимости от входного кода.



$$U_{WB} = U_{AB} \cdot N$$

ЦАП с широтно-импульсной модуляцией



Микроконтроллер с помощью своего таймера/счетчика формирует последовательность импульсов, относительная длительность которых:

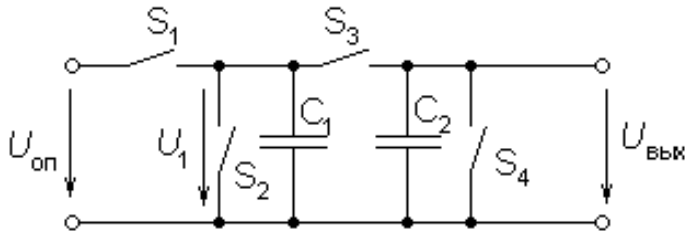
$$\gamma = \frac{t_{и}}{T} = \frac{A}{2^n}; \quad n - \text{разрядность преобразования, } A - \text{преобразуемый код.}$$

Выход ШИМ управляет ключом S . Фильтр нижних частот сглаживает импульсы, выделяя среднее значение напряжения:

$$U_{вых} = \gamma \cdot U_{on} = \frac{A \cdot U_{on}}{2^n} = N \cdot U_{on}$$

Для получения n -разрядного преобразования необходимы 2^n тактов (как минимум). Фильтр выделяет постоянную составляющую импульсного сигнала за несколько периодов.

Последовательный ЦАП на переключаемых конденсаторах



$$C_1 = C_2$$

Инициализация $U_{C2} = 0$ при замкн. S_4 .

1) Заряд-разряд C_1 : $U_{C1} = U_{on}$ при $a_0 = 1$ (замыкается S_1).

$U_{C1} = 0$ при $a_0 = 0$ (замыкается S_2).

2) S_1, S_2, S_4 — разомкнуты, S_3 — замыкается \Rightarrow деление заряда пополам между C_1 и C_2

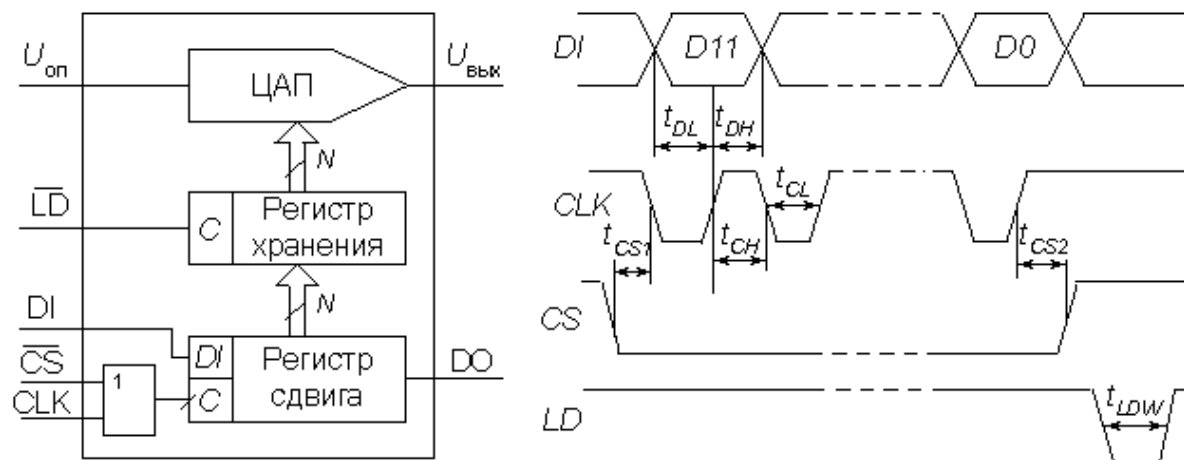
$$U_{1(0)} = U_{вых(0)} = \frac{a_0}{2} \cdot U_{on} ; \quad U_{вых(1)} = U_{1(1)} = \frac{\left(a_1 + \frac{a_0}{2}\right) \cdot U_{on}}{2} = \frac{(2a_1 + a_0) \cdot U_{on}}{4}$$

По прошествии n тактов

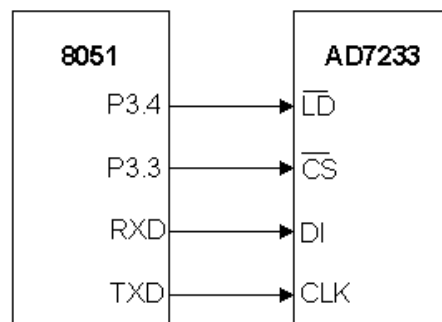
$$U_{вых(n-1)} = U_{1(n-1)} = \frac{U_{on}}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 2^k = \frac{U_{on}}{2^n} \cdot A = U_{on} \cdot N$$

Выполняет преобразование входного n -разрядного кода за $2 \cdot n$ квантов.

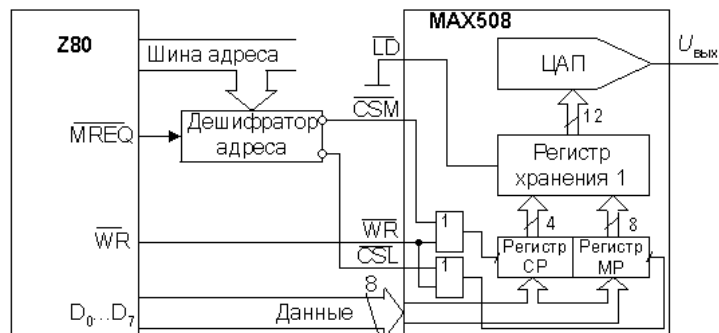
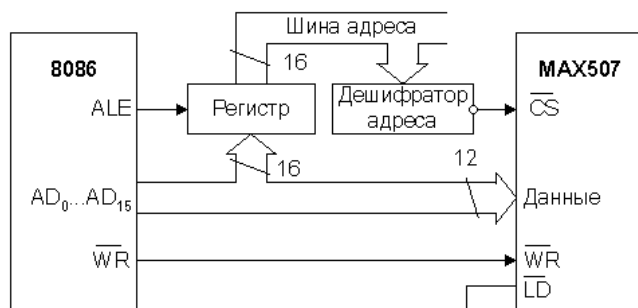
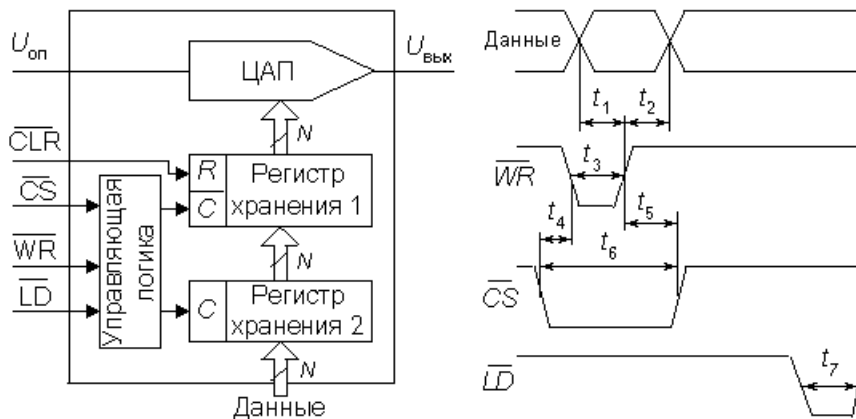
ЦАП с последовательным интерфейсом входных данных



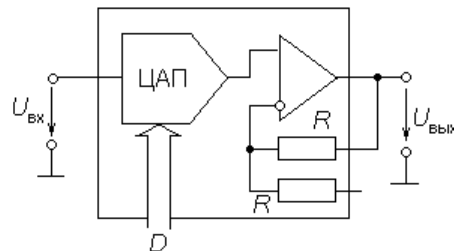
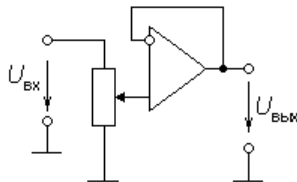
Подключение ЦАП с последовательным интерфейсом к микроконтроллеру семейства MCS51



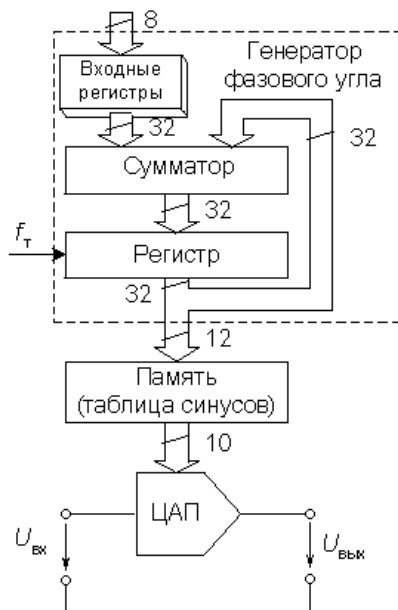
ЦАП с параллельным интерфейсом входных данных



Аттенюаторы и интеграторы на ЦАП



Система прямого цифрового синтеза сигналов (AD9850)



$$f_{\text{вых}} = \frac{\Delta\varphi \cdot f_{\text{ТАКТ}}}{2^N}$$

$$f_{\text{ТАКТ max}} = 125 \text{ МГц.}$$

$$\Delta f = \frac{1 \cdot 125 \cdot 10^6}{2^{32}} = 0,0291 \text{ Гц} \quad \text{— разрешение по частоте}$$

Быстродействие интерфейса — 23 000 000 операций записи в секунду

Статические параметры ЦАП

Разрешающая способность (или шаг квантования, а) — приращение $U_{вых}$ при преобразовании смежных значений D_j : $\Delta x = h = x_{max\ u\partial} / (2^N - 1) = V_{ref} / 2^n$.

Погрешность смещения нуля — значение, на которое выходной сигнал смещается относительно 0 в случае, когда входной цифровой код нулевой (а), в % — $\delta_{CM} = \frac{x_{CM}}{x_{max\ u\partial}} \cdot 100\%$

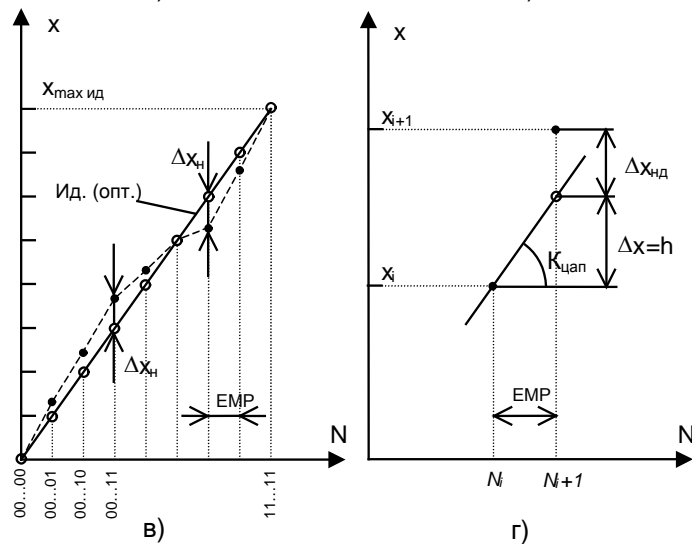
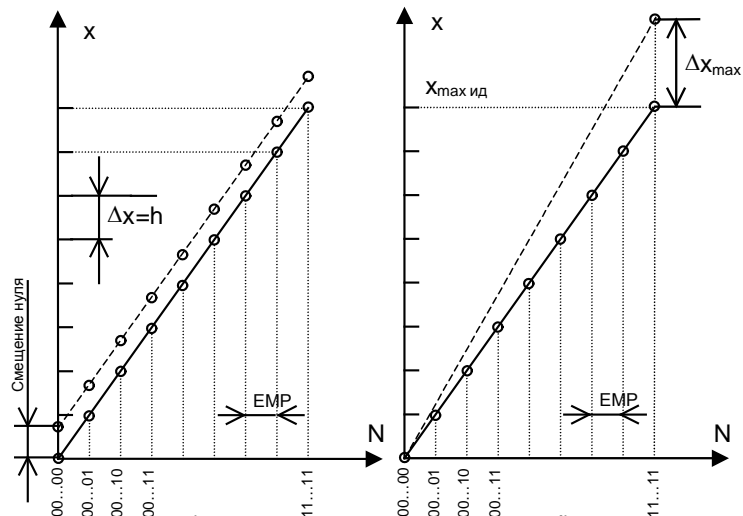
Погрешность полной шкалы — относительная разность между реальным и идеальным значениями предела шкалы преобразования при отсутствии смещения нуля (б).

$$\delta_{ПШ} = \frac{\Delta x_{max}}{x_{max\ u\partial}} \cdot 100\%$$

Погрешность нелинейности — максимальное отклонение реальной характеристики преобразования $U_{вых}(D)$ от оптимальной прямой: $\delta_n = \frac{\Delta x_n}{x_{max\ u\partial}} \cdot 100\%$.

Дифференциальная погрешность нелинейности — любое отклонение разности преобразованных значений смежных кодов от идеала (шага квантования h) называется дифференциальной нелинейностью $\delta_{\partial n} = \frac{x_{i+1} - x_i - h}{U_{ПШ}} \cdot 100\%$.

Монотонность характеристики преобразования — возрастание (уменьшение) выходного напряжения ЦАП $U_{вых}$ при возрастании (уменьшении) входного кода D .



ПРИМЕР

На выходе 6-разрядного ЦАП с предельным значением полной шкалы $U_{оп}=10$ В измерены следующие значения выходного напряжения:

| Код | $U_{изм}$ | $U_{скор}$ | $U_{теор}$ | Δ |
|--------|-----------|------------|------------|----------|
| 111111 | 10.04 | 9.84 | 9.84 | 0 |
| 100000 | 5.2 | 5 | 5 | 0 |
| 010000 | 2.56 | 2.36 | 2.5 | -0.14 |
| 001000 | 1.4 | 1.2 | 1.25 | -0.05 |
| 000100 | 0.9 | 0.7 | 0.625 | +0.08 |
| 000010 | 0.58 | 0.38 | 0.31 | +0.07 |
| 000001 | 0.4 | 0.2 | 0.16 | +0.04 |
| 000000 | 0.2 | 0 | 0.00 | 0 |

$$h_{теор} = \frac{10}{2^6} = 0.15625$$

$$U_{\max теор} = 10 - h_{теор} = 9.84$$

Основные параметры исследуемого ЦАП:

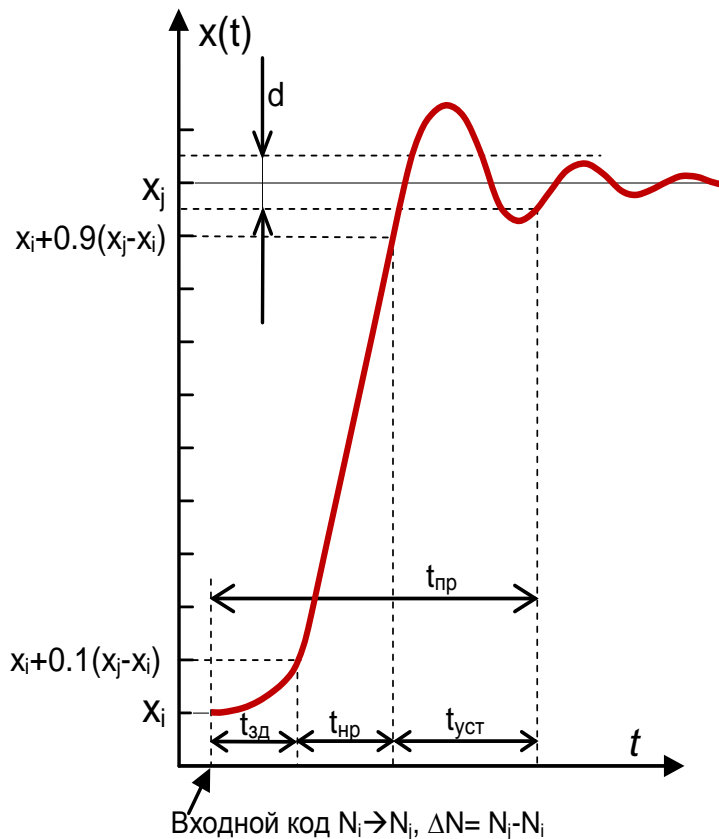
- а) Напряжение смещения — +0.2 В;
- б) Погрешность полной шкалы отсутствует;

в) Характеристика ЦАП немонотонна, в трех младших разрядах имеются ошибки в сумме составляющие 0.19 В. При переходе от кода 0111 ($U_{скор}=1.28$) к соседнему 1000 ($U_{скор}=1.2$) выходное напряжение не увеличивается, а уменьшается.

Однако, т.к. алгебраическая сумма ошибок разрядов равна 0 единственной формы нелинейности оказывается дифференциальная нелинейность.

Температурная нестабильность ЦА-преобразователя характеризуется температурными коэффициентами погрешности полной шкалы и погрешности смещения нуля.

Динамические параметры ЦАП



Время задержки ($t_{зд}$) – интервал времени, за который выходная величина $x(t)$ изменяется на 0.1 разности ($0.1(x_j - x_i)$) между последующим и предыдущим значениями;

Время нарастания ($t_{нр}$) – интервал времени за который выходная аналоговая величина изменяется от $x_i + 0.1(x_j - x_i)$ до $x_i + 0.9(x_j - x_i)$.

Время окончательного установления ($t_{уст}$) – интервал времени, за который выходная аналоговая величина $x(t)$ переходит от нарастания до установления в заданных пределах d (обычно $\pm 1/2$ аналогового эквивалента МР)

Время переключения – сумма времен задержки и нарастания.

Скорость нарастания – скорость изменения аналоговой величины на участке нарастания

Время преобразования ($t_{пр}$) – сумма времен задержки, нарастания и установления.

Шумы ($\text{нВ}/\text{Гц}^{1/2}$), импульсные выбросы ($\text{пВ} \cdot \text{с}$).

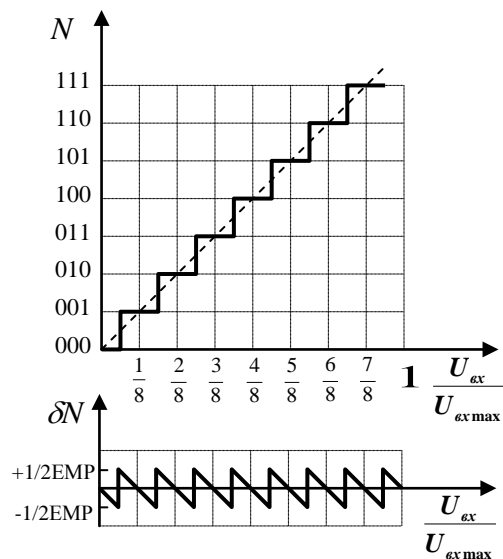
Аналого-цифровые преобразователи (АЦП) —

устройства, осуществляющее автоматическое преобразование (измерение и кодирование) непрерывно изменяющихся во времени аналоговых значений в эквивалентные значения числовых кодов. Преобразование обеспечивает соответствие дискретного отсчета $x(t_i)$ значению кода N_{ti} :

$$N_{ti} = x(t_i)/\Delta x \pm \delta N_{ti}$$

Статические параметры АЦП

Характеристика квантования ид. АЦП и график ошибки квантования



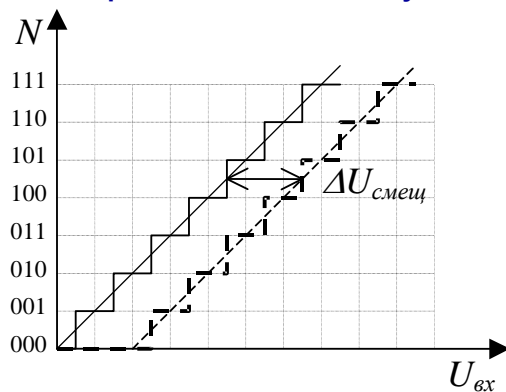
Наряду с **систематической ошибкой** квантования имеет место и более или менее значительная ошибка, обусловленная схемой — **инструментальная погрешность**. Она обусловлена несовершенством отдельных элементов схемы и влиянием на них различных дестабилизирующих факторов.

Если середины ступеней идеальной ломаной линии характеристики квантования соединить, то получится прямая с единичным наклоном, выходящая из начала координат. В реальных АЦП эта прямая не проходит через нуль (**погрешность смещения нуля** $\Delta U_{смещ}$) и ее наклон отличается от единичного (**погрешность коэффициента передачи** ΔU_{max}).

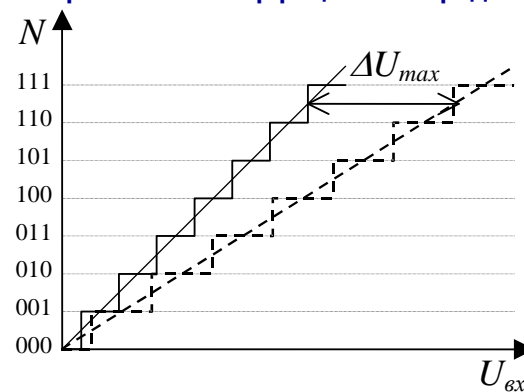
Погрешность нелинейности ΔU_H — отклонение усредненной характеристики квантования от идеальной прямой. **Дифференциальная нелинейность** указывает, насколько ширина отдельной ступеньки отличается от среднего значения шага квантования.

