数学分析习题课讲义

一元微积分学笔记

陈志杰

2025 年 1 月 2 日

目录

1 实数系的基本定理

实数系基本定理的使用有其显著动机, 在观察题干时应当向这方面思考, 例如：

(1) Lebesgue 方法将局部性质推广至整体．它聚焦于“函数在什么地方失去了这个整体性质”, 并通过研究该处的局部性质引出矛盾．

(2) 闭区间套定理将整体性质继承至局部．

(3) 有限开覆盖定理将局部性质推广至整体．

习题 1.1 设 f 在开区间 I 上连续．且于每一点 $x \in I$ 处取到极值．求证：f 为 I 上的常值函数．

证 用反证法．假设 $f(a_0) < f(b_0)$．$\exists \xi \in [a_0, b_0]$, $f(\xi) = (f(a_0) + f(b_0))/2$．如果 $\xi \le (a_0 + b_0)/2$, 取 $\eta \in [a_0, \xi]$, $f(\eta) = (f(a_0) + f(\xi))/2$, 令 $[a_1, b_1] = [\eta, \xi] \subseteq [a_0, b_0]$．其余情况同理．重复此过程, 得到一列闭区间套收缩至 ξ, 可以证明 ξ 不是极值点, 矛盾． □

习题 1.2 设 f 在 $[0,1]$ 上满足以下条件：(1) $f(0) > 0$, $f(1) < 0$; (2) $\exists g \in C[0,1]$, 使得 $f + g$ 在 $[0,1]$ 上单调递增．求证：f 在 $[0,1]$ 中有零点．

证 设 $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) > 0\}$, $\sup E = b \in [0,1]$．$f(b) \neq 0$ 必然导致 f 从正值突跃入负值时, 因 $f + g$ 单调递增而违背 g 的连续性． □

定理 1.1 (加强形式的有限开覆盖定理) *$\{\mathcal{O}_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则 $\exists \delta > 0$ (称作开覆盖的 Lebesgue 数), 使得 $\forall x', x'' \in [a,b]$, 只要 $x' - x'' < \delta$, 就存在开覆盖中的一个开区间, 它覆盖 x', x''.*

引理 1.1 *每个数列都有单调子列．*

推论 1.1 *一个数列有收敛子列的充分必要条件是它不是无穷大量．*

以下压缩映射原理是处理迭代数列的实用工具．

定义 1.1 称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 如果 $f([a,b]) \subseteq [a,b]$, 且 $\exists 0 < k < 1$, 使得 $\forall x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$．

命题 1.1 (压缩映射原理) *设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 则：*

(1) *f 在 $[a,b]$ 中存在唯一不动点 ξ.*

(2) *由任何初始值 $a_0 \in [a,b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ.*

(3) *成立事后估计 $|a_n - \xi| \le \dfrac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}|$ 和先验估计 $|a_n - \xi| \le \dfrac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$.*

证 $|a_{n+p} - a_n| \le k|a_{n+p-1} - a_{n-1}| \le \cdots \le k^n|a_p - a_0| \le k^n(b-a)$．由 Cauchy 收敛准则, $\{a_n\}$ 收敛．记其极限为 $\xi \in [a,b]$．由 $|f(a_n) - f(\xi)| \le k|a_n - \xi|$, $f(a_n)$ 收敛于 $f(\xi)$．代入 $a_{n+1} = f(a_n)$, 得到 $f(\xi) = \xi$．不动点唯一性与估计式易证． □

2 数列的上下极限

定理 2.1 (上下极限的等价定义) 仅叙述上极限有关性质, 下极限同理.

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 为 $\{x_n\}$ 的最大极限点.

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n}\{x_k\}$.

(3) $b\in\mathbb{R}$ 是 $\{x_n\}$ 的上极限的充分必要条件是: $\forall\varepsilon>0$, $U(b,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 且 $\exists N\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n>N$, $x_n<b+\varepsilon$.

以下结论是使用上下极限工具的主要手段. 假设以下所有四则运算 (在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中) 均有意义.

定理 2.2

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leq \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leq \begin{cases} \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \end{cases} \leq \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

特别地, 当 $\{y_n\}$ 收敛时,

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

习题 2.1 $y_n = x_n + 2x_{n+1}$. 已知 $\{y_n\}$ 收敛, 求证: $\{x_n\}$ 也收敛.

证 先证明 $\{x_n\}$ 有界. 设 $|y_n|<M$ 且 $|x_1|<M$. 由 $|x_{n+1}| = \dfrac{1}{2}|y_n - x_n| \leq \dfrac{1}{2}|y_n| + \dfrac{1}{2}|x_n|$, 归纳地, $|x_n|<M$.

对 $2x_{n+1} = y_n - x_n$ 左右两边同时取上下极限, 解得 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 即 $\{x_n\}$ 收敛. □

以下两题体现出: 上下极限是一个定数, 应当充分利用它和已知数的大小关系. 例如假设 $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = b < 1$ 时, 应当考虑 b 和 1 的空隙; 另一题中的 l 也是如此.

