Exercice 1.3 : $N \in \mathbb{N}$ fixé.

La fonction $y \mapsto \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$ n'est pas définie

si $\sin\frac{y}{2} = 0 \iff \frac{y}{2} \in \pi\mathbb{Z} \iff y \in 2\pi\mathbb{Z}$. Mais, par

opérations, elle est continue (et définie) sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{iky} = \sum_{k=-N}^{N} (e^{iy})^k$$

somme géométrique de raison $e^{iy} \neq 1$ car $y \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et il y a $N-(-N)+1 = 2N+1$ termes

$$= (e^{iy})^{-N} \frac{1-(e^{iy})^{2N+1}}{1-e^{iy}}$$

$$= \underbrace{e^{-iNy} \times \frac{e^{iy(N+\frac{1}{2})}}{e^{i\frac{y}{2}}}}_{=1} \times \frac{e^{-iy(N+\frac{1}{2})} - e^{iy(N+\frac{1}{2})}}{e^{-i\frac{y}{2}} - e^{i\frac{y}{2}}}$$

$$= \frac{2i\sin(N+\frac{1}{2})y}{2i\sin\frac{y}{2}}$$

D'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{iky} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}} \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}}$

Enfin, si $y \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{iky}$ a du sens et vaut $2N+1$.

Et pour $y = 2k\pi + h \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{\sin(N+1/2)y}{\sin y/2} = \dfrac{\sin(2kN\pi + k\pi + (N+1/2)h)}{\sin(k\pi + y/2)} = \dfrac{\sin(N+1/2)h}{\sin h/2} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{(N+1/2)h}{h/2} = 2N+1$

De plus $y \mapsto \sum_{k=-N}^{N} e^{iky}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations.

$$\boxed{\text{Ainsi } y \mapsto \sum_{k=-N}^{N} e^{iky} \text{ est le prolongement continu de } y \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}} \text{ à } \mathbb{R}}$$

