

数学分析交流活动

陈志杰

上海交通大学

2025 年 6 月 3 日

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

线面积分

定积分:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

二重积分:

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

\mathbf{R}^n 中的第一型曲线积分:

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \ell(\gamma_i).$$

\mathbf{R}^n 中的第一型曲面积分:

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \sigma(S_i).$$

把曲线积分留在一维, 把曲面积分留在二维.

曲线长度

定义 (曲线长度)

设 $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 为简单曲线, $\pi : \alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta$ 是 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割.
如果第一个等号右端为实数, 记 γ 的长度为

$$\ell(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|.$$

第二个等号需要 γ 连续, 是需要证明的定理.

第一型曲线积分

物理意义是求不均匀曲线的质量.

定义 (第一型曲线积分)

设 $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 为简单连续曲线, π 为 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点, $\gamma_i: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [t_{i-1}, t_i]$, $f(x, y, z)$ 在 γ 上有定义. 如果收敛, 记第一型曲面积分 (对弧长的积分)

$$\int_{\gamma} f(M) ds = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \ell(\gamma_i).$$

对形式记号 $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$, 以下形式运算实际上是成立的.

定理

设 $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 简单连续可微, $f(x, y, z)$ 在 γ 上连续. 则成立计算公式

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

第二型曲线积分

物理意义是求变力做功.

定义 (第二型曲线积分)

设 $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 为有向连续曲线 (参数增加方向设为正向), π 为 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点. 如果收敛, 记第二型曲面积分 (对坐标的积分)

$$\int_{\gamma} P dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i, \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

对形式记号 $dx = x'(t)dt$, 以下形式运算实际上是成立的.

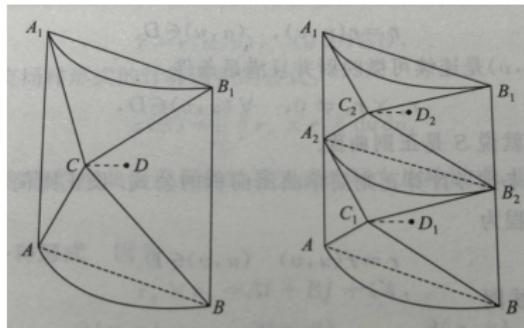
定理

设 $\gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 有向连续可微, P, Q, R 在 γ 上连续. 则成立计算公式

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt.$$

曲面面积

为什么不能用内接折面面积的上确界定义曲面面积?



定义(曲面面积)

设 S 是连续可微曲面, 在每一点有确定的切平面. 用分段连续可微的曲线将 S 分成若干小块, 记为一个分割 π , $\|\pi\| = \max_i \text{diam } S_i$. 记 $\tau(S_i)$ 为 S_i 在其上某点处的切平面的投影面积. 如果收敛, 记 S 的面积为

$$\sigma(S) = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \tau(S_i).$$

曲面面积

严格地说, 以下公式由定义直接得到.

定理

设 $S : z = z(x, y), (x, y) \in D$ 是显式给出的正则简单曲面. 则成立计算公式

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy.$$

严格地说, 以下公式可以由以上公式推出.

定理

设 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$ 是由双参数方程给出的正则简单曲面. 则成立计算公式

$$\sigma(S) = \iint_D W \, du \, dv, \quad W = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2},$$

其中 $E = \|\mathbf{r}_u\|^2, G = \|\mathbf{r}_v\|^2, F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$ 是曲面的第一基本形式的系数, 曲面的第一基本形式决定了曲面的度量性质 (内蕴性质).

第一型曲面积分

物理意义是求不均匀曲面的质量.

定义 (第一型曲面积分)

设 S 为可求面积的曲面, π 为 S 的一个分割, $\{M_i\}$ 为介点, $f(x, y, z)$ 在 S 上有定义.

如果收敛, 记第一型曲面积分

$$\iint_S f(M) dS = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \sigma(S_i).$$

对形式记号 $dS = W dudv$, 以下形式运算实际上是成立的.