Статические параметры АЦП

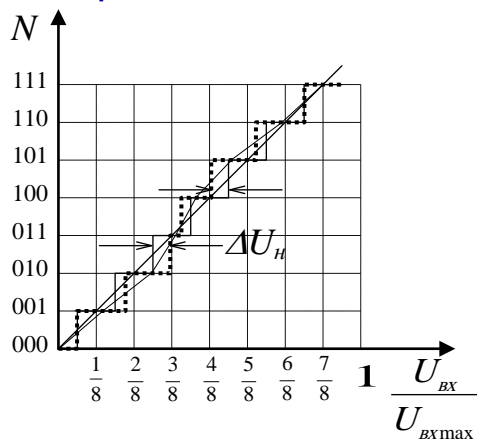
Погрешность смещения нуля



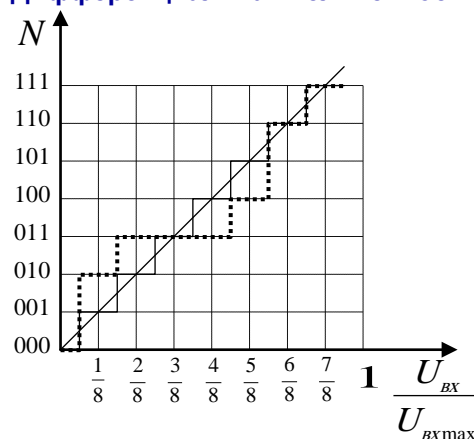
Погрешность коэффициента передачи



Погрешность нелинейности



Дифференциальная нелинейность

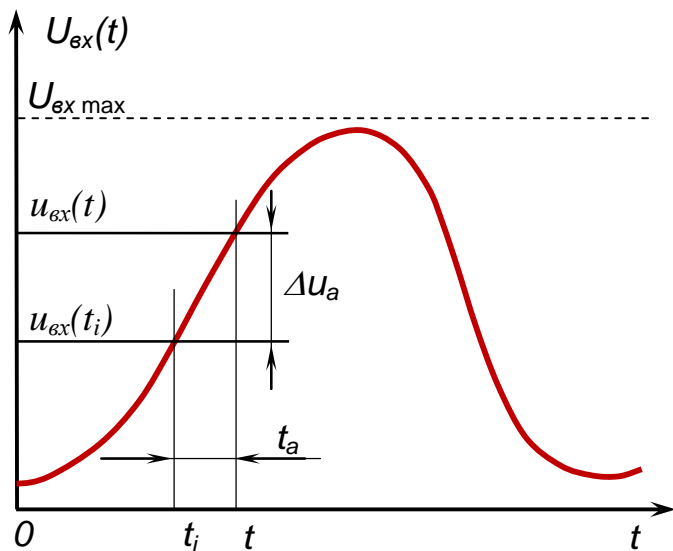


Динамические параметры АЦП

1) **Время преобразования** t_{np} – это время, отсчитываемое от начала импульса дискретизации или начала преобразования до появления на выходе устойчивого кода, соответствующего данной выборке. При работе без устройства выборки хранения является **апертурным временем**. Определяет предельно достижимую частоту дискретизации (преобразования):

$$t_{np} < T_{\text{дискр}} \quad t_{np} < \frac{1}{2 \cdot f_{\text{max}}} \quad \text{или} \quad f_{\text{max}} < \frac{1}{2 \cdot t_{np}} \quad (3.1)$$

Образование апертурной погрешности



$$u_{\text{вх}}(t) = u_{\text{вх}}(t_i) + t_a \cdot u'_{\text{вх}}(t_i) + \frac{t_a^2}{2} \cdot u''_{\text{вх}}(t_i) + \dots$$

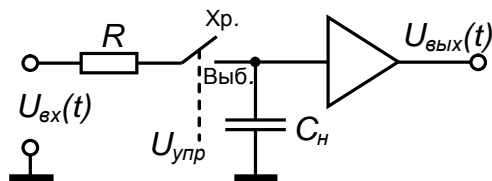
$$\Delta u_a(t_i) \approx u'_{\text{вх}}(t_i) \cdot t_a, \quad \Delta u_a \leq \frac{U_{\text{вх max}}}{2^n}.$$

Наихудший случай будет, когда на входе:

$$u_{\text{вх}}(t) = 0.5 \cdot U_{\text{вх max}} (\sin(2\pi f_{\text{max}} \cdot t) + 1)$$

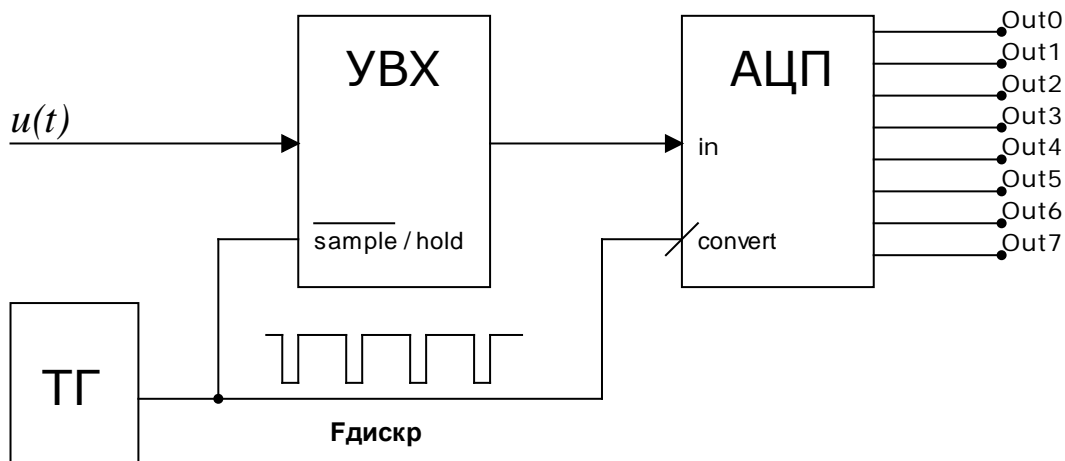
$$\Delta u_a = \pi \cdot f_{\text{max}} \cdot U_{\text{вх max}} \cdot t_a$$

$$f_{\text{max}} \leq \frac{1}{2^n \cdot \pi \cdot t_a} \quad t_a \leq \frac{1}{2^n \cdot \pi \cdot f_{\text{max}}} \quad (3.7)$$

УВХ

Для ликвидации **апертурной погрешности** на входе АЦП устанавливают аналоговое запоминающее устройство — устройство выборки-хранения УВХ. При этом происходит разделение операций дискретизации по времени (его выполняет УВХ) и собственно квантования — дискретизации по уровню (его выполняет АЦП).

Функция УВХ — запомнить значение аналогового сигнала в момент взятия отсчета и зафиксировать его на время выполнения операции преобразования в цифровой код с помощью АЦП.



Sample - выборка (низкий уровень)

Hold - хранение (высокий уровень)

Convert - запуск преобразования АЦП (передний фронт)

Задача на апертурную погрешность АЦП

Рассчитать максимально возможное время преобразования АЦП t_{np} для дискретизации сигнала с максимальной частотой спектра 50 кГц с погрешностью 0.5%:
 а) без устройства выборки-хранения на входе; б) с устройством выборки-хранения на входе.

Решение

1. Определяем необходимую разрядность АЦП n для возможности обеспечения 0.5% относительной погрешности преобразования

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{100\%}{\delta_{\%}} \right) \right\rceil ; \quad n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{100\%}{0,5\%} \right) \right\rceil = \lceil \log_2 200 \rceil = 8 \quad \text{Разрядность АЦП } n=8$$

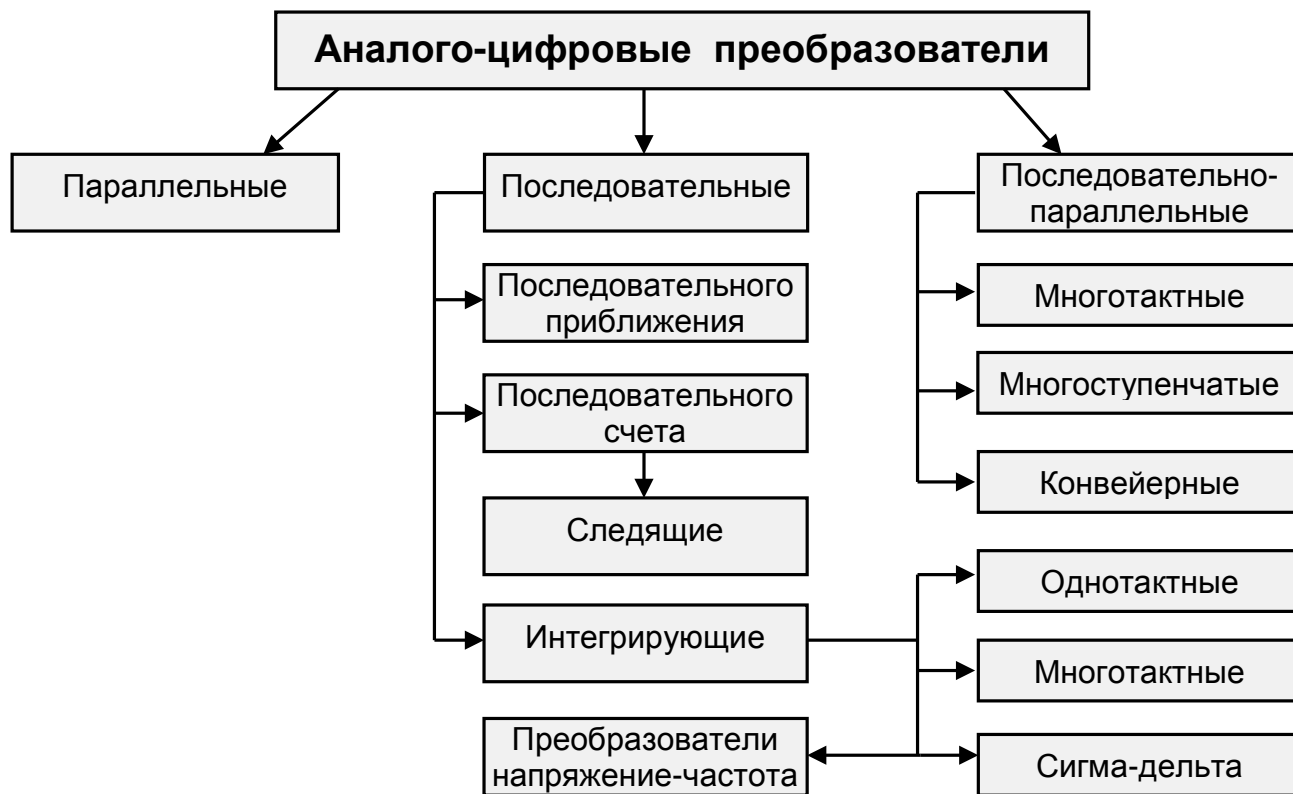
2. Определим требуемое время преобразования 8-разрядного АЦП при дискретизации изменяющихся сигналов без УВХ из условия обеспечения величины апертурной погрешности менее шага квантования (соотношение (3.7)):

$$t_{np\text{еобр}} \leq \frac{1}{2^n \cdot \pi \cdot f_{\max}} = \frac{1}{2^8 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^3} = 25 \text{ нс} ; \quad \text{без УВХ} \quad t_{np\text{еобр}} \leq 25 \text{ нс}$$

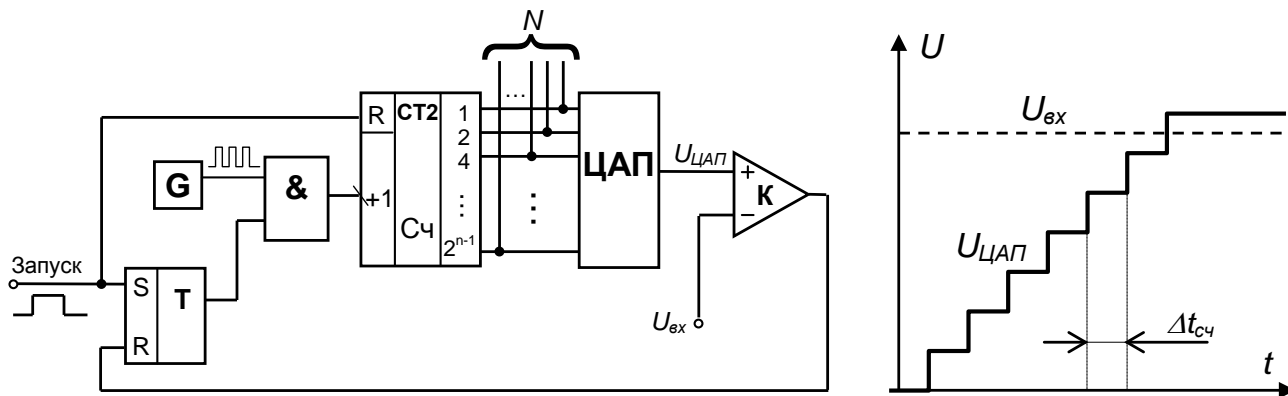
3. Определим требуемое время преобразования 8-разрядного АЦП при дискретизации изменяющихся сигналов с УВХ из условия обеспечения величины времени преобразования АЦП меньше максимально возможного периода дискретизации (соотношение (3.1)):

$$t_{np\text{еобр}} \leq \frac{1}{2 \cdot f_{\max}} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 10^3} = 10 \text{ мкс} ; \quad \text{с УВХ} \quad t_{np\text{еобр}} \leq 10 \text{ мкс}$$

Классификация АЦП



Последовательные АЦП с единичным приближением



$t_{np \max} = (2^n - 1) \cdot \Delta t_{сч}$, где $\Delta t_{сч} = 1/f_{сч}$ — период счетных импульсов

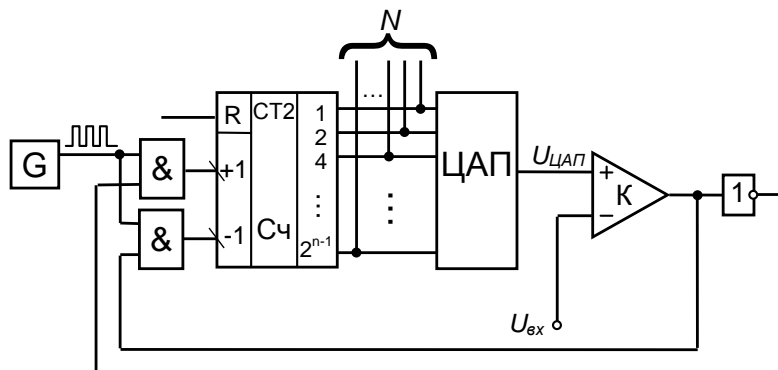
$$\Delta t_{сч \min} = t_{сч} + t_{цан} + t_T + t_{\kappa} + t_{\text{л}}$$

Отслеживает $U_{вх}$ с погрешностью, равной ЕМР, при условии:

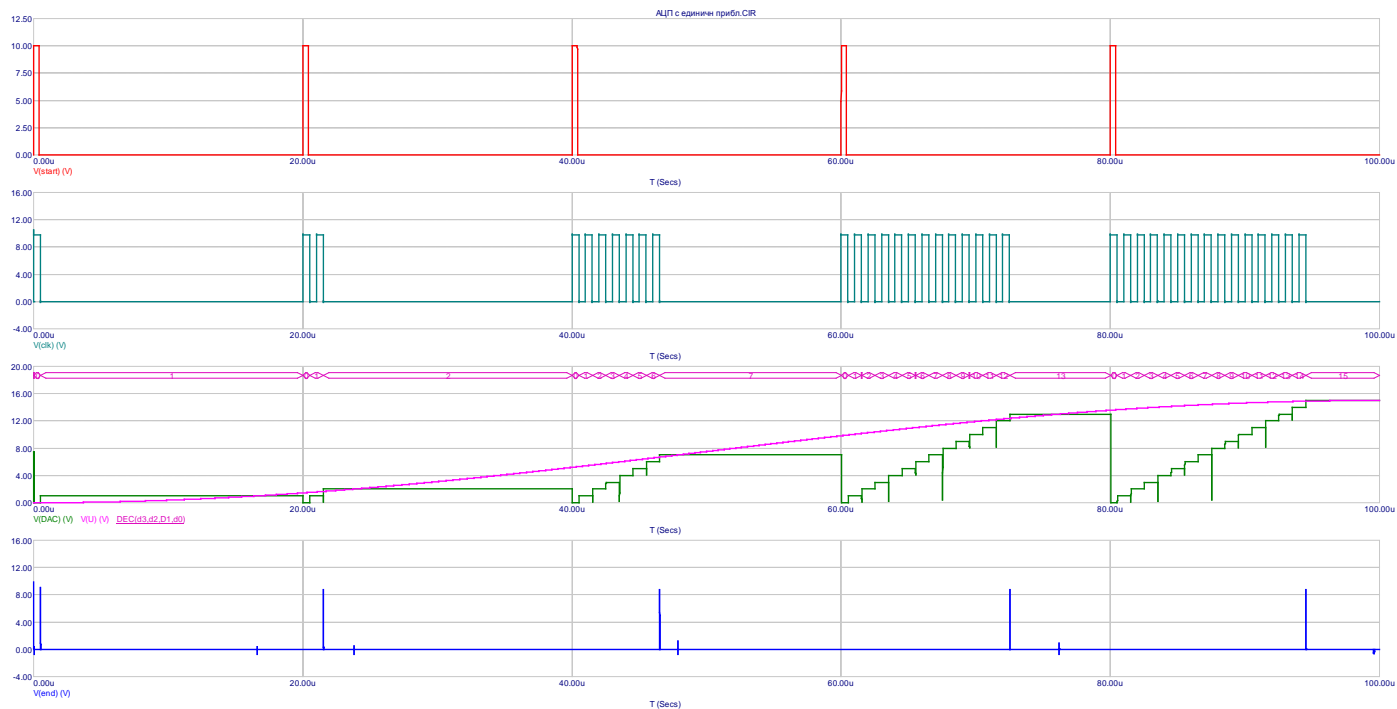
$$u'_{вх}(t) \cdot \Delta t_{сч} \leq \Delta u$$

$$\Delta u = \frac{u_{вх \max}}{2^n}$$

Следящий АЦП



The circuit diagram shows a 4-bit DAC implemented using a 74VHC04 inverter (U1) and a 74VHC00 NAND gate (X2). The input signals are labeled V2 (1Meg), V1 (Start), and V4 (sin_5k). The output is connected to a 5V supply and a 1K resistor. The circuit is powered by a 5V supply (V3) and a 16V supply (V16). The output is connected to a 5pF capacitor (C1) and a 1K resistor (R1). The output is also connected to a 5V supply (V3) and a 16V supply (V16).



Задачи на погрешность АЦП с единичным приближением

1 Сигнал с максимальной частотой спектра $F_{\max}=1$ Гц оцифровывается с помощью последовательного АЦП с единичным приближением без устройства выборки-хранения на входе и разрядностью $n=8$. Определить минимально возможную тактовую частоту работы данного АЦП, при которой его апертура не будет вносить дополнительную погрешность.

Решение. Чтобы не возникала апертурная погрешность, превышающая шаг квантования, время преобразования данного АЦП должно удовлетворять неравенству (3.7), т.е.

$$t_a \leq \frac{1}{2^n \cdot \pi \cdot f_{\max}} \Rightarrow t_a \leq \frac{1}{2^8 \cdot \pi \cdot 1} \Rightarrow t_{a\max} = 1.243 \text{ мс}$$

Время преобразования данного АЦП переменное и зависит от величины преобразуемого напряжения. Таким образом, чтобы избежать апертурной погрешности, в качестве апертурного

времени мы должны взять максимально возможное время преобразования $t_a = \frac{2^n - 1}{f_{\text{сч}}}$.

Следовательно ограничение снизу на тактовую частоту $f_{\text{сч}}$ данного АЦП будет определяться

из неравенства
$$\frac{2^n - 1}{f_{\text{сч}}} \leq t_{a\max}.$$

Решая неравенство для $n=8$, $t_{a\max}=1.243$ мс, находим $f_{\text{сч}} \geq \frac{2^n - 1}{t_{a\max}} \Rightarrow f_{\text{сч}} \geq 205,15 \text{ кГц}$

2 Сигнал с максимальной частотой спектра $F_{\max}=5$ кГц требуется оцифровать с помощью последовательного АЦП с единичным приближением (с устройством выборки-хранения на входе) с погрешностью 1% в конечной точке шкалы. Определить минимально возможные разрядность и тактовую частоту данного АЦП

Решение

1. Определяем минимальную разрядность АЦП n для возможности обеспечения 1% относительной погрешности преобразования

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{100\%}{\delta_{\%}} \right) \right\rceil; \quad n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{100\%}{1\%} \right) \right\rceil = \lceil \log_2 100 \rceil = 7 \quad \text{Разрядность АЦП } n=7$$

2. Определим ограничение сверху на время преобразования 7-разрядного АЦП при дискретизации изменяющихся сигналов с УВХ из условия обеспечения величины времени преобразования АЦП меньше максимально возможного периода дискретизации (соотношение (3.1)):

$$t_{\text{преобр}} \leq \frac{1}{2 \cdot f_{\max}} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 10^3} = 100 \text{ мкс}; \quad \text{с УВХ} \quad t_{\text{преобр max}} = 100 \text{ мкс}$$

3. Определим ограничение снизу на тактовую частоту $f_{\text{сч}}$ данного АЦП, учитывая, что макси-

$$\text{мальное время преобразования данного АЦП } t_{\text{преобр}} = \frac{2^n - 1}{f_{\text{сч}}} \Rightarrow \frac{2^n - 1}{f_{\text{сч}}} \leq t_{\text{преобр max}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{\text{сч}} \geq \frac{2^7 - 1}{100 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow f_{\text{сч min}} = 1,27 \text{ МГц}$$

3 Сигнал с максимальной частотой спектра $F_{\max}=1$ кГц требуется отслеживать с помощью следящего АЦП с точностью 1% для конечной точки шкалы. Определить минимально возможные разрядность и тактовую частоту работы данного АЦП.