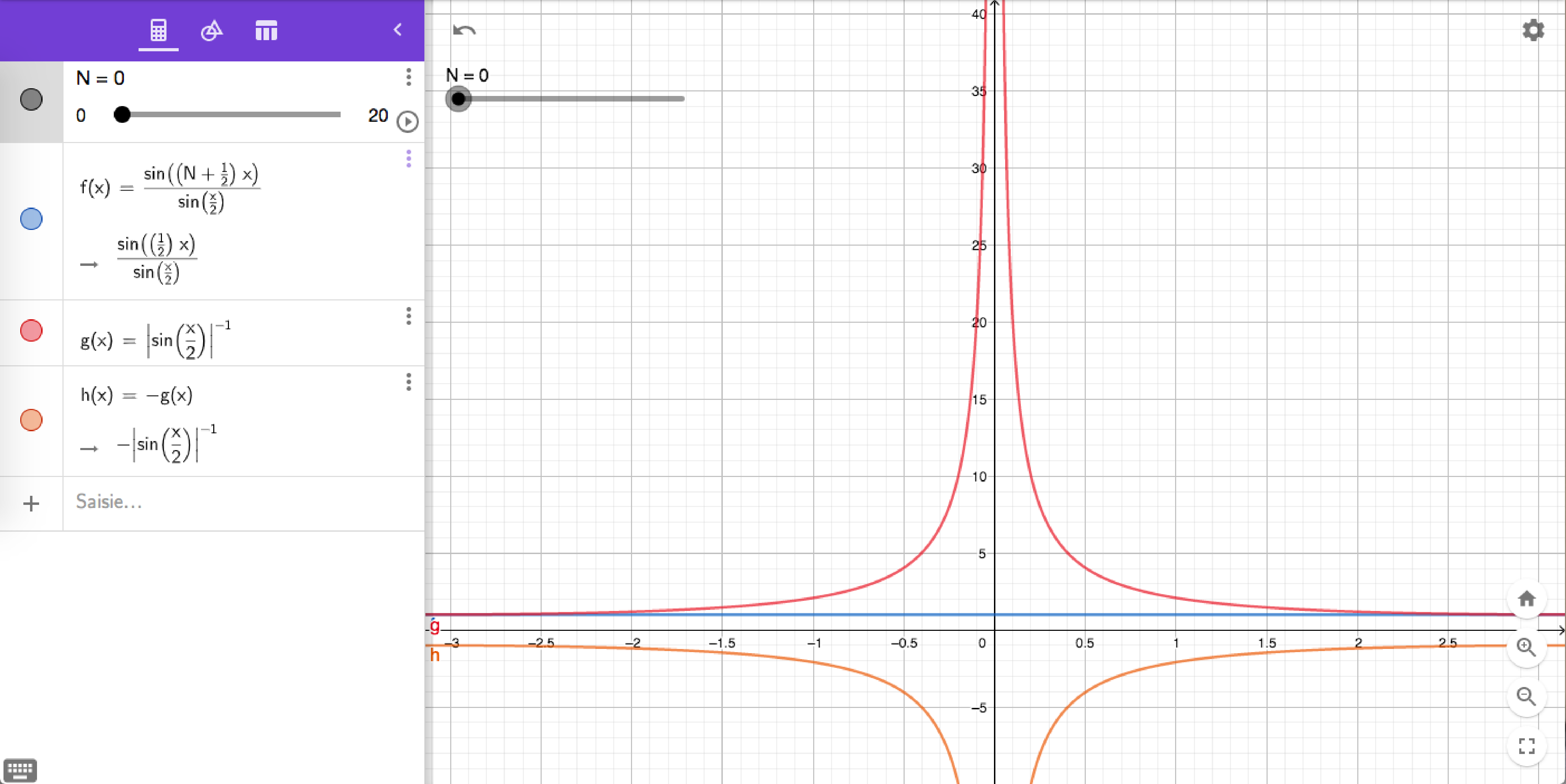
De plus, $\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(y+2\pi)} = \sum_{k=-N}^{N} e^{iky}\underbrace{e^{ik2\pi}}_{=1} = \sum_{k=-N}^{N} e^{iky}$ donc

$$\boxed{y \mapsto \sum_{k=-N}^{N} e^{iky} \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}.$$