定理

设 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$ 为正则简单曲面, $f(x, y, z)$ 在 S 上连续. 则成立计算公式

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) W dudv, \quad W = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

第二型曲面积分

物理意义是求通量.

定义 (第二型曲面积分)

设 S 为可定向正则曲面, \mathbf{n} 为正侧的单位法向量, $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 在 S 上连续. 记第二型曲面积分

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

注

$dy \, dz$ 中的 dy 和 dz 不能交换. 事实上, 这是微分形式记号的简写.

$$dy \, dz = dy \wedge dz = -dz \wedge dy.$$

定理

设 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$, 其余条件同上, 则成立计算公式

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D (PA + QB + RC) \, du \, dv, \quad A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

两型线面积分的关系

设 τ 为单位切向量. 两型曲线积分满足关系

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

设 n 为单位法向量. 两型曲面积分满足关系

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

Stokes 定理

注

Green, Gauss, Stokes 公式甚至 Newton-Leibniz 公式都可以称作 Stokes 定理. 其背后是关于流形与微分形式的一个很美的定理, 广义 Stokes 定理.

Green, Gauss, Stokes 公式本身参见教科书.

Stokes 定理的很大用处之一是在参数化复杂时, 将讨厌的第二型线面积分化简.

例

计算

$$\oint_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz.$$

其中 C 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 与 $x^2 + y^2 = 2rx$ 的交线位于 $z > 0$ 的部分, $(0 < r < R)$, C 的定向使诱导出的球面定向为外侧.

可以利用 Stokes 定理计算面积/体积.

利用 Stokes 定理计算面积/体积

例

计算双纽线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

所围区域的面积.

例

计算曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$$

所围区域的面积.

曲线积分和路径无关的条件

定理 (曲线积分和路径无关的条件)

设向量值函数 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 在区域 $\Omega \in \mathbf{R}^3$ 上连续可微. 以下等价.

- ① 对任意环路 C ,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

- ② 以下曲线积分与路径无关.

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- ③ 微分形式 $Pdx + Qdy + Rdz$ 在 Ω 中有原函数 U , 即使得 $dU = Pdx + Qdy + Rdz$.

- ④ (当且仅当 Ω 是单连通区域时成立) 在 Ω 中 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, 即

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

\mathbf{R}^2 的情况也类似, 只是需要恰当地定义向量的 (形式) 外积.

(拓展) \mathbf{R}^n 中 n 个向量的外积

我们希望外积 $\delta : (\mathbf{R}^n)^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是 n -线性形式, 且满足性质

$$\delta(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

$$\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

线性代数中, 有结论 $\dim V_{\text{alt}}^{(\dim V)} = 1$. 于是外积 δ 被唯一确定为

$$\delta(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}.$$

由性质唯一确定对象, 这是范畴论的思想. 可以用类似的思想 (配合抽象代数中生成元的思想) 定义方阵或线性算子的迹与行列式, 张量积也是类似动机定义的.

(Digression) Trace and determinant of a matrix or linear operator

Both propositions appear as exercises in Sheldon Axler's nice linear algebra textbook *Linear Algebra Done Right*. Click the book's name and you will be directed to the book's homepage.

Proposition

The trace is the only linear functional $\tau : \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbf{F}$ such that

$$\tau(ST) = \tau(TS)$$

for all $S, T \in \mathcal{L}(V)$ and $\tau(I) = \dim V$.

Proof Idea.

Define $P_{j,k} \in \mathcal{L}(V)$ by $P_{j,k}(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_k v_j$, where v_1, \dots, v_n is a basis of V .

Prove that $\tau(P_{j,k}) = 1$ if $j = k$ and 0 otherwise. □

Proposition

$\delta : \mathbf{C}^{n,n} \rightarrow \mathbf{C}$ is a function such that

$$\delta(AB) = \delta(A) \cdot \delta(B)$$

for all $A, B \in \mathbf{C}^{n,n}$ and $\delta(A)$ equals the product of the diagonal entries of A for each diagonal matrix $A \in \mathbf{C}^{n,n}$. Then

$$\delta(A) = \det A$$

for all $A \in \mathbf{C}^{n,n}$.

