数学分析习题课讲义（上册）

一元微积分学笔记

陈志杰

2024 年 12 月 26 日

目录

1 实数系的基本定理

实数系基本定理的使用有其显著动机, 在观察题干时应当向这方面思考, 例如:

(1) Lebesgue 方法将局部性质推广至整体. 它聚焦于 “函数在什么地方失去了这个整体性质”, 并通过研究该处的局部性质引出矛盾.

(2) Bolzano 二分法等闭区间套定理的使用将整体性质继承至局部.

(3) 有限开覆盖定理将局部性质推广至整体.

习题 1.1 设 f 在开区间 I 上连续. 且于每一点 $x \in I$ 处取到极值. 求证: f 为 I 上的常值函数.

证 用反证法. 假设 $f(a_0) < f(b_0)$. 因为 $f \in C(I)$, $\exists \xi \in [a_0, b_0]$, $f(\xi) = (f(a_0) + f(b_0))/2$. 如果 $\xi \leq (a_0 + b_0)/2$, 取 $\eta \in [a_0, \xi]$, $f(\eta) = (f(a_0) + f(\xi))/2$, 令 $[a_1, b_1] = [\eta, \xi] \subseteq [a_0, b_0]$. 其余情况同理. 重复此过程, 得到一列闭区间套收缩至 ξ, 可以证明 ξ 不是极值点, 矛盾. □

习题 1.2 设 f 在 $[0, 1]$ 上满足以下条件: (1) $f(0) > 0$, $f(1) < 0$; (2) $\exists g \in C[0, 1]$, 使得 $f + g$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增. 求证: f 在 $[0, 1]$ 中有零点.

证 设 $E = \{x \in [0, 1] \mid f(x) > 0\}$, $\sup E = b \in [0, 1]$.

假设 $f(b) > 0$, 则 $b < 1$. 因为 $\forall x > b$, $f(x) \leq 0$, 且 $f + g$ 单调递增, 所以 g 在 $U_+(b)$ 一定不连续, 矛盾. $f(b) < 0$ 时同理矛盾. 于是 $f(b) = 0$. □

以下加强形式的有限开覆盖定理有时更为有用.

定理 1.1 (加强形式的有限开覆盖定理) *$\{\mathcal{O}_n\}$ 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 则 $\exists \delta > 0$(称作开覆盖的 Lebesgue 数), 使得 $\forall x', x'' \in [a, b]$, 只要 $x' - x'' < \delta$, 就存在开覆盖中的一个开区间, 它覆盖 x', x''.*

习题 1.3 用有限开覆盖定理证明 Cantor 定理: 如果 $f \in C[a, b]$, 则 $f \in U.C.[a, b]$.

引理 1.1 *每个数列都有单调子列.*

证 记数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_m 具有性质 M, 如果 $\forall n > m$, $a_n \leq a_m$. 分类讨论具有性质 M 的项数量是否有限. □

注 从这一引理出发可以由单调有界收敛定理得到 B-W 定理.

推论 1.1 *一个数列有收敛子列的充分必要条件是它不是无穷大量.*

以下压缩映射原理是处理迭代数列的实用工具.

命题 1.1 (压缩映射原理) *称 f 是 $[a, b]$ 上的一个压缩映射, 如果 $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, 且 $\exists 0 < k < 1$, 使得 $\forall x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*

设 f 是 $[a, b]$ 上的一个压缩映射, 则:

(1) f 在 $[a, b]$ 中存在唯一不动点 ξ.

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a, b]$ 和递推公式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ.

(3) 成立事后估计 $|a_n - \xi| \leq \dfrac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}|$ 和先验估计 $|a_n - \xi| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$.

证 $|a_{n+p}-a_n| \le k|a_{n+p-1}-a_{n-1}| \le \cdots \le k^n|a_p-a_0| \le k^n(b-a)$. 由 Cauchy 收敛准则, $\{a_n\}$ 收敛. 记其极限为 $\xi \in [a,b]$. 由 $|f(a_n)-f(\xi)| \le k|a_n-\xi|$, $f(a_n)$ 收敛于 $f(\xi)$. 代入 $a_{n+1}=f(a_n)$, 得到 $f(\xi)=\xi$.

不动点唯一性与估计式易证. □

习题 1.4 数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1=1$ 和 $a_{n+1}=f(a_n)=1+\dfrac{1}{a_n}$ 生成. 求证 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证 用压缩映射原理. □

2 数列与函数极限

2.1 数列极限

习题 2.1 求证：数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}\,(p>1)$ 收敛.