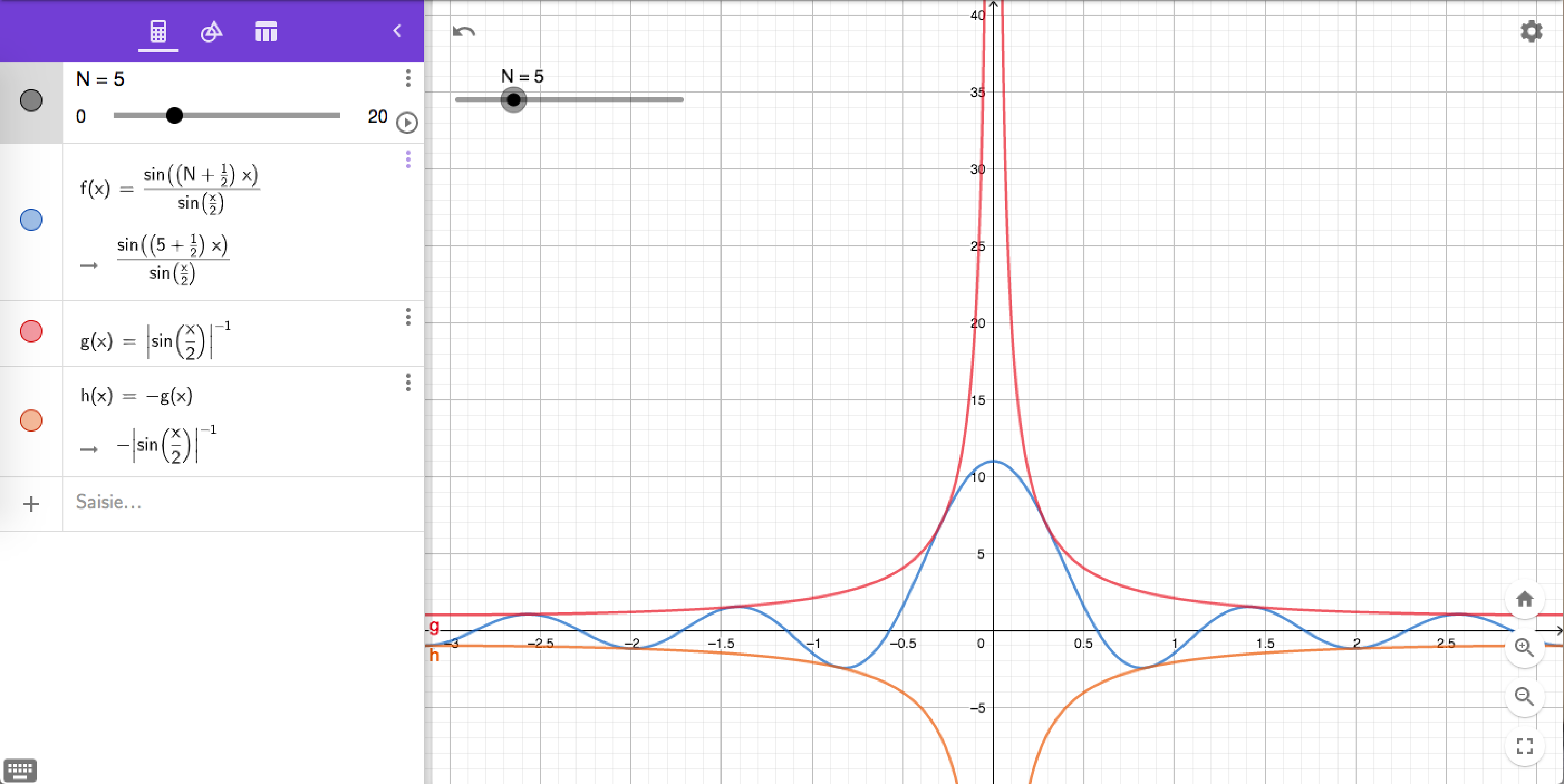
Pour conclure : $\int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{iky}\,dy = \sum_{k=-N}^{N} \int_0^{2\pi} e^{iky}\,dy$

Or $\int_0^{2\pi} e^{iky}\,dy = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=0 \\ \left[\frac{e^{iky}}{ik}\right]_0^{2\pi} & \text{si } k\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k\neq 0 \end{cases}$.

D'où : $\boxed{\int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{iky}\,dy = 2\pi}$.



N = 0
0
20
$f(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
$\rightarrow \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
$g(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|^{-1}$
$h(x) = -g(x)$
$\rightarrow -\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|^{-1}$
Saisie…
N = 0
g
h
40
35
30
25
20
15
10
5
−5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5


N = 5
0
20
$f(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
$\rightarrow \frac{\sin\left(\left(5 + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
$g(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|^{-1}$
$h(x) = -g(x)$
$\rightarrow -\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|^{-1}$
Saisie…
N = 5
g
h