Proof idea.

Use the Gaussian elimination (consider elementary matrices) and diagonalization. □

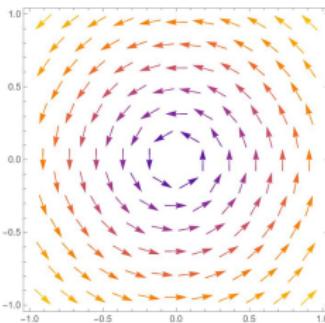
散度

设 \mathbf{F} 是连续可微向量场. 考虑 $B_{M_0}(r) \subseteq \mathbf{R}^3$ 中的平均泉源密度

$$\frac{1}{|B_{M_0}(r)|} \iint_{\partial B_{M_0}(r)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{|B_{M_0}(r)|} \iiint_{B_{M_0}(r)} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

令 $r \rightarrow 0$, 用积分第一中值定理即得到 M_0 点处的泉源密度, 定义散度 $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$.
它是向量场诱导出的数量场, 反映了一个点是源 (source) 还是汇 (sink).

旋度



设 \mathbf{F} 是连续可微向量场, \mathbf{n} 是单位向量. 以 M_0 为心, ε 为半径作垂直于 \mathbf{n} 的小圆盘 D_ε . 考虑如下积分, 它反映了“沿一个方向的旋转程度”.

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} \oint_{\partial D_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds = \frac{1}{|D_\varepsilon|} \iint_{D_\varepsilon} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 用积分第一中值定理即得到反映向量场沿一个方向旋转程度的量, 定义方向旋量 $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$.

定义旋度 $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$, 其方向表示旋转最强的方向, 大小表示旋转程度. 它是向量场诱导出的向量场.

场论公式举例

线性:

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g.$$

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F} + \beta \nabla \cdot \mathbf{G}.$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \times \mathbf{F} + \beta \nabla \times \mathbf{G}.$$

乘积:

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g).$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}.$$

$$\nabla \times (f \mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}.$$

复合:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

总结

求曲线积分的常用方法:

- ① 利用 Green 或 Stokes 公式 (或者利用曲线积分与路径无关, 选择计算简便的路径), 必要时添加辅助线, 以及挖洞.
- ② 利用两型曲线积分的关系互相转化, 化简式子.
- ③ 参数化 (显式求解; 极坐标/球坐标/柱坐标变换; \mathbf{R}^3 中还可以考虑先消去 z 做出向 xOy 的投影曲线 $f(x, y) = 0$, 再求 $f(x, y) = 0$ 的参数化, 代入 z .).

求曲面积分的常用方法:

- ① 利用 Gauss 公式, 必要时添加辅助面, 以及挖洞.
- ② 利用 Stokes 公式.
- ③ 利用两型曲面积分的关系互相转化, 化简式子.
- ④ 参数化.

添加辅助线/辅助面

例

C 为 $2x = \pi y^2$ 从 $(0, 0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的弧段. 计算

$$\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy.$$

例

C 为右半柱面 $|x| + |y| = a(y > 0)$ 与平面 $y = z$ 的交线上从 $(-a, 0, 0)$ 到 $(a, 0, 0)$ 的一段 ($a > 0$). 计算

$$\int_C e^{x+z} \{[(x+1)y^2 + 1]dx + 2xydy + xy^2dz\}.$$

例

Σ 为曲线 $z = e^y (0 \leq y \leq a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面的下侧. 计算

$$\iint_{\Sigma} 4xzdydz - 2yzdzdx + (1 - z^2)dxdy.$$

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

一致收敛性

当我们研究函数列（函数项级数）时，我们希望用性质已知的简单函数来窥测性质未知的，新的函数的分析性质。

我们希望通项的性质可以被极限函数（和函数）所继承，但是极限运算一般来说不能换序，一致收敛性是能够换序的充分条件。

定义（一致收敛性）

设函数列 $f_n(x) \rightarrow f(x), x \in E$. 称其一致收敛，如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N,$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

极限换序的关键在于**三分法**：

$$|f(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x_0) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq 3\varepsilon.$$

一致收敛函数列的性质参见教科书（极限，连续性，逐项可微性，逐项可积性，Dini 定理），本质都是极限换序。考虑连续性，可微性等**局部**性质时，可以退而求内闭一致收敛性。

三分法

定理

设函数列 $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$, $x \in E'$. 且对每个 n , $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$. 则成立

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

证.

