Escola Superior Náutica Infante Dom Henrique
Probabilidade e Estatística

Licenciatura em Engenharia de Máquinas Marítimas, Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores, Licenciatura em Engenharia Eletrotécnica Marítima

Ano letivo: 2024/2025, 2º semestre

1º Teste — Duração: 1h30m+15m

Nome: ______________________________

Número: ______________ **Licenciatura:** ______________________

(7.0 val.) **Exercício 1.** Um porto de uma cidade portuária tem duas zonas de segurança, Zona A e Zona B, com duas equipas independentes. Abaixo é apresentada uma tabela com os tempos médios de espera, em minutos, para cada uma das zonas, para um navio ter ou não autorização para atracar no porto.

Zona A	4.9	5.4	4.8	5.8	5.8	5.5	4.8	5.1	5.8	5.7
Zona B	5.8	3.5	4.1	4.5	5.1	5.8	2.0	8.4	5.8	8.6

(1.5 val.) (a) Determine a média, mediana e a moda das amostras dos tempos de espera de cada uma das zonas.

(2.5 val.) (b) Sabendo que para a amostra da Zona A, $(Q_1)_A = 4.875$, e para a amostra da Zona B, $(Q_1)_B \approx 3.950$, calcule o coeficiente de dispersão e a distância inter-quartis das amostras dos tempos de espera da Zona A e da Zona B.

(1.0 val.) (c) Tendo em conta os resultados obtidos nas alíneas anteriores indique, justificando, se alguma equipa é significativamente mais eficiente que a outra.

(2.0 val.) (d) Calcule o coeficiente de assimetria dos tempos de espera da Zona A e discuta o resultado.

(2.5 val.) **Exercício 2.** Uma empresa recebe um lote de 20 artigos. O lote é aceite ou rejeitado conforme o resultado de uma inspeção de 4 artigos escolhidos ao acaso, individualmente e sem reposição. A empresa decide rejeitar o lote se dos artigos extraídos existirem 2 artigos defeituosos.

De acordo com as regras da inspeção, qual a probabilidade do lote ser recusado se 10% dos artigos forem defeituosos?

(3.5 val.) **Exercício 3.** Viagens marítimas longas são especialmente propícias à infeção por norovírus, levando ao desenvolvimento de sintomas graves se os casos não forem detetados e tratados rapidamente.

Recentemente, uma empresa desenvolveu um novo teste de diagnóstico que deteta corretamente a infeção por norovírus em 99% dos casos quando aplicado a indivíduos infetados, mas apenas indica corretamente a não existência de infeção em 90% dos casos, quando aplicado a pacientes não infetados por norovírus.

Sabendo que 0.5% dos indivíduos num navio cruzeiro estão infetados e que o novo teste aplicado a um indivíduo, escolhido ao acaso da população, indicou que este está infetado, calcule a probabilidade desse indivíduo estar efetivamente infetado.

(4.0 val.) **Exercício 4.** Uma empresa de metalomecânica recentemente adquiriu outra máquina para a sua fábrica de produção de peças, tal que a produção atual provém de três máquinas, M_1, M_2 e M_3. As máquinas M_1 e M_2 são responsáveis, em partes iguais, por 80% da produção total.
Sabe-se que 5% das peças produzidas têm defeitos e que 55% das peças defeituosas são produzidas por M_1 e 35% das peças defeituosas são produzidas por M_2.

(1.5 val.) (a) Calcule a probabilidade duma peça extraída ao acaso da produção de M_1 ser defeituosa.

(2.5 val.) (b) Qual a probabilidade duma peça extraída ao acaso ter sido produzida pela nova máquina, M_3, e não ser defeituosa?

(3.0 val.) **Exercício 5.** Considere uma experiência aleatória com espaço de resultados $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, com $\omega_i \neq \omega_j$ para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, tal que

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{3}{8}, \quad P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{8}, \quad P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}.$$

Mostre que os acontecimentos $\mathcal{A} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{B} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$ e $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$ não são completamente independentes.

Proposta de resolução

Exercício 1.

De modo a calcular as várias quantidades, é útil ordenar os valores apresentados por ordem crescente:

Zona A	4.8	4.8	4.9	5.1	5.4	5.5	5.7	5.8	5.8	5.8
Zona B	2.0	3.5	4.1	4.5	5.1	5.8	5.8	5.8	8.4	8.6

a) Utilizando as definições, obtemos

	$\bar{x}$	mediana	moda
Zona A	5.36	5.45	5.8
Zona B	5.36	5.45	5.8

b) De modo a calcular o coeficiente de dispersão temos primeiro que calcular o desvio-padrão de cada uma das amostras:

$$s_A = \sqrt{\frac{(4.8-5.36)^2 \times 2 + (4.9-5.36)^2 + (5.1-5.36)^2 + ... + (5.8-5.36)^2 \times 3}{10-1}} \approx 0.425\,,$$

$$s_B = \sqrt{\frac{(2-5.36)^2 + (3.5-5.36)^2 + (4.1-5.36)^2 + ... + (8.6-5.36)^2}{10-1}} \approx 2.040\,.$$

