4- Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts disjoints de bord C^1_{pm}.

Outils :

1 - $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$

en effet : ⊙ $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ est une partie fermée et $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$

donc $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} \subset \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$.

⊙ Réciproquement soit $x \in \overline{\Omega_1} \cup \Omega_2$ ($x \in \overline{\Omega_1}$ par exemple)

On a, $\exists (x_n) \subset \Omega_1^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ comme $(x_n)_n \in (\Omega_1 \cup \Omega_2)^{\mathbb{N}}$ et converge vers x, $x \in \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$. d'où $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \subset \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$

c/c : $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$.

2 - $\overline{\Omega_1} \cap \Omega_2 = \phi$

en effet : si $\exists x \in \overline{\Omega_1} \cap \Omega_2$.

Alors $\exists r > 0$ tq $\begin{cases} B(x, r) \subset \Omega_2 & (\Omega_2 = \text{ouvert}) \\ B(x,r) \cap \Omega_1 \neq \phi & (x \in \overline{\Omega_1}) \end{cases}$

donc $\exists y \in B(x,r)$, $y \in \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$

ce qui est absurde.

c/c : $\overline{\Omega_1} \cap \Omega_2 = \phi$ (resp $\overline{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \phi$)

$3-\ \partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} \setminus \overset{\circ}{\Omega_1 \cup \Omega_2}$

$= \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2$

$= (\overline{\Omega}_1 \cap \Omega_1^c \cap \Omega_2^c) \cup (\overline{\Omega}_2 \cap \Omega_2^c \cap \Omega_1^c)$

$= (\partial\Omega_1 \cap \Omega_2^c) \cup (\partial\Omega_2 \cap \Omega_1^c)$

On $\boxed{\partial\Omega_1 \cap \Omega_2^c \subset \partial\Omega_1}$.

et si $x \in \partial\Omega_1$ Alors $x \in \overline{\Omega}_1$ donc $x \notin \Omega_2$

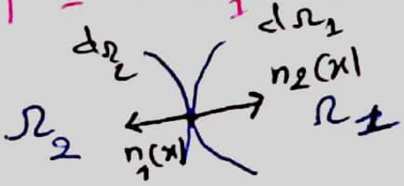
Car $\overline{\Omega}_1 \cap \Omega_2 = \phi$. donc $\boxed{\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_1 \cap \Omega_2^c}$

Donc $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2^c$ et $\partial\Omega_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1^c$.

Par suite : $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$

* Pour $x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ on a :

$n_2(x) = -n_1(x)$



* Comme $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$ on a :

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} div(v)\,\varphi = \int_{\Omega_1} div(v)\,\varphi + \int_{\Omega_2} div(v)\,\varphi$$

$$* \int_{\partial(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)} \varphi V \cdot n = \int_{\partial\Omega_1 \sqcup \partial\Omega_2} \varphi V \cdot n$$

$$= \int_{\partial\Omega_1} \varphi V \cdot n + \int_{\partial\Omega_2} \varphi V \cdot n + \int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} \varphi V \cdot n_1 + \int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} \varphi V \cdot n_2$$

et comme $n_1 = -n_2$ sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$

on obtient :

$$\int_{\partial(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)} \varphi V \cdot n = \int_{\partial\Omega_1} \varphi V \cdot n + \int_{\partial\Omega_2} \varphi V \cdot n$$

et puisque $\Omega_1 \sqcup \Omega_2$ est un ouvert C^1_{pm}, la formul (5.3) s'écrit :

$$\int_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2} \nabla\varphi \cdot V = \int_{\partial(\Omega_1 \sqcup \Omega_2)} \varphi V \cdot n - \int_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2} \operatorname{div}(V)\, \varphi$$

$$= \int_{\partial\Omega_1} \varphi V \cdot n - \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(V)\, \varphi + \int_{\partial\Omega_2} \varphi V \cdot n - \int_{\partial\Omega_2} \operatorname{div}(V)\, \varphi$$