$N = 10$

0 — 20

$f(x) = \dfrac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

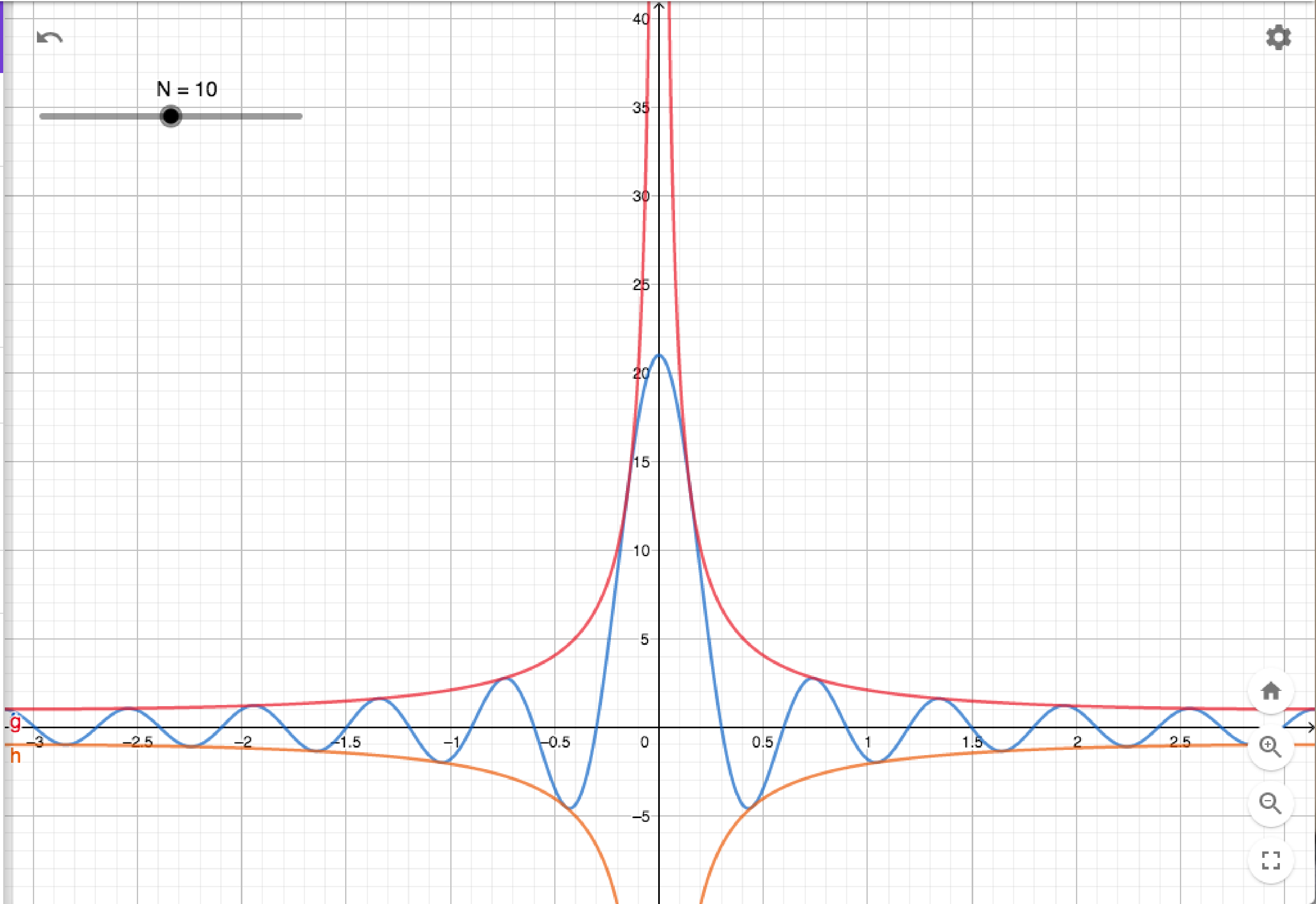
$\rightarrow \dfrac{\sin\left(\left(10 + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