Step 1. 证明 $\{a_n\}$ 收敛. 证得后设收敛于 a .

法 1. 在 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ 中令 $x \rightarrow x_0$, 得到 $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

法 2. 在下式中选 N 控制第二项. 对每个取定的 n, m 取 $x = x(n, m)$ 控制第一, 第三项.

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m|.$$

Step 2. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|.$$

在上式中先选定 n 控制第一, 第三项. 再对这个 n 取 δ 控制第二项.



三分法

定理

设函数列 $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$, $x \in E'$. 且对每个 n , $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$. 则成立

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

证 (行不通).

Step 1. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 收敛. 证得后设收敛于 a .

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_2) - f(x_2)|.$$

在上式中先选定 n 控制第一, 第三项. 再对这个 n 取 δ 控制第二项.

Step 2. 证明 $\{a_n\}$ 收敛于 a .

$$|a_n - a| \leq |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - a|.$$

没有对 n 一致的条件, 第一项无法控制.



一致收敛性的判别法

定理

以下等价.

- ① 函数列 $f_n \xrightarrow{E} f$.
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E |f_n(x) - f(x)| = 0$.
- ③ 不存在 $\{x_n\} \in E$ 使得 $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Cauchy 一致收敛准则, Weierstrass 判别法, Dirichlet 与 Abel 判别法, Dini 定理参见教科书.

- Cauchy 一致收敛准则总是有效, 但需要分析.
 - Weierstrass 判别法很弱 (只能针对绝对一致收敛级数, 且不总有效), 但常常有奇效, 需要在练习中掌握.
 - 看到保号级数应想到 Dini 定理, Dini 定理能处理的题目一般其它办法都处理不了.
- 不一致收敛的判别方法较少. 除了利用一致收敛函数列的性质的逆否命题外, 大多使用 Cauchy 一致收敛准则.

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数**
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

定理 (Cauchy-Hadamard 公式)

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间是 $\langle -R, R \rangle$, 收敛半径 R 由 Cauchy-Hadamard 公式给出.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

幂级数在收敛域的任意闭子区间上一致收敛. 于是在收敛域上连续, 在收敛域的任意闭子区间上可以逐项积分, 在收敛域内部 (逐项求导得到的幂级数具有同样的收敛半径, 但可能有不同的收敛域) 可以任意次逐项微分.

通过四则运算与微积分运算, 可以求得一些幂级数的和函数的显式表达式.

函数的幂级数展开

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 逐项求导 k 次后, 发现其在 $x = 0$ 处的 k 阶导数为 $k!a_k$, 于是只需考虑 Taylor 级数 (唯一性定理).
- 但 Taylor 级数是否有正收敛半径, 和函数是否是原来的函数本身, 都需要额外分析. (反例参见教科书.) 充要条件是 Taylor 公式的余项趋于 0.
- 一般使用间接展开法, 其理论基础为唯一性定理.
- 可以用幂级数求一些数项级数的和.

初等函数的幂级数展开

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

初等函数的幂级数展开

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

正交函数系, Euler-Fourier 公式, Bessel 不等式

设 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是 $R[\alpha, \beta]$ 上关于“内积”

$$\langle f, g \rangle = \rho \int_{\alpha}^{\beta} fg$$

的标准正交函数系. 如果展式 $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ 成立, 且可以逐项积分, 那么一定成立 $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$, 称作 Euler-Fourier 公式.

它具有最佳逼近性质:

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k \right\| \geq \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|,$$

等号成立当且仅当 $b_k = c_k, \forall 0 \leq k \leq n$.