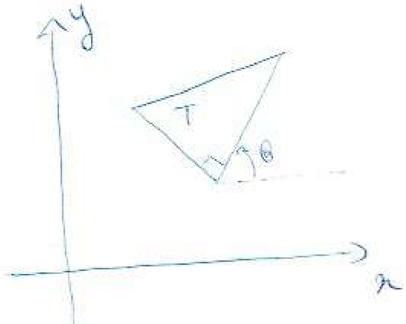
$$= \int_{\Omega_1} \nabla\varphi \cdot V + \int_{\Omega_2} \nabla\varphi \cdot V$$

c/c

$$\int_{\Omega_1 \sqcup \Omega_2} \nabla\varphi \cdot V = \int_{\Omega_1} \nabla\varphi \cdot V + \int_{\Omega_2} \nabla\varphi \cdot V$$

Question 5 : Il suffit de montrer la formule pour un triangle rectangle quelconque, par additivité (on coupe un triangle quelconque en deux triangles rectangles)

Soit T un triangle rectangle.
Notons R_θ la rotation d'angle θ



RAPPELS:

- $R_\theta R_{-\theta} = I$ $\quad$ - $\det R_\theta = 1$
- R_θ est une isométrie

Notons $T' := R_\theta^{-1}(T)$. Alors T' a ses côtés parallèles à x et y, $\partial T' = R_\theta^{-1}(\partial T)$ et la normale à $\partial T'$ est $n'(x) = R_\theta^{-1} n(R_\theta(x))$

Enfin posons $\varphi_\theta(x) = \varphi(R_\theta x)$ $\quad v_\theta(x) = R_\theta^{-1} v(R_\theta x)$

Alors d'après 3) :

$$\int_{T'} \nabla\varphi_\theta \cdot v_\theta = \int_{\partial T'} \varphi_\theta v_\theta \cdot n' - \int_{T'} \operatorname{div} v_\theta \, \varphi_\theta$$

Admettons pour le moment:

$$(*) \ \nabla\varphi_\theta(x) = {}^tR_\theta \nabla\varphi(R_\theta x) \quad (**) \ \operatorname{div} v_\theta(x) = \operatorname{div} v(R_\theta x)$$

On a $\rightarrow (\nabla\varphi_\theta \cdot v_\theta)(x) = {}^tR_\theta \nabla\varphi(R_\theta x) \cdot R_\theta^{-1} v(R_\theta x)$

$$= \nabla\varphi(R_\theta x) \cdot R_\theta R_\theta^{-1} v(R_\theta x)$$
$$= \nabla\varphi(R_\theta x) \cdot v(R_\theta x)$$

$\rightarrow (\varphi_\theta v_\theta \cdot n')(x) = \varphi(R_\theta x) \, R_\theta^{-1} v(R_\theta x) \cdot R_\theta^{-1} n(R_\theta x)$

$= \varphi(R_\theta x) v(R_\theta x) \cdot n(R_\theta x)$ car R_θ^{-1} isométrie

$\rightarrow (\operatorname{div} v_\theta \varphi_\theta)(x) = \operatorname{div} v(R_\theta x) \varphi(R_\theta x)$.

On pose donc le changement de variable $y = R_\theta x$ de jacobien R_θ et $\det R_\theta = 1$ d'où :

$$\int_T \nabla\varphi \cdot v = \int_{\partial T} \varphi v \cdot n - \int_T \operatorname{div} v \, \varphi .$$

D'où le résultat pour tout triangle.

<u>Preuve de (*) et (**)</u> :

(*) : $d\varphi_\theta(a)(h) = d\varphi(R_\theta a)(R_\theta h)$

$\Rightarrow \nabla\varphi_\theta(a) \cdot h = \nabla\varphi(R_\theta a) \cdot R_\theta h = {}^t R_\theta \nabla\varphi(R_\theta a) \cdot h .$

D'où $\nabla\varphi_\theta(a) = {}^t R_\theta \nabla\varphi(R_\theta a)$.

