# 数学分析交流活动

陈志杰

上海交通大学

2025 年 6 月 3 日

# 目录


1. 速通知识点
   - 线面积分
   - Stokes 定理与场论
   - 函数项级数
   - 幂级数
   - Fourier 级数
2. 去年期末卷选讲
3. 例题
4. 理论拓展
   - Fourier 级数的 Fejér 和
   - Weierstrass 逼近定理
   - Frenet 标架

# 目录

1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

# 目录


1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

# 线面积分

定积分:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

二重积分:

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

# 线面积分

**定积分**:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

**二重积分**:

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

**$\mathbf{R}^n$ 中的第一型曲线积分**:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ell(\gamma_i).$$

**$\mathbf{R}^n$ 中的第一型曲面积分**:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sigma(S_i).$$

**定积分**:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

**二重积分**:

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

$\mathbf{R}^n$ **中的第一型曲线积分**:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ell(\gamma_i).$$

$\mathbf{R}^n$ **中的第一型曲面积分**:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sigma(S_i).$$

定积分:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

二重积分:

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的第一型曲线积分:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ell(\gamma_i).$$

$\mathbf{R}^n$ 中的第一型曲面积分:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sigma(S_i).$$

把曲线积分留在一维，把曲面积分留在二维.

# 曲线长度

**定义 (曲线长度)**

设 $\gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 为简单曲线, $\pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$ 是 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割. 如果第一个等号右端为实数, 记 $\gamma$ 的长度为

$$\ell(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})\| = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})\| .$$

第二个等号需要 $\gamma$ 连续, 是需要证明的定理.

物理意义是求不均匀曲线的质量.

**定义 (第一型曲线积分)**

设 $\gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 为简单连续曲线, $\pi$ 为 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点, $\gamma_i : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [t_{i-1}, t_i]$, $f(x, y, z)$ 在 $\gamma$ 上有定义. 如果收敛, 记第一型曲面积分 (对弧长的积分)

$$\int_{\gamma} f(M)\mathrm{d}s = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ell(\gamma_i).$$

# 第一型曲线积分

物理意义是求不均匀曲线的质量.

## 定义 (第一型曲线积分)

设 $\gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 为简单连续曲线, $\pi$ 为 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点, $\gamma_i : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [t_{i-1}, t_i]$, $f(x, y, z)$ 在 $\gamma$ 上有定义. 如果收敛, 记第一型曲面积分 (对弧长的积分)

$$\int_\gamma f(M)\mathrm{d}s = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ell(\gamma_i).$$

## 定理

设 $\gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 简单连续可微, $f(x, y, z)$ 在 $\gamma$ 上连续. 则成立计算公式

$$\int_\gamma f\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t))\left\|\boldsymbol{r}'(t)\right\|\mathrm{d}t.$$

# 第一型曲线积分

物理意义是求不均匀曲线的质量.

## 定义 (第一型曲线积分)

设 $\gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 为简单连续曲线, $\pi$ 为 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点, $\gamma_i : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [t_{i-1}, t_i]$, $f(x, y, z)$ 在 $\gamma$ 上有定义. 如果收敛, 记第一型曲面积分 (对弧长的积分)

$$\int_\gamma f(M)\mathrm{d}s = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ell(\gamma_i).$$

对形式记号 $\mathrm{d}s = \|\boldsymbol{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t$, 以下形式运算实际上是成立的.

## 定理

设 $\gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 简单连续可微, $f(x, y, z)$ 在 $\gamma$ 上连续. 则成立计算公式

$$\int_\gamma f\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t))\big\|\boldsymbol{r}'(t)\big\| \,\mathrm{d}t.$$

物理意义是求变力做功.

**定义 (第二型曲线积分)**

设 $\gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), t\in[\alpha,\beta]$ 为有向连续曲线 (参数增加方向设为正向), $\pi$ 为 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点. 如果收敛, 记第二型曲面积分 (对坐标的积分)

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n P(M_i)\Delta x_i, \qquad \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

# 第二型曲线积分

物理意义是求变力做功.

## 定义 (第二型曲线积分)

设 $\gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 为有向连续曲线 (参数增加方向设为正向), $\pi$ 为 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点. 如果收敛, 记第二型曲面积分 (对坐标的积分)

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i, \qquad \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

对形式记号 $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$, 以下形式运算实际上是成立的.

## 定理

设 $\gamma : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 有向连续可微, $P, Q, R$ 在 $\gamma$ 上连续. 则成立计算公式

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))\mathrm{d}t.$$

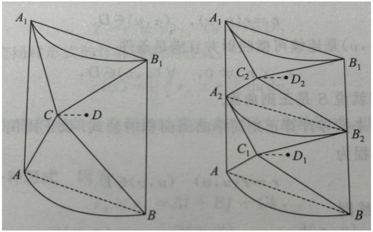
# 曲面面积

# 曲面面积

为什么不能用内接折面面积的上确界定义曲面面积?

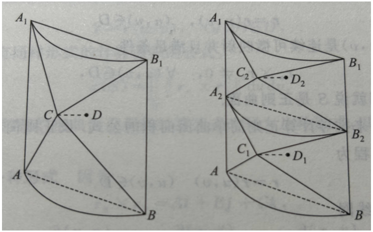
# 曲面面积

为什么不能用内接折面面积的上确界定义曲面面积?



# 曲面面积

为什么不能用内接折面面积的上确界定义曲面面积?




## 定义 (曲面面积)

设 $S$ 是连续可微曲面, 在每一点有确定的切平面. 用分段连续可微的曲线将 $S$ 分成若干小块, 记为一个分割 $\pi$, $\|\pi\| = \max_i \operatorname{diam} S_i$. 记 $\tau(S_i)$ 为 $S_i$ 在其上某点处的切平面的投影面积. 如果收敛, 记 $S$ 的面积为

$$\sigma(S) = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \tau(S_i).$$

# 曲面面积

严格地说，以下公式由定义直接得到.

**定理**

设 $S : z = z(x, y), (x, y) \in D$ 是显式给出的正则简单曲面. 则成立计算公式

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

# 曲面面积

严格地说，以下公式由定义直接得到.

**定理**

设 $S: z = z(x,y), (x,y) \in D$ 是显式给出的正则简单曲面. 则成立计算公式

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

严格地说，以下公式可以由以上公式推出.

**定理**

设 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), (u,v) \in D$ 是由双参数方程给出的正则简单曲面. 则成立计算公式

$$\sigma(S) = \iint_D W\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad W = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2},$$

其中 $E = \|\boldsymbol{r}_u\|^2, G = \|\boldsymbol{r}_v\|^2, F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v$

# 曲面面积

严格地说，以下公式由定义直接得到.

**定理**

设 $S: z = z(x,y), (x,y) \in D$ 是显式给出的正则简单曲面. 则成立计算公式

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

严格地说，以下公式可以由以上公式推出.