证

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \left(1+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}\right)+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)\\
&< 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)\\
&\le 1+2\cdot 2^{-p}\cdot\left(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\right)\\
&= 1+2^{1-p}a_n.
\end{aligned}$$

于是 $a_n<a_{2n}<1+2^{1-p}a_n$, 得 $a_n<\dfrac{1}{1-2^{1-p}}$. 由单调有界收敛定理, $\{a_n\}$ 收敛. □

习题 2.2 设 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 数列 A_n 收敛. $\{p_n\}$ 为单调增加的正数数列, 且为正无穷大量. 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+\cdots+p_na_n}{p_n}=0.$$

证 由 Abel 变换,

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_nA_n+\sum_{k=1}^{n-1}[(p_k-p_{k+1})A_k]}{p_n}\xlongequal{\text{Stolz 定理}}\lim_{n\to\infty}\left(A_n+\frac{(p_n-p_{n+1})A_n}{p_{n+1}-p_n}\right)=0.$$ □

2.2 数列的上下极限

定理 2.1 (上下极限的等价定义) 仅叙述上极限有关性质, 下极限同理.

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$ 为 $\{x_n\}$ 的最大极限点.

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\ge n}\{x_k\}$.

(3) $b\in\mathbb{R}$ 是 $\{x_n\}$ 的上极限的充分必要条件是: $\forall\varepsilon>0$, $U(b,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 且 $\exists N\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n>N$, $x_n<b+\varepsilon$.

以下结论是使用上下极限工具的主要手段. 假设以下所有四则运算（在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中）均有意义.

定理 2.2

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

当 $\{y_n\}$ 收敛时,

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \qquad \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

习题 2.3 $y_n = x_n + 2x_{n+1}$. 已知 $\{y_n\}$ 收敛, 求证：$\{x_n\}$ 也收敛.

证 先证明 $\{x_n\}$ 有界. 设 $|y_n| < M$ 且 $|x_1| < M$. 由 $|x_{n+1}| = \dfrac{1}{2}|y_n - x_n| \le \dfrac{1}{2}|y_n| + \dfrac{1}{2}|x_n|$, 归纳地, $|x_n| < M$.

对 $2x_{n+1} = y_n - x_n$ 左右两边同时取上下极限.

$$2\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n + \varlimsup_{n\to\infty} x_n \qquad 2\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n + \varliminf_{n\to\infty} x_n$$

解得 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 即 $\{x_n\}$ 收敛. □

判别数列敛散时, 可以考虑使用上下极限工具.

习题 2.4 若对于 $\{a_n\}$ 的每个子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}}{k} = a$, 求证：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证 考虑 $\{a_n\}$ 的收敛子列, 得到 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

以下两题充分利用了上下极限是一个定数这一事实.

习题 2.5 设 $\{x_n\}$ 为正数数列, 求证 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \ge 1$.

证 用反证法. 假设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) = b < 1$. 于是对 $\varepsilon = \dfrac{1-b}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1\right) < 1$, 即 $\dfrac{x_{n+1}}{n+1} < \dfrac{x_n}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. $x_n > 0$ 与调和级数的发散性矛盾. □

习题 2.6 设 $\{a_n\}$ 为正数数列. 求证：$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le 1$ 的充分必要条件是 $\forall l > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{l^n} = 0$.

注 上下极限是一个定数, 应当充分利用它和已知数的大小关系. 例如假设 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = b < 1$ 时, 应当考虑 b 和 1 的空隙; 另一题中的 l 也是如此.

3 连续函数

定理 3.1 有界开区间 (a,b) 上的连续函数 f 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是存在两个有限的单侧极限 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$. 当 (a,b) 是无界区间时, 充分性依然成立.

证 充分性显然. 必要性用 Cauchy 收敛准则易证. □

注 对可导函数来说, 以下条件依次减弱. Lipshitz 条件 > 导数有界 > 一致连续.

命题 3.1 单调函数的间断点为跳跃间断点.

以下两题的证明体现了 “证明满足某性质的点有至多可数个” 的常用方法.

命题 3.2 单调函数的间断点至多为可数个.