Решение

1. Определяем минимальную разрядность АЦП n для возможности обеспечения 1% относительной погрешности преобразования

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{100\%}{\delta_{\%}} \right) \right\rceil; \quad n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{100\%}{1\%} \right) \right\rceil = \lceil \log_2 100 \rceil = 7 \quad \text{Разрядность АЦП } n=7$$

2. Для того чтобы выполнялось слежение с точностью до шага квантования АЦП, необходимо, чтобы за один такт работы следящего АЦП сигнал не изменился бы на значение, превосходящее шаг квантования. Т.е. $u'_{\text{вх}}(t) \cdot \Delta t_{\text{сч}} \leq \Delta u$, где Δu — шаг квантования. Т.е. в данном

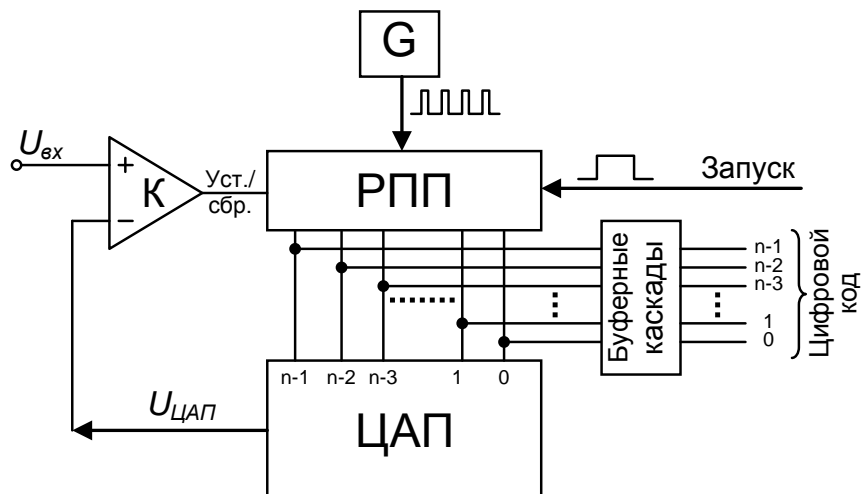
случае апертурное время равно периоду тактовых импульсов следящего АЦП $\Delta t_{\text{сч}}$.

Используя ограничение для апертурного времени (3.7), при выполнении которого не возникает дополнительная динамическая погрешность, записываем для $\Delta t_{\text{сч}}$:

$$\Delta t_{\text{сч}} \leq \frac{1}{2^n \cdot \pi \cdot f_{\max}}; \quad \Delta t_{\text{сч}} \leq \frac{1}{2^7 \cdot \pi \cdot 1000}; \quad \Delta t_{\text{сч}} \leq 2,5 \text{ мкс}$$

$$f_{\text{сч}} = \frac{1}{\Delta t_{\text{сч}}} \Rightarrow f_{\text{сч}} \geq \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-6}}; \quad f_{\text{сч}} \geq 402 \text{ кГц}$$

Последовательные АЦП с двоично-взвешенным приближением



| | |
|--------------|---------|
| 1000000000 | 1 такт |
| x100000000 | 2 такт |
| xx10000000 | 3 такт |
| | |
| xxxxxxxxx10 | 9 такт |
| xxxxxxxxxx1 | 10 такт |
| xxxxxxxxxxxx | |

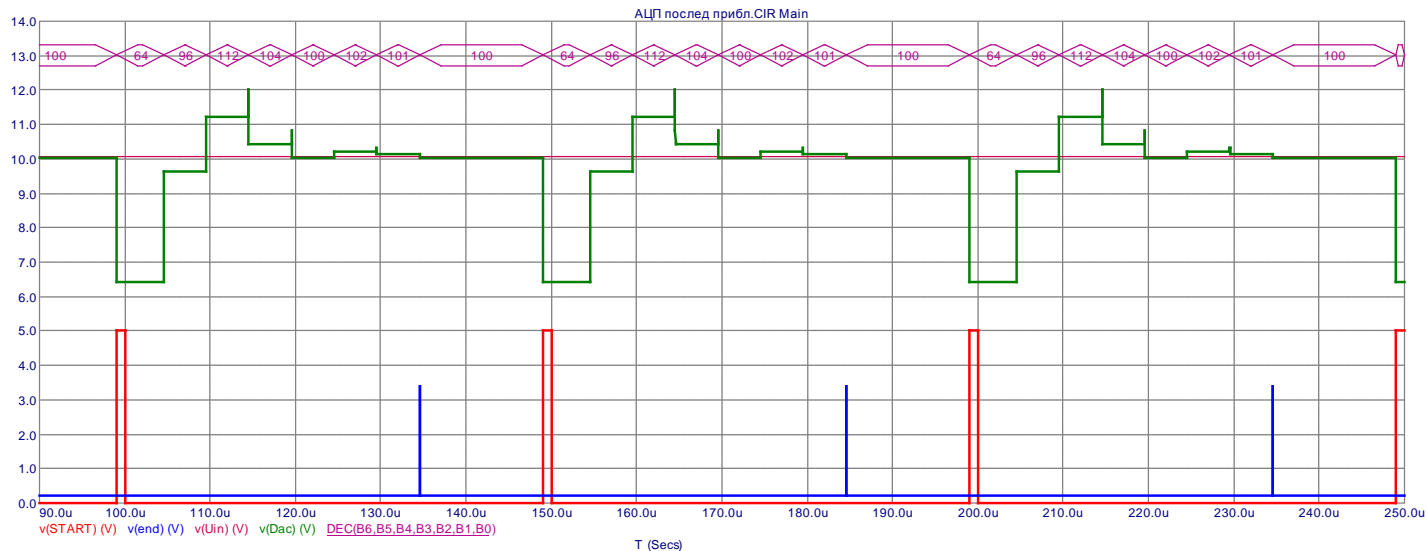
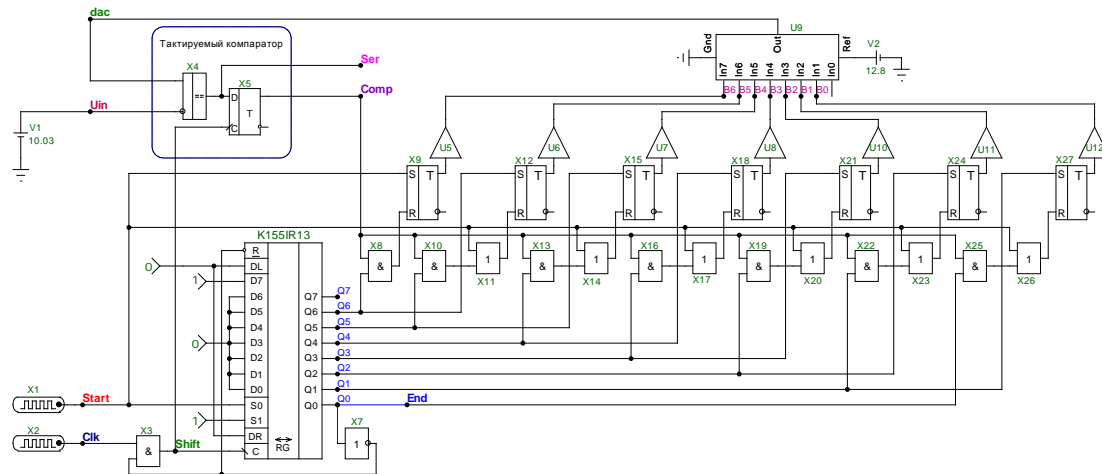
X — 0 или 1 в зависимости от результата сравнения $U_{вх}$ и $U_{ЦАП}$

$t_{преобр} = n \cdot \Delta t_G$, где n — количество двоичных разрядов АЦП

Последовательный код присутствует на выходе компаратора К.

При преобразовании быстроменяющихся сигналов данные АЦП работают совместно с УВХ.

АЦП последовательных приближений (с двоично-взвешенным приближением)



Задача на погрешность АЦП с двоично-взвешенным приближением

1 Сигнал с максимальной частотой спектра $f_{max}=1$ кГц оцифровывается с помощью последовательного АЦП с двоично-взвешенным приближением без устройства выборки-хранения на входе и разрядностью $n=8$. Определить минимально возможную тактовую частоту f_G работы данного АЦП, при которой его апертура не будет вносить дополнительную погрешность.

Решение

Чтобы апертурное время (максимальное время преобразования АЦП) не вносило дополнительной погрешности при преобразовании изменяющегося на входе n -разрядного АЦП сигнала, имеющего максимальную частоту спектра f_{max} , оно должно удовлетворять неравенству:

$$t_{преобр} \leq \frac{1}{2^n \cdot \pi \cdot f_{max}} \quad (3.7)$$

Соотношение (3.7) доказано в конспекте лекций. Находим из него ограничение сверху на время преобразования АЦП:

$$t_{преобр} \leq \frac{1}{2^8 \cdot \pi \cdot 1000} \approx 1,243 \text{ мкс.}$$

Учитывая, что в АЦП с двоично-взвешенным приближением преобразование совершается за n тактов (где n — число двоичных разрядов АЦП), находим минимально возможную тактовую частоту работы данного АЦП f_G :

$$t_{преобр} = n \cdot T_G = \frac{n}{f_G} \quad f_{G \min} = \frac{n}{t_{преобр \max}} = 6,43 \text{ МГц}, \quad f_G \geq 6,43 \text{ МГц}$$

2 Сигнал с максимальной частотой спектра $f_{max} = 20$ кГц требуется оцифровать с помощью последовательного АЦП с двоично-взвешенным приближением (с устройством выборки-хранения на входе) с погрешностью 1% в конечной точке шкалы. Определить минимально возможные разрядность и тактовую частоту данного АЦП.

Решение

1. Определяем минимальную разрядность АЦП n для возможности обеспечения 1% относительной погрешности преобразования

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{100\%}{\delta_{\%}} \right) \right\rceil; \quad n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{100\%}{1\%} \right) \right\rceil = \lceil \log_2 100 \rceil = 7 \quad \text{Разрядность АЦП } n=7$$

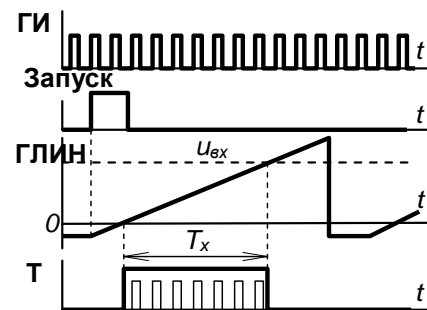
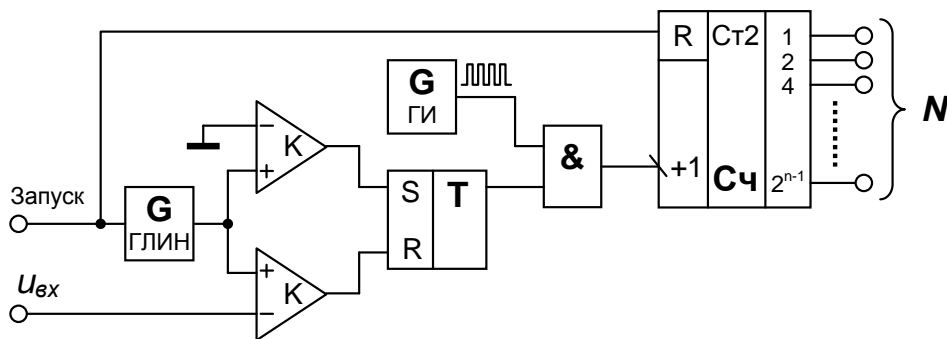
2. При постановке на вход АЦП аналогового запоминающего устройства (устройства выборки-хранения) время преобразования АЦП ограничивается сверху лишь максимально возможным периодом дискретизации сигнала, определяемым из граничного условия теоремы Котельникова-Найквиста $T_{дискр} \leq 1/(2 \cdot f_m)$:

$$t_{преобр} \leq T_{дискр \max}, \quad T_{дискр \max} = \frac{1}{2 \cdot f_m} = \frac{1}{2 \cdot 20 \cdot 10^3} = 25 \text{ мкс} \quad \Rightarrow \quad t_{преобр} \leq 25 \text{ мкс}$$

3. Из ограничения сверху на время преобразования находим ограничение снизу на тактовую частоту f_G работы АЦП последовательных приближений (учитывая, что преобразование осуществляется за n тактов):

$$t_{преобр} = n \cdot T_G = \frac{n}{f_G} \quad f_{G \min} = \frac{n}{t_{преобр \max}} = \frac{7}{25 \cdot 10^{-6}} = 0,28 \text{ МГц} \quad f_G \geq 280 \text{ кГц}$$

АЦП с промежуточным преобразованием в интервал времени



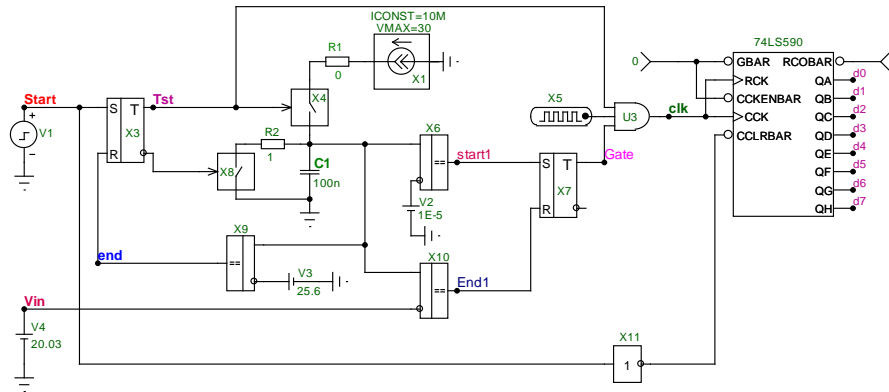
$$N = \frac{T_x}{\Delta t_{сч}} = \frac{u_{вх}}{\Delta t_{сч} \cdot \alpha}, \quad \alpha = \frac{du_{ГЛИН}}{dt} \quad (T_x \cdot \alpha = u_{вх})$$

Статическая погрешность данного АЦП определяется нестабильностью частоты $f_{сч}$, отклонением характеристики ГЛИН от идеальной, погрешностью компараторов.

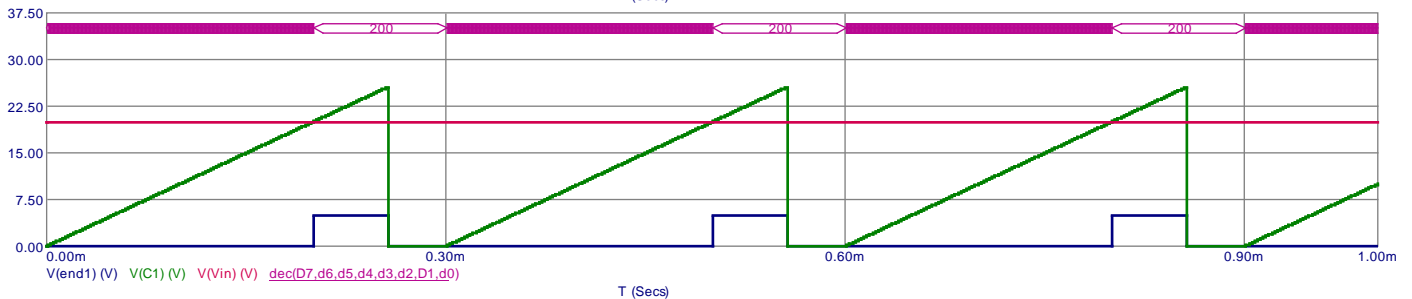
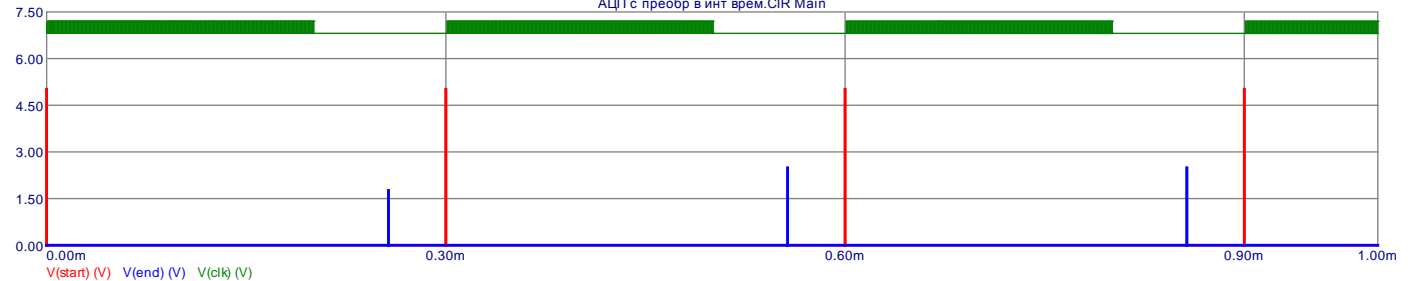
С точки зрения динамической погрешности рассматриваемый АЦП аналогичен АЦП со ступенчатым пилообразным напряжением (с единичным приближением).

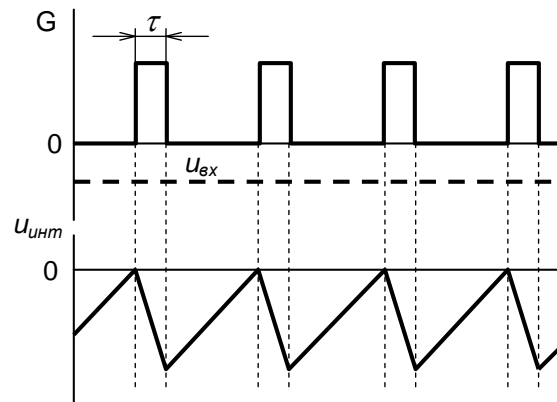
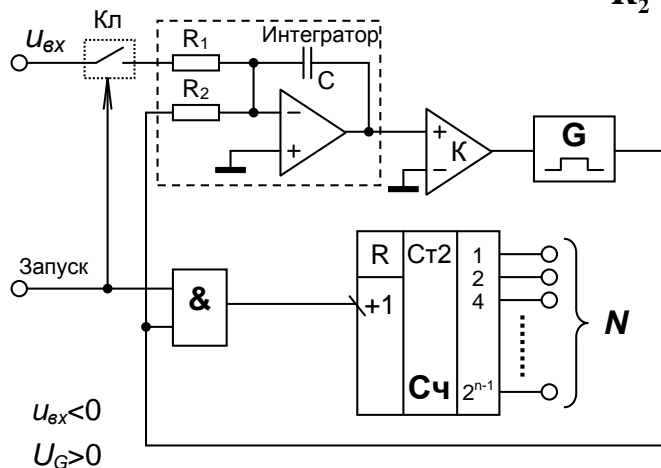
Для уменьшения динамической (апертурной) погрешности необходимо совместно с данным АЦП использовать УВХ.