**定理**

设 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), (u,v) \in D$ 是由双参数方程给出的正则简单曲面. 则成立计算公式

$$\sigma(S) = \iint_D W \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad W = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2},$$

其中 $E = \|\boldsymbol{r}_u\|^2, G = \|\boldsymbol{r}_v\|^2, F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v$ 是曲面的第一基本形式的系数，曲面的第一基本形式决定了曲面的度量性质 (内蕴性质).

物理意义是求不均匀曲面的质量.

**定义 (第一型曲面积分)**

设 $S$ 为可求面积的曲面, $\pi$ 为 $S$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点, $f(x,y,z)$ 在 $S$ 上有定义. 如果收敛, 记第一型曲面积分

$$\iint_S f(M)\mathrm{d}S = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sigma(S_i).$$

物理意义是求不均匀曲面的质量.

**定义 (第一型曲面积分)**

设 $S$ 为可求面积的曲面, $\pi$ 为 $S$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点, $f(x,y,z)$ 在 $S$ 上有定义. 如果收敛, 记第一型曲面积分

$$\iint_S f(M)\mathrm{d}S = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sigma(S_i).$$

对形式记号 $\mathrm{d}S = W\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 以下形式运算实际上是成立的.

**定理**

设 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in D$ 为正则简单曲面, $f(x,y,z)$ 在 $S$ 上连续. 则成立计算公式

$$\iint_S f\mathrm{d}S = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))W\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad W=\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|=\sqrt{EG-F^2}.$$

物理意义是求通量.

**定义 (第二型曲面积分)**

设 $S$ 为可定向正则曲面, $\boldsymbol{n}$ 为正侧的单位法向量, $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在 $S$ 上连续. 记第二型曲面积分

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

**注**

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 中的 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$ 不能交换. 事实上, 这是微分形式记号的简写.

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y.$$

物理意义是求通量.

**定义 (第二型曲面积分)**

设 $S$ 为可定向正则曲面, $\boldsymbol{n}$ 为正侧的单位法向量, $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在 $S$ 上连续. 记第二型曲面积分

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

**注**

$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 中的 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$ 不能交换. 事实上, 这是微分形式记号的简写.

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y.$$

**定理**

设 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in D$, 其余条件同上, 则成立计算公式

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint_D (PA+QB+RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

设 $\boldsymbol{\tau}$ 为单位切向量. 两型曲线积分满足关系

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s.$$

设 $\boldsymbol{n}$ 为单位法向量. 两型曲面积分满足关系

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

# 目录

1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

# Stokes 定理

**注**

Green, Gauss, Stokes 公式甚至 Newton-Leibniz 公式都可以称作 Stokes 定理. 其背后是关于流形与微分形式的一个很美的定理, 广义 Stokes 定理.

Green, Gauss, Stokes 公式本身参见教科书.

**注**

Green, Gauss, Stokes 公式甚至 Newton-Leibniz 公式都可以称作 Stokes 定理. 其背后是关于流形与微分形式的一个很美的定理, 广义 Stokes 定理.

Green, Gauss, Stokes 公式本身参见教科书.

Stokes 定理的很大用处之一是在参数化复杂时, 将讨厌的第二型线面积分化简.

**注**

Green, Gauss, Stokes 公式甚至 Newton-Leibniz 公式都可以称作 Stokes 定理. 其背后是关于流形与微分形式的一个很美的定理, 广义 Stokes 定理.

Green, Gauss, Stokes 公式本身参见教科书.

Stokes 定理的很大用处之一是在参数化复杂时, 将讨厌的第二型线面积分化简.

**例**

计算

$$\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z.$$

其中 $C$ 为 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与 $x^2+y^2=2rx$ 的交线位于 $z>0$ 的部分, $(0<r<R)$, $C$ 的定向使诱导出的球面定向为外侧.

**注**

Green, Gauss, Stokes 公式甚至 Newton-Leibniz 公式都可以称作 Stokes 定理. 其背后是关于流形与微分形式的一个很美的定理, 广义 Stokes 定理.

Green, Gauss, Stokes 公式本身参见教科书.
Stokes 定理的很大用处之一是在参数化复杂时, 将讨厌的第二型线面积分化简.

**例**

计算

$$\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z.$$

其中 $C$ 为 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与 $x^2+y^2=2rx$ 的交线位于 $z>0$ 的部分, $(0<r<R)$, $C$ 的定向使诱导出的球面定向为外侧.

可以利用 Stokes 定理计算面积/体积.

**例**

计算双纽线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

所围区域的面积.

**例**

计算双纽线

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

所围区域的面积.

**例**

计算曲面

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2xy$$

所围区域的面积.

**定理 (曲线积分和路径无关的条件)**

设向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在区域 $\Omega\in\mathbf{R}^3$ 上连续可微. 以下等价.

1. 对任意环路 $C$,
$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0.$$
2. 以下曲线积分与路径无关.
$$\int_{\widetilde{AB}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$
3. 微分形式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 在 $\Omega$ 中有原函数 $U$, 即使得 $\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$.
4. (当且仅当 $\Omega$ 是单连通区域时成立) 在 $\Omega$ 中 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$, 即
$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

$\mathbf{R}^2$ 的情况也类似, 只是需要恰当地定义向量的 (形式) 外积.

我们希望外积 $\delta : (\mathbf{R}^n)^n \to \mathbf{R}$ 是 $n$-线性形式, 且满足性质

$$\delta(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

$$\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

线性代数中, 有结论 $\dim V_{\text{alt}}^{(\dim V)} = 1$. 于是外积 $\delta$ 被唯一确定为

$$\delta(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}.$$

由性质唯一确定对象, 这是范畴论的思想. 可以用类似的思想 (配合抽象代数中生成元的思想) 定义方阵或线性算子的迹与行列式, 张量积也是类似动机定义的.

Both propositions appear as exercises in Sheldon Axler's nice linear algebra textbook *Linear Algebra Done Right*. Click the book's name and you will be directed to the book's homepage.

**Proposition**

*The trace is the only linear functional* $\tau : \mathcal{L}(V) \to \mathbf{F}$ *such that*

$$\tau(ST) = \tau(TS)$$

*for all* $S, T \in \mathcal{L}(V)$ *and* $\tau(I) = \dim V$.