证 易证对单调递增函数 f 的间断点 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1^-) < f(x_1^+) \le f(x_2^-) < f(x_2^+)$. 于是 f 的每个不同间断点 x 都可以用不同的有理数 $q \in \big(f(x^-), f(x^+)\big)$ 标记. 由于 $\mathbb{Q}$ 是可数集, 间断点个数也至多可数. □

习题 3.1 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有极限. 求证:

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $[a,b]$ 中使得 $|\lim\limits_{t\to x} f(t) - f(x)| > \varepsilon$ 的点至多有有限个.

(2) f 在 $[a,b]$ 中至多有可数个间断点.

证 对任意取定的 $\varepsilon > 0, \forall x \in [a,b], \exists \delta_x$, 使得 $\forall x - \delta_x < y < x + \delta_x$, $|f(y) - \lim\limits_{t\to x} f(t)| \le \varepsilon$. 由保号性, $|\lim\limits_{t\to y} f(t) - \lim\limits_{t\to x} f(t)| \le \varepsilon$. 于是 $\forall y \in \mathring{U}(x, \delta_x)$, $|\lim\limits_{t\to y} f(t) - f(y)| \le 2\varepsilon$. 即每个 $U(x,\delta_x)$ 中至多有一个满足要求的点. 由有限开覆盖定理, 这样的点至多有有限个.

对 (2), 取 $\varepsilon_n = 1/n$, 可数个有限集的并是可数集. □

注 证明满足某性质的点有至多可数个的常用方法:

(1) 用可数集（例如 $\mathbb{Q}$）唯一标记它.

(2) 将其表示为可数个可数集的并（例如 $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_{\frac{1}{n}}$）. 这种方法对零测集的证明也适用.

以下两题的关键在于注意到指数高于 1 的幂函数的下凸性, 于是考虑将 $[a,b]$ 等分为 n 个小区间, 分别利用条件并相加, 使不等式右边随 n 的增大而缩紧.

习题 3.2 设 f 在区间 I 上满足带指数的 Lipshitz 条件, 即 $\exists M > 0, \alpha > 0$, 使得 $\forall x, y \in I$, 成立 $|f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha$. 求证: 若 $\alpha > 1$, 则 f 在 I 上是常值函数.

习题 3.3 设 $f \in C[a,b]$, 且 $\exists M, \eta \in \mathbb{R}^+$, 使得 $\forall [\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, 恒有 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M(\beta-\alpha)^{1+\eta}$. 求证: $f \equiv 0$.

4 一元微分学

4.1 导数与微分

以下加强的无穷小增量公式在证明链式求导法则与反函数求导法则时很方便.

定理 4.1 (加强形式的无穷小增量公式) 设 f 在 x_0 处可导, 则成立以下公式:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \omega(x)\Delta x.$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$.

定理 4.2 设 $x = \varphi(y)$ 在 $U(y_0)$ 上是严格单调的连续函数, 且 $\varphi'(y_0) \ne 0$. 若 $y = f(x)$ 是 $x = \varphi(y)$ 的反函数, 则 $f(x)$ 在 $x_0 = \varphi(y_0)$ 处可导, 且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

证

$$x-x_0=\left(\varphi'(y_0)+\omega(y)\right)(y-y_0),$$

其中 $\lim\limits_{y\to y_0}\omega(y)=\omega(y_0)=0$. 代入 $y=f(x)$, 由保号性, $U(y_0)$ 内 $\varphi'(y_0)+\omega(y)\neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{\varphi'(y_0)+\omega(y)}.$$

令 $\Delta x\to 0$, 即得结论. □

命题 4.1 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ 在 0 处的任意阶导数为 0. 定义 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & ,x>0\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$, 则 $f(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)+g(1-x)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上无限次可导的函数, 且 $x\leq 0$ 时 $f(x)\equiv 0$, $x\geq 1$ 时 $f(x)\equiv 1$.

习题 4.1 设 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 其中

$$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right).$$

解 注意到每一项的自变量都离 0 很近, 于是用无穷小增量公式, 答案为 $\dfrac{1}{2}f'(0)$. □

习题 4.2 求数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]$.

解 用无穷小增量公式. □

习题 4.3 设 $f(x)=x^n\ln x$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(\dfrac{1}{n})$.

解 由 Leibniz 公式,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=n!\ln x+n!\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\
&=n!\ln x+n!\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1(-t)^{k-1}\mathrm{d}t\\
&=n!\ln x+n!\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-t)^{k-1}\mathrm{d}t\\
&=n!\ln x+n!\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}\mathrm{d}t\\
&=n!\ln x+n!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(\dfrac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma$. □

习题 4.4 计算 $f(x)=\arcsin x$ 的 Maclaurin 公式直到 x^5 项.

