Binome II - Exercice 7.7

7 mars 2021

1) Expanding u_0 around the point x using Taylor's formula, write :

$$u_0(x+y) = u_0(x) + Du_0(x)y + \frac{1}{2}D^2u_0(x)(y,y) + o(\|y^2\|) \tag{7.20}$$

Expand the various terms using the coordinates (x, y) of x.

Corigée :

$u_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ donc elle est deux fois différentiable, par suite par la formule de Taylor-Young on a :

$$u_0(x+y) = u_0(x) + Du_0(x)y + \frac{1}{2}D^2u_0(x)(y,y) + o(\|y^2\|) \tag{7.20}$$

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} u_0(x_1+y_1, x_2+y_2) &= u_0(x_1,x_2) + \frac{\partial u_0}{\partial x}(x_1,x_2).y_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y}(x_1,x_2).y_2 \\ &+ \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_1,x_2).{y_1}^2 + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}(x_1,x_2).y_1y_2 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(x_1,x_2).{y_2}^2) + ({y_1}^2+{y_2}^2)\epsilon(y_1,y_2). \end{aligned}$$

Avec $\epsilon(y)$ tend vers 0 quand $\|y\|$ tend vers 0.

2) Apply M_h to both sides of this expansion and deduce relation (7.2).

On rappelle que la fonction u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée sur $\mathbb{R}^2$.

L'opérateur M_h est donnée par :

$$M_hu_0(x) = \frac{1}{\pi h^2}\int_{D(x,h)} u_0(y)dy = \frac{1}{\pi h^2}\int_{D(0,h)} u_0(x+y)dy \tag{7.1}$$

On a : $(\pi h^2) \times M_hu_0(x) = \int_{D(0,h)} u_0(x+y)dy$
Donc :

$$(\pi h^2)\times M_h u_0(x) = \int_{D(0,h)} u_0(x_1,x_2)dy + \frac{\partial u_0}{\partial x}(x_1,x_2).\int_{D(0,h)} y_1 dy + \frac{\partial u_0}{\partial y}(x_1,x_2).\int_{D(0,h)} y_2 dy$$
$$+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_1,x_2).\int_{D(0,h)}({y_1}^2)dy + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}(x_1,x_2).\int_{D(0,h)}(y_1y_2)dy + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}(x_1,x_2).\int_{D(0,h)}({y_2}^2)dy]$$
$$+\int_{D(0,h)}({y_1}^2+{y_2}^2)\epsilon(y_1,y_2)dy.$$

Pour $h>0$, on a $D(0,h)=\{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), \theta\in\mathbb{R}, 0\leq r\leq h\}$:

Alors pour toute fonction f continue sur $D(0,h)$ on a :

$$\int_{D(0,h)} f(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta$$

Donc on a :

—

$$\begin{aligned}\int_{D(0,h)} u_0(x)dy &= u_0(x)\int_{D(0,h)} dy\\ &= u_0(x)\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h rdrd\theta = u_0(x)\times\pi h^2.\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\int_{D(0,h)} y_1 dy &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h r\cos(\theta)rdrd\theta\\ &= 0.\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\int_{D(0,h)} y_2 dy &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h r\sin(\theta)rdrd\theta\\ &= 0.\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\int_{D(0,h)} y_1^2 dy &= \int_{D(0,h)}(r\cos(\theta))^2 rdrd\theta\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h \frac{1+\cos(2\theta)}{2}r^3drd\theta\\ &= \frac{h^2}{4}\times\pi h^2.\end{aligned}$$

—

$$\int_{D(0,h)} y_1 y_2 dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h r\cos(\theta) r\sin(\theta) r dr d\theta.$$
$$= 0.$$

—

$$\begin{aligned}\int_{D(0,h)} y_2^2 dy &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h (r\sin(\theta))^2 r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h \frac{1-\cos(2\theta)}{2} r^3 dr d\theta \\ &= \frac{h^2}{4}\times \pi h^2.\end{aligned}$$

— Soit $\epsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$, tel que $\|y\| < \alpha \Rightarrow \|\epsilon(y)\| < \epsilon$. donc pour un $h < \alpha$, on a $\forall y \in D(0,h), \|\epsilon(y)\| < \epsilon$. Par suite :

$$\begin{aligned}\int_{D(0,h)} \|y\|^2 \epsilon(y) dy &\leq (\int_{D(0,h)} h^2 \times \epsilon^2 dy \\ &\leq \pi h^2 \times h^2 \times \epsilon.\end{aligned}$$

par suite :

$$\int_{D(0,h)} ({y_1}^2 + {y_2}^2)\epsilon(y_1, y_2) dy = \pi h^2 \times h^2 \times \epsilon(x,h)$$

Donc :

$$\pi h^2 \times M_h u_0(x) = \pi h^2 \times [u_0(x) + \frac{h^2}{8}\Delta u_0(x) + h^2\epsilon(x,h)].$$

ce qui donne :

$$M_h u_0(x) = u_0(x) + \frac{h^2}{8}\Delta u_0(x) + h^2 \epsilon(x,h). \tag{7.2}$$

Avec $\epsilon(x,h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

3) Assume $u_0 \in \mathbb{F}$ and consider the solution $u(t,x)$ of the heat equation (7.3) Then, for fixed $t_0 > 0$ and x, apply M_h to the function $u^{t_0} : x \to u(t_0, x)$ and write equation (7.2) for u^{t_0}.

Using that $u(t,x)$ is a solution of the heat equation and its Taylor expansion between t_0 and $t_0 + h$, deduce that :

$$M_h u(t_0, x) = u(t_0 + h^2, x) + h^2 \epsilon(t_0, x, h) \tag{7.21}$$

corigée :
On a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{8}\Delta u(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{7.3}$$

on a :

$$M_h u^{t_0}(x) = u^{t_0}(x) + \frac{h^2}{8}\Delta u^{t_0}(x) + h^2 \epsilon_1(t_0, x, h).$$

Avec $\epsilon_1(t_0, x, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
Or un dévelopement de Taylor-Young donne :

$$u(t_0 + h^2, x) = u(t_0, x) + h^2.\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) + h^2 \epsilon_2(t_0, x, h)$$

Avec $\epsilon_2(t_0, x, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
Par l'équation (7.3) on a :

$$u(t_0 + h^2, x) = u(t_0, x) + \frac{h^2}{8}\Delta_x u(t_0, x) + h^2 \epsilon_2(t_0, x, h)$$

donc,

$$M_h u^{t_0}(x) = u(t_0 + h^2, x) - \tfrac{h^2}{8}\Delta_x u(t_0, x) + \tfrac{h^2}{8}\Delta u^{t_0}(x) + h^2(\epsilon_1(t_0, x, h) - \epsilon_2(t_0, x, h))$$

d'où :

$$M_h u(t_0, x) = u(t_0 + h^2, x) + h^2 \epsilon(t_0, x, h) \tag{7.21}$$

Avec $\epsilon(t_0, x, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.