Por conseguinte, os coeficientes de dispersão dos tempos de espera para cada uma das zonas é dado por

$$(c.v)_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{0.425}{5.36} = 0.079\,,$$
$$(c.v)_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{2.040}{5.36} = 0.381\,.$$

Para calcular a distância inter-quartis temos que determinar o quartil Q_3 de cada uma das amostras. Como $p_n = 0.75 \times (10+1) = 8.25$, obtemos

$$(Q_3)_A = (9-8.25) \times 5.8 + (8.25-8) \times 5.8 = 5.8\,,$$
$$(Q_3)_B = (9-8.25) \times 5.8 + (8.25-8) \times 8.4 = 6.45\,.$$

Assim,

$$(IQR)_A = 5.8 - 4.875 = 0.925\,,$$
$$(IQR)_B = 6.45 - 3.950 = 2.5\,.$$

c) Encontrámos que várias medidas de localização central são idênticas para as amostras dos tempos de espera de cada zona. Porém, os coeficientes de dispersão de cada amostra diferem por um fator de 5, e os valores dos quartis Q_1 e Q_3 implicam distâncias inter-quartis significativamente diferentes.

Apesar das medidas de localização relativa e de dispersão serem diferentes entre amostras, os valores não indicam que existe um desvio significativo da eficiência entre as equipas. Os valores das distâncias inter-quartis são significativamente diferentes, no entanto a mediana é idêntica e os valores dos quartis mostra uma grande dispersão dos valores dos tempos de espera. Assim, é expectável que as diferenças encontradas representem variações introduzidas por dias atípicos e não uma consistente falta de eficiência de uma equipa em relação a outra. De modo a poder tirar conclusões sobre a baixa eficiência relativa de uma equipa, seria necessário avaliar as equipas durante um período de tempo mais longo.

d) Para os dados da Zona A, o momento central de ordem 3 é dado por

$$(m_3)_A = \frac{(4.8-5.36)^3 \times 2 + (4.9-5.36)^3 + (5.1-5.36)^3 + ... + (5.8-5.36)^3 \times 3}{10} \approx -0.017\,.$$

Assim, o coeficiente de assimetria é dado por

$$(b)_A = \frac{(m_3)_A}{s^3} \approx -0.220\,.$$

Este resultado permite concluir que existe um ligeiro enviesamento à esquerda, ou seja, existe um ligeiro deslocamento dos tempos de espera da Zona A para a direita do valor médio.

Exercício 2.

Assumamos que todas as peças podem ser identificadas, tal que cada configuração final possível da inspeção é distinta e o espaço de resultados, Ω, é a união de acontecimentos simples equiprováveis. Assim, podemos utilizar a noção de probabilidade de Laplace.

Considerando a ordem de tiragem, o número de configurações possíveis é $\#\Omega = A^4_{20}$.

Agora, o lote tem 2 artigos defeituosos, assim será rejeitado se forem detetados os dois artigos defeituosos na inspeção. Seja R o acontecimento que representa a rejeição do lote. O número de configurações de quatro artigos em que os dois artigos defeituosos estão presentes é

$$\#R = \left(A^1_2 \times A^1_1 \times A^2_{18}\right) \frac{4!}{2! \times 2!}\,.$$

O termo $\left(A^1_2 \times A^1_1 \times A^2_{18}\right)$ representa o número de configurações em que dois artigos defeituosos são encontrados na 1ª e na 2ª tiragem; o termo $\frac{4!}{2!\times 2!}$ representa o número de permutações de 4 elementos em que 2 pares são idênticos. A probabilidade requerida é

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{\#R}{\#\Omega} \\ &= \left(A^1_2 \times A^1_1 \times A^2_{18}\right) \frac{4!}{2! \times 2! \times A^4_{20}} \\ &= \frac{2 \times 1 \times 18 \times 17}{20 \times 19 \times 18 \times 17} \times \frac{4 \times 3}{2} \\ &= \frac{3}{95} \approx 0.0316\,. \end{aligned}$$

Em alternativa, podíamos fazer a contagem não considerando a ordem de tiragem. Nesse caso

$$\begin{aligned} \#\Omega &= C^{20}_4\,, \\ \#R &= C^2_2 \times C^{18}_2\,, \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{\#R}{\#\Omega} \\ &= \frac{C^2_2 \times C^{18}_2}{C^{20}_4} \\ &= \frac{18 \times 17 \times 4!}{2 \times (20 \times 19 \times 18 \times 17)} = \frac{3}{95}\,. \end{aligned}$$

Concluímos então que a probabilidade de um lote com dois artigos defeituosos ser recusado é, aproximadamente, 3.16%.

Exercício 3.

Seja I o acontecimento de um indivíduo estar infetado e P o acontecimento do teste ser positivo. Como é óbvio um indivíduo ou está infetado ou não está, logo $P_\Omega = \left\{I, \bar{I}\right\}$ representa uma partição da população do navio.