解 本题有多种出于不同思路的解法.

(1) 求导一次, 用广义二项式定理展开.

(2) 利用 f 是奇函数, 对各项待定系数, 利用 $\sin(\arcsin x)\equiv x$ 与 $\sin x$ 的 Maclaurin 公式计算. □

4.2 微分中值定理与 Taylor 公式

以下几题使用待定常数法构造 Rolle 定理的辅助函数．核心是将区间一端 b 替换为变元, 使辅助函数在 a, b, 任意选定的内点 x 处具有良好性质, 例如函数值为 0, 一阶导数值为 0．

习题 4.5

(1) 设 f 在 $[a,b]$ 三阶可导, 且有 $f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 求证：$\forall x\in[a,b]$, $\exists\xi\in(a,b)$,

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 三阶可导, 求证：$\exists\xi\in(a,b)$,

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 二阶可导, 求证：$\forall c\in[a,b]$, $\exists\xi\in(a,b)$,

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

证 以下均设所求证的 ξ 的导数值为 λ．对 g 反复使用 Rolle 定理即得结论．

(1)

$$g(t)=f(t)-\frac{\lambda}{6}(t-a)^2(t-b).$$

(2)

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)\big[f'(a)+f'(x)\big]+\frac{\lambda}{12}(x-a)^3.$$

(3)

$$g(x)=f(a)(x-b)+f(b)(a-x)+f(x)(b-a)-\frac{\lambda}{2}(a-b)(b-x)(x-a).$$ □

下一题的核心步骤是代数技巧：如果 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, $0<b<c$, 则 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}<\frac{c-a}{d-b}$.

习题 4.6 设 $f\in C[a,b]$, $f'(a)=f'(b)$．求证：$\exists\xi\in(a,b)$,

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

证 即证辅助函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 有零点．反证假设其没有零点, 由 Darboux 定理, 不妨设 g 严格单调递增．$\forall x\in(a,b)$,

$$f'(a)<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

令 $x\to b$, 即得矛盾． □

注 辅助函数往往唯一, 只要找出即可．如果没有发现显然的方法使用 Rolle 定理, 应毫不犹豫地用 Darboux 定理反证．

习题 4.7 (Schwarz 定理) 定义广义二阶导数

$$f^{[2]}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

若 $f \in C[a,b]$, $f^{[2]}(x) \equiv 0$, 求证：f 为线性函数.

证 广义二阶导数的形式提示了可能与凸性相关．先用反证法证明：如果 $\forall x \in [a,b]$, $f^{[2]}(x) > 0$, 则 f 下凸．于是 $\forall \varepsilon > 0$, $f(x) + \varepsilon x^2$ 下凸．由定义得 f 下凸, 同理 f 上凸, 于是 f 为线性函数． □

注 证明线性函数可以从既是下凸函数又是上凸函数的角度入手.

这种利用 ε 处理边界的方式是一种范式.

习题 4.8 设 f 在 (a,b) 上任意阶可导, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$, $|f(x)| \leq M$．求证：$\forall x \in (a,b)$, $r > 0$, $x+r \in (a,b)$, 成立关于导数的估计式：

$$f^{(n)}(x) \leq \frac{2Mn!}{r^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

习题 4.9 (Bernstein 定理) 设 f 在 (a,b) 上任意阶可导, 且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.求证:$\forall x_0 \in (a,b)$, $\exists r > 0$, 使得当 $x \in [x_0 - r, x_0 + r] \subseteq (a,b)$ 时, 成立

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

4.3 单侧导数的性质

以下定理具有启发性, 有时能带来出其不意的方便．仅陈述右侧导数相关性质, 左侧导数同理.

引理 4.1 (Fermat 引理) 设 f 在其极大值点 x_0 处右侧可导, 则 $f'_+(x_0) \leq 0$.

定理 4.3 (单调性) 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导．若 $f'_+(x) > 0$ 恒成立, 则 f 在 $[a,b]$ 上严格单调递增．若 $f'_+(x) \geq 0$ 恒成立, 则 f 在 $[a,b]$ 上单调递增.

定理 4.4 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导．若 $f'_+(x) \equiv 0$, 则 $f \equiv C$.

定理 4.5 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导．若 $f'_+(x) \in C[a,b]$, 则 $f \in C^1[a,b]$, $f' = f'_+$.