定理 (Bessel 不等式)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle^2 \leq \|f\|^2. \text{ 这个正项级数收敛.}$$

二者的证明都是很基本的线性代数知识 (内积空间与投影), 略去.

Fourier 级数

$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots\}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上可积与绝对可积的函数族上关于 $\rho = \frac{1}{\pi}$ 内积的标准正交函数系. Euler-Fourier 公式参见教科书. Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

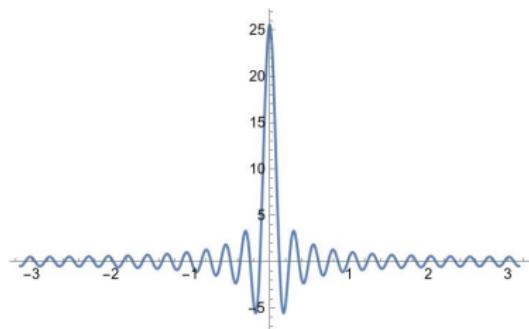
将会看到, 这其实是一个等式, 称作 Parseval 等式, 或者封闭性方程.

Fourier 级数在一定 (只需相当弱的) 条件下可以做逐项求导和逐项积分的**形式运算**, 参见教科书.

点收敛性

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt,$$

其中 $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ 为 Dirichlet 核.



Dirichlet 核的性质使得 Riemann 局部化定理成立. Dini-Lipschitz 判别法与 Dirichlet 判别法参见教科书, 它们(与它们的推论)所需的条件一般都能满足.

平方平均收敛性

将于拓展部分用不同于教科书的方式讲解. 对 Fejér 和的分析将导出 (Riemann 可积函数的) Fourier 级数的平方平均收敛性, Parseval 等式, 逐项积分的一致收敛性, Weierstrass 第二逼近定理.

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

参考答案

① $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}; -\frac{\pi}{4}.$

② 0.

③ $\frac{1}{101}.$

④ $\frac{13}{9}\pi R^4.$

⑤ $-\frac{\pi}{3}.$

选择题: ACDBD

⑪ $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x), x \in (-1, 1).$

⑫ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}, x \in [-1, 1].$

⑬ $-\frac{1}{3}.$

⑭ $-\pi.$

⑮ (1) $g(x) = 0, x \in [0, +\infty).$ (2) $p \geq 1$

时否, $p < 1$ 时是.

⑯ (1)

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, x \in (-\pi, \pi);$$

$$\begin{aligned} x^3 &\sim \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12(-1)^n}{n^3} - \frac{2\pi^2(-1)^n}{n} \right) \sin nx, x \in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

(2) $\frac{\pi^3}{32}.$

⑰ (2) $\frac{\pi}{6}.$

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

例题

定理 (Euler 齐次函数定理)

设 $f(x, y) \in C^1$, 则 f 为 n 次齐次函数的充分必要条件是

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = nf(x, y).$$

设 $f(x, y) \in C^k$ 为 n 次齐次函数, 则

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x, y) = n(n-1)\cdots(n-k+1)f(x, y).$$

习题

设 $\Sigma : F(x, y, z) = 0$ 为以原点为顶点的锥面, $F \in C^1$. 求证: Σ 与平面 Π 围成的锥体体积为 $V = \frac{1}{3}SH$, 其中 S 为平面 Π 上锥底部分的面积, H 为高.

例题

习题

计算

$$\iint_{\Sigma} xyz(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS.$$

其中 Σ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在第一卦限的部分.

例题

习题

计算

$$\int_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz.$$

其中 Γ 是 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x^2 + y^2 = ax$ 相交的位于 $z \geq 0$ 的部分, 且从 x 轴正向看是逆时针方向.

例题

习题

① 计算

$$\oint_C \frac{e^y}{x^2 + y^2} [(x \sin x + y \cos x) dx + (y \sin x - x \cos x) dy].$$

其中 $C : x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向.

② 计算

$$\iint_S \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{3/2}}.$$

其中 S 为单位球面的外侧.