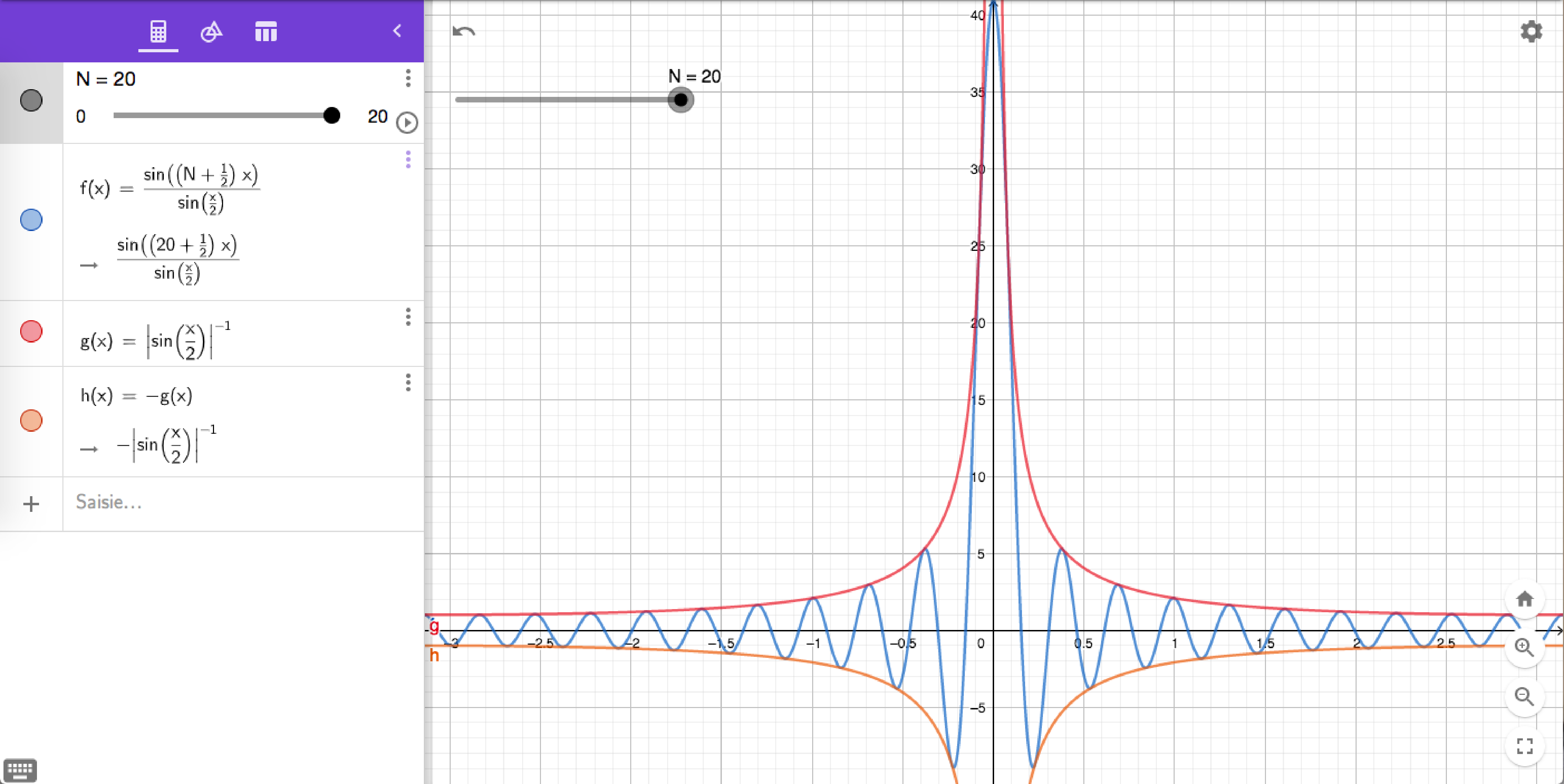
$g(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|^{-1}$

$h(x) = -g(x)$

$\rightarrow -\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|^{-1}$

Saisie…





N = 20
0
20
f(x) = sin((N + 1/2) x) / sin(x/2)
→ sin((20 + 1/2) x) / sin(x/2)
g(x) = |sin(x/2)|^−1
h(x) = −g(x)
→ −|sin(x/2)|^−1
Saisie...
N = 20
g
h