**Proof Idea.**

Define $P_{j,k} \in \mathcal{L}(V)$ by $P_{j,k}(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_k v_j$, where $v_1, \ldots, v_n$ is a basis of $V$. Prove that $\tau(P_{j,k}) = 1$ if $j = k$ and $0$ otherwise. $\square$

## Proposition

*$\delta : \mathbf{C}^{n,n} \to \mathbf{C}$ is a function such that*

$$\delta(AB) = \delta(A) \cdot \delta(B)$$

*for all $A, B \in \mathbf{C}^{n,n}$ and $\delta(A)$ equals the product of the diagonal entries of $A$ for each diagonal matrix $A \in \mathbf{C}^{n,n}$. Then*

$$\delta(A) = \det A$$

*for all $A \in \mathbf{C}^{n,n}$.*

## Proof idea.

Use the Gaussian elimination (consider elementary matrices) and diagonalization. □

设 $\boldsymbol{F}$ 是连续可微向量场. 考虑 $B_{M_0}(r) \subseteq \mathbf{R}^3$ 中的平均泉源密度

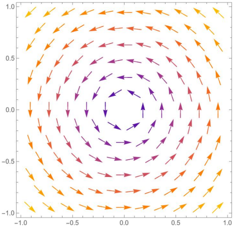
$$\frac{1}{|B_{M_0}(r)|} \oiint_{\partial B_{M_0}(r)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \frac{1}{|B_{M_0}(r)|} \iiint_{B_{M_0}(r)} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V.$$

## 散度

设 $\boldsymbol{F}$ 是连续可微向量场. 考虑 $B_{M_0}(r) \subseteq \mathbf{R}^3$ 中的平均泉源密度

$$\frac{1}{|B_{M_0}(r)|} \oiint_{\partial B_{M_0}(r)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \frac{1}{|B_{M_0}(r)|} \iiint_{B_{M_0}(r)} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V.$$

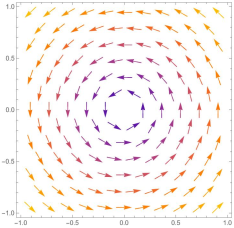
令 $r \to 0$, 用积分第一中值定理即得到 $M_0$ 点处的泉源密度, 定义散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$. 它是向量场诱导出的数量场, 反映了一个点是源 (source) 还是汇 (sink).




设 $\boldsymbol{F}$ 是连续可微向量场, $\boldsymbol{n}$ 是单位向量. 以 $M_0$ 为心, $\varepsilon$ 为半径作垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的小圆盘 $D_\varepsilon$. 考虑如下积分, 它反映了 "沿一个方向的旋转程度".

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|}\oint_{\partial D_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{|D_\varepsilon|}\iint_{D_\varepsilon}(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

# 旋度

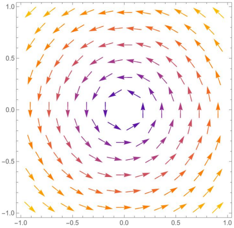



设 $\boldsymbol{F}$ 是连续可微向量场, $\boldsymbol{n}$ 是单位向量. 以 $M_0$ 为心, $\varepsilon$ 为半径作垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的小圆盘 $D_\varepsilon$. 考虑如下积分, 它反映了 "沿一个方向的旋转程度".

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|}\oint_{\partial D_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{|D_\varepsilon|}\iint_{D_\varepsilon}(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

令 $\varepsilon\to 0$, 用积分第一中值定理即得到反映向量场沿一个方向旋转程度的量, 定义方向旋量 $(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}$.

# 旋度




设 $\boldsymbol{F}$ 是连续可微向量场, $\boldsymbol{n}$ 是单位向量. 以 $M_0$ 为心, $\varepsilon$ 为半径作垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的小圆盘 $D_\varepsilon$. 考虑如下积分, 它反映了 “沿一个方向的旋转程度”.

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|}\oint_{\partial D_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{|D_\varepsilon|}\iint_{D_\varepsilon}(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

令 $\varepsilon\to 0$, 用积分第一中值定理即得到反映向量场沿一个方向旋转程度的量, 定义方向旋量 $(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}$.

定义旋度 $\operatorname{curl}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}$, 其方向表示旋转最强的方向, 大小表示旋转程度. 它是向量场诱导出的向量场.

# 场论公式举例

线性:

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g.$$

$$\nabla \cdot (\alpha \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{G}) = \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{F} + \beta \nabla \cdot \boldsymbol{G}.$$

$$\nabla \times (\alpha \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{G}) = \alpha \nabla \times \boldsymbol{F} + \beta \nabla \times \boldsymbol{G}.$$

乘积:

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g).$$

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{F}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\nabla f) \cdot \boldsymbol{F}.$$

$$\nabla \times (f\boldsymbol{F}) = f(\nabla \times \boldsymbol{F}) + (\nabla f) \times \boldsymbol{F}.$$

复合:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0.$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \boldsymbol{0}.$$

# 总结

求曲线积分的常用方法:

1. 利用 Green 或 Stokes 公式 (或者利用曲线积分与路径无关, 选择计算简便的路径), 必要时添加辅助线, 以及挖洞.
2. 利用两型曲线积分的关系互相转化, 化简式子.
3. 参数化 (显式求解; 极坐标/球坐标/柱坐标变换; $\mathbf{R}^3$ 中还可以考虑先消去 $z$ 做出向 $xOy$ 的投影曲线 $f(x,y)=0$, 再求 $f(x,y)=0$ 的参数化, 代入 $z$.).

# 总结

求曲线积分的常用方法:

1. 利用 Green 或 Stokes 公式 (或者利用曲线积分与路径无关, 选择计算简便的路径), 必要时添加辅助线, 以及挖洞.
2. 利用两型曲线积分的关系互相转化, 化简式子.
3. 参数化 (显式求解; 极坐标/球坐标/柱坐标变换; $\mathbf{R}^3$ 中还可以考虑先消去 $z$ 做出向 $xOy$ 的投影曲线 $f(x,y)=0$, 再求 $f(x,y)=0$ 的参数化, 代入 $z$.).

求曲面积分的常用方法:

1. 利用 Gauss 公式, 必要时添加辅助面, 以及挖洞.
2. 利用 Stokes 公式.
3. 利用两型曲面积分的关系互相转化, 化简式子.
4. 参数化.

**例**

$C$ 为 $2x = \pi y^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的弧段. 计算

$$\int_C (2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y.$$

**例**

$C$ 为右半柱面 $|x| + |y| = a(y > 0)$ 与平面 $y = z$ 的交线上从 $(-a, 0, 0)$ 到 $(a, 0, 0)$ 的一段 $(a > 0)$. 计算

$$\int_C \mathrm{e}^{x+z}\{[(x+1)y^2 + 1]\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y + xy^2\mathrm{d}z\}.$$

**例**

$\Sigma$ 为曲线 $z = \mathrm{e}^y (0 \le y \le a)$ 绕 $z$ 轴旋转生成的旋转面的下侧. 计算

$$\iint_\Sigma 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

# 目录


1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

# 一致收敛性

当我们研究函数列 (函数项级数) 时, 我们希望用性质已知的简单函数来窥测性质未知的, 新的函数的分析性质.

# 一致收敛性

当我们研究函数列 (函数项级数) 时，我们希望用性质已知的简单函数来窥测性质未知的，新的函数的分析性质.
我们希望通项的性质可以被极限函数 (和函数) 所继承，但是极限运算一般来说不能换序，一致收敛性是能够换序的充分条件.