АЦП с промежуточным преобразованием в интервал времени



АЦП с преобр в инт врем.CIR Main



$$\frac{U_G}{R_2} > \frac{U_{ex}}{R_1}$$

$$\frac{1}{R_1 C} \cdot \int_0^{T_{um}} U_{ax} dt - \frac{1}{R_2 C} \cdot \int_0^{\tau} U_G dt = 0$$

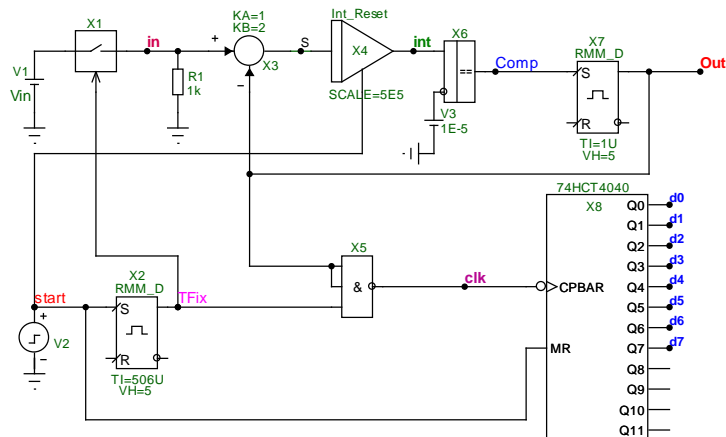
$$\frac{U_{\text{ex}} \cdot T_{\text{ннт}}}{R_1 C} - \frac{U_G \cdot \tau}{R_2 C} = 0$$

$$T_{шт} = \frac{U_G}{U_{ex}} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \tau$$

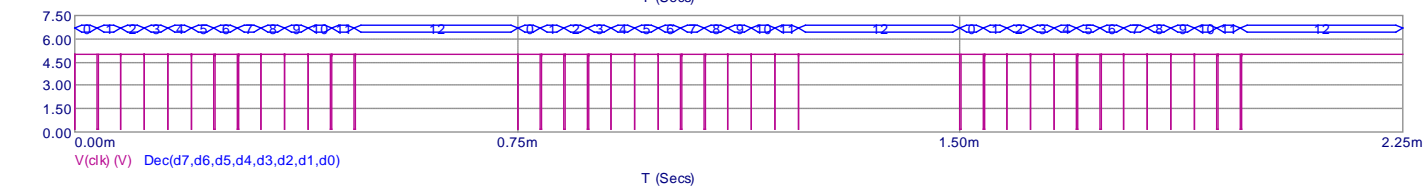
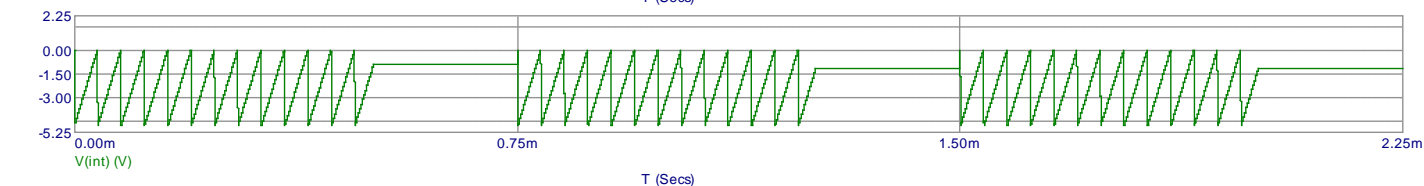
$$f_{инт} = \frac{1}{T_{инт}} = \frac{U_{\text{вх}}}{U_G} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\tau} = \alpha \cdot U_{\text{вх}}$$

$$N = T_{\phi} \cdot f_{\text{инт}} = T_{\phi} \cdot \alpha \cdot U_{\text{вх}}$$

АЦП с промежуточным преобразованием в частоту

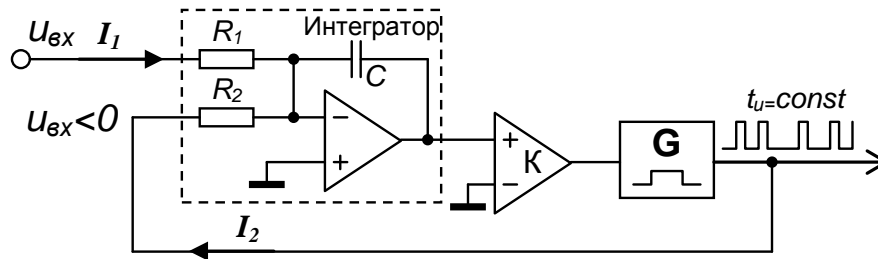


АЦП с преобр в частоту_Int-Res.CIR

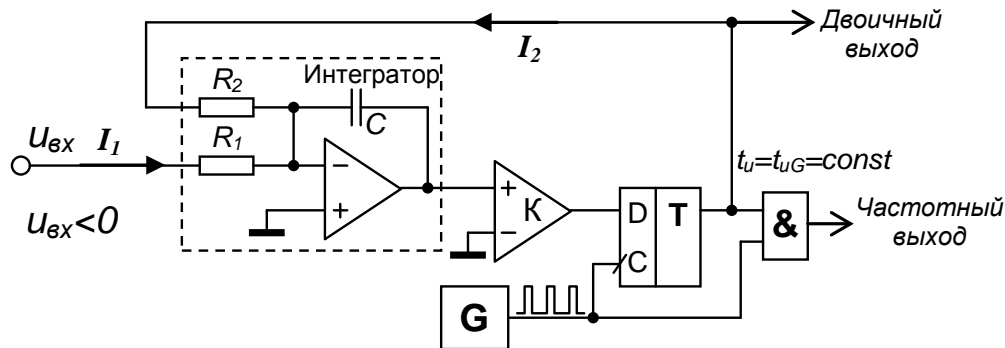


Преобразователи напряжение-частота

Преобразователь напряжение – частота

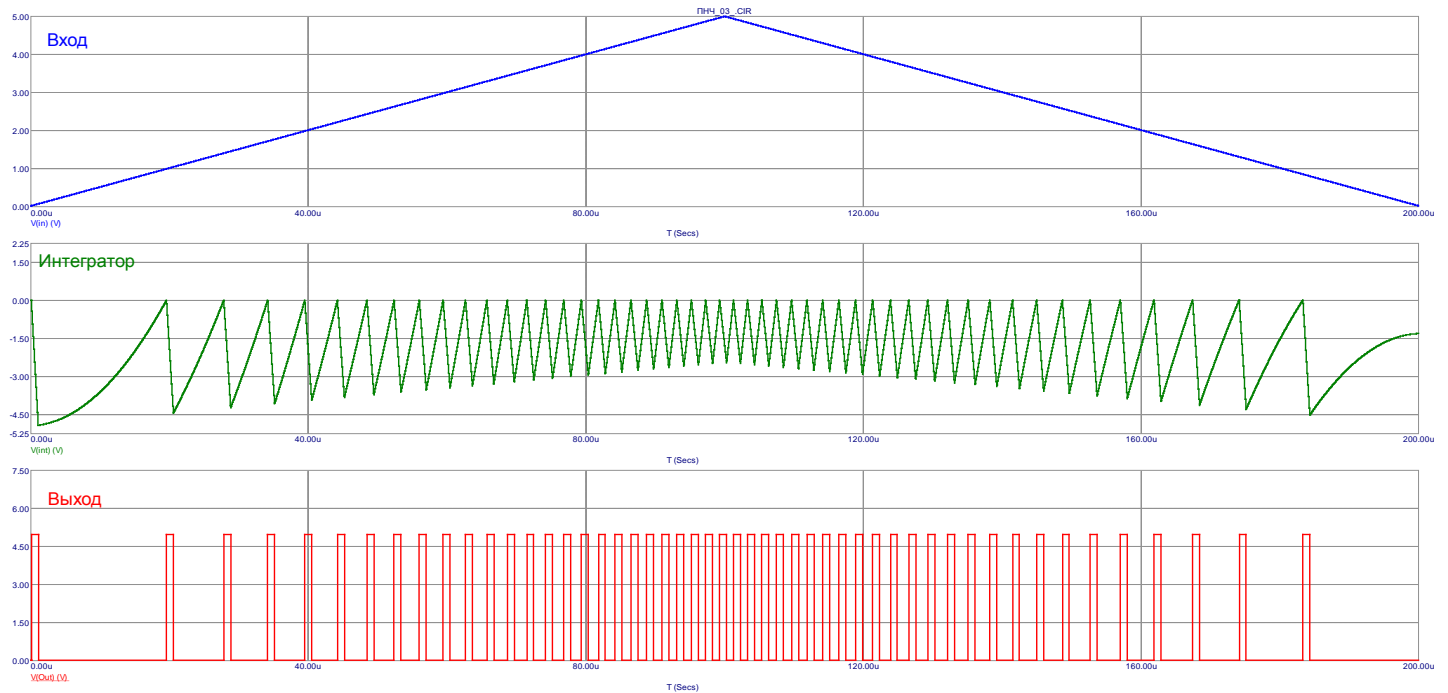
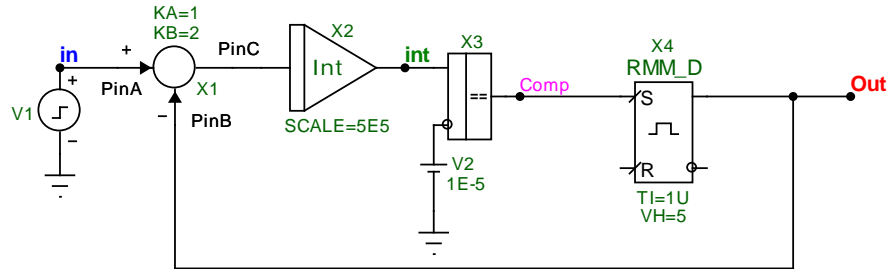


Сигма-дельта преобразователь

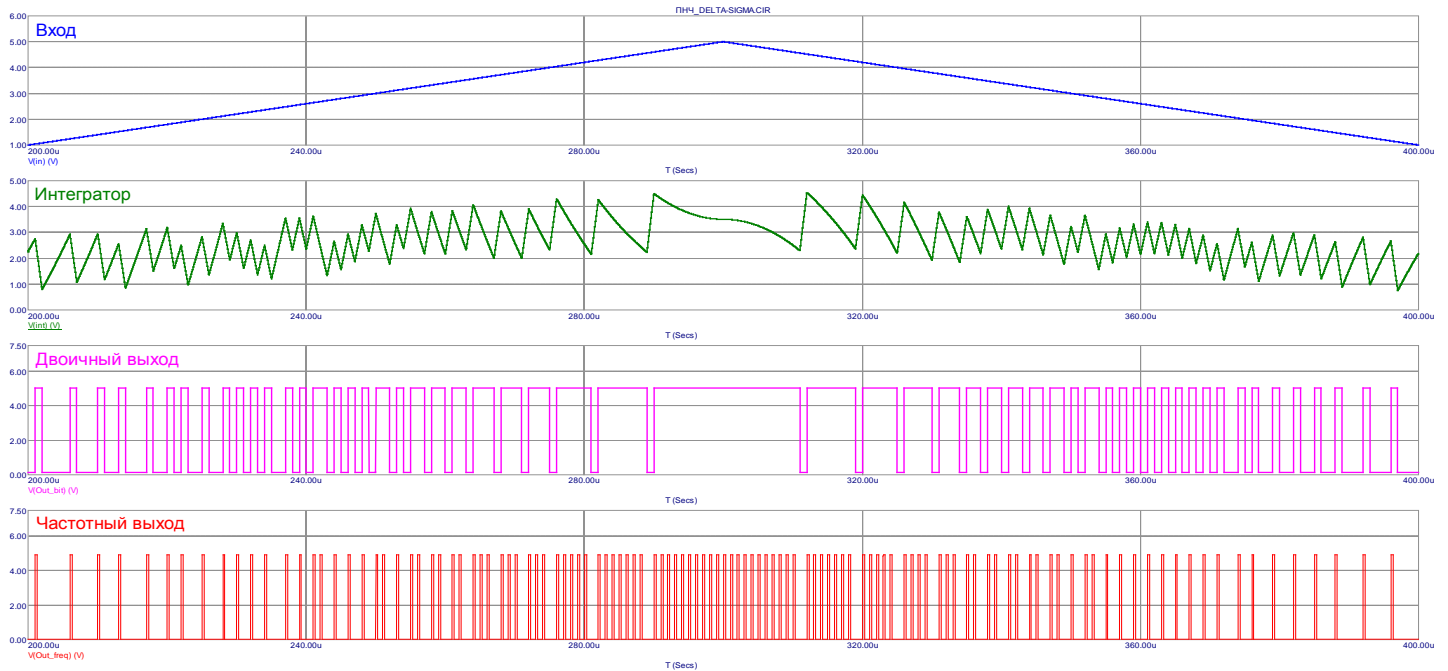
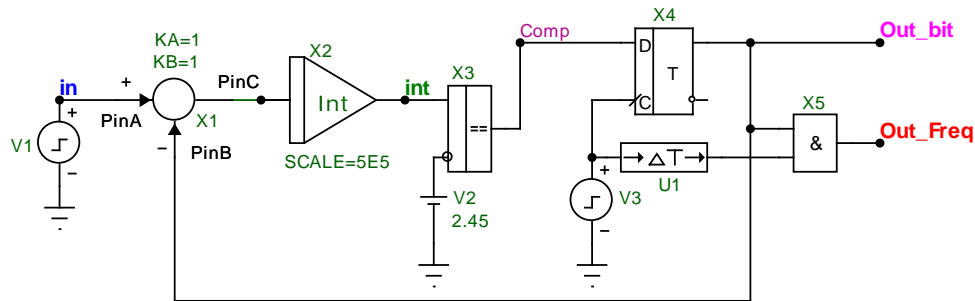


В ПНЧ 2-х типов частота выходных импульсов пропорциональна входному напряжению $U_{вх}$. При этом в сигма-дельта ПНЧ выходные импульсы синхронизированы с тактовыми и имеют фиксированную длительность, равную длительности тактового импульса. Также в них период выходных импульсов кратен периоду тактового сигнала.

Преобразователь напряжение-частота



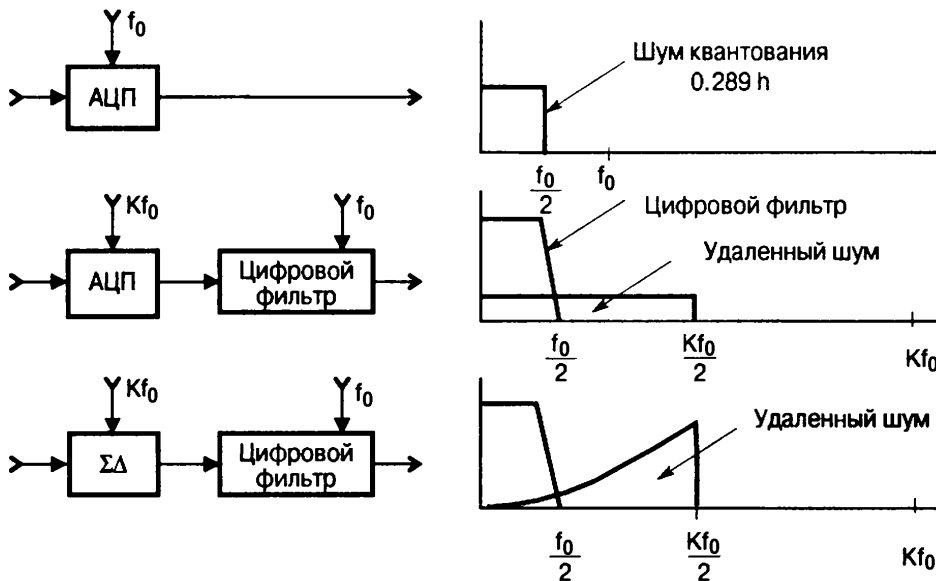
ПНЧ дельта-сигма



Сигма-дельта АЦП

1. Передискретизация
2. Формирование частотнозависимого спектра шума квантования
3. Цифровая фильтрация
4. Децимация

Спектры шумов квантования в различных АЦП



АЦП с частотой дискретизации $f_0 = 2F_m$

АЦП с передискретизацией и цифровым фильтром

$$\Delta \text{SNR} = 10 \cdot \log_{10}(K) \text{ [дБ]}$$

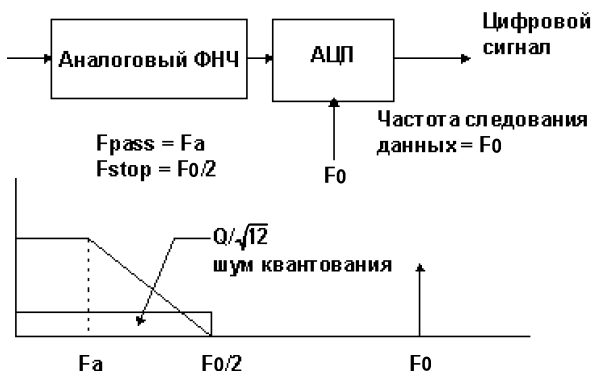
Сигма-дельта АЦП с передискретизацией и цифровым фильтром

$$\Delta \text{SNR} = 10 \cdot \log_{10}(K^{2 \cdot \text{order} + 1}) \text{ [дБ]}$$

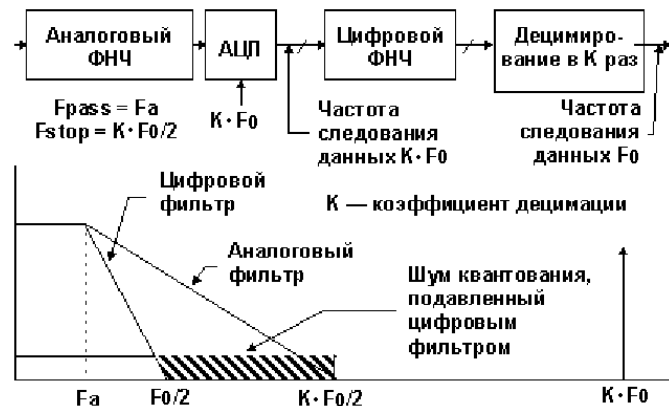
Order – порядок модулятора

Различные варианты структурных схем систем с ЦОС

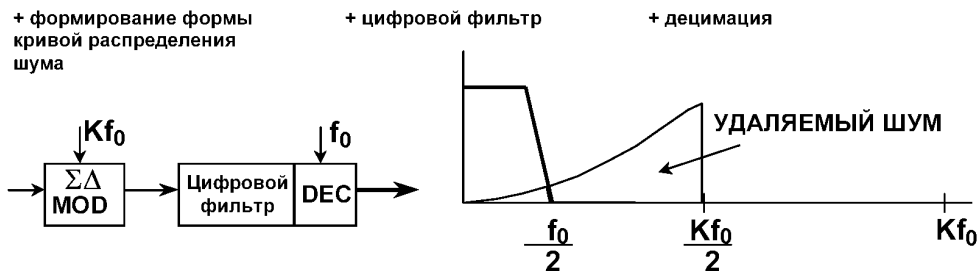
Дискретизация в соответствии с теоремой Найквиста при использовании антиализингового НЧ фильтра



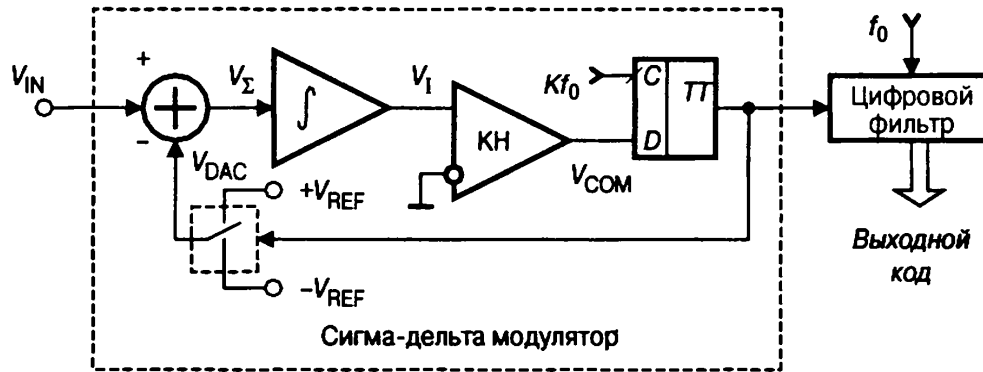
Передискретизация совместно с аналоговой и цифровой фильтрациями



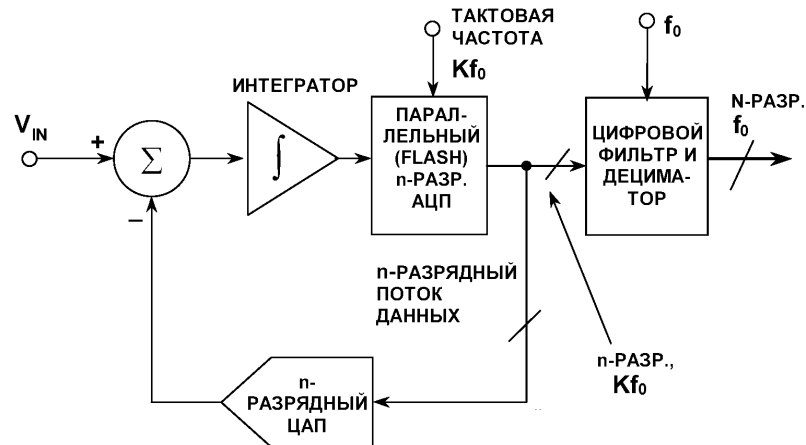
Передискретизация и шумообразование в сигма-дельта АЦП



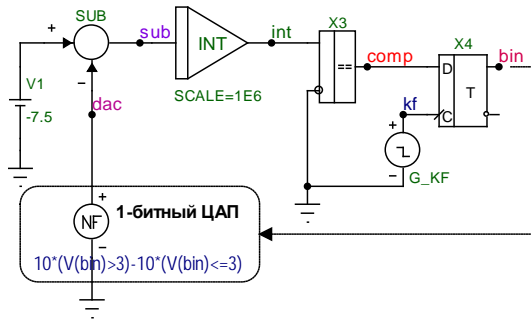
Блок-схема 1-разрядного сигма-дельта АЦП 1-го порядка