(**) : point clé : $\operatorname{div} v_\theta = \operatorname{tr} J_{v_\theta}$.

Par composition : $J_{v_\theta}(x) = J_{R_\theta^{-1} \circ v}(R_\theta x) J_{R_\theta}(x)$

$= J_{R_\theta^{-1} \circ v}(R_\theta x) R_\theta$

et $J_{R_\theta^{-1} \circ v}(y) = J_{R_\theta^{-1}}(v(y)) . J_v(y)$

$= R_\theta^{-1} J_v(y)$

<u>D'où</u> : $J_{v_\theta}(x) = R_\theta^{-1} J_v(R_\theta x) R_\theta$

donc $J_{v_\theta}(x)$ et $J_v(R_\theta x)$ sont semblables et ont donc même trace d'où

$\operatorname{div} v_\theta(x) = \operatorname{div} v(R_\theta x)$.

6 - un polygone est une union finie de Triangles $(T_i)_{1 \le i \le n}$ d'intérieurs disjoints.

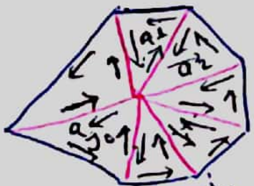
$$\int_P \nabla\varphi \cdot V = \int_{\partial P} \nabla\varphi \cdot V + \int_{\mathring{P}} \nabla\varphi \cdot V$$

Comme φ est de C^2 et V est de C^1 on a : $\nabla\varphi \cdot V \in C^1$ et par suite, comme ∂P est une courbe fermée on a : $\int_{\partial P} \nabla\varphi \cdot V = 0$.

(*) $\mathring{P} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathring{T}_i \right) \cup \{ a_i \mid 1 \le i \le j_0 \}$

avec a_i, $i = 1, \dots, j_0$ sont les côtés "intérieurs" des triangles

ie les cotés qui ne se trouvent pas sur ∂P.



(*) $$\int_{P^\circ} \nabla\varphi \cdot V = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathring{T}_i} \nabla\varphi \cdot V + \sum_{i=1}^{j_0} \Bigg(\cancel{\int_{a_i \cap \partial T_i} \nabla\varphi \cdot V} + \cancel{\int_{a_i \cap \partial T_{i+1}} \nabla\varphi \cdot V} \Bigg)$$

$a_i \cap \partial T_i = a_i$; $a_i \cap \partial T_{i+1} =$ "$-a_i$"

$$\int_{P^\circ} \nabla\varphi \cdot V = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathring{T}_i} \nabla\varphi \cdot V$$

triangles orientés

Donc :

$$\int_{\mathcal{P}^\circ} \nabla\varphi\cdot V = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i^\circ} \nabla\varphi\cdot V$$

$$= \int_{\bigcup_{i=1}^{n} T_i^\circ} \nabla\varphi\cdot V \quad , \text{ D'aprs } 4$$

$$= \int_{\partial\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i^\circ\right)} \varphi V\cdot n - \int_{\bigcup_{i=1}^{n} T_i^\circ} \mathrm{div}(V)\,\varphi$$

$$= \Big[\int_{\partial P} \varphi V\cdot n + \underbrace{\int \varphi V\cdot n}_{\substack{\text{integration}\\ \text{des deux sen oposés}\\ \text{sur les } a_i \\ = 0}} \Big] - \Big[\int_{\mathcal{P}^\circ} \mathrm{div}(V)\,\varphi$$ [redacted] $$\underbrace{\int \mathrm{div}(V)\,\varphi}_{\substack{\text{integration}\\ \text{des deux sens}\\ \text{oposés}\\ \text{sur les } a_i \\ = 0}} \Big]$$

$$= \int_{\partial P} \varphi V\cdot n - \int_{\mathcal{P}^\circ} \mathrm{div}(V)\,\varphi$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla\varphi\cdot V = \int_{\partial P} \varphi\cdot V\cdot n - \int_{\mathcal{P}^\circ} \mathrm{div}(V)\,\varphi$$