# 一致收敛性

当我们研究函数列 (函数项级数) 时，我们希望用性质已知的简单函数来窥测性质未知的，新的函数的分析性质.

我们希望通项的性质可以被极限函数 (和函数) 所继承，但是极限运算一般来说不能换序，一致收敛性是能够换序的充分条件.

## 定义 (一致收敛性)

**设函数列** $f_n(x) \to f(x), x \in E$. **称其一致收敛，如果** $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N,$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

# 一致收敛性

当我们研究函数列 (函数项级数) 时，我们希望用性质已知的简单函数来窥测性质未知的，新的函数的分析性质.

我们希望通项的性质可以被极限函数 (和函数) 所继承，但是极限运算一般来说不能换序，一致收敛性是能够换序的充分条件.

**定义 (一致收敛性)**

**设函数列** $f_n(x) \to f(x), x \in E$. **称其一致收敛，如果** $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N,$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

极限换序的关键在于三分法:

$$|f(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x_0) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq 3\varepsilon.$$

# 一致收敛性

当我们研究函数列 (函数项级数) 时, 我们希望用性质已知的简单函数来窥测性质未知的, 新的函数的分析性质.
我们希望通项的性质可以被极限函数 (和函数) 所继承, 但是极限运算一般来说不能换序, 一致收敛性是能够换序的充分条件.

**定义 (一致收敛性)**

**设函数列** $f_n(x) \to f(x), x \in E$. **称其一致收敛, 如果** $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N$,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

极限换序的关键在于三分法:

$$|f(x_0) - f(x_0)| \le |f(x_0) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \le 3\varepsilon.$$

一致收敛函数列的性质参见教科书 (极限, 连续性, 逐项可微性, 逐项可积性, Dini 定理), 本质都是极限换序. 考虑连续性, 可微性等局部性质时, 可以退而求内闭一致收敛性.

**定理**

设函数列 $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in E'$. 且对每个 $n$, $\lim\limits_{x\to x_0, x\in E} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$. 则成立

$$\lim_{x\to x_0, x\in E} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

**证.**

Step 1. 证明 $\{a_n\}$ 收敛. 证得后设收敛于 $a$.

法 1. 在 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ 中令 $x \to x_0$, 得到 $|a_n - a_m| \le \varepsilon$.

法 2. 在下式中选 $N$ 控制第二项. 对每个取定的 $n, m$ 取 $x = x(n, m)$ 控制第一, 第三项.

$$|a_n - a_m| \le |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m|.$$

Step 2. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

$$|f(x) - a| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|.$$

在上式中先选定 $n$ 控制第一, 第三项. 再对这个 $n$ 取 $\delta$ 控制第二项. □

# 三分法

## 定理

设函数列 $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in E'$. 且对每个 $n$, $\lim\limits_{x\to x_0, x\in E} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$. 则成立

$$\lim_{x\to x_0, x\in E} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0, x\in E} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

## 证 (行不通).

Step 1. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 收敛. 证得后设收敛于 $a$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_2) - f(x_2)|.$$

在上式中先选定 $n$ 控制第一, 第三项. 再对这个 $n$ 取 $\delta$ 控制第二项.

Step 2. 证明 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$.

$$|a_n - a| \le |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - a|.$$

没有对 $n$ 一致的条件, 第一项无法控制. □

## 定理

以下等价.

1. 函数列 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{E}|f_n(x) - f(x)| = 0$.
3. 不存在 $\{x_n\} \in E$ 使得 $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0 \quad (n \to \infty)$.

Cauchy 一致收敛准则, Weierstrass 判别法, Dirichlet 与 Abel 判别法, Dini 定理参见教科书.

**定理**

以下等价.

1. 函数列 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{E} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
3. 不存在 $\{x_n\} \in E$ 使得 $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0 \quad (n \to \infty)$.

Cauchy 一致收敛准则, Weierstrass 判别法, Dirichlet 与 Abel 判别法, Dini 定理参见教科书.

- Cauchy 一致收敛准则总是有效, 但需要分析.
- Weierstrass 判别法很弱 (只能针对绝对一致收敛级数, 且不总有效), 但常常有奇效, 需要在练习中掌握.
- 看到保号级数应想到 Dini 定理, Dini 定理能处理的题目一般其它办法都处理不了.

# 一致收敛性的判别法

## 定理

以下等价.

1. 函数列 $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{E} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
3. 不存在 $\{x_n\} \in E$ 使得 $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0 \quad (n \to \infty)$.

Cauchy 一致收敛准则, Weierstrass 判别法, Dirichlet 与 Abel 判别法, Dini 定理参见教科书.

- Cauchy 一致收敛准则总是有效, 但需要分析.
- Weierstrass 判别法很弱 (只能针对绝对一致收敛级数, 且不总有效), 但常常有奇效, 需要在练习中掌握.
- 看到保号级数应想到 Dini 定理, Dini 定理能处理的题目一般其它办法都处理不了.

不一致收敛的判别方法较少. 除了利用一致收敛函数列的性质的逆否命题外, 大多使用 Cauchy 一致收敛准则.

# 目录


1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

**定理 (Cauchy-Hadamard 公式)**

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间是 $\langle -R, R\rangle$, 收敛半径 $R$ 由 *Cauchy-Hadamard* 公式给出.

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

**定理 (Cauchy-Hadamard 公式)**

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间是 $\langle -R, R\rangle$, 收敛半径 $R$ 由 *Cauchy-Hadamard* 公式给出.

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

幂级数在收敛域的任意闭子区间上一致收敛. 于是在收敛域上连续, 在收敛域的任意闭子区间上可以逐项积分, 在收敛域内部 (逐项求导得到的幂级数具有同样的收敛半径, 但可能有不同的收敛域) 可以任意次逐项微分.

**定理 (Cauchy-Hadamard 公式)**

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间是 $\langle -R, R\rangle$, 收敛半径 $R$ 由 *Cauchy-Hadamard* 公式给出.

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

幂级数在收敛域的任意闭子区间上一致收敛. 于是在收敛域上连续, 在收敛域的任意闭子区间上可以逐项积分, 在收敛域内部 (逐项求导得到的幂级数具有同样的收敛半径, 但可能有不同的收敛域) 可以任意次逐项微分.

通过四则运算与微积分运算, 可以求得一些幂级数的和函数的显式表达式.