习题 2.2 设 $\{x_n\}$ 为正数数列, 求证: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right) \geq 1$.

习题 2.3 设 $\{a_n\}$ 为正数数列. 求证: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$ 的充分必要条件是 $\forall l>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{l^n} = 0$.

以下两题中均涉及两个极限过程. 所以必须先取定一个极限过程的 $\varepsilon - N$, 然后在此基础上分析第二个极限过程.

习题 2.4 设正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+m} \leq a_n a_m$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n} = \inf_{n\geq 1}\left\{\frac{\ln a_n}{n}\right\}.$$

证 设所求证等式右端为 α. 观察条件, 条件对 $\{a_n\}$ 的增速作出了限制. 为了利用条件控制 $\{a_n\}$, 想到取定 $N\in\mathbb{N}$, 用 N 的整数倍估计 n. 设 $n = mN + r$, 其中 $m,r\in\mathbb{N}$, $r<N$. 于是 k 只有有限个取值, 可以在 $n\to\infty$ 的过程中被控制. 变形得

$$\frac{\ln a_n}{n} \leq \frac{mN}{n}\frac{\ln a_N}{N} + \frac{\ln a_k}{n}.$$

比较所求证等式与上式, 自然想到 $\forall \varepsilon > 0$, 取

$$\alpha \le \frac{\ln a_N}{N} < \alpha + \varepsilon.$$

令 $n \to \infty$, 在不等式两边取上极限.

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} \le \alpha + \varepsilon.$$

结合 $\alpha \le \varliminf_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{n}$, 得证. □

习题 2.5 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n + x_m - 1 \le x_{n+m} \le x_n + x_m + 1$. 求证: $\left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$ 收敛.

3 连续函数

定理 3.1 有界开区间 (a,b) 上的连续函数 f 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是存在两个有限的单侧极限 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$. 当 (a,b) 是无界区间时, 充分性依然成立.

注 对可导函数来说, 以下条件依次减弱. Lipshitz 条件 $=$ 导数有界 $\ge$ 一致连续.

以下两题的证明体现了 "证明满足某性质的点有至多可数个" 的常用方法.

命题 3.1 单调函数的间断点至多为可数个.

证 易证对单调递增函数 f 的间断点 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1^-) < f(x_1^+) \le f(x_2^-) < f(x_2^+)$. 于是 f 的每个间断点 x 都可以用不同的有理数 $q \in \big(f(x^-), f(x^+)\big)$ 标记. 由于 $\mathbb{Q}$ 是可数集, 间断点个数也至多可数. □

习题 3.1 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有极限. 求证:

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $[a,b]$ 中使得 $|\lim\limits_{t\to x} f(t) - f(x)| > \varepsilon$ 的点至多有有限个.

(2) f 在 $[a,b]$ 中至多有可数个间断点.

证 对任意取定的 $\varepsilon > 0, \forall x \in [a,b], \exists \delta_x$, 使得 $\forall x - \delta_x < y < x + \delta_x$, $|f(y) - \lim\limits_{t\to x} f(t)| \le \varepsilon$. 由保号性, $|\lim\limits_{t\to y} f(t) - \lim\limits_{t\to x} f(t)| \le \varepsilon$. 于是 $\forall y \in \mathring{U}(x,\delta_x)$, $|\lim\limits_{t\to y} f(t) - f(y)| \le 2\varepsilon$. 即每个 $U(x,\delta_x)$ 中至多有一个满足要求的点. 由有限开覆盖定理, 这样的点至多有有限个.

对 (2), 取 $\varepsilon_n = 1/n$, 可数个有限集的并是可数集. □

注 证明满足某性质的点有至多可数个的常用方法:

(1) 用可数集 (例如 $\mathbb{Q}$) 唯一标记它.

(2) 将其表示为可数个可数集的并 (例如 $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_{\frac{1}{n}}$). 这种方法对零测集的证明也适用.

4 一元微分学

4.1 导数与微分

命题 4.1 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ 在 0 处的任意阶导数为 0. 定义 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & ,x>0\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$, 则 $h(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)+g(1-x)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上无限次可导的函数, 且 $x\leq 0$ 时 $h\equiv 0$, $x\geq 1$ 时 $h\equiv 1$.

习题 4.1 设 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 其中

$$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right).$$

解 注意到每一项的自变量都离 0 很近, 于是用无穷小增量公式, 答案为 $\dfrac{1}{2}f'(0)$. □

习题 4.2 求数列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]$.

习题 4.3 设 $f(x)=x^n\ln x$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(\dfrac{1}{n})$.

解 由 Leibniz 公式,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=n!\ln x+n!\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\
&=n!\ln x+n!\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1(-t)^{k-1}\mathrm{d}t\\
&=n!\ln x+n!\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-t)^{k-1}\mathrm{d}t\\
&=n!\ln x+n!\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}\mathrm{d}t\\
&=n!\ln x+n!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(\dfrac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$. □

习题 4.4 计算 $f(x)=\arcsin x$ 的 Maclaurin 公式直到 x^5 项.