É indicado no enunciado que $P\left(\mathrm{P}|I\right) = 0.99$ e $P\left(\mathrm{P}|\bar{I}\right) = 0.1$. A probabilidade requerida é $P\left(I|\mathrm{P}\right)$. Utilizando o Teorema de Bayes e a Lei da probabilidade total temos

$$\begin{aligned} P\left(I|\mathrm{P}\right) &= P\left(\mathrm{P}|I\right) \frac{P\left(I\right)}{P\left(\mathrm{P}|I\right) P\left(I\right) + P\left(\mathrm{P}|\bar{I}\right) P\left(\bar{I}\right)} \\ &= 0.99 \times \frac{0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.1\left(1 - 0.005\right)} \\ &\approx 0.0474\,. \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de um indivíduo testado estar infetado, tendo o teste sido positivo é, aproximadamente, 4,74%.

Exercício 4.

Agreguemos a informação do enunciado numa tabela:

Acontecimento	Probabilidade
M_1: Selecionar uma peça produzida pela máquina 1	$P\left(M_1\right) = 0.4$
M_2: Selecionar uma peça produzida pela máquina 2	$P\left(M_2\right) = 0.4$
M_3: Selecionar uma peça produzida pela máquina 3	$P\left(M_3\right) = 0.2$
D : Selecionar uma peça defeituosa	$P\left(D\right) = 0.05$
$M_1\|D$: Selecionar uma peça produzida pela máquina 1 sabendo que é defeituosa	$P\left(M_1\|D\right) = 0.55$
$M_1\|D$: Selecionar uma peça produzida pela máquina 2 sabendo que é defeituosa	$P\left(M_2\|D\right) = 0.35$

a) A probabilidade requerida é $P\left(D|M_1\right)$. Como uma peça é defeituosa ou não é defeituosa, $P_\Omega = \left\{D, \bar{D}\right\}$ representa uma partição da população de peças produzidas pela fábrica. Utilizando o Teorema de Bayes temos

$$\begin{aligned} P\left(D|M_1\right) &= P\left(M_1|D\right) \frac{P\left(D\right)}{P\left(M_1\right)} \\ &= 0.55 \times \frac{0.05}{0.4} \\ &\approx 0.07\,. \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de uma peça extraída ao acaso da produção de M_1 ser defeituosa é, aproximadamente, 7%.

b) A probabilidade requerida é $P\left(M_3 \cap \bar{D}\right)$. Como, $M_3 \cap \bar{D} = M_3 \backslash D$, temos

$$P\left(M_3 \cap \bar{D}\right) = P\left(M_3 \backslash D\right) = P\left(M_3\right) - P\left(M_3 \cap D\right)\,.$$

Pela definição de probabilidade condicionada

$$P\left(M_3 \cap D\right) = P\left(M_3|D\right) P\left(D\right)\,.$$

Agora, $M_3 = \overline{M_1 \cup M_2}$ e $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, assim

$$\begin{aligned} P\left(M_3|D\right) &= P\left(\overline{M_1 \cup M_2}|D\right) \\ &= 1 - P\left(M_1 \cup M_2|D\right) \\ &= 1 - P\left(M_1|D\right) - P\left(M_2|D\right) \\ &= 1 - 0.55 - 0.35 \\ &= 0.1\,. \end{aligned}$$

Juntando os resultados intermédios, obtemos

$$\begin{aligned} P\left(M_3 \cap \bar{D}\right) &= P\left(M_3\right) - P\left(M_3 | D\right) P\left(D\right) \\ &= 0.2 - 0.1 \times 0.05 \\ &= 0.195\,. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade duma peça extraída ao acaso ter sido produzida pela máquina M_3 e não ser defeituosa é 19,5%.

Exercício 5.

Avaliemos se os acontecimentos são independentes dois a dois. Como $\omega_i \neq \omega_j$ para $i \neq j$, $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$, para $i \neq j$. Assim, em particular,

$$\begin{aligned} P\left(\mathcal{A}\right) &= P\left(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\}\right) \\ &= P\left(\{\omega_1\}\right) + P\left(\{\omega_2\}\right) + P\left(\{\omega_3\}\right) \\ &= \frac{3}{4}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\mathcal{B}\right) &= P\left(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_4\}\right) \\ &= P\left(\{\omega_1\}\right) + P\left(\{\omega_2\}\right) + P\left(\{\omega_4\}\right) \\ &= \frac{3}{4}\,, \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} P\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\right) &= P\left(\{\omega_1, \omega_2\}\right) \\ &= P\left(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}\right) \\ &= P\left(\{\omega_1\}\right) + P\left(\{\omega_2\}\right) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$P\left(\mathcal{A}\right) P\left(\mathcal{B}\right) = \frac{9}{16}\,,$$

ou seja, $P\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\right) \neq P\left(\mathcal{A}\right) P\left(\mathcal{B}\right)$ e concluímos que os acontecimentos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ não são independentes.

Como os acontecimentos não são independentes dois a dois, não são completamente independentes.