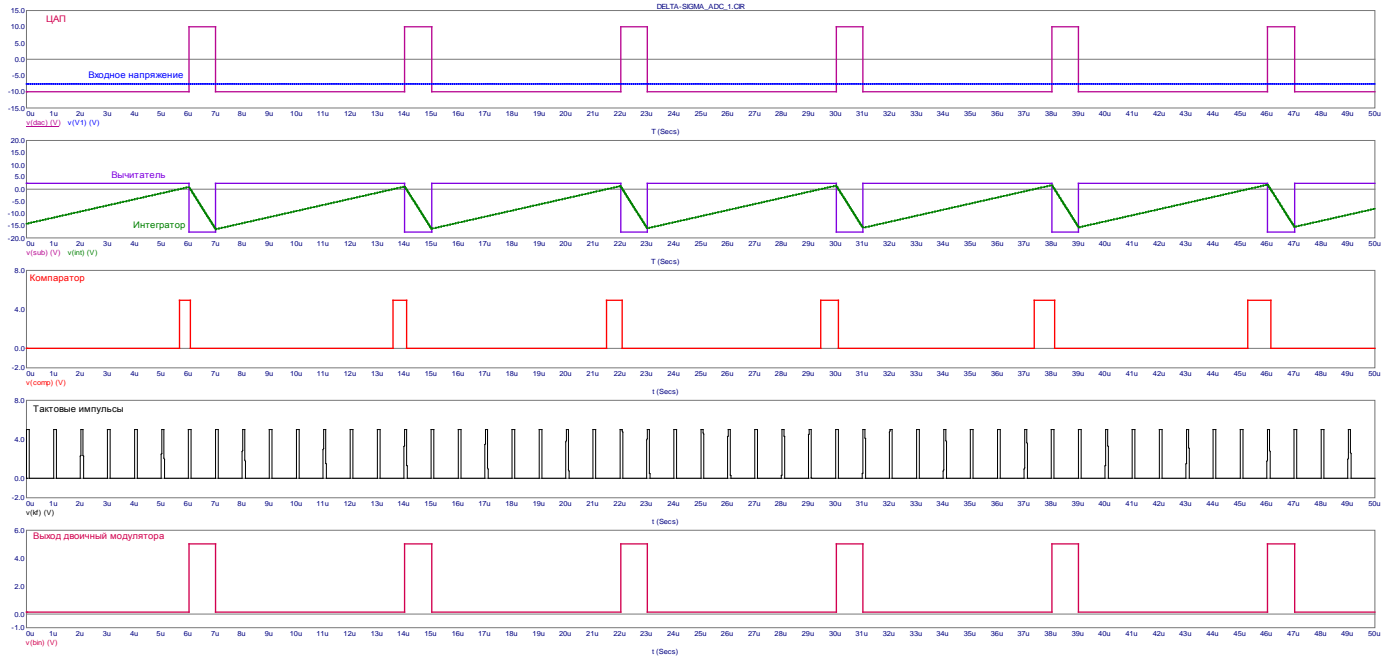
Блок-схема n-разрядного сигма-дельта АЦП 1-го порядка



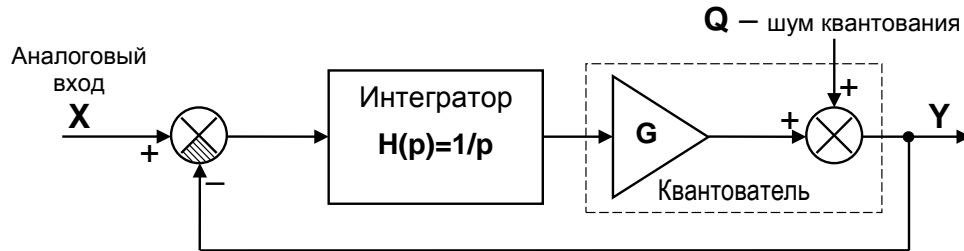
Моделирование 1-разрядного сигма-дельта АЦП 1-го порядка



$$V_{IN} = -7,5 = V_{\min} + \frac{1}{8}(V_{\max} - V_{\min})$$



Анализ сигма-дельта АЦП в частотной области на основе линейной непрерывной модели



$$Y = \frac{X - Y}{p} \cdot G + q \Rightarrow Y \cdot (P + G) = X \cdot G + q \cdot p \Rightarrow Y = X \cdot \frac{G}{p + G} + q \cdot \frac{p}{p + G}$$

$$Y(j\omega) = \frac{G}{G + j\omega} \left[X(j\omega) + \frac{q \cdot j\omega}{G} \right] = K_{\Delta-\Sigma}(j\omega) \left[X(j\omega) + \frac{q \cdot j\omega}{G} \right], \quad q_{eff}^2(f) = a \cdot q^2 \cdot f^2$$

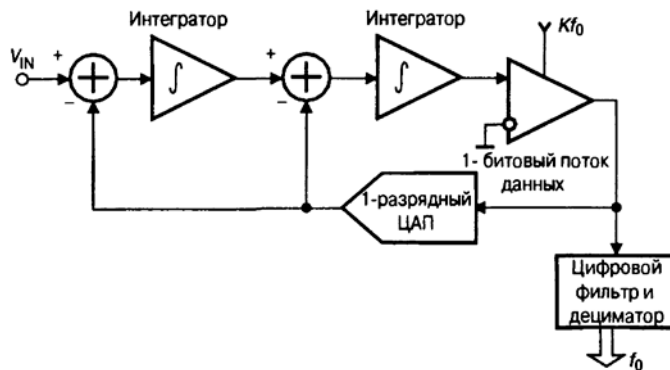
$$U_{ш.эфф}^2 = u_{ш}^2 \cdot \Delta f = [B^2] \quad Q_{\frac{f_0}{2}} = \int_0^{\frac{f_0}{2}} q_{eff}^2(f) df = \int_0^{\frac{f_0}{2}} a \cdot q^2 \cdot f^2 df = \frac{a}{3} \cdot q^2 \cdot f^3 \Big|_0^{\frac{f_0}{2}} = \frac{a \cdot q^2}{24} \cdot f_0^3$$

$$Q_{\Sigma} = Q_{\frac{Kf_0}{2}} = \int_0^{\frac{Kf_0}{2}} q_{eff}^2(f) df = \int_0^{\frac{Kf_0}{2}} a q^2 f^2 df = \frac{a}{3} \cdot q^2 f^3 \Big|_0^{\frac{Kf_0}{2}} = \frac{a q^2}{3} \left(\frac{Kf_0}{2} \right)^3 = \frac{a \cdot q^2}{24} \cdot K^3 \cdot f_0^3$$

$$\Delta SNR = 10 \cdot \lg \left[\frac{Q_{\Sigma}}{Q_{f_0/2}} \right] = 10 \cdot \lg [K^3] \quad [\text{дБ}]$$

Сигма-дельта модуляторы более высоких порядков

Сигма-дельта АЦП второго порядка



$$Y = \left(\frac{X - Y}{p} - Y \right) \cdot \frac{1}{p} + q$$

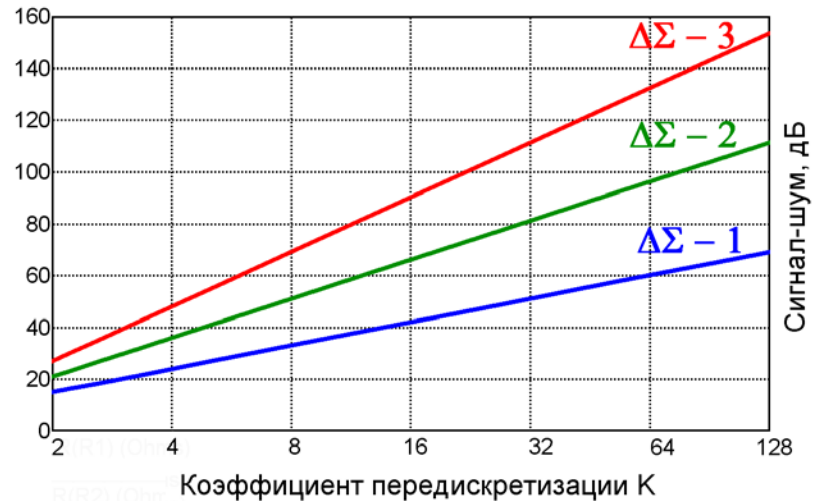
$$Y = \frac{X}{p^2 + p + 1} + q \cdot \frac{p^2}{p^2 + p + 1}$$

$$Y = K_{\Delta\Sigma-2}(p) [X + q \cdot p^2]$$

$$\Delta SNR_{\Sigma\Delta} = 10 \cdot \log_{10} (K^{2 \times ORDER + 1})$$

K – коэффициент передискретизации

$ORDER$ – порядок модулятора



В дельта-сигма модуляторах порядка **ORDER** при передискретизации с коэффициентом $K = \frac{f_{\text{дискр}}}{2F_m}$, улучшение отношения сигнал-шум в децибелах составит:

$$\Delta SNR_{\Sigma\Delta} = 10 \cdot \log_{10} \left(K^{2 \times ORDER + 1} \right) \quad [\text{дБ}] \quad (3.10)$$

Наивысшее достижимое отношение сигнал шум в дельта-сигма модуляторах с разрядностью **n** и порядком **ORDER**, определяется как

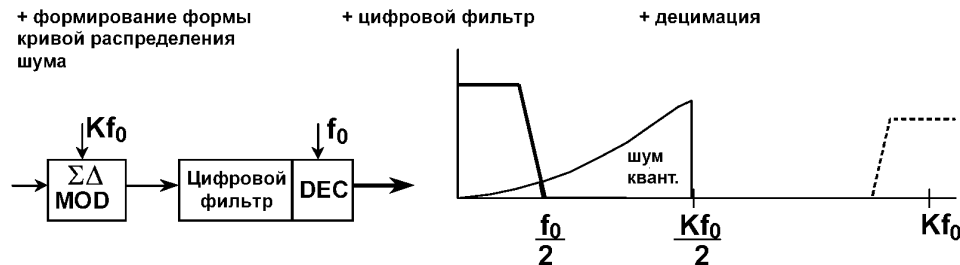
$$SNR_{\Sigma\Delta} = 6 \cdot n + 10 \cdot \log_{10} \left(K^{2 \times ORDER + 1} \right) \quad [\text{дБ}] \quad (3.11)$$

Условие достижения значений, определяемых формулами (3.10), (3.11) — использование после модулятора цифрового ФНЧ, ослабляющего шумовые компоненты, лежащие в полосе частот от $\frac{f_0}{2} = F_m$ до половины частоты передискретизации $K \cdot \frac{f_0}{2} = K \cdot F_m$.

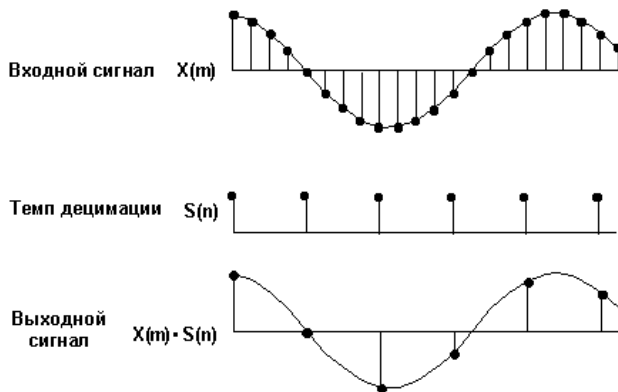
Цифровая фильтрация и децимация

Цифровая фильтрация:

- 1) ослабление переотражения от выходной частоты преобразования Kf_0
- 2) подавление высокочастотных компонент шумообразующего процесса сигма-дельта модулятора



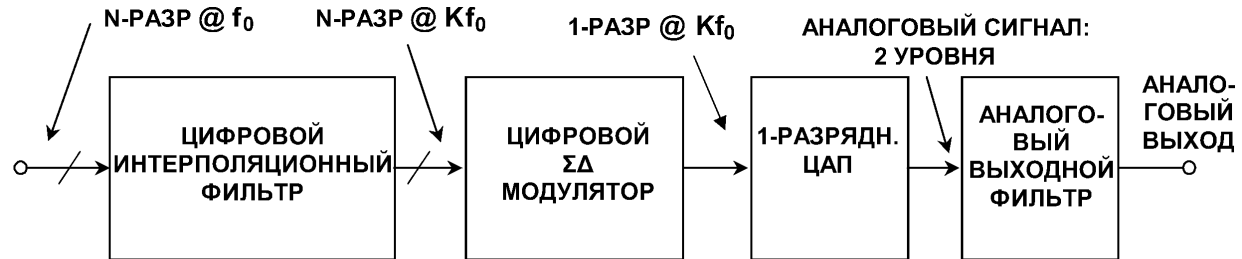
Децимация — снижение частоты вывода данных, метод избавления от избыточной информации, привнесенной процессом передискретизации.



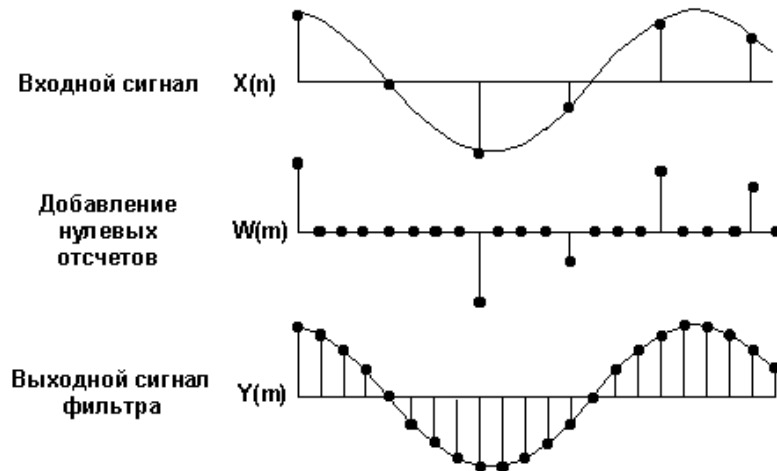
ЦФ (Finite Impulse Response — **FIR**, КИХ) просто пересчитывает последовательность отсчетов входного сигнала, поэтому одновременно может выполнять функцию дециматора

В ЦФ (Infinite Impulse Response — **IIR**, БИХ) необходимо, чтобы каждый выходной отсчет соответствовал каждому входному, и децимация не имеет отношения к процессу фильтрации.

Сигма-дельта ЦАП



Работа цифрового интерполяционного фильтра



Задачи на дельта-сигма АЦП

1 Сигнал с максимальной частотой спектра $f_m=20$ кГц требуется оцифровать с помощью однобитного дельта-сигма АЦП 1-го порядка с относительной погрешностью (уровнем шума квантования) 0.1% (-60 дБ) в конечной точке шкалы. Определить минимально возможную частоту дискретизации (тактовую частоту работы АЦП).

Решение

Учитываем, что отношение сигнал-шум в дБ (SNR) равно относительной погрешности квантования в дБ, взятой со знаком минус. Следовательно, SNR=60 дБ. Отношение сигнал шум в децибелах, достижимое в системе с ЦОС на основе *однобитного* дельта-сигма модулятора *первого порядка*, определяется доказанным в конспекте соотношением:

$$SNR_{\Delta\Sigma} = 6 + 10 \cdot \lg \left[\frac{f_{\text{дискр}}}{2 \cdot f_m} \right]^3 \quad (3.11)$$

Отсюда, решая логарифмическое уравнение, можно определить минимальное значение частоты передискретизации в системе с ЦОС на основе однобитного дельта-сигма модулятора:

$$f_{\text{дискр}} \geq 2 \cdot f_m \cdot 10^{\frac{SNR-6}{30}}$$

При подстановке известных из условия задачи числовых значений получаем:

$$f_{\text{дискр}} \geq 2 \cdot 20000 \cdot 10^{\frac{60-6}{30}} = 40000 \cdot 10^{1,8} \approx 40 \text{ кГц} \cdot 63 \approx 2,52 \text{ МГц}$$

2 Сигнал с максимальной частотой спектра $f_m = 20$ кГц требуется оцифровать с помощью дельта-сигма АЦП 2-го порядка с относительной погрешностью (уровнем шума квантования) 0.1% (-60 дБ) в конечной точке шкалы. Определить минимально возможную частоту дискретизации.

Решение

Учитываем, что отношение сигнал-шум в дБ (SNR) равно относительной погрешности квантования в дБ, взятой со знаком минус. Следовательно, $SNR = 60$ дБ. Отношение сигнал шум в децибелах, достижимое в системе с ЦОС на основе *однобитного* дельта-сигма модулятора *второго порядка*, определяется доказанным в конспекте соотношением:

$$SNR_{\Delta\Sigma} = 6 + 10 \cdot \lg \left[\frac{f_{\text{дискр}}}{2 \cdot f_m} \right]^5 \quad (3.11)$$

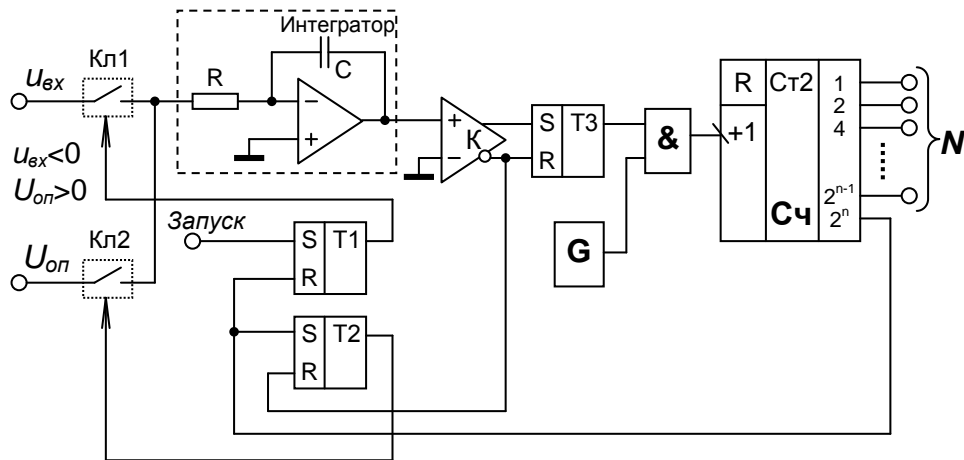
Отсюда, решая логарифмическое уравнение, можно определить минимальное значение частоты передискретизации в системе с ЦОС на основе *однобитного* дельта-сигма модулятора 2-го порядка:

$$f_{\text{дискр}} \geq 2 \cdot f_m \cdot 10^{\frac{SNR-6}{50}}$$

При подстановке известных из условия задачи числовых значений получаем:

$$f_{\text{дискр}} \geq 2 \cdot 20000 \cdot 10^{\frac{60-6}{50}} = 40000 \cdot 10^{1,08} \approx 40 \text{ кГц} \cdot 12 \approx 0,48 \text{ МГц}$$

АЦП двухтактного интегрирования



1 такт

$$T = t_2 - t_1 = 2^n \cdot \Delta t_{cq}$$

$$U_{инт} = \frac{1}{RC} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u_{вх}(t) dt$$

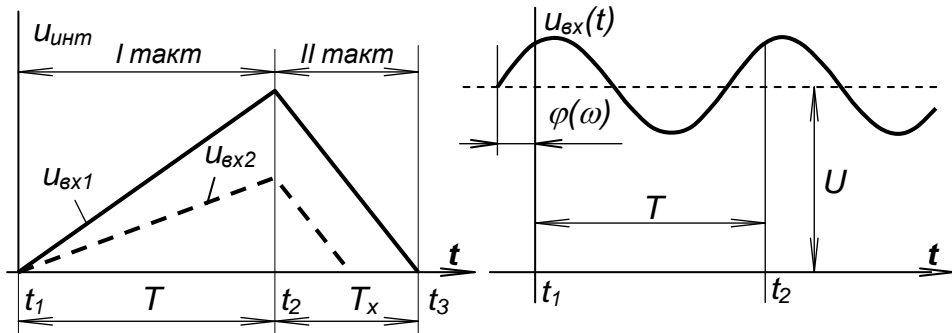
2 такт

$$U_{инт}(t) = U_{инт}(t_2) - \frac{1}{RC} \cdot \int_{t_2}^{t_3} U_{оп} dt$$

$$N = \frac{T_x}{\Delta t_{cq}}$$

$$U_{вх} T = U_{оп} T_x$$

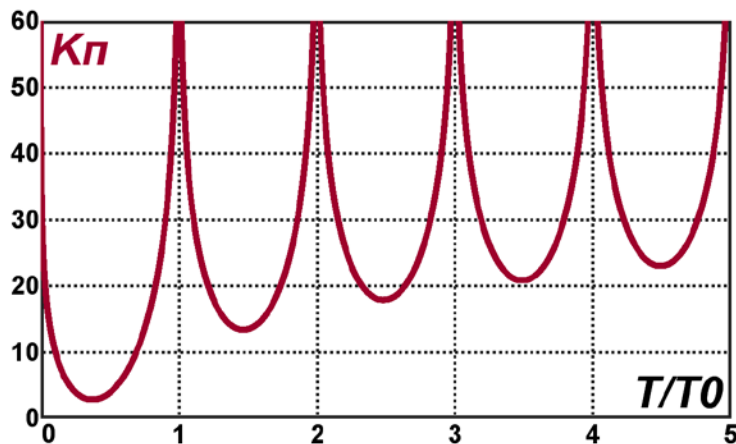
$$N = \frac{T_x}{\Delta t_{cq}} = \frac{U_{вх} T}{U_{оп} \Delta t_{cq}} = \frac{2^n}{U_{оп}} \cdot U_{вх}$$