# 函数的幂级数展开

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 逐项求导 $k$ 次后, 发现其在 $x=0$ 处的 $k$ 阶导数为 $k!a_k$, 于是只需考虑 Taylor 级数 (唯一性定理).
- 但 Taylor 级数是否有正收敛半径, 和函数是否是原来的函数本身, 都需要额外分析. (反例参见教科书.) 充要条件是 Taylor 公式的余项趋于 0.
- 一般使用间接展开法, 其理论基础为唯一性定理.
- 可以用幂级数求一些数项级数的和.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

# 初等函数的幂级数展开

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

# 目录


1. 速通知识点
   - 线面积分
   - Stokes 定理与场论
   - 函数项级数
   - 幂级数
   - Fourier 级数
2. 去年期末卷选讲
3. 例题
4. 理论拓展
   - Fourier 级数的 Fejér 和
   - Weierstrass 逼近定理
   - Frenet 标架

设 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ 是 $R[\alpha,\beta]$ 上关于 "内积"

$$\langle f,g\rangle=\rho\int_\alpha^\beta fg$$

的标准正交函数系. 如果展式 $f=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n$ 成立, 且可以逐项积分, 那么一定成立 $c_n=\langle f,\varphi_n\rangle$, 称作 Euler-Fourier 公式.

设 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ 是 $R[\alpha,\beta]$ 上关于 "内积"

$$\langle f,g\rangle=\rho\int_\alpha^\beta fg$$

的标准正交函数系. 如果展式 $f=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n$ 成立, 且可以逐项积分, 那么一定成立 $c_n=\langle f,\varphi_n\rangle$, 称作 Euler-Fourier 公式.

它具有最佳逼近性质:

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}b_k\varphi_k\right\|\geq\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|,$$

等号成立当且仅当 $b_k=c_k,\forall 0\leq k\leq n$.

# 正交函数系, Euler-Fourier 公式, Bessel 不等式

设 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $R[\alpha,\beta]$ 上关于"内积"

$$\langle f,g\rangle=\rho\int_\alpha^\beta fg$$

的标准正交函数系. 如果展式 $f=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n$ 成立, 且可以逐项积分, 那么一定成立 $c_n=\langle f,\varphi_n\rangle$, 称作 Euler-Fourier 公式.

它具有最佳逼近性质:

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}b_k\varphi_k\right\|\geq\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|,$$

等号成立当且仅当 $b_k=c_k,\forall 0\leq k\leq n$.

**定理 (Bessel 不等式)**

$\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f,\varphi_n\rangle^2\leq\|f\|^2$. 这个正项级数收敛.

二者的证明都是很基本的线性代数知识 (内积空间与投影), 略去.

$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \ldots\}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上可积与绝对可积的函数族上关于 $\rho = \frac{1}{\pi}$ 内积的标准正交函数系. Euler-Fourier 公式参见教科书. Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

将会看到, 这其实是一个等式, 称作 Parseval 等式, 或者封闭性方程.

$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots\}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上可积与绝对可积的函数族上关于 $\rho = \frac{1}{\pi}$ 内积的标准正交函数系. Euler-Fourier 公式参见教科书. Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

将会看到, 这其实是一个等式, 称作 Parseval 等式, 或者封闭性方程.

Fourier 级数在一定 (只需相当弱的) 条件下可以做逐项求导和逐项积分的形式运算, 参见教科书.

# 点收敛性

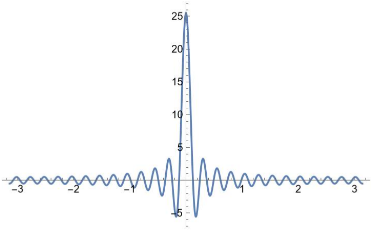
$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ 为 Dirichlet 核.

# 点收敛性

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))D_n(t)\mathrm{d}t,$$

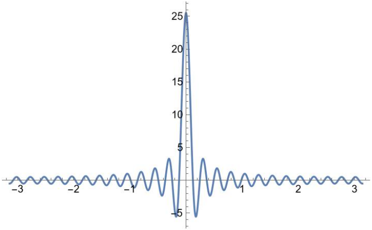
其中 $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ 为 Dirichlet 核.



# 点收敛性

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ 为 Dirichlet 核.




Dirichlet 核的性质使得 Riemann 局部化定理成立. Dini-Lipschitz 判别法与 Dirichlet 判别法参见教科书, 它们 (与它们的推论) 所需的条件一般都能满足.

将于拓展部分用不同于教科书的方式讲解. 对 Fejér 和的分析将导出 (Riemann 可积函数的) Fourier 级数的平方平均收敛性, Parseval 等式, 逐项积分的一致收敛性, Weierstrass 第二逼近定理.

# 目录

1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

1. $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; $-\frac{\pi}{4}$.
2. $0$.
3. $\frac{1}{101}$.
4. $\frac{13}{9}\pi R^4$.
5. $-\frac{\pi}{3}$.

选择题: ACDBD

11. $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x), x \in (-1, 1)$.
12. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}, x \in [-1, 1]$.
13. $-\frac{1}{3}$.
14. $-\pi$.
15. (1) $g(x) = 0, x \in [0, +\infty)$. (2) $p \geq 1$ 时否, $p < 1$ 时是.
16. (1) $x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, x \in (-\pi, \pi)$; $x^3 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{12(-1)^n}{n^3} - \frac{2\pi^2(-1)^n}{n} \right) \sin nx, x \in (-\pi, \pi)$. (2) $\frac{\pi^3}{32}$.
17. (2) $\frac{\pi}{6}$.

# 目录


1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

**定理 (Euler 齐次函数定理)**

设 $f(x,y) \in C^1$, 则 $f$ 为 $n$ 次齐次函数的充分必要条件是

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=nf(x,y).$$

设 $f(x,y) \in C^k$ 为 $n$ 次齐次函数, 则

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)=n(n-1)\cdots(n-k+1)f(x,y).$$

**习题**

设 $\Sigma : F(x,y,z)=0$ 为以原点为顶点的锥面, $F \in C^1$. 求证: $\Sigma$ 与平面 $\Pi$ 围成的锥体体积为 $V=\frac{1}{3}SH$, 其中 $S$ 为平面 $\Pi$ 上锥底部分的面积, $H$ 为高.

# 例题

## 习题

计算

$$\iint_{\Sigma} xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S.$$

其中 $\Sigma$ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限的部分.

**习题**

计算

$$\int_{\Gamma} y^2 \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}y + x^2 \mathrm{d}z.$$

其中 $\Gamma$ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=ax$ 相交的位于 $z \geq 0$ 的部分，且从 $x$ 轴正向看是逆时针方向.

# 例题

## 习题

1. 计算
$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y].$$
其中 $C: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.
2. 计算
$$\oiint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}.$$
其中 $S$ 为单位球面的外侧.

# 例题

**命题 (第一型曲面积分在正交变换下的不变性)**

$$\iint_S f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})\mathrm{d}\Sigma.$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 (正交变换), $\boldsymbol{X} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{U} = (u, v, w)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $\Sigma = \boldsymbol{A}(S)$ 是曲面 $S$ 在正交变换 $\boldsymbol{A}$ 下的像.