证 考虑 $G(x) = \displaystyle\int_a^x f'_+(t)\mathrm{d}t$．因为 $(f(x) - G(x))'_+ \equiv 0$, 所以 $f(x) = G(x) + C$. □

定理 4.6 (Rolle 中值定理) 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a,b)$,

$$f'_+(\xi_1) \leq 0, \qquad f'_+(\xi_2) \geq 0.$$

定理 4.7 (Lagrange 中值定理) 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导, 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a,b)$,

$$f'_+(\xi_1) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_+(\xi_2).$$

定理 4.8 设 $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 上右侧可导, 则 f 在 (a,b) 上（严格）下凸的充分必要条件是 $f'_+(x)$（严格）单调递增.

下一题用定义证明计算量非常大．但上述定理可以直接证得．

习题 4.10 设 $a<b<c<d$, 求证：若 f 在 $[a,c]$, $[b,d]$ 上下凸, 则 f 在 $[a,d]$ 上下凸．

习题 4.11 设 f 在 (a,b) 上下凸, 求证：$f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 在任意 $[c,d]\subseteq(a,b)$ 上可积, 且成立 Newton-Leibniz 公式

$$f(d)-f(c)=\int_c^d f'_-(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^d f'_+(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 用单侧导数的 Lagrange 中值定理． □

5 不定积分

以下两题利用了配对积分法．遇到难以积出的积分时应当想到这种方法, 联想与原积分相关的更简单的积分．特殊的例子有 $\sin x,\cos x$ 的线性组合, 以及 $1,x^2,x^4$ 的线性组合．

习题 5.1 计算 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 考虑如下两个积分．

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}.$$

$$\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}.$$ □

习题 5.2 计算 $\displaystyle\int\frac{b\sin x+a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解 分别计算以 $b\sin x-a\cos x$ 与 $a\sin x+b\cos x$ 为分子的积分． □

下题体现出利用二倍角公式降幂扩角的重要性．

习题 5.3 计算 $\displaystyle\int\sin^4x\,\mathrm{d}x$.

习题 5.4 计算 $\displaystyle\int\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $x=a\cos t$, 利用半角公式．也可以直接使用分部积分法． □

6 定积分

6.1 积分学的重要定理

定义 6.1 函数 f 在 $U(x_0,\delta)$ 上的振幅 $\omega_f(x,\delta)=\sup\limits_{x\in U(x_0,\delta)}\{f(x)\}-\inf\limits_{x\in U(x_0,\delta)}\{f(x)\}$.

函数 f 在 x_0 处的振幅 $\omega_f(x)=\lim\limits_{\delta\to0}\omega_f(x,\delta)$.

命题 6.1 f 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(x_0)=0$.

定理 6.1 (Lebesgue 定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上有界．则 $f\in R[a,b]$ 的充分必要条件是 f 的不连续点的集合 $D(f)$ 零测（f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续）.

证 先证必要性．只需证 $\forall n\in\mathbb{N}$, $D_{\frac{1}{n}}=\left\{x\in[a,b]\,\middle|\,\omega(x)>\dfrac{1}{n}\right\}$ 零测．因为 $f\in R[a,b]$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 分割 P, 使得 $\sum\limits_{P}\omega_i\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{n}$．记 $\Lambda=\left\{i\,\middle|\,(x_{i-1},x_i)\cap D_{\frac{1}{n}}\neq\emptyset\right\}$, 则 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i\in\Lambda}\Delta x_i<\sum\limits_{i\in\Lambda}\omega_i\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{n}$．再用总长度可以任意小的区间覆盖 $x_0,\dots,x_n$, 即证得 $D_{\frac{1}{n}}$ 零测．

再证充分性．对任意 $\varepsilon>0$, 先用总长度小于 ε 的至多可数个开区间覆盖 $D(f)$．对每个连续点取一个邻域, 使得邻域内振幅不超过 ε．每个连续点的邻域和覆盖 $D(f)$ 的开区间构成了 $[a,b]$ 的一个开覆盖．应用加强形式的有限开覆盖定理, 得到 Lebesgue 数 δ．取分割 P, $\|P\|<\delta$ 即证． □

定理 6.2 (推广形式的 Riemann 引理) $f\in R[a,b]$, g 是可积的以 T 为周期的周期函数．则

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 按照 f 是常值函数 $\to$ f 是阶梯函数 $\to$ f 是可积函数的顺序逐步推广． □

注 这种逼近可积函数的方式值得学习．

定理 6.3 设 $f,g\in R[a,b]$, ξ 和 ξ' 是分割 P 的两个介点集, 则

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_P f(\xi_k)g(\xi_k')\Delta x_k=\int_a^b fg.$$

更进一步, 设 $m_k(f)\le\mu_k\le M_k(f)$, $m_k(g)\le\nu_k\le M_k(g)$, 则

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_P \mu_k\nu_k\Delta x_k=\int_a^b fg.$$

6.2 定积分的性质

习题 6.1 设 f 在 $[a,b]$ 上的每一点处的极限都存在且为 0, 求证：$f\in R[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f=0$.