例题

命题 (第一型曲面积分在正交变换下的不变性)

$$\iint_S f(\mathbf{X}) dS = \iint_{\Sigma} f(\mathbf{A}^T \mathbf{U}) d\Sigma.$$

其中 \mathbf{A} 为正交矩阵 (正交变换), $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$, $\mathbf{U} = (u, v, w)^T = \mathbf{A}\mathbf{X}$, $\Sigma = \mathbf{A}(S)$ 是曲面 S 在正交变换 A 下的像.

习题

设 S 是平面 $x + y + z = t$ 被单位球面割下的部分. $|t| \leq \sqrt{3}$. 求证:

$$\iint_S (1 - x^2 - y^2 - z^2) dS = \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2.$$

例题

习题

求证:

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\pi} \sin y e^{\sin y(\cos x - \sin x)} dy = \sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}).$$

例题

习题

- ① 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 其中

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}.$$

- ② 设 $f_1 \in R[a, b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$. 求证: $f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} 0$.

例题

习题

判断一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad 0 < x < +\infty.$$

例题

习题

判断一致收敛性.

①

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}, \quad x \in (0, \pi).$$

②

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in [0, \pi].$$

例题

习题

求证: Riemann zeta 函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 不一致收敛, 但是是 C^∞ 的.

习题

设对每个 n , $u_n(x)$ 在 $x = c$ 处左连续, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(c)$ 发散. 求证: $\forall \delta > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(c - \delta, c)$ 上不一致收敛.

例题

回忆广义积分中的命题: 设无穷限积分 $\int_1^{+\infty} f$ 收敛, 且 f 单调, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.

习题

$\{a_n\}$ 为单调递减的正数列. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $[0, \pi]$ 一致收敛. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

注

事实上, 其逆命题也成立, 但证明比此题麻烦不少, 参见谢惠民.

例题

习题

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为 $[a, b]$ 上的收敛可微函数项级数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 部分和一致有界, 求证:
 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

例题

习题

设 $f_n \in C[a, b]$. 对任意 $x \in [a, b]$, $\{f_n(x)\}$ 关于 n 均有界. 求证: 存在 $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, $\{f_n\}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 一致有界.

例题

习题

设函数列 $f_n(x) \rightarrow f(x), x \in U(x_0)$. 又设对每个 n , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$, 且这个极限过程**对 n 一致**, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$,

$$|f_n(x) - a_n| < \varepsilon, \forall n \in \mathbf{N}.$$

求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbf{R}.$$

例题

习题

设函数列 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in [a, b]$, 且 $f \in C[a, b]$. 求证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛的充分必要条件是对 $[a, b]$ 中的每个收敛数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.

例题

习题 (不讲解, 留作自己练习)

设函数列 $f_n(x) \rightarrow f(x), x \in U(x_0)$, 且每个 f_n 都在 x_0 处连续. 求证: f 在 x_0 连续的充分必要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in U(x_0, \delta).$$

例题

习题

求 $f(x) = e^x \sin x$ 的 Maclaurin 展开式与收敛域.

例题

习题 (选自 2023 年期末)

计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^x \sin nx \cos nx}{x} dx.$$

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

Fejér 和, Fejér 积分

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

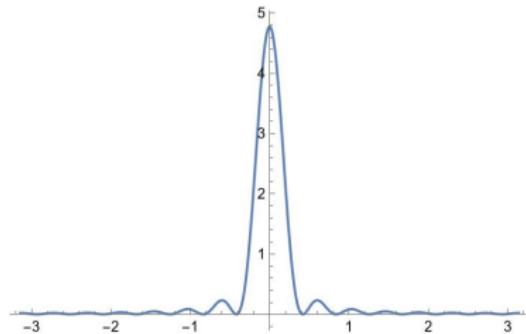
定义 Fejér 和为 Fourier 级数前 n 个部分和的算术平均. 如果 Fourier 级数点收敛, 那 Fejér 和必然收敛到同一个值.