В случае **наложения на полезный сигнал синусоидальной помехи**: $u_{ex}(t) = U + U_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$, где φ — фазовый сдвиг помехи относительно начала интегрирования.

$$U_{инт} = \frac{T}{RC} U + \frac{U_m}{RC} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{T}{RC} \cdot (U + \Delta U), \quad \Delta U = \frac{U_m}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega_0 t + \varphi) dt$$

При $T = t_2 - t_1 = kT_0 = \frac{2\pi k}{\omega_0}$, $k=1, 2, 3, \dots$: $\Delta U=0$ — как будто помехи нет.



$$K_{\Pi} = 20 \lg \left[\frac{U_m}{|\Delta U|} \right] = 20 \lg \left[\frac{T}{\int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega t + \varphi) dt} \right]$$

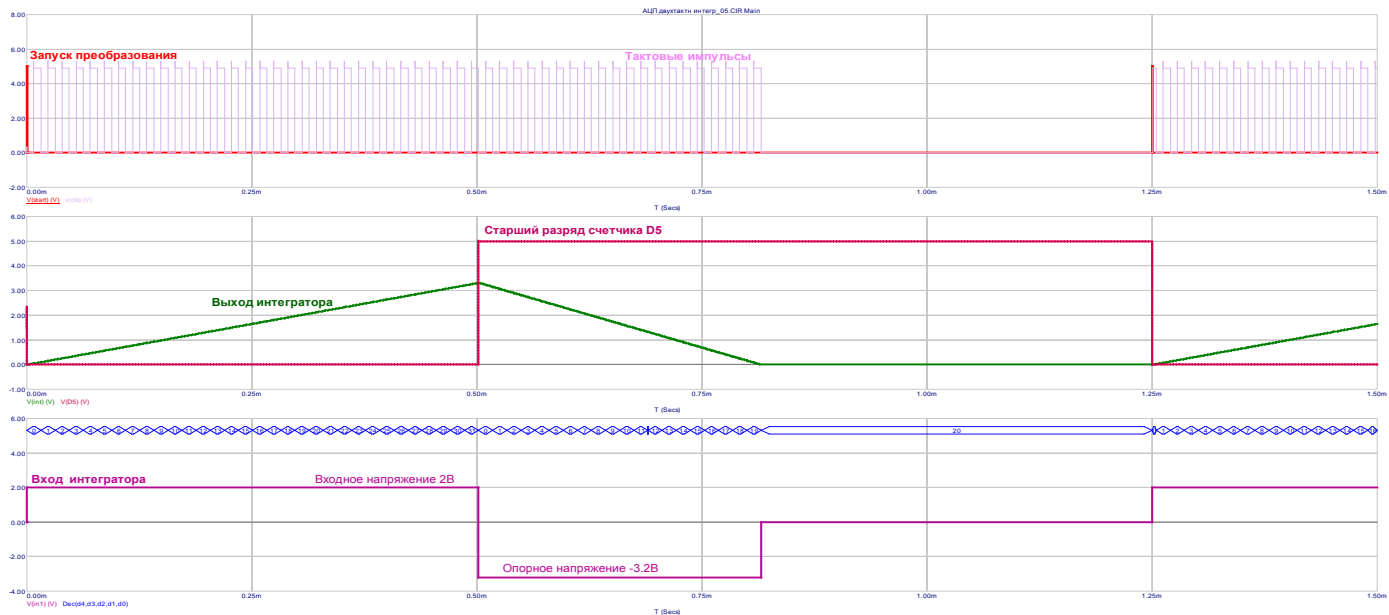
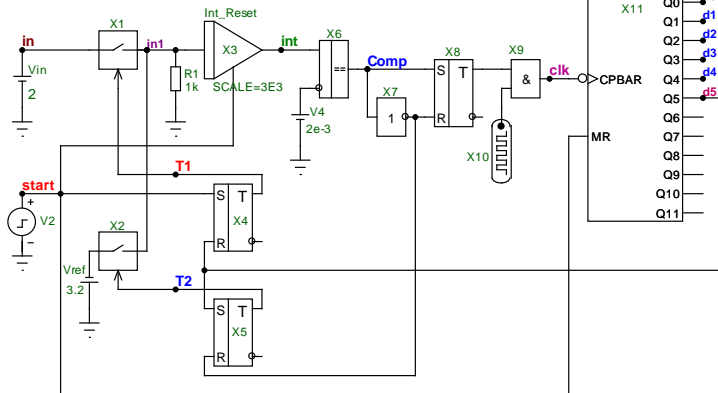
$$K_{\Pi} = 20 \cdot \lg \left[\frac{2\pi M}{|\cos \varphi - \cos(2\pi M + \varphi)|} \right],$$

где T_0 и f_0 — период и частота помехи,

$$M = T/T_0 = T f_0$$

При $\varphi = \pi k$: $K_{\Pi} = 20 \lg \left[\frac{2\pi M}{|1 - \cos(2\pi M)|} \right],$

$$K_{\Pi} = 20 \lg \left[\frac{\pi M}{|\sin^2(\pi M)|} \right]$$



Параллельные АЦП (считывания, flash)

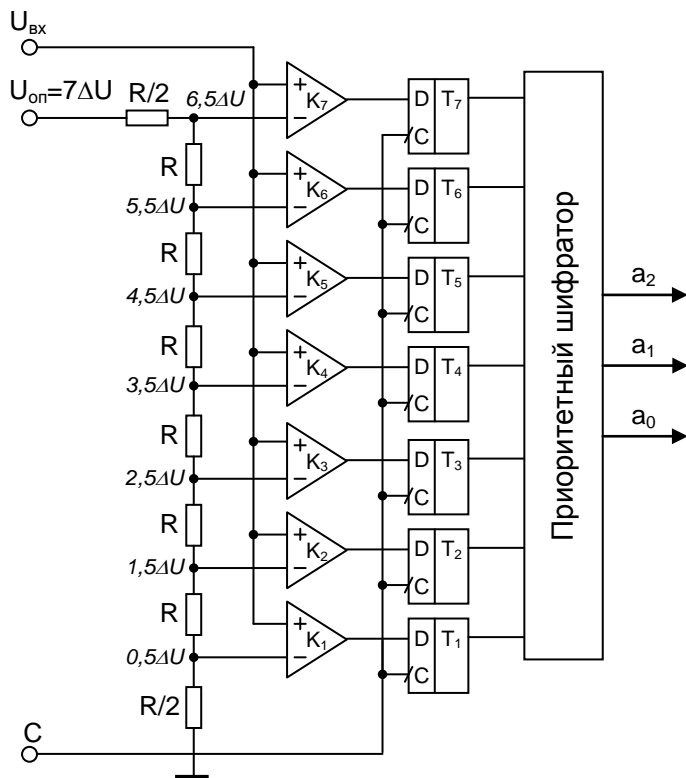


Рис. 3.33. Параллельный АЦП

Таблица состояний в параллельном АЦП

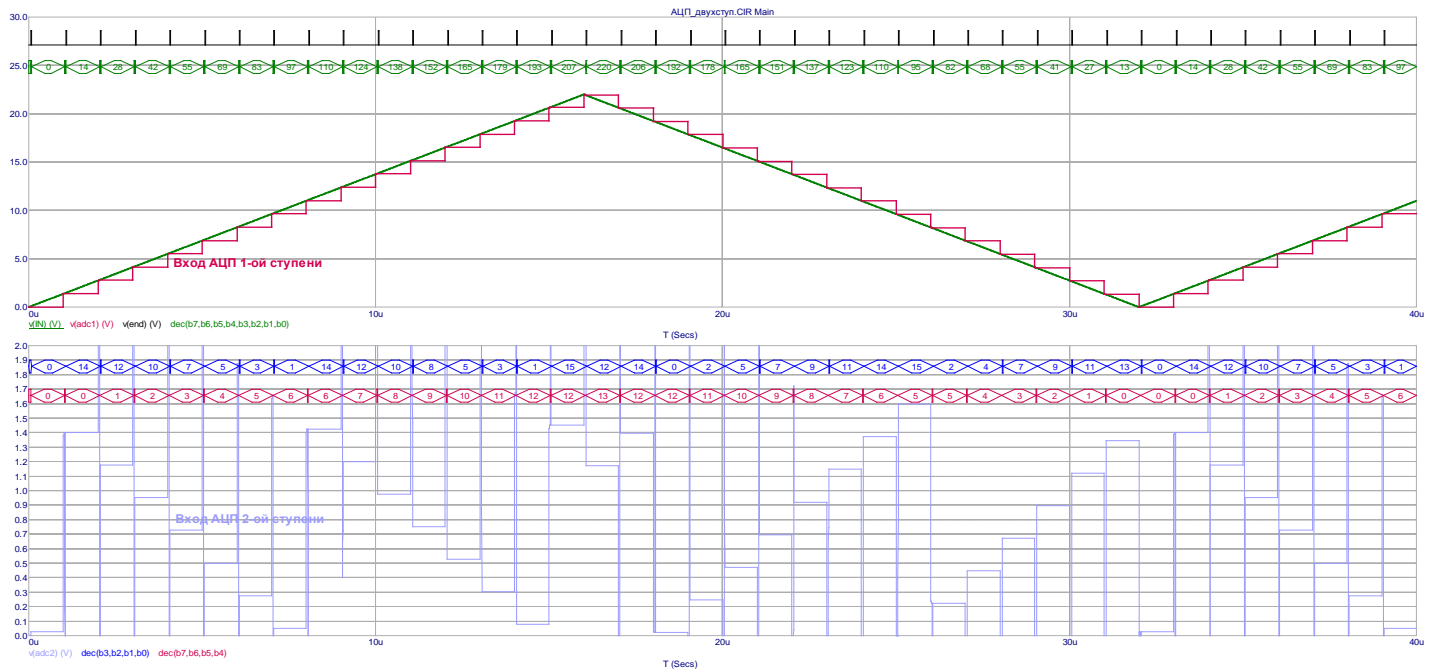
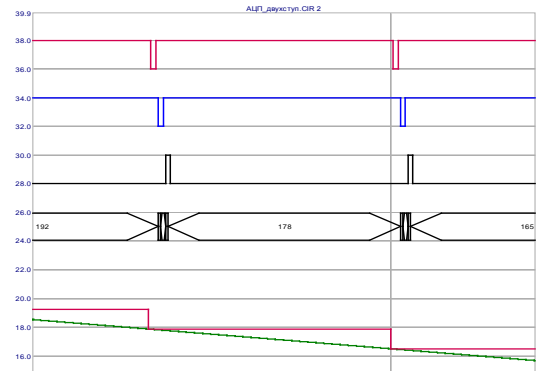
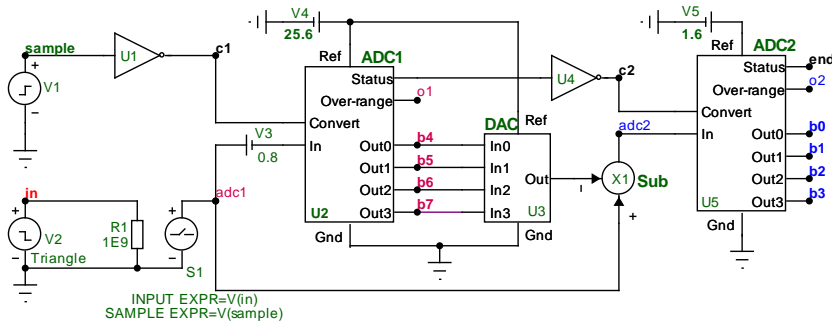
| Входное напряжение | Состояния компараторов | | | | | | | Двоичное число | Десятичный экв. |
|--------------------|------------------------|---|---|---|---|---|---|----------------|-----------------|
| $U_{вх}/\Delta U$ | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | $a_2a_1a_0$ | Z |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 000 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 001 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 010 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 011 | 3 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 100 | 4 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 101 | 5 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 110 | 6 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 111 | 7 |

Таблица состояний приоритетного шифратора

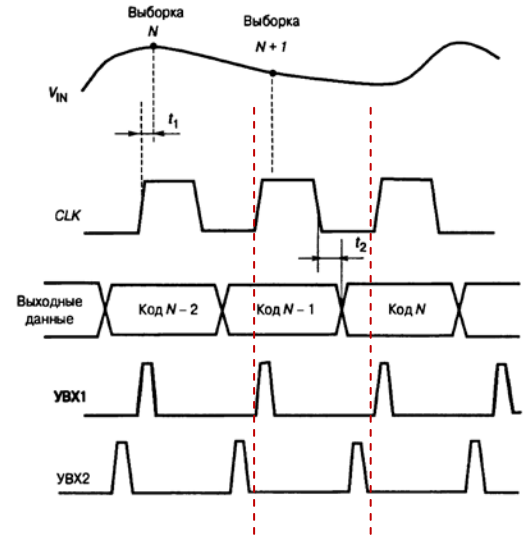
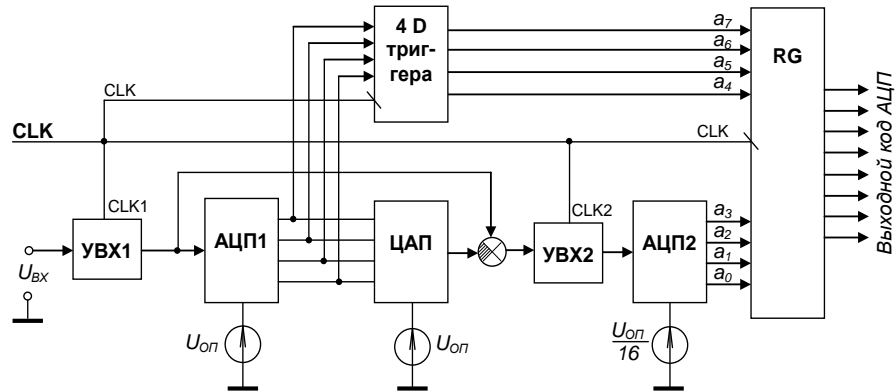
| Входы | | | | | | | Выходы | Десятич. экв. |
|-------|---|---|---|---|---|---|-------------|---------------|
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | $a_2a_1a_0$ | Z |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 000 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 001 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | x | 010 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | x | x | 011 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | x | x | x | 100 | 4 |
| 0 | 0 | 1 | x | x | x | x | 101 | 5 |
| 0 | 1 | x | x | x | x | x | 110 | 6 |
| 1 | x | x | x | x | x | x | 111 | 7 |



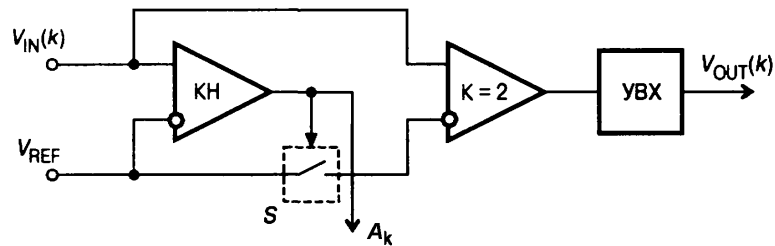
Двухступенчатый 8-разрядный АЦП



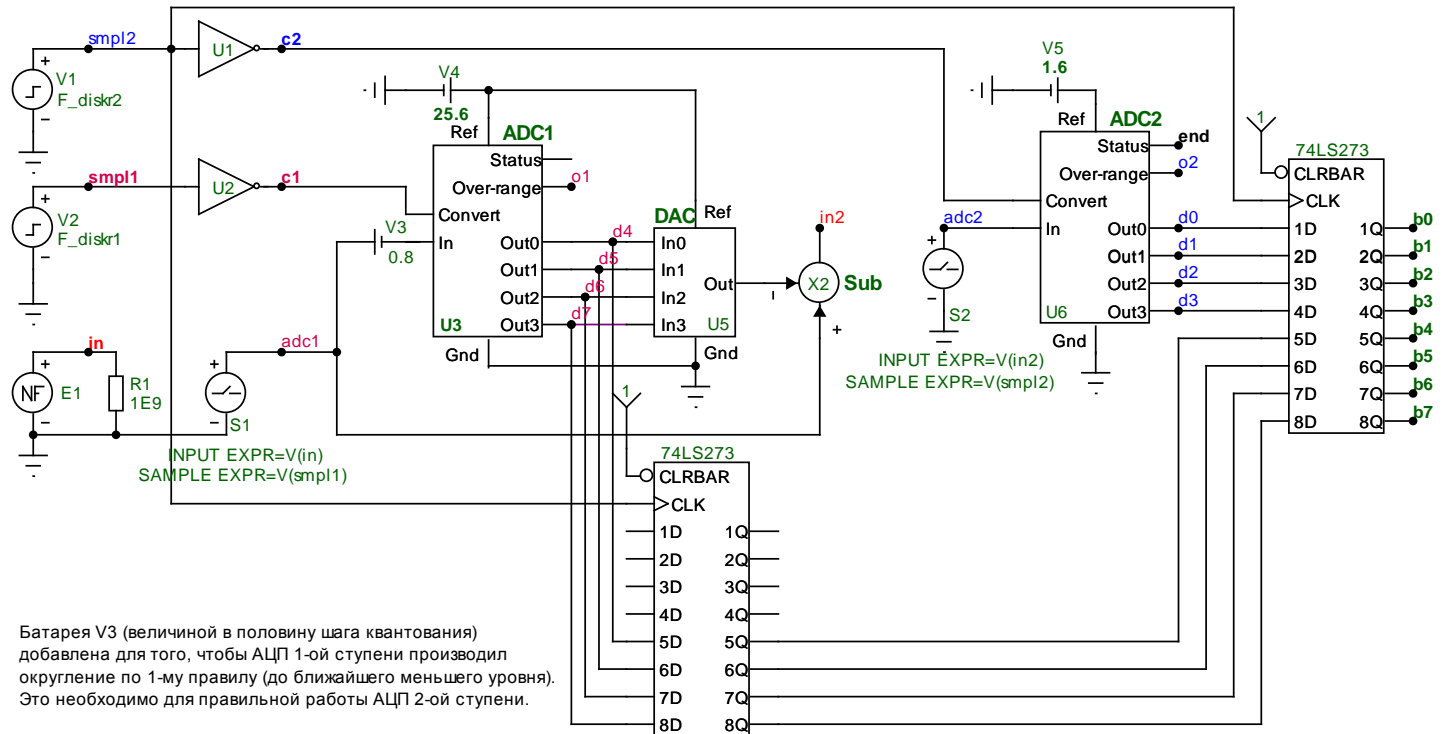
Конвейерные АЦП



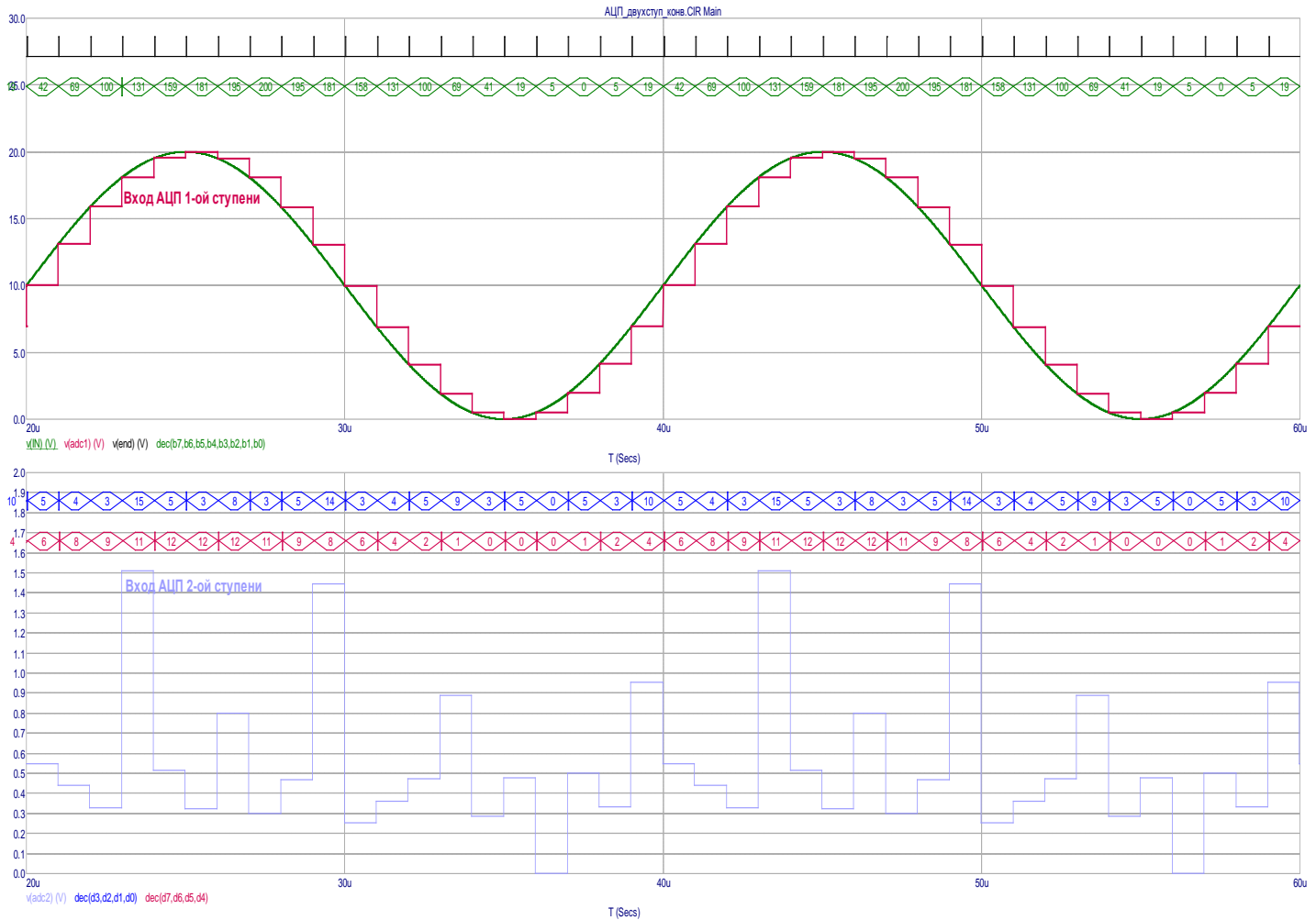
Одноразрядная ступень конвейерного АЦП ADC12181