**习题**

设 $S$ 是平面 $x + y + z = t$ 被单位球面割下的部分. $|t| \le \sqrt{3}$. 求证:

$$\iint_S (1 - x^2 - y^2 - z^2)\mathrm{d}S = \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2.$$

## 习题

**求证**:
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\pi} \sin y \mathrm{e}^{\sin y(\cos x - \sin x)} \mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}).$$

## 习题

1. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, 其中
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}.$$

2. 设 $f_1\in R[a,b]$, $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$. 求证: $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0$.

**习题**

判断一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad 0 < x < +\infty.$$

## 习题

判断一致收敛性.

1. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}, \quad x \in (0, \pi).$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in [0, \pi].$$

**习题**

求证: Riemann zeta 函数 $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 不一致收敛, 但是是 $C^{\infty}$ 的.

**习题**

设对每个 $n$, $u_n(x)$ 在 $x = c$ 处左连续, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(c)$ 发散. 求证: $\forall \delta > 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(c - \delta, c)$ 上不一致收敛.

# 例题

回忆广义积分中的命题：设无穷限积分 $\int_1^{+\infty} f$ 收敛，且 $f$ 单调，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

## 习题

$\{a_n\}$ 为单调递减的正数列. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $[0,\pi]$ 一致收敛. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

## 注

事实上，其逆命题也成立，但证明比此题麻烦不少，参见谢惠民.

# 例题

## 习题

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的收敛可微函数项级数，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 部分和一致有界，求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

# 例题

**习题**

设 $f_n \in C[a,b]$. 对任意 $x \in [a,b]$, $\{f_n(x)\}$ 关于 $n$ 均有界. 求证: 存在 $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, $\{f_n\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致有界.

## 习题

设函数列 $f_n(x) \to f(x), x \in U(x_0)$. 又设对每个 $n$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$, 且这个极限过程对 $n$ 一致, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$,

$$|f_n(x) - a_n| < \varepsilon, \forall n \in \mathbf{N}.$$

求证:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbf{R}.$$

# 例题

## 习题

设函数列 $f_n(x) \to f(x), x \in [a,b]$, 且 $f \in C[a,b]$. 求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是对 $[a,b]$ 中的每个收敛数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.

**习题 (不讲解, 留作自己练习)**

设函数列 $f_n(x) \to f(x), x \in U(x_0)$, 且每个 $f_n$ 都在 $x_0$ 处连续. 求证: $f$ 在 $x_0$ 连续的充分必要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists N \in \mathbf{N}$,

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in U(x_0, \delta).$$

# 例题

**习题**

求 $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ 的 Maclaurin 展开式与收敛域.

**习题 (选自 2023 年期末)**

计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \sin nx \cos nx}{x}\mathrm{d}x.$$

# 目录

1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

# 目录

1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t.$$

**定义** Fejér 和为 Fourier 级数前 $n$ 个部分和的算术平均.

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

定义 Fejér 和为 Fourier 级数前 $n$ 个部分和的算术平均. 如果 Fourier 级数点收敛, 那 Fejér 和必然收敛到同一个值.

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

**定义 Fejér 和为 Fourier 级数前 $n$ 个部分和的算术平均.** **如果 Fourier 级数点收敛, 那 Fejér 和必然收敛到同一个值.**

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)\\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}t+\sin\frac{3}{2}t+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t.$$

**定义 Fejér 和为 Fourier 级数前 $n$ 个部分和的算术平均.** 如果 Fourier 级数点收敛, 那 Fejér 和必然收敛到同一个值.

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\sin\frac{1}{2}t + \sin\frac{3}{2}t + \cdots + \sin\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{1-\cos nt}{2(\sin\frac{t}{2})^2} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

定义 Fejér 和为 Fourier 级数前 $n$ 个部分和的算术平均. 如果 Fourier 级数点收敛, 那 Fejér 和必然收敛到同一个值.

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}t+\sin\frac{3}{2}t+\cdots+\sin\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{1-\cos nt}{2(\sin\frac{t}{2})^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

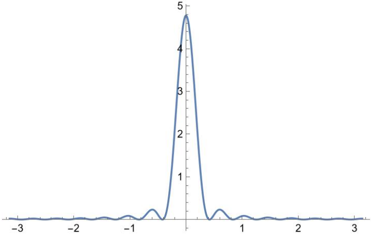
**定义 Fejér 和为 Fourier 级数前 $n$ 个部分和的算术平均**. 如果 Fourier 级数点收敛, 那 Fejér 和必然收敛到同一个值.

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\sin\frac{1}{2}t + \sin\frac{3}{2}t + \cdots + \sin\frac{2n-1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{1-\cos nt}{2(\sin\frac{t}{2})^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} F_n(t)\mathrm{d}t, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

# Fejér 核

$$\sigma_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} F_n(t)\mathrm{d}t, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

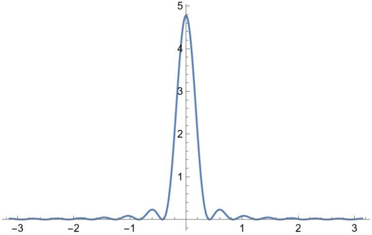
$F_n$ 为 Fejér 核, 代入 $f\equiv 1$, 得到 $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t = 1$.



# Fejér 核

$$\sigma_n(x) = \int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} F_n(t)\mathrm{d}t, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

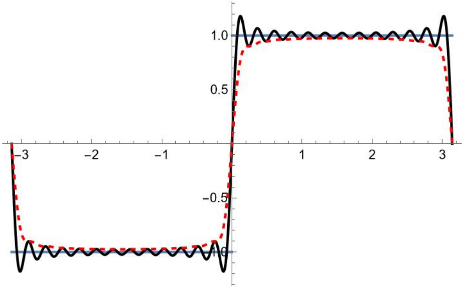
$F_n$ 为 Fejér 核, 代入 $f \equiv 1$, 得到 $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t = 1$.




Fejér 核是非负的. 将会看到它相对于 Dirichlet 核的方便之处.

**命题 (Gibbs 现象)**

设 $x_0$ 是和函数的第一类间断点. 则当 $x_n \to x_0^-$ 或 $x_0^+$ 时, 部分和的值 $S_n(x_n)$ 不会收敛于 $S(x_0)$, 并且误差不会因 $n$ 的增加而减小.



# Fejér 定理

**定理 (Fejér 定理)**

如果 $f$ 在 $x_0$ 处至多具有第一类间断, 那么 *Fejér* 和收敛于 $(f(x_0^+)+f(x_0^-))/2$.

**证.**

**定理 (Fejér 定理)**

如果 $f$ 在 $x_0$ 处至多具有第一类间断，那么 *Fejér* 和收敛于 $(f(x_0^+)+f(x_0^-))/2$.

**证.**

$$\left|\sigma_n(x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{\left|f(x_0+t)-f(x_0^+)\right|+\left|f(x-t)-f(x_0^-)\right|}{2} F_n(t)\mathrm{d}t$$

**定理 (Fejér 定理)**

如果 $f$ 在 $x_0$ 处至多具有第一类间断，那么 *Fejér* 和收敛于 $(f(x_0^+)+f(x_0^-))/2$.