解 本题有多种出于不同思路的解法.

(1) 求导一次, 用广义二项式定理展开.

(2) 利用 f 是奇函数, 对各项待定系数, 利用 $\sin(\arcsin x)\equiv x$ 与 $\sin x$ 的 Maclaurin 公式计算. □

4.2 微分中值定理与 Taylor 公式

以下几题使用待定常数法构造 Rolle 定理的辅助函数．核心是将区间一端 b 替换为变元, 使辅助函数在 a, b, 任意选定的内点 x 处具有良好性质, 例如函数值为 0, 一阶导数值为 0.

习题 4.5

(1) 设 f 在 $[a,b]$ 三阶可导, 且有 $f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 求证：$\forall x\in[a,b]$, $\exists\xi\in(a,b)$,

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 三阶可导, 求证：$\exists\xi\in(a,b)$,

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 二阶可导, 求证：$\forall c\in[a,b]$, $\exists\xi\in(a,b)$,

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

证 以下均设所求证的 ξ 的导数值为 λ．对 g 反复使用 Rolle 定理即得结论．

(1)

$$g(t)=f(t)-\frac{\lambda}{6}(t-a)^2(t-b).$$

(2)

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)\big[f'(a)+f'(x)\big]+\frac{\lambda}{12}(x-a)^3.$$

(3)

$$g(x)=f(a)(x-b)+f(b)(a-x)+f(x)(b-a)-\frac{\lambda}{2}(a-b)(b-x)(x-a).$$ □

下一题的核心步骤是代数技巧：如果 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, $0<b<c$, 则 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}<\frac{c-a}{d-b}$.

习题 4.6 设 $f\in C[a,b]$, $f'(a)=f'(b)$．求证：$\exists\xi\in(a,b)$,

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

证 即证辅助函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 有零点．反证假设其没有零点, 由 Darboux 定理, 不妨设 g 严格单调递增．$\forall x\in(a,b)$,

$$f'(a)<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

令 $x\to b$, 即得矛盾． □

注 辅助函数往往唯一, 只要找出即可．如果没有发现显然的方法使用 Rolle 定理, 应毫不犹豫地用 Darboux 定理反证．

习题 4.7 设 f 在 (a,b) 上任意阶可导, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$, $|f(x)| \leq M$. 求证：$\forall x \in (a,b)$, $r > 0$, $x+r \in (a,b)$, 成立关于导数的估计式：

$$f^{(n)}(x) \leq \frac{2Mn!}{r^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

习题 4.8 (Bernstein 定理) 设 f 在 (a,b) 上任意阶可导, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.求证:$\forall x_0 \in (a,b)$, $\exists r > 0$, 使得当 $x \in [x_0 - r, x_0 + r] \subseteq (a,b)$ 时, 成立

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

4.3 函数的凸性

以下两题的关键在于注意到指数高于 1 的幂函数的下凸性, 于是考虑将 $[a,b]$ 等分为 n 个小区间, 分别利用条件并相加, 使不等式右边随 n 的增大而收紧.

习题 4.9 设 f 在区间 I 上满足带指数的 Lipshitz 条件, 即 $\exists M > 0$, $\alpha > 0$, 使得 $\forall x, y \in I$, 成立 $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$. 求证：若 $\alpha > 1$, 则 f 在 I 上是常值函数.

习题 4.10 设 $f \in C[a,b]$, 且 $\exists M, \eta \in \mathbb{R}^+$, 使得 $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$, 恒有 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M(\beta-\alpha)^{1+\eta}$. 求证：$f \equiv 0$.

习题 4.11 (Schwarz 定理) 定义广义二阶导数

$$f^{[2]}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

若 $f \in C[a,b]$, $f^{[2]}(x) \equiv 0$, 求证：f 为线性函数.

证 广义二阶导数的形式提示了可能与凸性相关. 先用反证法证明：如果 $\forall x \in [a,b]$, $f^{[2]}(x) > 0$, 则 f 下凸. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, $f(x) + \varepsilon x^2$ 下凸. 由定义得 f 下凸, 同理 f 上凸, 于是 f 为线性函数. □

注 证明线性函数可以从既是下凸函数又是上凸函数的角度入手.
这种利用 ε 处理边界的方式是一种范式.

4.4 单侧导数的性质

以下定理具有启发性, 有时能带来出其不意的方便. 仅陈述右侧导数相关性质, 左侧导数同理.