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \\&= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{3}{2}t + \cdots + \sin \frac{2n-1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} dt \\&= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{1 - \cos nt}{2(\sin \frac{t}{2})^2} dt \\&= \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{1}{n\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \\&= \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} F_n(t) dt, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.\end{aligned}$$

Fejér 核

$$\sigma_n(x) = \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} F_n(t) dt, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2.$$

F_n 为 Fejér 核, 代入 $f \equiv 1$, 得到 $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$.

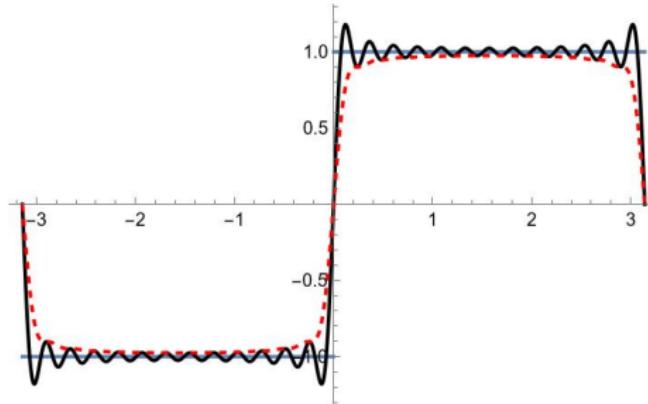


Fejér 核是非负的. 将会看到它相对于 Dirichlet 核的方便之处.

Gibbs 现象

命题 (Gibbs 现象)

设 x_0 是和函数的第一类间断点. 则当 $x_n \rightarrow x_0^-$ 或 x_n^+ 时, 部分和的值 $S_n(x_n)$ 不会收敛于 $S(x_0)$, 并且误差不会因 n 的增加而减小.



Fejér 定理

定理 (Fejér 定理)

如果 f 在 x_0 处至多具有第一类间断, 那么 Fejér 和收敛于 $(f(x_0^+) + f(x_0^-))/2$.

证.

$$\begin{aligned} \left| \sigma_n(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right| &\leq \int_0^\pi \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0^+)| + |f(x_0 - t) - f(x_0^-)|}{2} F_n(t) dt \\ &= \int_0^\delta + \int_\delta^\pi = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

$$I_1 \leq \varepsilon \int_0^\delta F_n(t) dt \leq \varepsilon \int_0^\pi F_n(t) dt = \varepsilon.$$

$$I_2 \leq 2M \int_\delta^\pi F_n(t) dt = \frac{2M}{n\pi} \int_\delta^\pi \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \leq \frac{2M}{n\pi} \int_\delta^\pi \frac{1}{(\sin \frac{\delta}{2})^2} dt.$$

□

推论

如果 f 的 Fourier 级数在某个至多第一类间断点处点收敛, 则它必收敛于左右极限的算术平均.

定理 (Fejér 定理)

以 2π 为周期的连续函数 f 的 Fejér 和一致收敛于 f .

引理

闭区间上的 Riemann 可积函数可以被连续函数 (折线函数) 平方平均逼近.

定理 (Weierstrass 第二逼近定理)

以 2π 为周期的连续函数可以被三角多项式一致逼近.

定理

可积函数的 Fourier 级数平方平均收敛.

推论 (Parseval 等式)

对可积与绝对可积函数 f , 成立 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

对广义绝对可积的情况, 挖掉瑕点作逼近, 参见教科书.

Fourier 级数逐项积分的一致收敛性

命题

对可积函数 $f, x \in [-\pi, \pi]$ 时成立

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt,$$

且这是**一致收敛**.

证.

$$\begin{aligned} |\text{LHS} - \text{RHS}| &= \left| \int_0^x (f(t) - S_n(t)) dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)| dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot |f(t) - S_n(t)| dt \leq \sqrt{\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dt \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt \right)} \\ &= \sqrt{2\pi} \|f - S_n\|. \end{aligned}$$

□

目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

定理 (Weierstrass 逼近定理)

- ① 闭区间上的连续函数可以被多项式一致逼近.
- ② 以 2π 为周期的连续函数可以被三角多项式一致逼近.