**证.**

$$\left|\sigma_n(x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\right| \leq \int_0^\pi \frac{\left|f(x_0+t)-f(x_0^+)\right|+\left|f(x-t)-f(x_0^-)\right|}{2} F_n(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^\delta+\int_\delta^\pi = I_1+I_2.$$

**定理 (Fejér 定理)**

如果 $f$ 在 $x_0$ 处至多具有第一类间断，那么 *Fejér* 和收敛于 $(f(x_0^+)+f(x_0^-))/2$.

**证.**

$$\left|\sigma_n(x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\right| \le \int_0^\pi \frac{\left|f(x_0+t)-f(x_0^+)\right|+\left|f(x-t)-f(x_0^-)\right|}{2} F_n(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\delta + \int_\delta^\pi = I_1 + I_2.$$

$$I_1 \le \varepsilon \int_0^\delta F_n(t) \le \varepsilon \int_0^\pi F_n(t) = \varepsilon.$$

**定理 (Fejér 定理)**

如果 $f$ 在 $x_0$ 处至多具有第一类间断, 那么 *Fejér* 和收敛于 $(f(x_0^+)+f(x_0^-))/2$.

**证.**

$$\left|\sigma_n(x_0)-\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}\right| \leq \int_0^\pi \frac{\left|f(x_0+t)-f(x_0^+)\right|+\left|f(x-t)-f(x_0^-)\right|}{2} F_n(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^\delta+\int_\delta^\pi=I_1+I_2.$$

$$I_1 \leq \varepsilon \int_0^\delta F_n(t) \leq \varepsilon \int_0^\pi F_n(t)=\varepsilon.$$

$$I_2 \leq 2M\int_\delta^\pi F_n(t)=\frac{2M}{n\pi}\int_\delta^\pi \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \mathrm{d}t \leq \frac{2M}{n\pi}\int_\delta^\pi \frac{1}{(\sin\frac{\delta}{2})^2}\mathrm{d}t.$$

□

**推论**

如果 $f$ 的 *Fourier* 级数在某个至多第一类间断点处点收敛, 则它必收敛于左右极限的算术平均.

# Fejér 定理

**推论**

如果 $f$ 的 *Fourier* 级数在某个至多第一类间断点处点收敛, 则它必收敛于左右极限的算术平均.

**定理 (Fejér 定理)**

以 $2\pi$ 为周期的连续函数 $f$ 的 *Fejér* 和一致收敛于 $f$.

**推论**

如果 $f$ 的 *Fourier* 级数在某个至多第一类间断点处点收敛, 则它必收敛于左右极限的算术平均.

**定理 (Fejér 定理)**

以 $2\pi$ 为周期的连续函数 $f$ 的 *Fejér* 和一致收敛于 $f$.

**引理**

闭区间上的 *Riemann* 可积函数可以被连续函数 (折线函数) 平方平均逼近.

## Fejér 定理

**推论**

如果 $f$ 的 *Fourier* 级数在某个至多第一类间断点处点收敛, 则它必收敛于左右极限的算术平均.

**定理 (Fejér 定理)**

以 $2\pi$ 为周期的连续函数 $f$ 的 *Fejér* 和一致收敛于 $f$.

**引理**

闭区间上的 *Riemann* 可积函数可以被连续函数 *(*折线函数*)* 平方平均逼近.

**定理 (Weierstrass 第二逼近定理)**

以 $2\pi$ 为周期的连续函数可以被三角多项式一致逼近.

# Parseval 等式

**定理**

可积函数的 *Fourier* 级数平方平均收敛.

# Parseval 等式

## 定理

可积函数的 *Fourier* 级数平方平均收敛.

## 推论 (Parseval 等式)

对可积与绝对可积函数 $f$, 成立 *Parseval* 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**定理**

可积函数的 *Fourier* 级数平方平均收敛.

**推论 (Parseval 等式)**

对可积与绝对可积函数 $f$, 成立 *Parseval* 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

对广义绝对可积的情况, 挖掉瑕点作逼近, 参见教科书.

**命题**

对可积函数 $f$, $x \in [-\pi, \pi]$ 时成立

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t,$$

且这是一致收敛.

# Fourier 级数逐项积分的一致收敛性

## 命题

对可积函数 $f$, $x \in [-\pi, \pi]$ 时成立

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t,$$

且这是一致收敛.

## 证.

$$|\mathsf{LHS} - \mathsf{RHS}| = \left| \int_0^x (f(t) - S_n(t))\mathrm{d}t \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)| \,\mathrm{d}t$$

□

## 命题

对可积函数 $f$, $x \in [-\pi, \pi]$ 时成立

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t,$$

且这是一致收敛.

## 证.

$$\begin{aligned}|\mathrm{LHS} - \mathrm{RHS}| &= \left|\int_0^x (f(t) - S_n(t))\mathrm{d}t\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot |f(t) - S_n(t)|\,\mathrm{d}t \le \sqrt{\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)}\end{aligned}$$

$\square$

**命题**

对可积函数 $f$, $x \in [-\pi, \pi]$ 时成立

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t,$$

且这是一致收敛.

**证.**

$$\begin{aligned}
|\mathsf{LHS} - \mathsf{RHS}| &= \left| \int_0^x (f(t) - S_n(t))\mathrm{d}t \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)| \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot |f(t) - S_n(t)| \, \mathrm{d}t \le \sqrt{\left( \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{d}t \right) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)} \\
&= \sqrt{2\pi} \, \|f - S_n\| \, .
\end{aligned}$$

□

# 目录

1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

**定理 (Weierstrass 逼近定理)**

1. 闭区间上的连续函数可以被多项式一致逼近.
2. 以 $2\pi$ 为周期的连续函数可以被三角多项式一致逼近.

**定理 (Weierstrass 逼近定理)**

1. 闭区间上的连续函数可以被多项式一致逼近.
2. 以 $2\pi$ 为周期的连续函数可以被三角多项式一致逼近.

对第二逼近定理, Fejér 和已经给出了显式构造. 只需证第一逼近定理.

**引理**

闭区间上连续函数可以被折线函数一致逼近; 折线函数可以表达为有限个形如 $|x-a|$ 的函数的线性组合.

**定理 (Weierstrass 逼近定理)**

1. 闭区间上的连续函数可以被多项式一致逼近.
2. 以 $2\pi$ 为周期的连续函数可以被三角多项式一致逼近.

对第二逼近定理, Fejér 和已经给出了显式构造. 只需证第一逼近定理.

**引理**

闭区间上连续函数可以被折线函数一致逼近; 折线函数可以表达为有限个形如 $|x-a|$ 的函数的线性组合.

只需证 $|x|$ 在 $[-1,1]$ 上可以被多项式一致逼近.