证 断言：$\forall\varepsilon>0$, 使得 $|f(x)|>\varepsilon$ 的点 x 至多只有有限个．否则由聚点原理, 这与聚点处极限为 0 矛盾． □

以下结论不难证得, 但具有启发性．上题也可以用它证明．

命题 6.2 设 $f\in R[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f>0$．则有 $[c,d]\subseteq[a,b]$ 和 $\mu>0$, 使得区间 $[c,d]$ 上成立 $f(x)\ge\mu$.

习题 6.2 设 $[a,b]$ 上处处大于 0 的函数 $f\in R[a,b]$, 则有 $\displaystyle\int_a^b f>0$.

证 用反证法．假设 $\displaystyle\int_a^b f=0$．于是 $\forall\varepsilon>0$, $\displaystyle\int_a^b[\varepsilon-f(x)]\,\mathrm{d}x>0$．利用上一命题, 用闭区间套定理将 $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f=0$ 继承到局部, 引出矛盾． □

注 这种利用 ε 处理边界的方式是一种范式．

习题 6.3 (积分的连续性命题) 设 $f\in R[a-\delta,b+\delta]$, $\delta>0$．求证：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

证 从极限过程的顺序上看, Riemann 和式的极限在 $h \to 0$ 之前. 所以必须先取定分割.

对任意取定的 $\varepsilon > 0$, $\exists$ 等距分割 P, $\sum\limits_{P} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. 取 $|h| < \|P\|$, 则有 $I = \sum\limits_{P} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x+h) - f(x)| \, \mathrm{d}x$, 其中每个 $x+h$ 与 x 都落在同一或相邻小区间内, 使积分的值得到控制. □

习题 6.4 设 $f \in C[0,1]$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n f(x) \, \mathrm{d}x$.

解 f 的性态未知, 因此先观察其余部分, 注意到 nx^n 的定积分为 1. 分段控制方法需要 1 处被积函数值为 1, 因此考虑 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n (f(x) - f(1))$. 答案为 $f(1)$. □

6.3 定积分的计算

下题也可以用与 Euler 积分类似的方法解出, 但以下解法中展现的处理极限不存在的方法值得学习.

习题 6.5 计算 $\int_0^{\pi/2} \sin x \ln \sin x \, \mathrm{d}x$.

解

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, \mathrm{d}(-\cos x) = -\cos x \ln \sin x \Big|_{0^+}^{\pi/2}.$$

第一项极限不存在, 因此不能解决问题. 但如果将 $\mathrm{d}(-\cos x)$ 改成 $\mathrm{d}(1-\cos x)$ 即可通过等价无穷小解决问题. □

习题 6.6 (Dirichlet 核) 定义 $D_n(x) = \dfrac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$. 计算 $\int_0^{\pi} D_n(x) \, \mathrm{d}x$.

解 考虑三角恒等式

$$\sin \frac{(2n+1)x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right).$$

答案为 $\dfrac{\pi}{2}$. 也可以使用归纳法. □

习题 6.7 (Fejér 积分) 求证: $\int_0^{\pi/2} \left(\dfrac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 = \dfrac{n\pi}{2}$.

下题中处理 $\int_0^x \sin \dfrac{1}{t}$ 的方式是一种范式.

习题 6.8 设 $F(x) = \int_0^x \sin \dfrac{1}{t} \, \mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$.

解

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t^2 \, \mathrm{d} \cos \frac{1}{t} \\ &= x^2 \cos \frac{1}{x} - \int_0^x 2t \cos \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

即可解决被积函数不连续的问题, 答案为 0. □

习题 6.9 求证: $m < 2$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^m} \int_0^x \sin \dfrac{1}{t} \, \mathrm{d}t = 0$.

习题 6.10 计算 $B(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1}$.