对第二逼近定理, Fejér 和已经给出了显式构造. 只需证第一逼近定理.

引理

闭区间上连续函数可以被折线函数一致逼近; 折线函数可以表达为有限个形如 $|x - a|$ 的函数的线性组合.

只需证 $|x|$ 在 $[-1, 1]$ 上可以被多项式一致逼近.

Weierstrass 第一逼近定理

引理

在 $[-1, 1]$ 上定义函数列 $\{a_n(x)\}$: $a_1(x) \equiv 0$,

$$a_{n+1}(x) = a_n(x) + \frac{1}{2}[x^2 - a_n^2(x)].$$

则 $a_n(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛于 $|x|$.

证.

注意到这个函数列关于 n 递增. 由 Dini 定理, 只需考察点收敛性, 取定 $x = a > 0$. 序列 $\{a_n\}$ 单调增, 只需证有上界, 再求得不动点即证.

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^2 + a_n + \frac{1}{2}a^2.$$

归纳地, $x \leq a$.



目录

① 速通知识点

- 线面积分
- Stokes 定理与场论
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier 级数

② 去年期末卷选讲

③ 例题

④ 理论拓展

- Fourier 级数的 Fejér 和
- Weierstrass 逼近定理
- Frenet 标架

准备工作

考虑连续可微足够多次的曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. 用自然参数表示它: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s 为弧长.

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'(t) / \|\mathbf{r}'(t)\| \implies \|\dot{\mathbf{r}}\| = 1.$$

引理

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t) \rangle = \langle \mathbf{r}'_1(t), \mathbf{r}_2(t) \rangle + \langle \mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}'_2(t) \rangle.$$

特别地, 对单位向量 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, \mathbf{r} 与 \mathbf{r}' 总是正交.

引理

对单位向量 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, \mathbf{r}' 的大小为 \mathbf{r} 旋转的角速度, 方向指向 \mathbf{r} 旋转的方向.

目标

- ① 建立一个 (活动) 标架, 由切向量, (主) 法向量, 副法向量组成, 称作 Frenet 标架, 或者 TNB 标架.
- ② 定义曲线 (在一点处的) 的曲率 (curvature), 衡量其 “不是直线” 的程度.
- ③ 定义曲线 (在一点处的) 的挠率 (torsion), 衡量其 “不是平面曲线” 的程度.

Frenet 标架

定义切向量

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \|\mathbf{T}\| = 1.$$

定义主法向量

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{T}} / \|\dot{\mathbf{T}}\|.$$

定义曲率 $\kappa = \|\dot{\mathbf{T}}\|$, 反映了切向量转动的速率. 定义曲率半径 $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

定义副法向量

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}.$$

定义法平面 $\text{span}(\mathbf{N}, \mathbf{B})$, 密切平面 $\text{span}(\mathbf{T}, \mathbf{N})$, 从切平面 $\text{span}(\mathbf{T}, \mathbf{B})$.

Frenet-Serret 公式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \kappa \mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \\ \dot{\mathbf{B}} = -\tau \mathbf{N} \end{cases}$$

κ 是曲率, 定义挠率 τ . 则 $|\tau| = \|\dot{\mathbf{B}}\|$.

密切平面与挠率

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}(s_0) &= \dot{\mathbf{r}}(s_0)\Delta s + \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s_0)}{2}\Delta s^2 + o(\Delta s^2) \\ &= \mathbf{T}\Delta s + \frac{\kappa}{2}\mathbf{N}\Delta s^2 + o(\Delta s^2).\end{aligned}$$

\mathbf{B} 为密切平面的法向量, $\tau = \|\dot{\mathbf{B}}\|$ 为密切平面转动的速率.

定理

空间曲线为直线的充分必要条件是曲率 $\kappa \equiv 0$.

定理

空间曲线为平面曲线的充分必要条件是挠率 $\tau \equiv 0$.