引理 4.1 (Fermat 引理) *设 f 在其极大值点 x_0 处右侧可导, 则 $f'_+(x_0) \leq 0$.*

定理 4.1 (单调性) *设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导. 若 $f'_+(x) > 0$ 恒成立, 则 f 在 $[a,b]$ 上严格单调递增. 若 $f'_+(x) \geq 0$ 恒成立, 则 f 在 $[a,b]$ 上单调递增.*

定理 4.2 *设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导. 若 $f'_+(x) \equiv 0$, 则 $f \equiv C$.*

定理 4.3 *设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导. 若 $f'_+(x) \in C[a,b]$, 则 $f \in C^1[a,b]$, $f' = f'_+$.*

证 考虑 $G(x) = \int_a^x f'_+(t)\mathrm{d}t$. 因为 $(f(x) - G(x))'_+ \equiv 0$, 所以 $f(x) = G(x) + C$. □

定理 4.4 (Rolle 中值定理) 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a,b)$,

$$f'_+(\xi_1) \le 0, \qquad f'_+(\xi_2) \ge 0.$$

定理 4.5 (Lagrange 中值定理) 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导, 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a,b)$,

$$f'_+(\xi_1) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'_+(\xi_2).$$

定理 4.6 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导, 则 f 在 (a,b) 上 (严格) 下凸的充分必要条件是 $f'_+(x)$ (严格) 单调递增.

下一题用定义证明计算量非常大. 但上述定理可以直接证得.

习题 4.12 设 $a<b<c<d$, 求证：若 f 在 $[a,c]$, $[b,d]$ 上下凸, 则 f 在 $[a,d]$ 上下凸.

习题 4.13 设 f 在 (a,b) 上下凸, 求证：$f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 在任意 $[c,d] \subseteq (a,b)$ 上可积, 且成立 Newton-Leibniz 公式

$$f(d)-f(c) = \int_c^d f'_-(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f'_+(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 用单侧导数的 Lagrange 中值定理. □

5 不定积分

以下两题利用了配对积分法. 遇到难以积出的积分时应当想到这种方法, 联想与原积分相关的更简单的积分. 特殊的例子有 $\sin x, \cos x$ 的线性组合, 以及 $1, x^2, x^4$ 的线性组合.

习题 5.1 计算 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 考虑以下两个积分.

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\big(x-\frac{1}{x}\big)}{\big(x-\frac{1}{x}\big)^2+2}.$$

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\big(x+\frac{1}{x}\big)}{\big(x+\frac{1}{x}\big)^2-2}.$$ □

习题 5.2 计算 $\displaystyle\int \frac{b\sin x + a\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解 分别计算以 $b\sin x - a\cos x$ 与 $a\sin x + b\cos x$ 为分子的积分. □

下题体现出利用二倍角公式降幂扩角的实用性.

习题 5.3 计算 $\displaystyle\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

6 定积分

6.1 积分学的若干重要定理

定义 6.1 函数 f 在 $U(x_0,\delta)$ 上的振幅 $\omega_f(x,\delta)=\sup\limits_{x\in U(x_0,\delta)}\{f(x)\}-\inf\limits_{x\in U(x_0,\delta)}\{f(x)\}$.

函数 f 在 x_0 处的振幅 $\omega_f(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_f(x,\delta)$.

命题 6.1 *f 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(x_0)=0$.*

定理 6.1 (Lebesgue 定理) *设 f 在 $[a,b]$ 上有界. 则 $f\in R[a,b]$ 的充分必要条件是 f 的不连续点的集合 $D(f)$ 零测 (f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续).*

证 先证必要性. 只需证 $\forall n\in\mathbb{N}$, $D_{\frac{1}{n}}=\left\{x\in[a,b]\,\middle|\,\omega(x)>\dfrac{1}{n}\right\}$ 零测. 因为 $f\in R[a,b]$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 分割 P, 使得 $\sum\limits_P\omega_i\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{n}$. 记 $\Lambda=\left\{i\,\middle|\,(x_{i-1},x_i)\cap D_{\frac{1}{n}}\neq\emptyset\right\}$, 则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i\in\Lambda}\Delta x_i<\sum\limits_{i\in\Lambda}\omega_i\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{n}$. 再用总长度可以任意小的区间覆盖 $x_0,\ldots,x_n$, 即证得 $D_{\frac{1}{n}}$ 零测.

再证充分性. 对任意 $\varepsilon>0$, 先用总长度小于 ε 的至多可数个开区间覆盖 $D(f)$. 对每个连续点取一个邻域, 使得邻域内振幅不超过 ε. 每个连续点的邻域和覆盖 $D(f)$ 的开区间构成了 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 应用加强形式的有限开覆盖定理, 得到 Lebesgue 数 δ. 取分割 P, $\|P\|<\delta$ 即证. $\square$

定理 6.2 (Riemann 引理) *$f\in R[a,b]$, g 是以 T 为周期的周期函数, 且 $g\in R[0,T]$. 则*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 6.3 *设 $f,g\in R[a,b]$, ξ 和 ξ' 是分割 P 的两个介点集, 则*

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_P f(\xi_k)g(\xi_k')\Delta x_k=\int_a^b f\cdot g.$$

更进一步, 设 $m_k(f)\le\mu_k\le M_k(f)$, $m_k(g)\le\nu_k\le M_k(g)$, 则

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_P\mu_k\nu_k\Delta x_k=\int_a^b f\cdot g.$$