解 观察 $\frac{(-1)^k}{m+k+1}$ 的形式, 自然想到幂函数从 0 到 1 的定积分. □

6.4 积分估计

以下两题中分部积分法的使用值得学习.

习题 6.11 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)\le M$. 求证: $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le \frac{M}{12}(b-a)^3$.

证

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\\&=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}[(x-a)(x-b)]\\&=-\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le-\frac{M}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x=\frac{M}{12}(b-a)^3.$$ □

习题 6.12 设 $f\in D[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, $|f'(x)\le M$. 求证: $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{4}(b-a)^2$.

以下两题给出了梯形公式误差估计. 证明可以使用积分学手段: 分部积分法 (Euler-Maclaurin 公式的低阶情况). 也可以使用微分学手段, 即待定常数法和 Rolle 定理, 它们的差异不是本质的. 中矩形公式和 Simpson 公式的证明可以使用相同方法.

习题 6.13 设 $f\in C^2[0,h]$. 求证: $\exists\xi\in[0,h]$, 使得 $\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]-\frac{1}{12}f''(\xi)h^3$.

证 反复使用分部积分法.

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{h}{2}\right)\\&=f(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\Big|_0^h-\int_0^h f'(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]-\frac{1}{2}\int_0^h f'(x)\mathrm{d}[x(x-h)]\\&=\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\frac{1}{2}\int_0^h x(x-h)f''(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^h x(x-h)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$ □

6.5 积分学的其他应用

利用定积分求数列极限时, 应当积极考虑用 Taylor 公式分离出主要部分, 以及用夹逼定理去除形式上无关紧要的部分.

习题 6.14 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{n^2}\right].$$

解 将 $\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$ Taylor 展开. □

习题 6.15 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(\pi/n)}{n+1}+\frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1/n}\right].$$

解 观察形式, 注意到将分母分别放缩至 n 和 $n+1$ 不影响本质, 然后用夹逼定理. □

7 不等式

积分学重要不等式的证明一般有两种方法: (1) 使用与离散形式相同的思路; (2) 对离散形式取极限.

7.1 微分学重要不等式

可以利用广义 AM-GM 不等式来证明 Hölder 不等式, 利用 Hölder 不等式来证明 Minkowski 不等式. 这里提供利用凸性与 Jensen 不等式的证法, 利用凸性的证法可以证明 $0<p<1$ 时 Minkowski 不等式反向成立.

习题 7.1 证明 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式.

证 对 Hölder 不等式, 考虑下凸函数 $f(u)=u^p$.

$$\lambda_k=\frac{y_k^q}{\sum y_i^q},\quad u_k=x_ky_k^{1-q}.$$

对 Minkowski 不等式, 考虑下凸函数 $f(u)=\left(1-u^{\frac{1}{p}}\right)^p$.

$$\lambda_k=\frac{(x_k+y_k)^p}{\sum(x_i+y_i)^p},\quad u_k=\left(\frac{x_k}{x_k+y_k}\right)^p.$$

□

7.2 Jensen 不等式

Jensen 不等式的积分形式可以对离散形式取极限证得, 其中 p 类比为离散形式中的权重.

定理 7.1 (Jensen 不等式) 设 $f,p\in R[a,b]$, $p\geq 0$, $\displaystyle\int_a^b p>0$. 则当 φ 是 f 值域上的下凸函数时, 成立不等式

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}\right)\leq\frac{\int_a^b p(x)(\varphi(f(x)))\,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Jensen 不等式包含了很多不等式．例如（φ 为下凸函数）

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(x))\,\mathrm{d}x.$$

当遇到不等式时, 应当观察其中形式相似的部分, 并寻找凸函数.

习题 7.2　若 f 在 $[0,1]$ 上上凸, 求证：$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \le f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

证　观察 $1/(n+1)$ 的形式, 自然想到幂函数的定积分.　□

习题 7.3　设非负函数 $f\in R[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f=1$, $k\in\mathbb{R}$, 求证：

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2 \le 1.$$

证　观察形式, 自然希望将平方挪到三角函数上．于是用 Jensen 不等式, 这里的凸函数是 $\varphi(x)=x^2$.

