例题

定理 (Euler 齐次函数定理)

设 $f(x,y)\in C^1$, 则 f 为 n 次齐次函数的充分必要条件是

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f=nf.$$

设 $f(x,y)\in C^k$ 为 n 次齐次函数, 则

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f=n(n-1)\cdots(n-k+1)f.$$

习题

设 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 为以原点为顶点的锥面, $F\in C^1$. 求证: Σ 与平面 Π 围成的锥体体积为 $V=\frac{1}{3}SH$, 其中 S 为平面 Π 上锥底部分的面积, H 为高.

例题

习题

计算

$$\iint_{\Sigma} xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S.$$

其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限的部分.

习题

计算
$$\int_\Gamma y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z.$$
其中 Γ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=ax$ 相交的位于 $z\geq 0$ 的部分，且从 x 轴正向看是逆时针方向.

例题

习题

1. 计算
$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y].$$
其中 $C: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.
2. 计算
$$\oiint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}.$$
其中 S 为单位球面的外侧.

例题

命题 (第一型曲面积分在正交变换下的不变性)

$$\iint_S f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})\mathrm{d}\Sigma.$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 (正交变换), $\boldsymbol{X} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{U} = (u, v, w)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, $\Sigma = \boldsymbol{A}(S)$ 是曲面 S 在正交变换 $\boldsymbol{A}$ 下的像.

习题

设 S 是平面 $x + y + z = t$ 被单位球面割下的部分. $|t| \leq \sqrt{3}$. 求证:

$$\iint_S (1 - x^2 - y^2 - z^2)\mathrm{d}S = \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2.$$

例题

习题

求证:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\pi} \sin y \mathrm{e}^{\sin y(\cos x - \sin x)} \mathrm{d}y = \sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}).$$

例题

习题

1. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, 其中
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}.$$
2. 设 $f_1\in R[a,b]$, $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$. 求证: $f_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}0$.

例题

习题

判断一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad 0 < x < +\infty.$$

习题

判断一致收敛性.

1. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}, \quad x \in (0, \pi).$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in [0, \pi].$$

例题

习题

求证: Riemann zeta 函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 不一致收敛, 但是是 C^∞ 的.

习题

设对每个 n, $u_n(x)$ 在 $x=c$ 处左连续, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(c)$ 发散. 求证: $\forall\delta>0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(c-\delta,c)$ 上不一致收敛.

例题

回忆广义积分中的命题：设无穷限积分 $\int_1^{+\infty} f$ 收敛，且 f 单调，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

习题

$\{a_n\}$ 为单调递减的正数列. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $[0,\pi]$ 一致收敛. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

注

事实上，其逆命题也成立，但证明比此题麻烦不少，参见谢惠民.

习题

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的收敛可微函数项级数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 部分和一致有界, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

例题

习题

设 $f_n \in C[a,b]$. 对任意 $x \in [a,b]$, $\{f_n(x)\}$ 关于 n 均有界. 求证: 存在 $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, $\{f_n\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致有界.

例题

习题

设函数列 $f_n(x) \to f(x), x \in U(x_0)$. 又设对每个 n, $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$, 且这个极限过程对 n 一致, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$,

$$|f_n(x) - a_n| < \varepsilon, \forall n \in \mathbf{N}.$$

求证:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbf{R}.$$

例题

习题

设函数列 $f_n(x) \to f(x), x \in [a,b]$，且 $f \in C[a,b]$. 求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是对 $[a,b]$ 中的每个收敛数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.

习题 (不讲解, 留作自己练习)

设函数列 $f_n(x) \to f(x), x \in U(x_0)$, 且每个 f_n 都在 x_0 处连续. 求证: f 在 x_0 连续的充分必要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists N \in \mathbf{N}$,

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in U(x_0, \delta).$$

例题

习题

求 $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ 的 Maclaurin 展开式与收敛域.

例题

习题 (选自 2023 年期末)

计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \sin nx \cos nx}{x}.$$