定理 6.4 (广义的 Newton-Leibniz 公式) *设 $f\in R[a,b]$, $F\in C[a,b]$, 且除了有限个点外均有 $F'=f$. 则 $\forall x\in[a,b]$, 仍成立 Newton-Leibniz 公式*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)-F(a).$$

证 设 $F'(t)\neq f(t)$ 的点为 $t_1,\ldots,t_m$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $\forall$ 分割 P, 只要 $\|P\|<\delta$, 不论介点集 $\{\xi_i\}$ 如何取, 都有 $\left|\sum\limits_P f(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^x f\right|<\varepsilon$. 将 $t_1,\ldots,t_m$ 加入分割 P 中, 新的分点为 $\{x_i'\}$. 用 Lagrange 中值定理取介点集即证. $\square$

6.2 定积分的性质

习题 6.1 设 f 在 $[a,b]$ 上的每一点处的极限都存在且为 0, 求证：$f\in R[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f=0$.

证 断言：$\forall\varepsilon>0$, 使得 $|f(x)|>\varepsilon$ 的点 x 至多只有有限个．否则由聚点原理, 这与聚点处极限为 0 矛盾．也可以用有限开覆盖定理． □

以下结论不难证得, 但具有启发性．上题也可以用它证明．

命题 6.2 设 $f\in R[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f>0$．则有 $[c,d]\subseteq[a,b]$ 和 $\mu>0$, 使得区间 $[c,d]$ 上成立 $f(x)\geq\mu$.

习题 6.2 设 $[a,b]$ 上处处大于 0 的函数 $f\in R[a,b]$, 求证：$\displaystyle\int_a^b f>0$.

证 用反证法．假设 $\displaystyle\int_a^b f=0$．于是 $\forall\varepsilon>0$, $\displaystyle\int_a^b[\varepsilon-f(x)]\,\mathrm{d}x>0$．利用上一命题, 用闭区间套定理, 取 $\varepsilon_n=1/n$, 将 $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f=0$ 继承到局部, 引出矛盾． □

注 这种利用 ε 处理边界的方式是一种范式.

习题 6.3 (积分的连续性命题) 设 $f\in R[a-\delta,b+\delta]$, $\delta>0$．求证：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

证 从极限过程的顺序上看, Riemann 和式的极限在 $h\to 0$ 之前．所以必须先取定分割.

对任意取定的 $\varepsilon>0$, $\exists$ 等距分割 P, $\displaystyle\sum_P\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$．任取 $0<|h|<\|P\|$, 则有 $I=\displaystyle\sum_P\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x$, 其中每个 $x+h$ 与 x 都落在同一或相邻小区间内, 使积分的值得到控制． □

习题 6.4 设 $f\in C[0,1]$, 计算 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 f 的性态未知, 因此先观察其余部分, 注意到 nx^n 的定积分为 1．分段控制方法需要 1 处被积函数值为 1, 因此考虑 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n(f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x$．答案为 $f(1)$. □

6.3 定积分的计算

下题也可以用对称性方法解出, 但以下解法中处理极限不存在的方法值得学习.

习题 6.5 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}(-\cos x)=-\cos x\ln\sin x\Big|_{0^+}^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}\ln\sin x.$$

第一项极限不存在, 因此不能解决问题．但如果将 $\mathrm{d}(-\cos x)$ 改成 $\mathrm{d}(1-\cos x)$ 即可通过等价无穷小解决问题. □

习题 6.6 (Dirichlet 核) 定义 $D_n(x)=\dfrac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$．计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}D_n(x)\,\mathrm{d}x$.

解　考虑三角恒等式

$$\sin\frac{(2n+1)x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right).$$

答案为 $\frac{\pi}{2}$．也可以使用归纳法． □

习题 6.7 (Fejér 积分)　求证：$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 = \frac{n\pi}{2}$.

下题中处理 $\int_0^x \sin\frac{1}{t}$ 的方式是一种范式．

习题 6.8　设 $F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$.

解

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t^2\,\mathrm{d}\cos\frac{1}{t} \\ &= x^2\cos\frac{1}{x} - \int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

即可解决被积函数不连续的问题, 答案为 0. □

习题 6.9　求证：$m<2$ 时, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^m}\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.

习题 6.10　计算 $B(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1}$.

解　观察 $\frac{(-1)^k}{m+k+1}$ 的形式, 自然想到幂函数从 0 到 1 的定积分． □

变限积分函数的引入带来了新的凑微分的可能性．

习题 6.11　设 f 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且 $f^2(t)\le 1+2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$．求证：$f(t)\le 1+t$.

证　观察条件的形式, f^2 难以处理, 并且自然想到引入变限积分函数．在条件的两边开根号, 将右边除到左边再两边积分即证． □

6.4　积分估计

以下两题中分部积分法的使用值得学习．

习题 6.12　设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)|\le M$．求证：$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{12}(b-a)^3$.