□

7.3　Schwarz 不等式

习题 7.4　设 $f\in C^1[a,b]$, $f(a)=0$．求证：

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2 - \frac{1}{2}\int_a^b (f'(x))^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x.$$

证　观察条件 $f\in C^1[a,b]$, 自然想到变限积分函数．$\displaystyle\int_a^b f^2$ 难以处理, 于是先用 Schwarz 不等式估计 f^2, 再两边积分.

$$f^2(x) = \left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le (x-a)\int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{2}\int_a^b\left(\int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}(x-a)^2\\ &= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(t))^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2(f'(x))^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

7.4　Jordan 不等式

以下 Jordan 不等式的证明非常简单, 但它的作用十分强大, 能将复杂式子中难以处理的 $\sin x$ 放缩为线性函数.

定理 7.2 (Jordan 不等式)　设 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, 则成立不等式 $\dfrac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$.

习题 7.5　求证：$\lambda < 1$ 时, $\lim\limits_{R\to\infty} R^{\lambda}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$.

证　用 Jordan 不等式将难以处理的 $\sin x$ 放缩为 x. □

习题 7.6　判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　由 Dirichlet 判别法易证其收敛. 由 Jordan 不等式, 通过以下估计证得其条件收敛.

$$\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\cos x}\sin|\sin x| \geq \frac{2}{\pi\mathrm{e}}\frac{|\sin x|}{x}.$$ □

习题 7.7　判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ 的敛散性.

解　观察被积函数的形式, 注意到多数情况下分母阶数高于分子, 故被积函数值趋于 0. 而在 $\sin x = 0$ 时被积函数值为 x. 于是自然想到将积分拆分为长为 π 的区间, 保留 $\sin x$ 而将其余部分放缩, 再使用对称性与 Jordan 不等式. 经过尝试发现估算积分值的上界不可行, 于是转而估算下界. 证得其发散.

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x} \geq (k-1)\pi\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4\sin^2 x} \\
&= 2(k-1)\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4\sin^2 x} \geq 2(k-1)\pi\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+k^4\pi^4 x^2} \\
&= \frac{2(k-1)\pi}{k^2\pi^2}\int_0^{k^2\pi^3/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \sim \frac{1}{k} \quad (k\to\infty).
\end{aligned}$$ □

8　广义积分

8.1　广义积分与和式极限

广义积分虽然是通过对常义积分取极限得到, 它在被积函数单调的情况下也有可能从积分和式的极限得到.

习题 8.1　设 f 在 $(0,1)$ 单调, 瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 f$ 收敛. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证　不妨设 f 单调递增. 将以下不等式的中间部分理解为阶梯函数的定积分. 则由保号性, 成立

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to\infty$ 即证. □

习题 8.2　设 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ 收敛, 求证:

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证　不妨设 f 单调递减大于 0. 用有限的积分限代替奇点, 得到不等式

$$\int_h^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} hf(kh) \leq \int_0^{nh} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $n\to+\infty$, 再令 $h\to 0^+$ 即证. □

8.2 广义积分的敛散性判别法

广义积分敛散性判别的本质是对被积函数作为无穷小量或无穷大量估阶. 因此不应吝啬先用 Taylor 公式进行估计, 从而找到合适的指数 p, 再用 Cauchy 判别法.

习题 8.3 判别以下广义积分的敛散性.

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]\mathrm{d}x.$

Dirichlet 和 Abel 判别法难以判别广义积分发散. 比较判别法无法处理的情况下, 应当考虑定义或者 Cauchy 收敛准则. 后者的作用是强大的.

习题 8.4 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p \mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x\,\mathrm{d}x\ (p\geq 0)$ 的敛散性.

解 显然先考虑证明其发散. 被积函数不保号, 应当考虑 Cauchy 收敛准则, 于是尝试寻找一列被积函数定号的区间. 自然想到将 x^p 与 $\mathrm{e}^{\sin x}$ 放缩为常数, 于是取 $[k\pi+\pi/6, k\pi+\pi/4]$, 因为 $k\to\infty$ 的过程中区间上的积分不趋于 0, 所以广义积分发散. □

8.3 广义积分的计算

常规的定积分方法仍然适用. 但广义积分中更应当考虑对称性. 下题中的倒代换是处理 0 到 $+\infty$ 的广义积分的一种手段, 它也是一种对称性方法.

习题 8.5 计算广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 显然该广义积分收敛. 观察形式, 容易想到分部积分, 但尝试后发现不可行. 于是考虑拆分为 0 到 1 的积分与 1 到 $+\infty$ 的积分. 作倒代换, 得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

于是答案为 0. □

注 如果作代换 $x=\tan t$, 就容易发现此处倒代换的本质是 $\ln\tan x$ 关于 $[0,\pi/2]$ 的区间中点为奇函数.

9 数项级数