**引理**

**在** $[-1, 1]$ **上定义函数列** $\{a_n(x)\}$: $a_1(x) \equiv 0$,

$$a_{n+1}(x) = a_n(x) + \frac{1}{2}[x^2 - a_n^2(x)].$$

**则** $a_n(x)$ **在** $[-1, 1]$ **上一致收敛于** $|x|$.

## 引理

在 $[-1,1]$ 上定义函数列 $\{a_n(x)\}$: $a_1(x) \equiv 0$,

$$a_{n+1}(x) = a_n(x) + \frac{1}{2}[x^2 - a_n^2(x)].$$

则 $a_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $|x|$.

## 证.

注意到这个函数列关于 $n$ 递增. 由 Dini 定理, 只需考察点收敛性, 取定 $x = a > 0$. 序列 $\{a_n\}$ 单调增, 只需证有上界, 再求得不动点即证.

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + a_n + \frac{1}{2}a^2.$$

归纳地, $x \leq a$. □

# 目录

1 速通知识点
- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

2 去年期末卷选讲

3 例题

4 理论拓展
- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

# 准备工作

考虑连续可微足够多次的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. 用自然参数表示它: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, $s$ 为弧长.

# 准备工作

考虑连续可微足够多次的曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. 用自然参数表示它: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s$ 为弧长.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}'(t) \Big/ \big\|\boldsymbol{r}'(t)\big\| \implies \|\dot{\boldsymbol{r}}\| = 1.$$

考虑连续可微足够多次的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. 用自然参数表示它: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, $s$ 为弧长.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}'(t)/\big\|\boldsymbol{r}'(t)\big\| \implies \|\dot{\boldsymbol{r}}\|=1.$$

**引理**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t)\rangle=\big\langle\boldsymbol{r}_1'(t),\boldsymbol{r}_2(t)\big\rangle+\big\langle\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2'(t)\big\rangle.$$

特别地, 对单位向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 总是正交.

# 准备工作

考虑连续可微足够多次的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. 用自然参数表示它: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, $s$ 为弧长.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}'(t)/\left\|\boldsymbol{r}'(t)\right\| \implies \|\dot{\boldsymbol{r}}\|=1.$$

## 引理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t)\rangle=\left\langle\boldsymbol{r}_1'(t),\boldsymbol{r}_2(t)\right\rangle+\left\langle\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2'(t)\right\rangle.$$

特别地, 对单位向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 总是正交.

## 引理

对单位向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'$ 的大小为 $\boldsymbol{r}$ 旋转的角速度, 方向指向 $\boldsymbol{r}$ 旋转的方向.

# 目标

1. 建立一个 (活动) 标架, 由切向量, (主) 法向量, 副法向量组成, 称作 **Frenet 标架**, 或者 **TNB 标架**.

# 目标

1. 建立一个 (活动) 标架, 由切向量, (主) 法向量, 副法向量组成, 称作 **Frenet 标架**, 或者 **TNB 标架**.
2. 定义曲线 (在一点处的) 的**曲率** (curvature), 衡量其 “不是直线” 的程度.

# 目标

1. 建立一个 (活动) 标架, 由切向量, (主) 法向量, 副法向量组成, 称作 **Frenet 标架**, 或者 **TNB 标架**.
2. 定义曲线 (在一点处的) 的**曲率** (curvature), 衡量其 “不是直线” 的程度.
3. 定义曲线 (在一点处的) 的**挠率** (torsion), 衡量其 “不是平面曲线” 的程度.

**定义切向量**

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \|\boldsymbol{T}\| = 1.$$

# Frenet 标架

**定义切向量**

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \|\boldsymbol{T}\| = 1.$$

**定义主法向量**

$$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{T}} / \left\|\dot{\boldsymbol{T}}\right\|.$$

# Frenet 标架

定义切向量

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \|\boldsymbol{T}\| = 1.$$

定义主法向量

$$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{T}} \Big/ \left\|\dot{\boldsymbol{T}}\right\|.$$

定义曲率 $\kappa = \left\|\dot{\boldsymbol{T}}\right\|$, 反映了切向量转动的速率. 定义曲率半径 $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

# Frenet 标架

定义切向量

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \|\boldsymbol{T}\| = 1.$$

定义主法向量

$$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{T}} / \left\|\dot{\boldsymbol{T}}\right\|.$$

定义曲率 $\kappa = \left\|\dot{\boldsymbol{T}}\right\|$, 反映了切向量转动的速率. 定义曲率半径 $\rho = \frac{1}{\kappa}$.
定义副法向量

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}.$$

定义切向量

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \|\boldsymbol{T}\| = 1.$$

定义主法向量

$$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{T}} \Big/ \left\|\dot{\boldsymbol{T}}\right\|.$$

定义曲率 $\kappa = \left\|\dot{\boldsymbol{T}}\right\|$, 反映了切向量转动的速率. 定义曲率半径 $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

定义副法向量

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}.$$

定义法平面 $\operatorname{span}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, 密切平面 $\operatorname{span}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N})$, 从切平面 $\operatorname{span}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B})$.

# Frenet-Serret 公式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{T}} = & & \kappa \boldsymbol{N} & \\ \dot{\boldsymbol{N}} = & -\kappa \boldsymbol{T} & & +\tau \boldsymbol{B} \\ \dot{\boldsymbol{B}} = & & -\tau \boldsymbol{N} & \end{cases}$$

# Frenet-Serret 公式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{T}} = & \kappa \boldsymbol{N} \\ \dot{\boldsymbol{N}} = -\kappa \boldsymbol{T} & & + \tau \boldsymbol{B} \\ \dot{\boldsymbol{B}} = & -\tau \boldsymbol{N} \end{cases}$$

$\kappa$ 是曲率，定义挠率 $\tau$. 则 $|\tau| = \left\| \dot{\boldsymbol{B}} \right\|$.

# 密切平面与挠率

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)=\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)\Delta s+\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)}{2}\Delta s^2+o(\Delta s^2)$$

# 密切平面与挠率

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0) &= \dot{\boldsymbol{r}}(s_0)\Delta s+\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)}{2}\Delta s^2+o(\Delta s^2)\\
&= \boldsymbol{T}\Delta s+\frac{\kappa}{2}\boldsymbol{N}\Delta s^2+o(\Delta s^2).
\end{aligned}$$

# 密切平面与挠率

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0) &= \dot{\boldsymbol{r}}(s_0)\Delta s+\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)}{2}\Delta s^2+o(\Delta s^2)\\
&= \boldsymbol{T}\Delta s+\frac{\kappa}{2}\boldsymbol{N}\Delta s^2+o(\Delta s^2).
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{B}$ 为密切平面的法向量, $\tau=\left\|\dot{\boldsymbol{B}}\right\|$ 为密切平面转动的速率.

**定理**

空间曲线为直线的充分必要条件是曲率 $\kappa \equiv 0$.

**定理**

空间曲线为平面曲线的充分必要条件是挠率 $\tau \equiv 0$.