证

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}[(x-a)(x-b)] \\ &= -\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$ □

下题给出了梯形公式的误差估计．证明可以使用积分学手段：分部积分法 (Euler-Maclaurin 公式)．也可以使用微分学手段, 即待定常数法和 Rolle 定理．它们的差异不是本质的．中矩形公式和 Simpson 公式的证明可以使用相同方法．

习题 6.13 设 $f \in C^2[0,h]$．求证：$\exists \xi \in [0,h]$, 使得 $\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] - \frac{1}{12}f''(\xi)h^3$．

证 反复使用分部积分法．

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^h f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{h}{2}\right)\\ &= f(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\Big|_0^h - \int_0^h f'(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] - \frac{1}{2}\int_0^h f'(x)\mathrm{d}[x(x-h)]\\ &= \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] + \frac{1}{2}\int_0^h x(x-h)f''(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] + \frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^h x(x-h)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

6.5 积分学的其他应用

定理 6.5 (质心公式) 设密度均匀的平面图形分布在 $x=a, x=b$ 和 $y=c, y=d$ 之间, 且 $\forall x_0 \in [a,b]$, $y_0 \in [c,d]$, 直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 截得的线段长度为 $s(x_0)$ 和 $t(y_0)$．则图形的质心的坐标为

$$x_c = \frac{\int_a^b xs(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad y_c = \frac{\int_c^d yt(y)\,\mathrm{d}y}{\int_c^d t(y)\,\mathrm{d}y}.$$

而密度均匀的分段光滑曲线 $y=f(x)\,(a \le x \le b)$ 的质心的坐标为

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x}, \qquad y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x}.$$

定理 6.6 (Guldinus 定理)

Guldinus 第一定理：位于右半平面内的平面曲线绕 y 轴旋转一周所产生的旋转曲面的面积等于曲线的质心绕 y 轴一周所经过的路程乘以曲线的弧长, 即 $S_y = 2\pi x_c l$.

Guldinus 第二定理：位于右半平面内的平面图形绕 y 轴旋转一周所产生的旋转立体的体积等于图形的质心绕 y 轴一周所经过的路程乘以图形的面积．即 $V_y = 2\pi x_c S$.

利用定积分求数列极限时, 应当积极考虑用 Taylor 公式分离出主要部分, 以及用夹逼定理去除形式上无关紧要的部分．

习题 6.14 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2} + \left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{n^2}\right].$$

解 将 $\sin\frac{k\pi}{n^2}$ Taylor 展开． □

习题 6.15 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(\pi/n)}{n+1}+\frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1/n}\right].$$

解 观察形式, 注意到将分母分别放缩至 n 和 $n+1$ 不对极限值产生影响, 然后用夹逼定理. □

以下 Wallis 公式的形式有时更加便于应用.

定理 6.7 (Wallis 公式) $n\to\infty$ 时, 成立

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n},\qquad \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\sim\sqrt{\pi n}.$$

7 不等式

积分学重要不等式的证明一般有两种方法: (1) 使用与离散形式相同的思路; (2) 对离散形式取极限.

7.1 若干重要不等式

可以利用广义 AM-GM 不等式来证明 Hölder 不等式, 利用 Hölder 不等式来证明 Minkowski 不等式. 这里提供利用凸性与 Jensen 不等式的证法, 利用凸性的证法可以证明 $0<p<1$ 时 Minkowski 不等式反向成立.

习题 7.1 证明 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式.

证 对 Hölder 不等式, 考虑下凸函数 $f(u)=u^p$.

$$\lambda_k=\frac{y_k^q}{\sum y_i^q},\quad u_k=x_k y_k^{1-q}.$$

对 Minkowski 不等式, 考虑下凸函数 $f(u)=\left(1-u^{\frac{1}{p}}\right)^p$.

$$\lambda_k=\frac{(x_k+y_k)^p}{\sum(x_i+y_i)^p},\quad u_k=\left(\frac{x_k}{x_k+y_k}\right)^p.$$ □

以下 Hadamard 不等式有显著的几何直观. 两侧的不等式实际上都是下凸的充分必要条件.

定理 7.1 (Hadamard 不等式) 设 f 为 (a,b) 上的下凸函数. 则 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, 成立不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

7.2 Jensen 不等式

Jensen 不等式的积分形式可以对离散形式取极限证得, 其中 p 类比为离散形式中的权重.

定理 7.2 (Jensen 不等式) 设 $f,p\in R[a,b]$, $p\ge 0$, $\int_a^b p>0$. 则当 φ 是 f 值域上的下凸函数时, 成立不等式

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\right)\le\frac{\int_a^b p(x)(\varphi(f(x)))\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Jensen 不等式包含了很多不等式．例如 (φ 为下凸函数)

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

当遇到不等式时, 应当观察其中形式相似的部分, 并寻找凸函数.