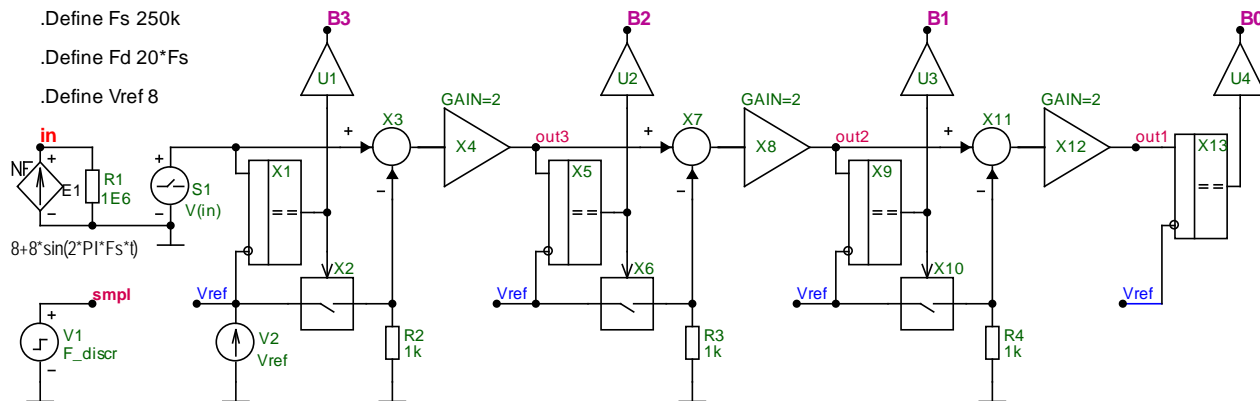
Двухступенчатый конвейерный 8-разрядный АЦП



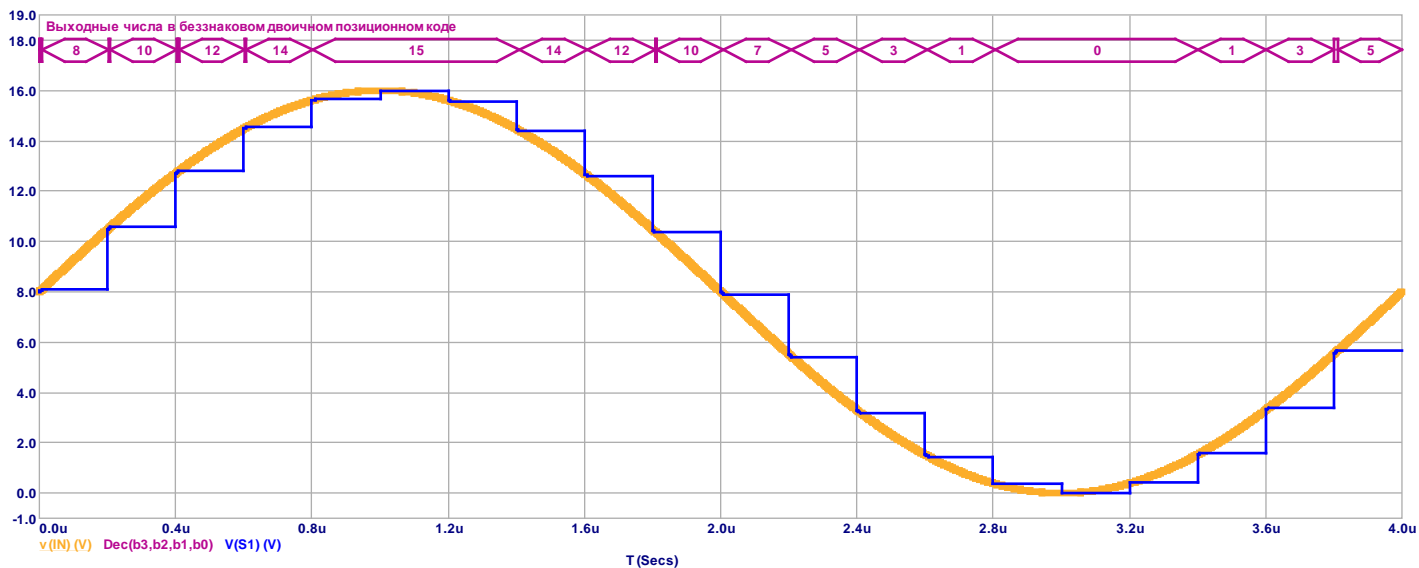
Моделирование двухступенчатого конвейерного 8-разрядного АЦП



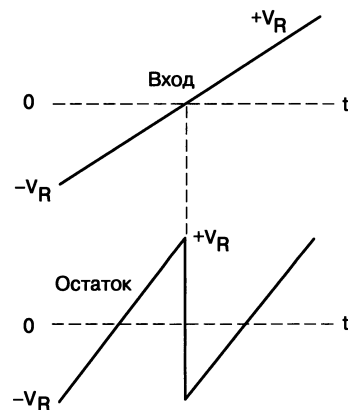
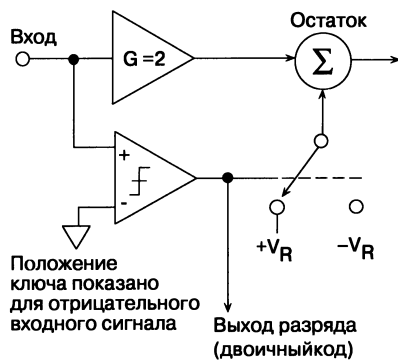
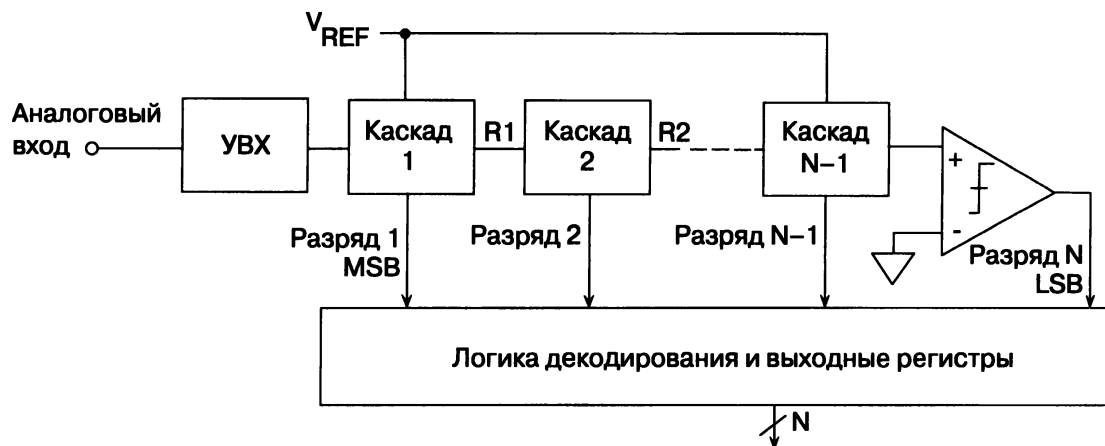
Конвейерный 4-разрядный однополярный АЦП (4 ступени X 1 бит)



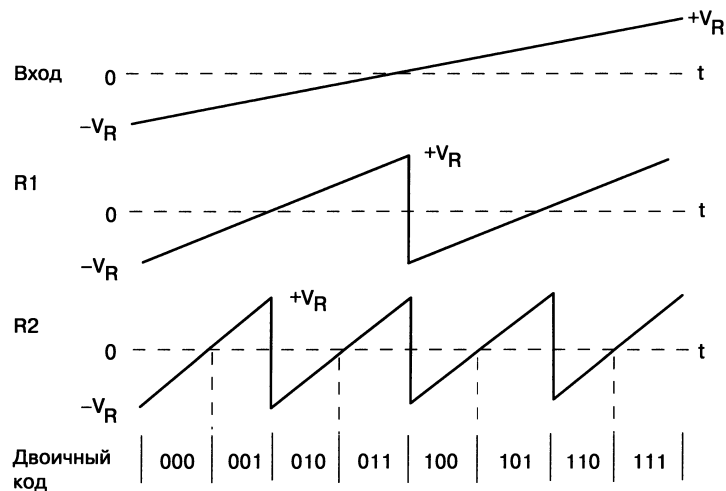
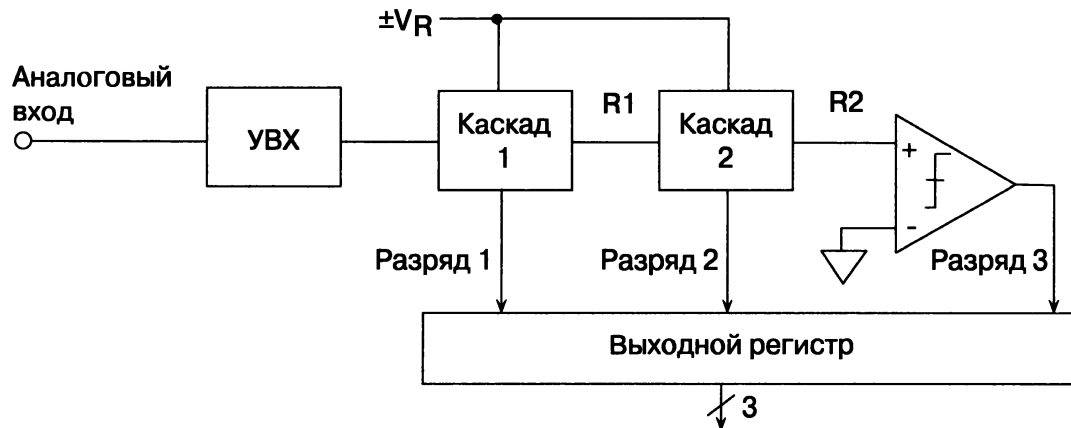
Диапазон входного напряжения АЦП -8....+8В. Шаг квантования по уровню - 1В.



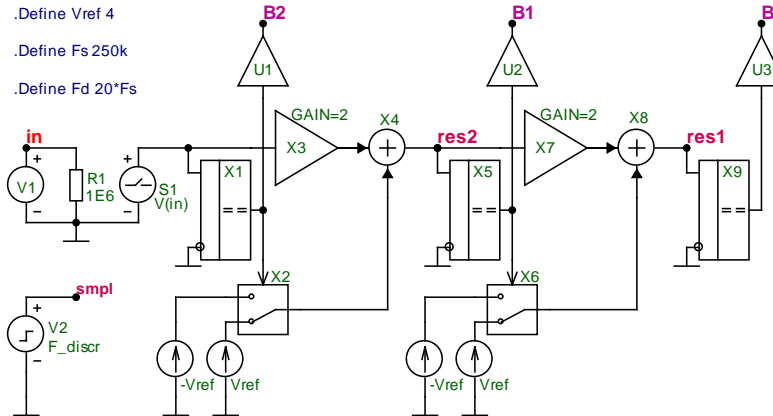
Конвейерный биполярный АЦП



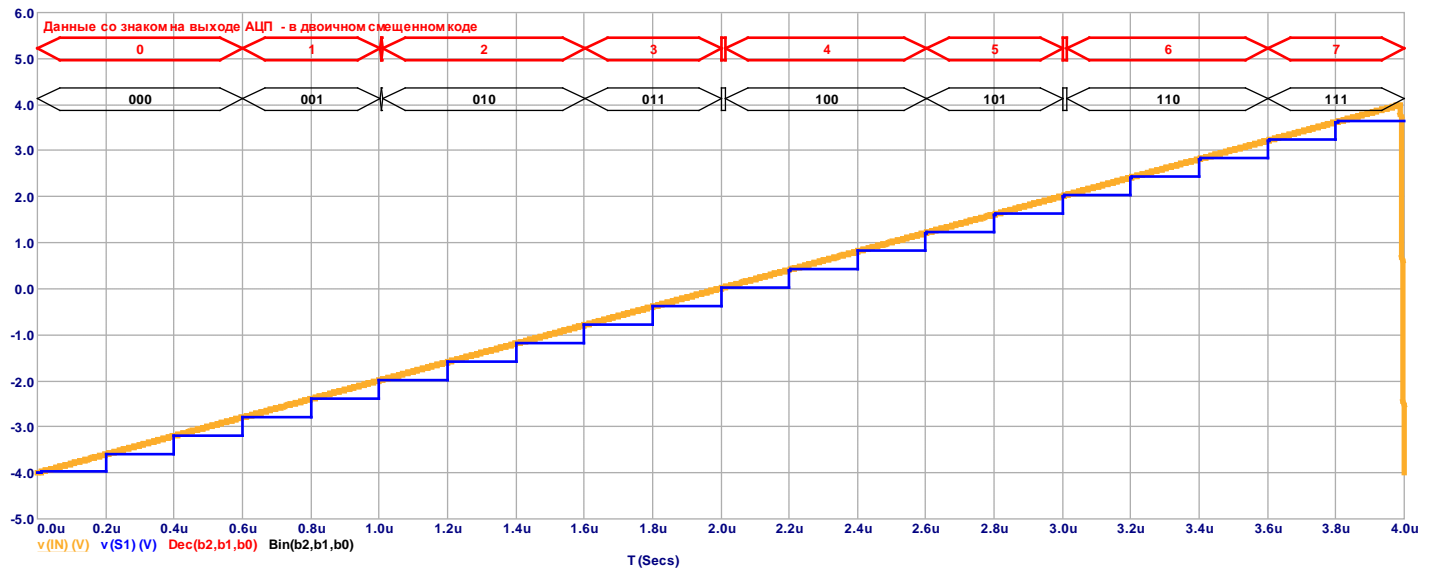
Конвейерный биполярный АЦП (3 ступени X 1 бит)



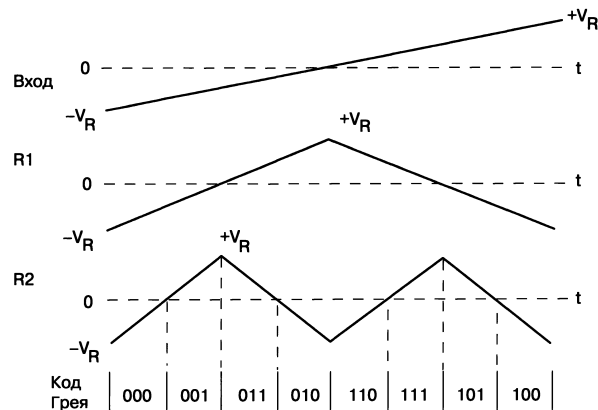
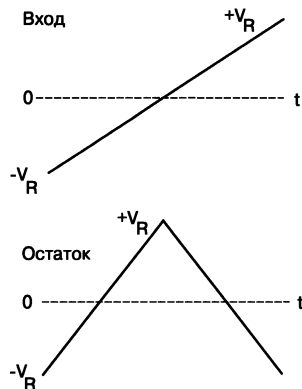
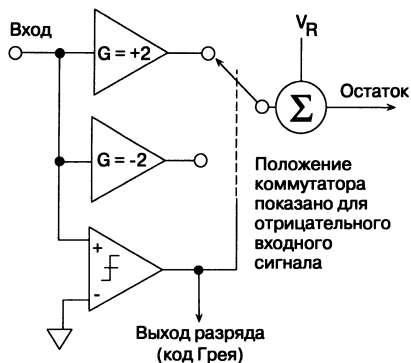
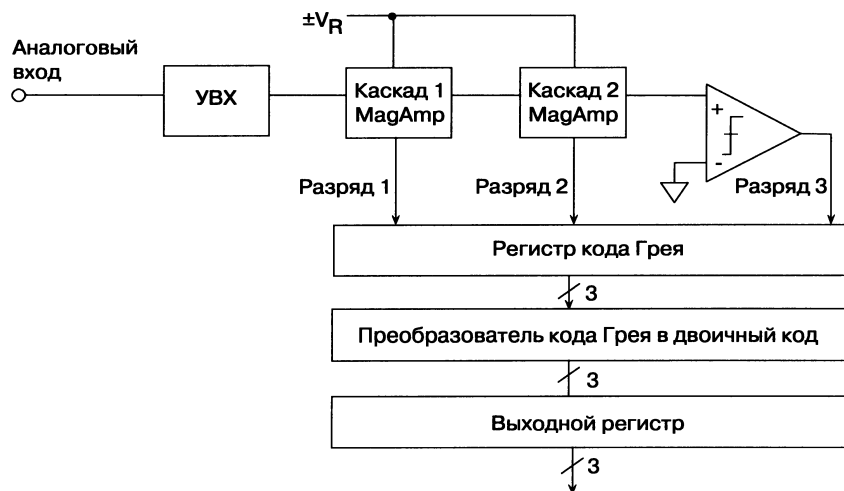
Моделирование конвейерного биполярного АЦП (3 степени X 1 бит)



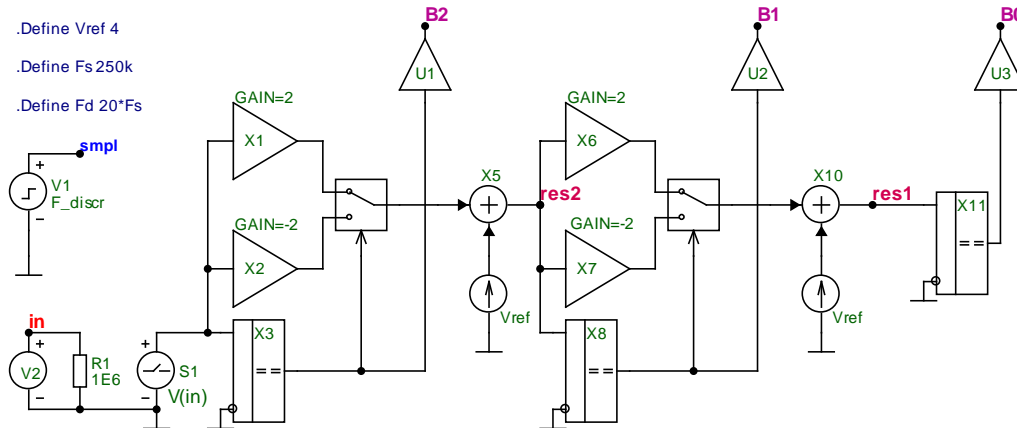
Диапазон входного напряжения АЦП -4...+4В. Шаг квантования по уровню - 1В.



