Exercice 6.2 : Quelques vérifications

28 février 2021

On fixe $N, M \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{R} = \{0, ..., M-1\} \times \{0, ..., N-1\}$. $t \in \mathbb{R}_+$ est un paramètre fixé. On note $\delta(s) = s\mathbf{1}_{]t,+\infty[}(|s|)$, $f = \delta \circ \log$ et I la fonction d'intensité définie sur $\mathcal{R}$.

La fonction I est prolongé sur le réseau $\mathbb{Z}^2$ par symétrisation et périodisation. Précisément, on prolonge I sur $\mathcal{R}_{sym} = \{0, ..., 2M-1\} \times \{0, ..., 2N-1\}$ (SYMETRISATION) par :

$$\forall j \in \{0, ..., N-1\}, \forall i \in \{1, ..., M\}, I(M+i-1, j) = I(M-i, j)$$

$$\forall i \in \{0, ..., M-1\}, \forall j \in \{1, ..., N\}, I(i, M+j-1) = I(i, M-j)$$

Puis on prolonge I sur $\mathbb{Z}^2$ (PERIODISATION) par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2, I(i,j) = I(i_0, j_0) \text{ où } (i_0, j_0) \in \mathcal{R}_{sym} \text{ et } i \equiv i_0[2M], j \equiv j_0[2N]$$

Enfin, on pose :

$$F(i,j) = f(\frac{I(i,j)}{I(i-1,j)}) + f(\frac{I(i,j)}{I(i+1,j)}) + f(\frac{I(i,j)}{I(i,j-1)}) + f(\frac{I(i,j)}{I(i,j+1)})$$

Question 1 : Vérifier par symétrie que $\sum_{y \in \mathcal{R}} F(y) = 0$.

Tout repose sur la propriété suivante, notée $(\mathcal{P})$, sur la fonction f :

$$(\mathcal{P}) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(\frac{1}{x}) = -f(x)$$

En effet :

$$f(\frac{1}{x}) = \delta(\log(\frac{1}{x})) = \delta(-\log(x)) = -\log(x)\mathbf{1}_{]t,+\infty[}(|-\log(x)|) = -\log(x)\mathbf{1}_{]t,+\infty[}(|\log(x)|) = -f(x)$$

Désormais, pour ce qui est du calcul de la somme, on sépare les termes variants en i ou en j et on utilise la propriété, plus précisément, d'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} f(\frac{I(i,j)}{I(i-1,j)}) + f(\frac{I(i,j)}{I(i+1,j)}) &= \sum_{i,j} f(\frac{I(i,j)}{I(i+1,j)}) - f(\frac{I(i-1,j)}{I(i,j)}) \text{ par } (\mathcal{P}). \\
&= \sum_{j} f(\frac{I(M-1,j)}{I(M,j)}) - f(\frac{I(-1,j)}{I(0,j)}) \text{ télescopage en i.} \\
&= \sum_{j} f(1) - f(1) \text{ par symétrisation-périodisation.} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{0.0.1}$$

Pour la somme sur les termes variant en j, le calcul est le même, mais fait apparaître un télescopage en j, et on obtient :

$$\sum_{i,j} f(\frac{I(i,j)}{I(i,j-1)}) + f(\frac{I(i,j)}{I(i,j+1)}) = 0$$

En conclusion, on a démontré le résultat désiré :

$$\sum_{i,j} F(i,j) = 0$$

Question 2 : Démontrer que la solution donnée dans le théorème 6.3 vérifie bien que $\frac{\partial_d L}{\partial n} = 0$.

Pour ce faire, on va résoudre l'équation en Fourier sur $\mathcal{R}_{sym}$.

$$\hat{L}(k,l) = \frac{1}{4NM} \sum_{i=0}^{2M-1} \sum_{j=0}^{2N-1} L(i,j) w_{2M}^{ik} w_{2N}^{jl}$$

Or :

$$-\underline{\Delta} L(i,j) = F(i,j)$$

Donc :

$$L(i+1,j) + L(i-1,j) + L(i,j-1) + L(i,j+1) - 4L(i,j) = F(i,j)$$

D'où, en Fourier, par propriétés de shift :

$$w_{2M}^{k} \hat{L}(k,l) + w_{2M}^{-k} \hat{L}(k,l) + w_{2N}^{l} \hat{L}(k,l) + w_{2N}^{-l} \hat{L}(k,l) - 4\hat{L}(k,l) = -\hat{F}(k,l)$$

Et ainsi :

$$\hat{L}(k,l) = \frac{\hat{F}(k,l)}{4 - 2\cos(\frac{\pi k}{M}) - 2\cos(\frac{\pi l}{N})}$$

Rappelons qu'un échantillon réel a sa transformée de Fourier discrète réelle si et seulement si l'échantillon est symétrique. Ici, F est bien réel et symétrique donc $\hat{F}$ est réelle et donc $\hat{L}$ aussi, ainsi L est symétrique.

Désormais, en utilisant la périodicité et symétrie de L :

$$\frac{\partial_d L}{\partial n}(M-1,j) = L(M-1,j) - L(M,j) = 0$$

$$\frac{\partial_d L}{\partial n}(0,j) = L(0,j) - L(-1,j) = L(0,j) - L(2M-1,j) = 0$$

$$\frac{\partial_d L}{\partial n}(i,N-1) = L(i,N-1) - L(i,N) = 0$$

$$\frac{\partial_d L}{\partial n}(i,0) = L(i,0) - L(i,-1) = L(i,0) - L(i,2N-1) = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial_d L}{\partial n} = 0$$

Question 3 : Vérifier la consistance des formules trouvées aux questions précédentes avec la formule en (6.8).

On a :

$$\sum_{y\in\mathcal{R}} \underline{\Delta} L(y) = \sum_{y\in\mathcal{R}} -F(y) = 0 = \sum_{y\in\partial\mathcal{R}} \frac{\partial_d L}{\partial n}(y)$$

Ce qui prouve la consistance des formules trouvées avec la formule (6.8).