习题 7.2 若 f 在 $[0,1]$ 上上凸, 求证：$\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \le f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

证 观察 $1/(n+1)$ 的形式, 自然想到幂函数的定积分. □

习题 7.3 设非负函数 $f \in R[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f = 1$, $k \in \mathbb{R}$, 求证：

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2 \le 1.$$

证 观察形式, 自然希望将平方挪到三角函数上．于是用 Jensen 不等式, 这里凸函数是 $\varphi(x) = x^2$． □

7.3 Schwarz 不等式

习题 7.4 设 $f \in C^1[a,b]$, $f(a) = 0$．求证：

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b (f'(x))^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$

证 观察条件 $f \in C^1[a,b]$, 自然想到变限积分函数．$\displaystyle\int_a^b f^2$ 难以处理, 于是先用 Schwarz 不等式估计 f^2, 再两边积分即证.

$$f^2(x) = \left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le (x-a)\int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

习题 7.5 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上平方可积．求证：积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证 观察形式, 平方可积的条件自然联想到 Schwarz 不等式. □

7.4 Jordan 不等式

以下 Jordan 不等式的证明非常简单, 但它的作用十分强大, 能将复杂式子中难以处理的 $\sin x$ 放缩为线性函数.

定理 7.3 (Jordan 不等式) 设 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, 则成立不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$.

习题 7.6 求证：$\lambda < 1$ 时, $\displaystyle\lim_{R\to\infty} R^\lambda \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$.

证 用 Jordan 不等式将难以处理的 $\sin x$ 放缩为 x. □

习题 7.7 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 由 Dirichlet 判别法易证其收敛. 由 Jordan 不等式, 通过以下估计证得其条件收敛.

$$\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\cos x}\sin|\sin x| \geq \frac{2}{\pi\mathrm{e}}\frac{|\sin x|}{x}.$$

□

习题 7.8 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ 的敛散性.

解 观察被积函数的形式, 注意到多数情况下分母阶数高于分子, 故被积函数值趋于 0. 而在 $\sin x = 0$ 时被积函数值为 x. 于是自然想到将积分拆分为长为 π 的区间, 保留 $\sin x$ 而将其余部分放缩, 再使用对称性与 Jordan 不等式. 经过尝试发现估算积分值的上界不可行, 于是转而估算下界. 证得其发散.

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x} \geq (k-1)\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4\sin^2 x} \\
&= 2(k-1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4\sin^2 x} \geq 2(k-1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4 x^2} \\
&= \frac{2(k-1)\pi}{k^2\pi^2}\int_0^{k^2\pi^3/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \sim \frac{1}{k} \quad (k\to\infty).
\end{aligned}$$

□

8 广义积分

一些积分学中的重要定理在广义积分中有其推广形式.

定理 8.1 (广义积分的 Riemann 引理) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上绝对可积. g 是以 T 为周期的周期函数, 且 $g\in R[0,T]$. 则

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^{+\infty} f(x)g(px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

广义积分的 Riemann 引理用分段估计的方式证明. 对瑕积分也有积分第二中值定理, 证明方式与定积分中相同.

8.1 广义积分与和式极限

广义积分虽然是通过对常义积分取极限得到, 它在被积函数单调的情况下也有可能从积分和式的极限得到.

习题 8.1 设 f 在 $(0,1)$ 单调, 瑕积分 $\int_0^1 f$ 收敛. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 不妨设 f 单调递增. 将以下不等式的中间部分理解为阶梯函数的定积分. 则由保号性, 成立

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to\infty$ 即证.

□

习题 8.2 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调, $\int_0^{+\infty} f$ 收敛, 求证：$\lim\limits_{h\to 0^+} h\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证 不妨设 f 单调递减大于 0. 用有限的积分限代替奇点, 得到不等式

$$\int_h^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} hf(kh) \le \int_0^{nh} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to+\infty$, 再令 $h\to 0^+$ 即证. □

8.2 广义积分的敛散性判别法

判别广义积分敛散的第一步是找到被积函数所有 (可能) 的奇点. 当指数上出现参数时, 被积函数的零点也可能是奇点. 例如以下广义积分所有可能的奇点是 $0,1,+\infty$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}|\ln x|^p\,\mathrm{d}x.$$

广义积分敛散性判别的本质是被积函数值的估计. 因此应不吝啬先用 Taylor 公式分析渐近性态, 从而找到合适的指数 p, 再用 Cauchy 判别法.

值得注意的是, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = l \in \mathbb{R}$ 并不能推出二者同敛散. 如果添加 f,g 均不变号的条件则可以. 反例如下, 此时应当用 Taylor 公式估计.

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Dirichlet 和 Abel 判别法难以判别广义积分发散. 比较判别法无法处理的情况下, 应当考虑定义或者 Cauchy 收敛准则. 后者的作用是强大的.

习题 8.3 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} x^p \mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x\,\mathrm{d}x\ (p\ge 0)$ 的敛散性.