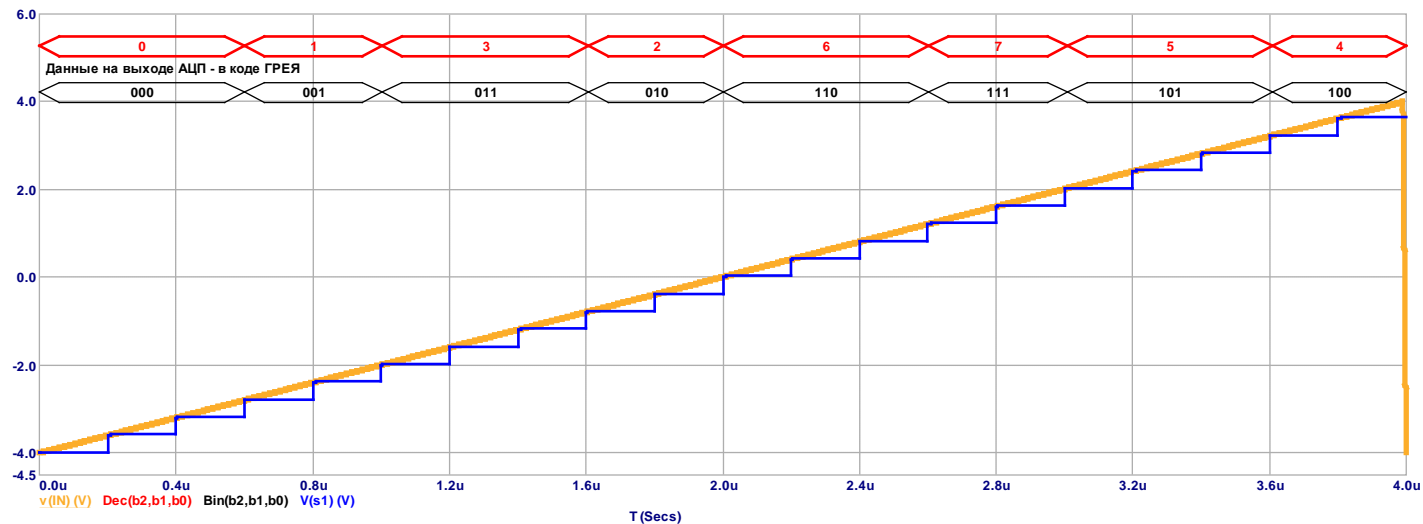
Складывающийся (Folding) АЦП (3 степени X 1 бит)



Моделирование Folding АЦП (3 степени X 16 бит)

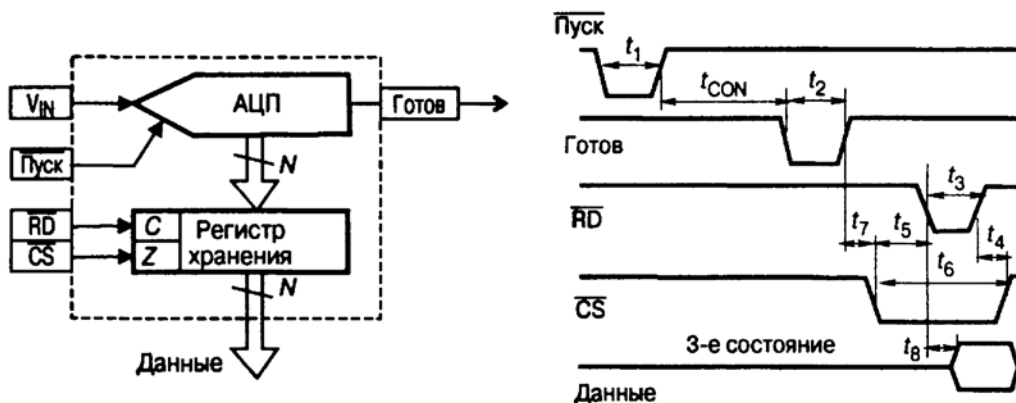


Диапазон входного напряжения АЦП -4...+4В. Шаг квантования по уровню - 1В.

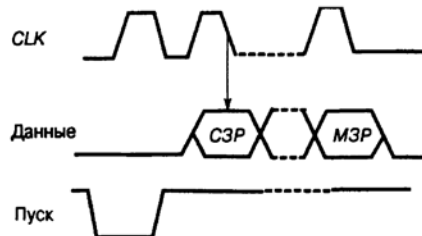
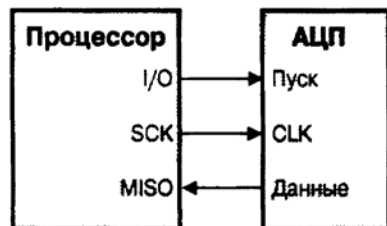


Интерфейсы АЦП

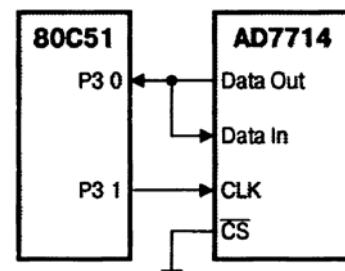
Параллельный



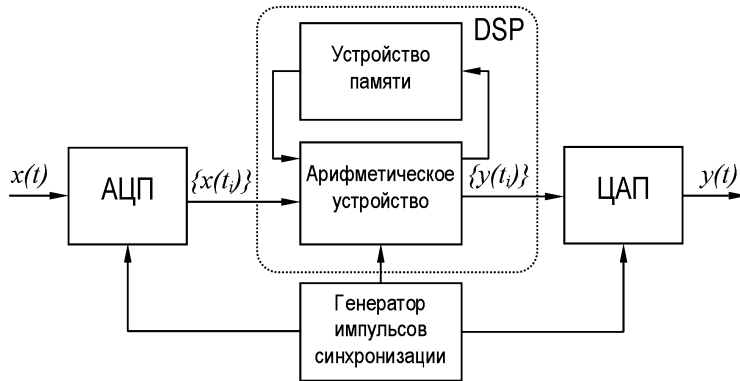
Последовательный SPI-интерфейс



Последовательный I2C



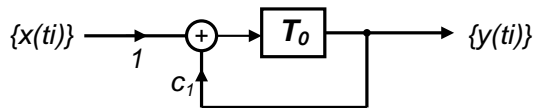
Цифровые фильтры



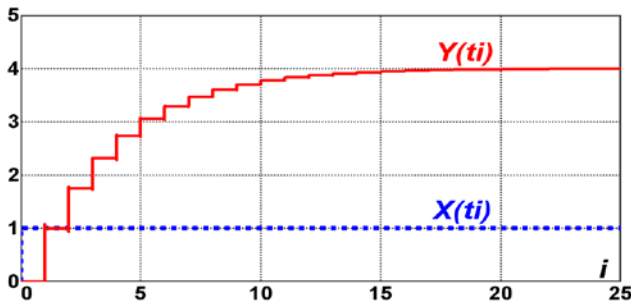
1) как без потери информации представить непрерывное входное напряжение числовой последовательностью?

2) каким образом необходимо преобразовать числовую последовательность, чтобы добиться реализации искомой передаточной функции?

Цифровая функция передачи фильтра

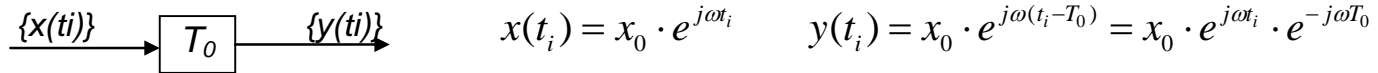


$$y(t_{i+1}) = x(t_i) + c_1 y(t_i), \quad c_1 = 0,75$$



$$\begin{aligned}
 y_1 &= 1 + 0.75 \cdot y_0 = 1; \\
 y_2 &= 1 + 0.75 \cdot 1 = 1.75 \\
 y_3 &= 1 + 0.75 \cdot 1.75 = 2.31 \\
 y_4 &= 1 + 0.75 \cdot 2.31 = 2.73 \\
 y_5 &= 1 + 0.75 \cdot 2.73 = 3.05 \\
 y_6 &= 1 + 0.75 \cdot 3.05 = 3.28
 \end{aligned}$$

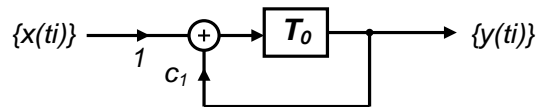
Описание ЦФ в частотной области



$$A(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = 1 \cdot e^{-pT_0} \text{ – периодическая функция с периодом } \omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$$

$$f_0 = 1/T_0 \text{ – тактовая частота; } z = e^{+pT_0}, \quad \tilde{A}(z) = z^{-1}$$

$$Z\{y(t_i)\} = \tilde{A}(z) \cdot Z\{x(t_i)\}, \quad Z\{x(t_i)\} = X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i) \cdot z^{-i} \quad \text{ср.} \quad \left(\begin{array}{l} X(p) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot x(t) dt \\ L\{y(t)\} = A(p) \cdot L\{x(t)\} \end{array} \right)$$

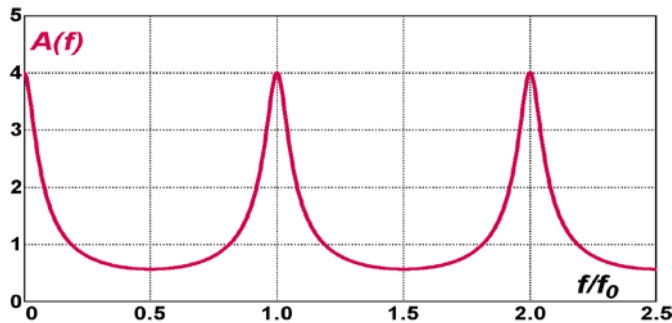


$$Y(z) = [X(z) + c_1 \cdot Y(z)] \cdot z^{-1}$$

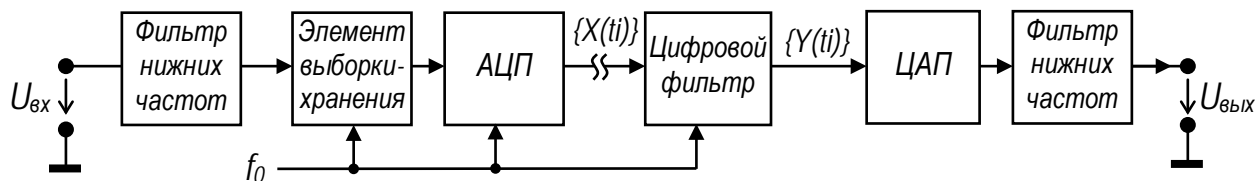
$$\tilde{A}(z) = \frac{1}{z - c_1}; \quad z = e^{j\omega T_0}$$

$$A(j\omega) = \frac{1}{e^{j\omega T_0} - c_1} = \frac{1}{\cos \omega T_0 + j \sin \omega T - c_1}$$

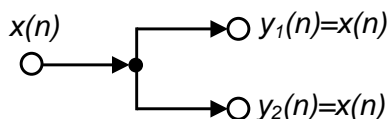
$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(\cos(2\pi f / f_0) - c_1)^2 + \sin^2(2\pi f / f_0)}}$$



Цифровая обработка сигналов



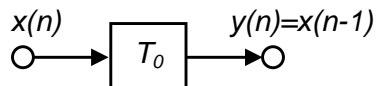
Реализация цифровых фильтров. Основные операции ЦОС.



Разветвление сигнала:

$$y_1(n) = y_2(n) = x(n)$$

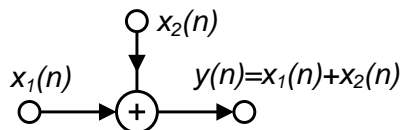
$$Y_1(z) = Y_2(z) = X(z)$$



Искажение сигнала:

$$y(n) = x(n-1)$$

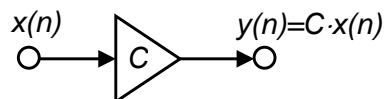
$$Y(z) = X(z) z^{-1}$$



Суммирование сигналов:

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$Y(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

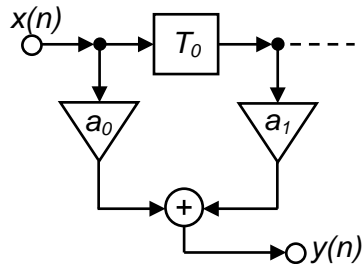


Умножение на постоянный коэффициент:

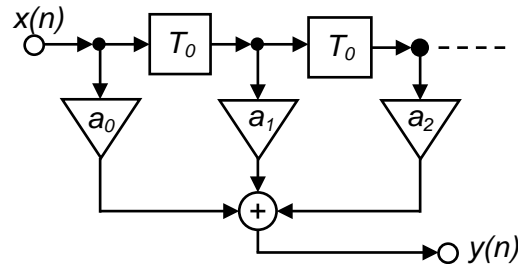
$$y(n) = C \cdot x(n);$$

$$Y(z) = C \cdot X(z)$$

Цифровые нерекурсивные фильтры (FIR, КИХ)

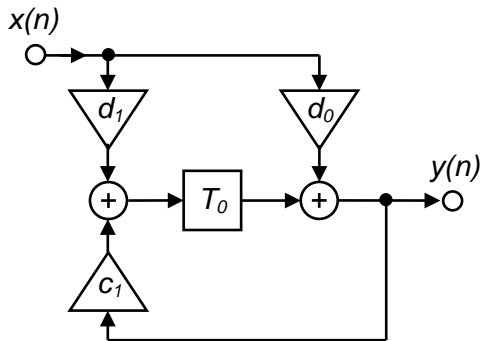


$$H(z) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1}$$

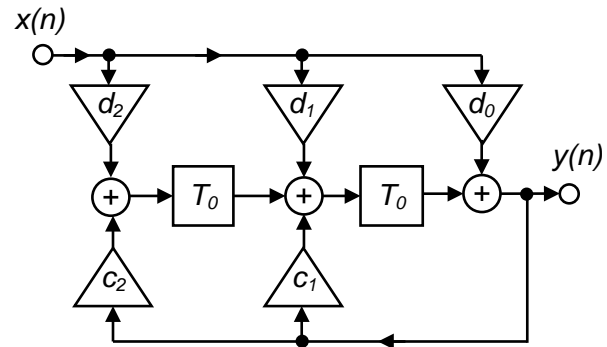


$$H(z) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}$$

Цифровые рекурсивные фильтры (IIR, БИХ)



$$H(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1}}{1 - c_1 z^{-1}} = \frac{d_0 \cdot z + d_1}{z - c_1}$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{1 - c_1 z^{-1} - c_2 z^{-2}} = \frac{d_0 z^2 + d_1 z + d_2}{z^2 - c_1 z - c_2}$$

Билинейное преобразование

ЧХ АФ: $0 \leq f \leq \infty$ с характерной частотой f_c .

ЧХ ЦФ: $0 \leq f \leq f_0/2$, в диапазоне $0 \leq f \leq \infty$ повторяется с периодом f_0 .

$0 \leq f \leq \infty$ АФ $\rightarrow 0 \leq f \leq f_0/2$ и периодически повторялась:

$$f = \frac{f_0}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi f'}{f_0} \right); \quad f \rightarrow \infty, \quad f' \rightarrow f_0/2; \quad \text{при } f' < f_0 \quad f \approx f'$$

Нормированная частота АФ $\Omega = f/f_c \Rightarrow \Omega_0 = \frac{f_0}{f_c} \Rightarrow \Omega = \frac{\Omega_0}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cdot \Omega'}{\Omega_0} \right)$

Потребуем, чтобы при $\Omega=1$ и $\Omega'=1 \Rightarrow \Omega = l \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cdot \Omega'}{\Omega_0} \right)$, где $l = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{\Omega_0} \right)$

$$P = j\Omega \Rightarrow \Omega = -Pj \Rightarrow -Pj = l \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{-j\pi P'}{\Omega_0} \right) \Leftrightarrow P = l \cdot j^2 \cdot \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{-\pi P'}{\Omega_0} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{-\pi P'}{\Omega_0} \right)} \quad \left\{ \frac{\sin(zj)}{\cos(zj)} = j \cdot \frac{\operatorname{sh}(z)}{\operatorname{ch}(z)} \right\}$$

$$\Leftrightarrow P = -l \cdot th\left(\frac{-\pi P'}{\Omega_0}\right) \Leftrightarrow P = l \cdot th\left(\frac{\pi P'}{\Omega_0}\right) = l \cdot \frac{e^{\frac{\pi P'}{\Omega_0}} - e^{-\frac{\pi P'}{\Omega_0}}}{e^{\frac{\pi P'}{\Omega_0}} + e^{-\frac{\pi P'}{\Omega_0}}} = l \cdot \frac{e^{\frac{2\pi P'}{\Omega_0}} - 1}{e^{\frac{2\pi P'}{\Omega_0}} + 1}.$$

Учитывая, что $\Omega_0 = f_0/f_c = 1/(T_0 f_c)$, $2\pi P' f_c = p'$, $e^{p' T_0} = z$:

$$P = l \cdot \frac{e^{\frac{2\pi P' f_c}{f_0}} - 1}{e^{\frac{2\pi P' f_c}{f_0}} + 1} = l \cdot \frac{e^{2\pi P' f_c T_0} - 1}{e^{2\pi P' f_c T_0} + 1} = l \cdot \frac{e^{p' T_0} - 1}{e^{p' T_0} + 1} = l \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$$

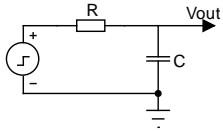
$$P = l \cdot \frac{z - 1}{z + 1} = ctg\left(\frac{\pi \cdot f_c}{f_0}\right) \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \text{ — билинейное преобразование}$$

$P = l \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$ подставляется в нормированную передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа $H(P)$, при этом получается передаточная функция $H_u(z)$, реализуемая рекурсивным цифровым фильтром.

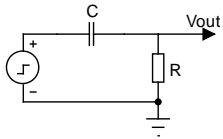
$$\omega \rightarrow j/2\Omega_0 \quad H(j\omega) = H'(j/2\Omega_0)$$

Пример: ФНЧ Чебышева 2-го порядка с неравномерностью 3.0103 дБ ([Ris_04_09.CIR](#))

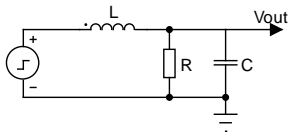
Цифровые рекурсивные фильтры 1-го и 2-го порядков



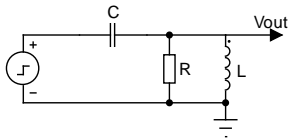
Для **ФНЧ-1** $A(p) = \frac{D_1}{C_1 + P} \Rightarrow \tilde{A}(z) = d_1 \frac{1+z}{-c_1 + z} \quad d_1 = d_0$



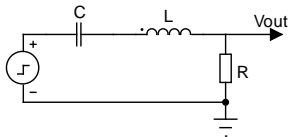
Для **ФВЧ-1** $A(p) = \frac{D_0 P}{C_1 + P} \Rightarrow \tilde{A}(z) = d_1 \frac{1-z}{-c_1 + z} \quad d_1 = -d_0$



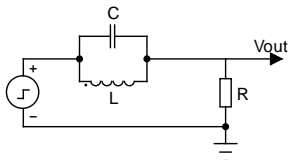
Для **ФНЧ-2** $A(p) = \frac{D_2}{C_2 + C_1 P + P^2} \Rightarrow \tilde{A}(z) = d_1 \frac{1+2z+z^2}{-c_2 - c_1 z + z^2}$



Для **ФВЧ-2** $A(p) = \frac{D_0 \cdot P^2}{C_2 + C_1 P + P^2} \Rightarrow \tilde{A}(z) = d_1 \frac{1-2z+z^2}{-c_2 - c_1 z + z^2}$

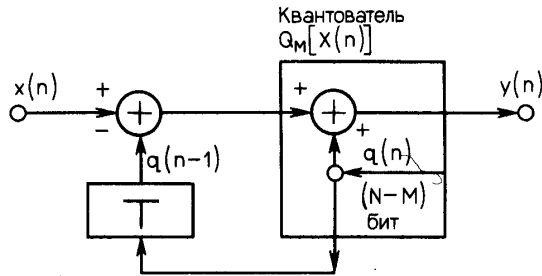


Для **ФПП-2** $A(p) = \frac{D_1 \cdot P}{C_2 + C_1 P + P^2} \Rightarrow \tilde{A}(z) = d_1 \frac{1-z^2}{-c_2 - c_1 z + z^2}$



Для **ФПЗ-2** $A(p) = \frac{1 + D_0 \cdot P^2}{C_2 + C_1 P + P^2} \Rightarrow \tilde{A}(z) = d_1 \frac{1+z^2}{-c_2 - c_1 z + z^2}$

Снижение влияния ошибок квантования с помощью обратной связи



Случай без шумоподавляющей обратной связи:

$$y(n) = x(n) + q(n); \quad Y(z) = X(z) + Q(z);$$

$$H_Q = Y(z)/Q[z] = 1$$

Случай с шумоподавляющей обратной связью:

$$y(n) = x(n) + q(n) - q(n-1);$$

$$Y(z) = X(z) + Q(z) - z^{-1} \cdot Q(z) = X(z) + (1 - z^{-1}) \cdot Q(z);$$

$$H_{QEF} = Y(z)/Q(z) = 1 - z^{-1}.$$

$$|H_{Q,EF}(f)|^2 = |1 - e^{-j \cdot 2\pi f T_0'}|^2 = |1 - e^{-j \cdot 2\pi f T_0'}|^2 = |1 - \cos(2\pi f T_0') + j \cdot \sin(2\pi f T_0')|^2 = 2 \cdot (1 - \cos(2\pi f T_0'))$$

$$\Delta SNR = 10 \cdot \lg \left[\frac{\int_0^{B_0} 2(1 - \cos(2\pi f T_0')) df}{\int_0^{B_0} df} \right] = 10 \cdot \lg \left[\frac{2B_0 - \frac{2\sin(2\pi f T_0')}{(2\pi T_0')} \Big|_0^{B_0}}{B_0} \right] = 10 \lg \left[2 - \frac{2\sin(2\pi B_0 T_0')}{2\pi B_0 T_0'} \right]$$

$$\Delta SNR = -10 \lg \left[2 \cdot \left(1 - \frac{\sin(\Theta_0)}{\Theta_0} \right) \right] \quad (\partial B), \quad \Theta_0 = 2\pi \cdot \frac{B_0}{f_0'}$$

При увеличении отношения частоты дискретизации f_0 к максимальной частоте спектра полезного сигнала B_0 , Θ_0 будет уменьшаться (в пределе стремясь к нулю). Таким образом, выигрыш в отношении сигнал шум ΔSNR в пределе будет стремиться к бесконечности.