解 显然先考虑证明其发散. 被积函数不保号, 应当考虑 Cauchy 收敛准则, 于是尝试寻找一列被积函数定号的区间. 自然想到将 x^p 与 $\mathrm{e}^{\sin x}$ 放缩为常数, 于是取 $[k\pi+\pi/6, k\pi+\pi/4]$, 因为 $k\to\infty$ 的过程中区间上的积分不趋于 0, 所以广义积分发散. □

8.3 广义积分的计算

广义积分中的一些对称性不那么容易注意到. 以下两题中的倒代换是处理 0 到 $+\infty$ 的广义积分的一种手段, 它也是一种对称性方法.

习题 8.4 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

注 如果作代换 $x=\tan t$, 就容易发现此处倒代换的本质是 $\ln\tan x$ 关于 $[0,\pi/2]$ 的区间中点为奇函数.

习题 8.5 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)\ dx$.

有一些有名的广义积分, 其中的思想方法和结果都是重要的. 可以利用它们计算出很多其他积分.

习题 8.6 (Euler 积分) 求证：$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

以下习题体现出：在广义积分中, 不应像常义积分一样避免对数函数和三角函数一起出现. 相反, 应当积极尝试这种思路, 尝试利用 Euler 积分.

习题 8.7 计算以下广义积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cot x\,\mathrm{d}x$.　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left|\sin^2 x - a^2\right|\,\mathrm{d}x\,(a^2 \le 1)$.

解　(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}\ln\sin x$. 用分部积分法.

(2) 设 $a = \sin\theta$.

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\left|\sin^2 x - \sin^2\theta\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\left|\sin(x+\theta)\sin(x-\theta)\right|\,\mathrm{d}x = -\pi\ln 2. \qquad \square$$

以下 Frullani 积分, Dirichlet 积分, Euler-Poisson 积分的证明都体现出：广义积分的计算中, 可以先不处理广义积分带来的极限过程, 而从常义积分展开分析. 减少一个极限过程并处理常义积分有时候能够简化问题, 提供新的角度.

习题 8.8 (Frullani 积分)　设 $f \in C[0, +\infty)$, $f(+\infty)$ 存在且有限, $0 < a < b$. 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

解　观察被积函数分子的形式, 自然想到 $f(ax)$ 与 $f(bx)$ 在 x 取遍正实数的过程中, 大部分会互相抵消. 于是先固定积分限. 拆分被积函数, 利用线性换元的形式不变性, 将无法处理的自变量形式的差异转移到积分限上.

$$\begin{aligned}
\int_r^R \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \left(\int_{ar}^{aR} - \int_{br}^{bR}\right)\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= f(\xi)(\ln b - \ln a) - f(\eta)(\ln b - \ln a) \quad (ar \le \xi \le br,\, aR \le \eta \le bR).
\end{aligned}$$

令 $r \to 0$, $R \to +\infty$, 得到答案为 $(f(0) - f(+\infty)) \cdot (\ln b - \ln a)$. $\square$

注　由此可以推出以下两种情况下 Frullani 积分的变形.

(1) $f(+\infty)$ 不存在或不有限, 但对某个 $A > 0$, 积分 $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) f 在 0 处不连续, 甚至右极限也不存在, 但对某个 $A > 0$, 积分 $\displaystyle\int_0^A \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

习题 8.9 (Dirichlet 积分)　求证：$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

证　回想 Dirichlet 核, 二者的差异在于积分限和分母. 于是考虑线性换元将无穷限积分转化为常义积分与数列极限, 并对二者作差.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = O(x) \quad (x \to 0).$$

于是上式中的函数 Riemann 可积. 与 $\sin(n+\dfrac{1}{2})x$ 相乘, 自然使用 Riemann 引理, 即证. $\square$

习题 8.10 (Euler-Poisson 积分) 求证：$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证 指数函数和无穷限都难以处理．考虑用极限逼近指数函数, 并通过数列极限逼近无穷限积分．于是考虑以下积分, 积分上限不难通过定义域想到．

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xlongequal{t=\sqrt{n}\sin x} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,\mathrm{d}x \to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (n\to\infty).$$

等式右端已经得到, 自然考虑将二者作差．只需证

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left[\mathrm{e}^{-t^2} - \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t = 0.$$

用如下不等式即证．

$$0 \le \mathrm{e}^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le \frac{x^2}{n}\mathrm{e}^{-x}.$$ □

8.4 无穷限积分的特殊性质

不同于数项级数, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ 收敛不仅不能推出 $f(+\infty)=0$, $f(+\infty)$ 完全可以不存在, 甚至有极限点为 $+\infty$．但关于无穷限积分在无穷远处的性质, 仍有一些结论．

习题 8.11 设无穷限积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ 收敛, 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 有意义．求证：$f(+\infty)=0$.

习题 8.12 设无穷限积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ 收敛, 且 f 单调．求证：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

证 不妨设 f 单调递减．观察结论形式, 于是考虑 x 充分大时, $0 \le xf(2x) \le \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$ 任意小． □

习题 8.13 设无穷限积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ 收敛, 且 $f \in U.C.[a,+\infty)$．求证：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

注 当 $f \in C[a,+\infty)$ 时, $f(+\infty)=0$ 与 $f \in U.C.[a,+\infty)$ 是等价的．